APLICACION DE LA TEORIA DE JUEGOS DE ESTRATEGIA AL PROBLEMA DE LA INTEGRACION DE RIESGOS *

ANGEL VEGAS PÉREZ **

SUMARIO: Introducción. I, Integración de riesgos. 1, Función de pago. 2, Propiedades de la función de pago. 3, Función de integración. II, Asignación del beneficio.

INTRODUCCION

La cuestión que tratamos de resolver consta de dos puntos fundamentales. El primero se refiere al estudio de la posibilidad de integrar varias unidades de riesgo en una sola, y el segundo, supuesta la ventaja de la integración, determinar la forma más aceptable, racional y técnicamente de imputar los beneficios que se siguen de la misma.

El punto primero será tratado de acuerdo con la teoría del riesgo colectivo y el segundo mediante la aplicación del esquema lógico de los juegos de estrategia.

I – INTEGRACION DE RIESGOS

I.1. *Función de pago.*

Sean ξ_t y η_t las variantes que representan el montante de siniestralidad o nivel de quebranto y el beneficio de la unidad de riesgo.

Evidentemente que entre ambos procesos estocásticos existe la siguiente relación:

$$\eta_t = K_t - \xi_t$$

en la que K_t representa el montante de ingresos.

* Trabajo presentado al II° Congreso Internacional de Economía de Córdoba del 25 al 31 de julio de 1966.

** Catedrático en la Facultad de Ciencias Económicas y Escuela de Estadística de la Universidad de Madrid; Miembro del Instituto de Investigaciones Estadísticas del Consejo Superior de Investigaciones Científicas de España; Miembro titular del Instituto Internacional de Estadística, La Haya; Autor de un Curso General de Metemática con aplicación a la Economía y de varios trabajos monográficos. (La Dirección).

Llamaremos *recargo de seguridad* a la diferencia

$$E\ (\xi_t) - K_t = m_t - K_t = \gamma$$

Por lo tanto el beneficio podrá expresarse por

$$\eta_t = m_t + \gamma - \xi_t$$

Si las funciones generatrices de ξ_t y η_t son $\varphi_\xi\ (\theta)$ y $\varphi_\eta\ (\theta)$ tendremos $\varphi_\eta (-\theta) = e^{(m_t + \gamma)\theta} \quad \varphi_\xi (-\theta) = e^{(m_t + \gamma)} \quad + \varphi_\xi (-\theta)$ en la $\varphi_\xi (-\theta)$ es la función cumulativa, $\varphi_\xi (\theta) = l\ \varphi_\xi (\theta)$ como consecuencia tenemos:

$$E\ [\eta_t] = \gamma$$

Lo que indica que el *recargo de seguridad* coincide con el valor medio del beneficio. Cabría pensar que una política de mayoración de beneficios podría apoyarse en el incremento del recargo. Esto no tiene justificación satisfactoria. En efecto, el incremento del recargo supone un encarecimiento, con lo que una reacción normal de la demanda llevaría consigo una reducción en el número de contrato y, por ello, el efecto definitivo podría ser una disminución del beneficio.

Por otra parte, pretender el incremento del beneficio a través del recargo equivale a considerar el valor medio de la variante η_t del beneficio como un índice de utilidad, cosa que contradice la teoría sostenida por MORGERSTEN y NEUMAN que exige que la utilidad no puede ser infinita.

La función de utilidad es, según sabemos,

$$U\ (F) = \int u\ (Y_t)\ d\,F\ (Y_t)$$

en la que $F\ (Y_t)$ es la función de distribución del beneficio y $u\ (Y_t)$ la función de utilidad del beneficio (por ejemplo, del dinero).

De todo esto se deduce que la utilidad se incrementará operando sobre la función de distribución ya que F_1 es más útil que F_2 si

$$U\ (F_1) > U\ (F_2)$$

Esta pudiera ser la justificación racional del reaseguro y de la política demográfica de la empresa aseguradora, entendiendo por tal la que conduce a una composición de la cartera que lleva consigo el llamado beneficio por submortalidad.

Dejando para otra ocasión estas cuestiones, vamos a continuar con la definición y propiedades de la función de pago.

Según la teoría del riesgo colectivo, podemos escribir:

$$(1) \qquad \Pr\ (\eta_t < -u) \leqslant e^{-\theta_0 U}$$

en la que u representa la reserva inicial de la unidad de riesgo que consideramos y θ_0 cumpla la condición

$$(m_t + \gamma)\ \theta_0 - \psi_\varepsilon(\theta_0) = 0$$

La (1) representa pues, la probabilidad de que la compañía o unidad de riesgo, se arruine en el futurc.

El montante de los pagos de los asegurados es $m_t + \gamma$ por lo que la relación

$$m_t + \gamma = \frac{\psi_\varepsilon(\theta_0)}{\theta_0}$$

va a recibir el nombre de *función de pago.*

Es evidente que el recargo γ será función de las dos variables fundamentales de la unidad de riesgo, de aquellas que pueden tomarse para definir su estructura, es decir, u reserva o nivel económico y α o nivel de la probabilidad de ruina. En efecto, si hacemos

$$\Pr\ (\eta_t < -u) \leqslant e^{-\theta_0 U} = \alpha < 1$$

tendremos $$\theta_0 = \frac{[\log \alpha]}{u}$$

y, por lo tanto, $$\frac{\psi_\varepsilon\left(\frac{[\log \alpha]}{u}\right)}{\frac{[\log \alpha]}{u}} - m_t$$

Esta selección justifica el por qué se denomina *recargo de seguridad* ya que su misión no es otra que garantizar la supervivencia de la compañía aseguradora teniendo en cuenta su situación económica.

I.2. *Propiedades de la función de pago.*

El desarrollo de la función cumulativa es, según se sabe,

$$\psi(\theta) = K_1\,\theta + K_2\,\frac{\theta^2}{2!} + K_3\,\frac{\theta^3}{3!} + \ldots.$$

en la que K_r es el momento cumulativo de orden r y, por lo tanto,

$$K_1 = m \qquad K_2 = \sigma^2$$

luego
$$\frac{\psi(\theta)}{\theta} = m + \sigma^2 \frac{\theta}{2!} + K_3 \frac{\theta^2}{3!} + \ldots.$$

De aquí deducimos que el recargo de seguridad puede expresarse de la forma

$$\gamma = \sigma^2 \frac{\theta_0}{2} + K_3 \frac{\theta_0^2}{3!} + \ldots = \sigma^2 \frac{[\log \alpha]}{2\,u} + K_3 \frac{[\log \alpha]^2}{3!\,u^2} + \ldots$$

Por definición $\frac{[\log \alpha]}{u}$ ha de ser normalmente muy pequeña ya que α es el nivel de probabilidad de ruina y u la reserva de origen que mide el nivel económico de la entidad aseguradora, como ya sabemos. Así si por ejemplo

$$\alpha = 0{,}05 \text{ y } u = 1.000.000 \text{ es } \theta_0 = 0{,}000003$$

La función de pago será, en términos generales, creciente respecto a θ.
En efecto, su derivada tendrá la forma

$$D\left(\frac{\psi(\theta)}{\theta}\right) = \frac{\sigma^2}{2} + K_3 \frac{\theta^2}{3!} + \varphi(\theta)$$

que se mantendrá positiva siempre que se verifique la relación

$$\theta < \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{|K_3|}$$

En virtud de las consideraciones anteriores, aún en el caso de que el proceso del montante de quebranto definiese una distribución fuertemente asimétrica (K_3 es el coeficiente de asimetría), θ_0 cumpliría normalmente la anterior relación.

De todo esto se deduce que la función de pago es decreciente respecto de la reserva u.

I.3. *Función de integración.*

Llamaremos función de integración a la función de pago que corresponde a un conjunto T de unidades de riesgo, consideradas integradas en una nueva unidad.

Suponemos que las reservas son $u_1, u_2 \ldots u_r$ y que el nivel de probabilidad de ruina α es el mismo para todas. Las variantes de quebranto son, evidentemente, estocásticamente independientes por lo que la función de integración será

$$V(T) = \frac{\psi_T(\theta_T)}{\theta_T}$$

en la que θ_T es igual a $\dfrac{|\log \alpha|}{\sum\limits_{rCT} u_r}$

Por la independencia estocástica

$$\varphi_T(\theta_T) = \sum_{rCT} \varphi_r(\theta_T)$$

luego $$V(T) = \frac{\sum \varphi_r(\theta_T)}{\theta_T}$$

Como consecuencia de esta definición aparecen las siguientes propiedades

i) $V(\phi) = 0$

ii) $V(T_1 U\, T_2 U \ldots U\, T_s) \leqslant \sum\limits_{r=1}^{S} V(T_r) \qquad T_i \cap T_j = \phi$

La primera propiedad es evidente ya que no tiene sentido hablar de pago distinto de 0 en el caso de que no exista ninguna unidad de riesgo.

La segunda se desprende del hecho de ser creciente con θ la función de pago. En efecto,

$$V(T_1 U\, T_2 U \ldots U\, T_r) = \frac{\sum\limits_{\overline{rCT_1 UT_2 U \ldots UT_s}} \psi_r(\theta_{T_1 UT_2 U \ldots UT_s})}{\theta_{T_1 UT_2 U \ldots UT_s}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{rCT_1} \psi_r(\theta_{T_1 UT_2 U \ldots UT_s})}{\theta_{T_1 UT_2 U \ldots UT_s}} + \ldots + \frac{\sum\limits_{rCT_s} \psi_r(\theta_{T_1 U \ldots UT_s})}{} \leqslant$$

$$< \frac{\sum\limits_{rCT_1} \psi_r(\theta_{T_1})}{\theta_{T_1}} + \ldots + \frac{\sum\limits_{rCT_s} \psi_r(\theta_{T_s})}{\theta_{T_s}} = V(T_1) + \ldots + V(T_s)$$

Luego $$V\left(\bigcup_{r=1}^{r=s} T_r\right) < \sum_{r=1}^{S} V(T_r)$$

Es claro que

$$\theta_{T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_s} < \theta_{T_i}$$

ya que

$$\theta_{T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_s} = \frac{|\log \alpha|}{\sum\limits_{r \subset T_1 \cup \ldots \cup T_s} U_r} < \frac{|\log \alpha|}{\sum\limits_{r \subset T_1} U_r}$$

De todo esto se deduce que la integración siempre supone una ventaja para el grupo en total. Se trata ahora de ver cómo debe repartirse esa ventaja.

II – ASIGNACION DEL BENEFICIO

Hemos visto que según las propiedades de la *función de integración* es siempre ventajosa la integración para el conjunto de unidades integradas, es decir

$$\sum_{i \subset T} V(i) > V(T)$$

En la que $V(i)$ es la función de pago de la entidad.

La cuestión que ahora se presenta es la distribución del beneficio

$$\Sigma V(i) - V(T) = B$$

Como hemos indicado anteriormente vamos a servirnos del esquema lógico de los juegos de estrategia en virtud de que la *función de integración* cumple las condiciones de función característica de juego y, por tanto, podremos considerar un juego η personal con dicha función característica y pretender una solución del problema con la ayuda de la teoría de esta clase de juegos.

Recordaremos que la función característica de juego $V(T)$ es el valor del juego correspondiente del conjunto T considerado como un solo jugador, es decir, integrando una "coalición". Sabido es que ésto indica que los jugadores "coaligados" pueden elegir de común acuerdo la estrategia que han de adoptar para que el resultado individual del juego, es decir, la imputación o asignación, sea la más ventajosa de acuerdo con el interés de la comunidad integrada en la "coalición".

El problema de la obtención de solución del juego consiste pues, en determinar los métodos posibles de imputar las ganancias individuales al terminar la partida. Podemos afirmar que la solución nos da un "esquema de finalidad" definido por relaciones de orden en las asignaciones, constituyendo una "preferencia eficaz".

La teoría de juegos de NEUMAN y MORGENSTEN, considera la solución del juego como el conjunto de asignaciones que entre sí no son "dominantes", es decir, que no es preferida la una a la otra y en cambio cualquier otra asignación que no pertenezca a la solución es preferida por cualquiera de las que pertenecen a ella. Se ha podido demostrar que en los juegos hasta de cuatro jugadores existe solución.

Los más recientes estudios sobre los juegos de estrategia a través de la teoría de "grafos" han evidenciado que un juego finito n personal es un grafo "progresivamente finito" el cual posee siempre "núcleo" o sea un conjunto de puntos que entre sí no son adyacentes, es decir que no son correspondientes en la aplicación que supone el grafo y por el contrario cualquier punto exterior siempre tiene por correspondiente uno interior al núcleo. De acuerdo con la definición de solución de juego se ve claramente que ésta coincide con la del núcleo del correspondiente grafo. Esto nos permite referirnos consistentemente a la teoría de juegos para obtener consecuencias lógicas.

Las propiedades fundamentales de la función característica de juego son las siguientes:

i) $V(\phi) = 0$

ii) $V(\cup T_i) \gtrless \Sigma V(T_i) \qquad \underset{i \neq j}{T_i \cap T_j} = 0$

Se demuestra que una función de conjunto que cumple esas condiciones define un juego.

En el caso en que la suma de los pagos a realizar por los jugadores sea distinto de 0 tendremos

$$V(T_n) \neq 0$$

en la que T_n representa el conjunto total de jugadores. Evidentemente en el caso de juegos de "suma 0", tendremos

$$V(T_n) = 0$$

Las imputaciones o asignaciones a cada uno de los jugadores, han de cumplir evidentemente las siguientes condiciones

$$Xi \geqslant V(i)$$
$$\sum_{i}^{n} Xi = V(T_n)$$

ya que es claro que lo que corresponda al jugador i como consecuencia de la coalición, no puede ser inferior a lo que le correspondiera jugando por su cuenta exclusivamente.

La asignación correspondiente al jugador i estará, por lo tanto, en el intervalo

$$V(T_n) - \sum_{r \neq i} V(r) \geqslant X_i \geqslant V(i)$$

La determinación de un valor concreto para X_i exige consideraciones de carácter marginal o complementario, ya que como hemos dicho la solución del juego es un "esquema de finalidad" que recoge el conjunto de formas de distribuir las consecuencias del juego, la designación de una forma concreta de asignaciones trasciende de la finalidad de la teoría de juegos.

Nosotros pretendemos a continuación una solución concreta a nuestro problema.

La propiedad fundamental de la *función de integración* es según sabemos, la siguiente,

$$V(U\ Ti) \leqslant \Sigma\ V(Ti)$$

$$T_i \cap T_j = 0$$

ya que

$$V(U\ Ti) = \frac{\sum_{UTi} \psi_r\ (\theta_{UTi})}{\theta_{UTi}}$$

$$V(Ti) = \frac{\Sigma\ \psi_r\ (\theta_{Ti})}{\theta_{Ti}}$$

en los que, como sabemos,

$$\theta_{UTi} = \frac{|\log \alpha|}{\Sigma\ UTi}$$

$$\theta_{Ti} = \frac{|\log \alpha|}{U_{Ti}}$$

Siendo U_{Ti} la suma de las reservas de las Ti unidades integradas y α el nivel de probabilidad de ruina.

Por otra parte es evidente que

$$V(\phi) = 0$$

Conviene reparar en que la *función de integración* se refiere a pagos y en cambio, la función característica de juego es, según hemos recordado, la que corresponde a la ganancia obtenida por el grupo T. Por ello el sentido de la desigualdad en la relación fundamental es el contrario.

Si llamamos $P_1, P_2, \ldots P_n$ a las asignaciones que correspondan a las entidades integradas de acuerdo con lo dicho anteriormente, tendremos

$$\Sigma\ P_i = V(T_n) = \frac{\sum_{r=1}^{n} \psi_r\ (\theta_{T_n})}{\theta_{T_n}}$$

y, por otra parte

$$P_i \leqslant \frac{\psi_i\ (\theta_i)}{\theta_i}$$

luego

$$\frac{\sum_1^n \psi_r\ (\theta_{T_n})}{\theta_{T_n}} - \sum_{r \neq i} \frac{\psi_r\ (\theta_r)}{\theta_r} \leqslant P_i \leqslant \frac{\psi_i\ (\theta_i)}{\theta_i}$$

Para la obtención de los valores concretos de P_i procederemos de la siguiente forma.

Supongamos una ordenación de las n unidades de riesgo $i_1; i_2 \ldots i_n$ que responde a una política de integración sucesiva, es decir la unidad i_1 consigue incorporar a la i_1; i_1 e i_2 conjuntamente, incorporan a i_3 y así sucesivamente. Las asignaciones que corresponden a estas integraciones sucesivas se hacen con el siguiente criterio

$$P_{i_1} = \frac{\psi_{i_1}\ (\theta_{i_1})}{\theta_{i_1}}$$

$$P_{i_2} = \frac{\sum_1^2 \psi i_r\ (\theta i_1, i_2)}{\theta i_1, i_2} - \frac{\psi i_1\ (\theta i_1)}{\theta i_1}$$

....

$$P i_s = \frac{\sum_{r=1}^{s} \psi i_r\ (\theta i_1, i_2, \ldots i_s)}{\theta i_1, i_2, \ldots i_s} - \frac{\sum_{r=1}^{s-1} \psi i_r\ (\theta i_1, i_2 \ldots i_{s-1})}{\theta i_1, i_2 \ldots i_{s-1}}$$

....

$$P i_n = \frac{\sum_{r=1}^{m} \psi i_r\ (\theta i_1, i_2 \ldots i_n)}{\theta i_1 \ldots . i_n} - \frac{\sum_{r=1}^{n=1} \psi i_r\ (\theta i_1 \ldots i_{n-1})}{\theta i_1 \ldots . i_{n-1}}$$

En las que $\qquad \theta i_1 \ldots . i_s = \dfrac{|\log \alpha|}{Ui_1 + Ui_2 + \ldots + Ui_s}$

Es evidente que las Pi_r cumplen las condiciones

$$\sum_{r=1}^{n} Pi_r = \frac{\Sigma\ \psi i_r\ (\theta i_1 \ldots\ i_n)}{\theta_1 \ldots i_n}$$

$$Pi_r > \frac{\psi i_r\ (\theta i_r)}{\theta i_r} \qquad r \neq 1$$

$$Pi_1 = \frac{\psi i_1\ (\theta i_1)}{\theta i_1}$$

Todas estas asignaciones dependen del orden elegido el cual supone que la unidad i_1, que inicia el proceso de integración no se beneficia en nada ya que su asignación coincide con el valor de su función de pago. Para que se pueda hablar de una verdadera solución, los conjuntos de posibles asignaciones no deben estar relacionadas por correspondientes preferencias, por ello parece lógico que consideremos un proceso de integración sucesiva de carácter aleatorio, suponiendo las $\underline{|n}$ ordenaciones posibles como igualmente probables. Sobre esta base definimos la variable aleatoria que toma los valores Pr_1, Pr_2, ..., Pr_t ... Pr_n con las probabilidades

$$\frac{1}{n}\ ;\ \frac{\underline{|n-2}}{\underline{|n}}\ , \ldots\ldots,\quad \frac{(n-t)!\ (t-1)!}{\underline{|n}}\ ;\ \ldots,\ \frac{1}{n}$$

Pr_i representa la asignación que corresponde a una ordenación en que la entidad r ocupa el lugar t. Su valor será por tanto

$$Pr_t = \frac{\sum_{rCT} \psi_s\ (\theta_T)}{\theta_T} - \frac{\sum_{rCT} \psi_s\ (\theta_{T-r})}{\theta_{T-r}}$$

Tomamos como asignación definitiva el valor medio

$$E\ (P_r) = \pi_r = \Sigma\ \frac{(n-t)!\ (t-1)!}{\underline{|n}}\ Pr_t$$

Es fácil ver que la suma de las probabilidades es igual a la unidad, en efecto

$$\sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} \frac{(n-t)!\ (t-1)!}{\underline{|n}} = 1$$

Las asignaciones serán pues π_1, π_2 .... π_n que evidentemente cumplen las condiciones exigidas.

ANWENDUNG DER THEORIE VON STRATEGIESPIELEN AUF DAS PROBLEM DER INTEGRATION VON RISIKEN

Zusammenfassung

In dieser Arbeit will man ein "Entscheidungsmodell" definieren hinsichtlich der Integration von Risiko-Einheiten. Das Modell stützt sich auf die Definition der Risiko-Einheit als Ergebnis der ökonomischen Wirkungen der Fatalität und Wahrscheinlichkeit zugrundezugehen, ausgehend von einer vorher bestimmten ökonomischen Grundlage. Vermittels der Bestimmung der Integrationsfunktionen und ihrer Eigenschaften kommt man zum Schluss, dass unter sehr allgemeinen Voraussetzungen immer die Integration zweckmässig ist.

Der Schlussteil der Arbeit bezieht sich auf die Beimessung von Vorteilen der Integration vermittels der Logik der Strategiespiele "auf Grund des Isomorphismus, der die Integrationsfunktion und die charakteristische Spielfunktion verbindet".

APLICATION DU THEORIE DE JEUX DE STRATEGIE AU PROBLEME DE L'INTEGRATION DES RISQUES

Résumé

On prétend dans ce travail, la définition "d'un modèle de décision" par rapport à l'intégration des unités de risque. Le modèle s'appuie dans la définition de l'unité de risque comme résultant des effets economiques des certaines contingences et de la probabilité de se reuiner partant d'une base économique d'avance detérminée. Moyennant la détermination des fonctions d'intégration et ses propiétes on arrive à concluir que dans suppositions très générales l'intégration est toujours convénient.

La dernier partie du travail se rapporte à l'umputation des avantages de l'intégration moyennant la logique des jeux de stratégie a cause du isomorphisme qu'unit la fonction d'intégration et la fonction caractéristique de jeux.

APPLICATION OF THE THEORY OF STRATEGY INTERPLAY TO THE PROBLEM OF RISK INTEGRATION

Summary

The aim of this work is to define a "model of decision" with to the integration of risk units. The model lies on the definition of risk unit as the result of the economic effects of inauspiciousness and the probability of failure starting from an economic basis previously determined. Through the determination of the functions of integration and its qualities, a conclusion is come to. This conclusion is that in very general assumptions the integration is always convenient.

The final part of the work refers to the impulation of advantages of integration through the logic of "strategy interplay" by virtue of the isomorphism that relates the functivas of integration to the functions of the characteristics of the interplay.

APPLICAZIONE DELLA TEORIA DEI GIOCHI DI "STRATEGIA" AL PROBLEMA DELL'INTEGRAZIONE DEI PERICOLI

Riassunto

Si pretende in questo lavoro, definire "un modello di decisione" rispetto all'integrazione delle unità di pericolo. Il modello si basa nella definizione delle unità di danno (o rischio) come risultante degli effetti economici della "siniestralità" e della probabilità di sciuparsi partendo di una base economica previamente determinata. Mediante la determinazione delle funzioni di integrazione e le sue propietà si arriva alla conclusione nel giudicare generalemnte che la integrazione è sempre conveniente.

La parte finale del lavoro si riferische alla imputazione dei vantaggi della integrazione mediante la logica dei giochi di strategia "in virtù del isomorfismo che lega o une la funzione d'integrazione e la funzione caratteristica del gioco".