LA LEY DEL OPTIMO TECNICO

ALBERTO RAFAEL *

SUMARIO: 1. Introducción. 2. Caso I. 3. Caso II. 4. Caso III. 5. Interpretación geométrica. 6. Consideraciones finales.

El objeto del presente trabajo es estudiar la llamada ley del óptimo técnico en relación con las funciones continuas de producción.

La función de producción es una función $x (v_1, v_2, \ldots v_n)$ de las n variables $v_1, v_2, \ldots v_n$ que serán llamadas "los factores de producción".

Para ponernos en las condiciones que se presentan en la realidad, debemos excluir los valores muy pequeños o muy grandes de los factores de producción v_i, para los cuales la función de producción no puede ser ciertamente determinada.

Establecemos pues el siguiente modelo:

$x (v_1, \ldots v_n)$ está definida en el intervalo n dimensional $a_i \leqslant x \leqslant b_i$, con $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$. En dicho intervalo existen y son continuas las n derivadas parciales primeras $\dfrac{\delta x}{\delta v_i}$. No postularemos la existencia de las derivadas parciales segundas.

Si partiendo de un punto P $(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, a_i, v_{i+1}, \ldots V_n)$ hacemos variar v_i desde a_i hasta b_i, dejando constantes los demás factores de producción, obtendremos una curva en un espacio de $(n + 1)$ dimensiones que será llamada "la curva de productividad del factor v_i" e indicada mediante x_i. Naturalmente, por cada $(n - 1)$ úpla de valores que se den a los factores de producción v_j $(j \neq i)$ que permanecen constantes, se obtendrá una curva x_i distinta.

* Ingeniero Civil; Ex-Profesor adjunto de Máquinas Térmicas II curso. Facultad de Ingeniería de La Plata; Ex-Profesor Titular a cargo de Mecanismos y Máquinas Térmicas. Facultad de Ingeniería de La Plata; Profesor Titular por concurso de Análisis Matemático II curso, Facultad de Ciencias Económicas de La Pampa; Profesor Titular por concurso de Complementos de Matemáticas. Facultad de Agronomía de La Pampa; Profesor Titular de Estadística y Biología de la Facultad de Agronomía de La Pampa; Ex-Becado por la Universidad de La Pampa para realizar estudios de Estadística Matemática en la Facultad de Ciencias de la Universidad de París. (La Dirección).

En todo lo que sigue entenderemos, sin excepción, que hemos escogido una cualquiera de esas cuvas x_i y que si bien es siempre a ella que nos referimos, todo lo que deduzcamos vale igualmente para las demás; dicho de otro modo, nos ocuparemos de las propiedades que pertenecen a la familia de curvas x_i.

La derivada de x_i respecto a v_i será llamada la productividad marginal del factor v_i e indicada mediante x'_i.

La productividad media del factor v_i será indicada mediante $\bar{x}_i$ y definida por la relación: $\bar{x}_i = \dfrac{x_i}{v_i}$.

La elasticidad del factor v_i será indicada mediante ϵ_i y definida por la relación: $\epsilon_i = \dfrac{x'_i}{\bar{x}_i}$. Es inmediato deducir en base de la definición dada que: $\epsilon_i = \dfrac{d \ln x_i}{d \ln v_i}$

Los valores que toman x_i, x'_i $\bar{x}_i$ y ϵ_i en un punto cualquiera $\eta \epsilon [a_i, b_i]$ serán indicados mediante $x_i(\eta)$, $x'_i(\eta)$, $\bar{x}_i(\eta)$, y $\epsilon_i(\eta)$ respectivamente.

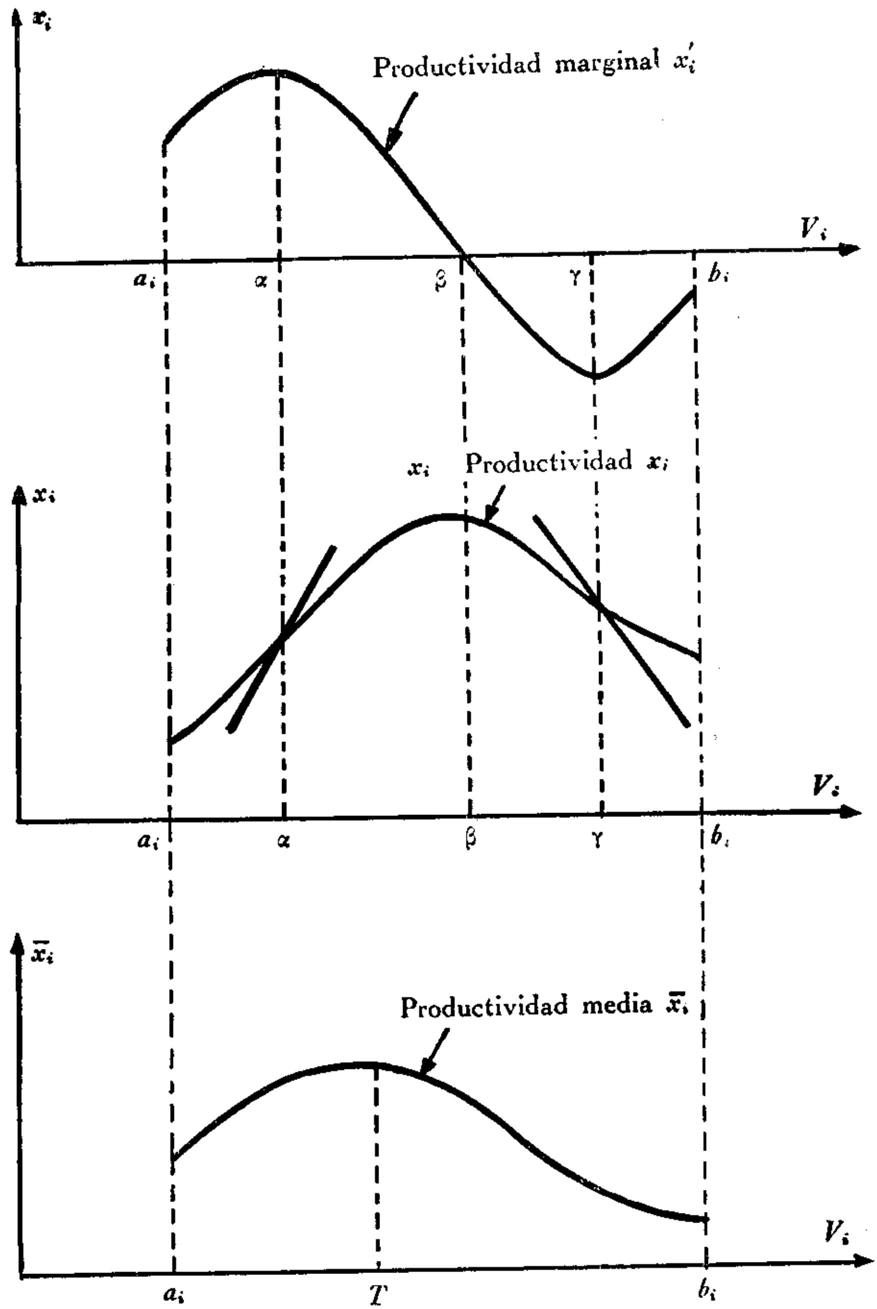
Diremos que la función de producción x cumple con la ley del óptimo técnico para el factor de producción v_i si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

1º) Existen tres puntos $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon (a_i, b_i)$, con $\alpha < \beta < \gamma$, tales que: x'_i es positiva monótona creciente en $[a_i, \alpha]$ positiva monótona decreciente en $[(\alpha, \beta)$, negativa monótona decreciente en $(\beta, \gamma)]$ y negativa monótona creciente en $[\gamma, b_i]$.

2º) Existe un punto $\tau \epsilon (a_i, b_i)$ tal que:
$\bar{x}_i$ *es monótona creciente en* $[a_i, \tau]$ *y monótona decreciente en* $[\tau, b_i]$. De la condición 1º) se deduce que $x'_i(\alpha)$ corresponde a un máximo relativo que, $x'_i(\beta) = 0$ y que $x'_i(\gamma)$ corresponde a un mínimo relativo.

La variación de la productividad marginal x'_i, determina la forma de la curva de productividad x_i. Se ve que α corresponde a un punto de inflexión de x_i, β al máximo de x_i y γ al otro punto de inflexión de x_i. Por otro lado, resulta inmediatamente que x_i es una curva convexa (está por arriba de sus tangentes en $[(a_i, \alpha)$, que x_i es cóncava en (α, γ) y que en $(\gamma, b_i)]$ x_i vuelve a hacerse convexa.

Para mayor ilustración se han representado gráficamente las curvas x'_i, x_i y $\overline{x}_i$.



Mostraremos ahora que, contrariamente a lo que pareciera ser tácitamente aceptado por ciertos autores, del sólo hecho que se cumpla la condición (1ª) no se desprende que se verifique la (2ª) pero que, eso si, dicha condición (2ª) puede ser formulada de manera más económica.

Aceptemos pues, que se verifica la condición (1ª).

Si tomando en cuenta que:

$$x_i \ (v_i) = v_i \ \bar{x}_i \ (v_i) \qquad (1)$$

derivamos ambos miembros de (1) respecto de v_i, tendremos:

$$x' \ (v_i) = \bar{x}_i \ (v_i) + v_i \ \bar{x}'_i \ (v_i) \qquad (2)$$

Lo que nos muestra que los puntos estacionarios de $\bar{x} \ (v_i)$ están dados por las soluciones de la ecuación:

$$x'_i \ (v_i) = \bar{x}_i \ (v_i) \qquad (3)$$

Dicho en lenguaje geométrico ello significa que los puntos en que la tangente a la curva de productividad media $\bar{x}_i$ es horizontal, son los puntos de intersección de dicha curva con la curva de productividad marginal x'_i.

Vemos, ante todo, que las soluciones de (3), si existen, no pueden pertenecer a $[\beta, b_i]$, pues en dicho intervalo $x'_i \ (v_i) \leqslant 0$ y $\bar{x}_i \ (v_i) > 0$.

Para analizar la existencia de dichas soluciones en el intervalo $[a_i, \beta]$ consideraremos los tres casos que pueden presentarse:

CASO I:

La productividad media es menor que la productividad marginal en el punto donde esta última alcanza su valor máximo. Es decir:

$$\bar{x}_i \ (\alpha) < x'_i \ (\alpha)$$

En ese caso podemos escribir:

$$\bar{x}_i \ (\alpha) - x'_i \ (\alpha) < 0$$

$$\bar{x}_i \ (\beta) - x'_i \ (\beta) > 0 \ (\text{ya que } \bar{x}_i \ (v_i) > 0 \text{ y } x'_i \ (\beta) = 0)$$

Del par de desigualdades anteriores se deduce que la función contínua $Z(v_i) = \overline{x}_i(v_i) - x'_i(v_i)$ se anula por lo menos una vez en un punto $\tau \epsilon (\alpha, \beta)$.

Existe, pues, por lo menos un punto $\tau \epsilon (\alpha, \beta)$ que es solución de (3):

$$x'_i(\tau) = \overline{x}_i(\tau) \qquad (4)$$

Ahora bien:

Si aplicamos el teorema del valor medio:

$$x_i(\tau + h) = x_i(\tau) + h\, x'_i(\tau + \theta h),\ 0 < \theta < 1$$

y recordamos que si $\tau + h \epsilon (\alpha, \beta)$, es:

$$x'_i(\tau + \theta h) > x'_i(\tau) \qquad \text{para } h < 0$$

$$x'_i(\tau + \theta h) < x'_i(\tau) \qquad \text{para } h > 0$$

resulta que para todo h, tal que $\tau + h \epsilon (\alpha, \beta)$:

$$x_i(\tau + h) < x_i(\tau) + h\, x'_i(\tau)$$

$$x_i(\tau + h) < \tau \overline{x}_i(\tau) + h\, x'_i(\tau) \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta (4), la (5) se transforma en:

$$x_i(\tau + h) < (\tau + h)\, \overline{x}_i(\tau)$$

Por lo tanto: $\overline{x}_i(\tau + h) < \overline{x}_i(\tau)$, para todo h tal que:

$$\tau + h \epsilon (\alpha, \beta)$$

Lo que nos muestra que $\overline{x}_i(\tau)$ es un máximo relativo de $\overline{x}_i(v_i)$. Resulta, por otro lado, que τ es el único punto estacionario de $\overline{x}_i(v_i)$ en $[\alpha, \beta]$: pues si τ' fuera otro, sería necesariamente un máximo relativo, según acabamos de ver. Como entre dos máximos relativos hay seguramente un mínimo relativo, existiría un punto $\tau'' \epsilon (\alpha, \beta)$ tal que $\overline{x}_i(\tau'')$ sería un mínimo relativo de $\overline{x}(v_i)$, lo que es absurdo.

Supongamos ahora que exista un punto $\eta \epsilon (a_i\ \alpha)$ que sea solución de (3):

$$x'_i(\eta) = \overline{x}_i(\eta)$$

Volviendo a aplicar el teorema del valor medio y tomando cuenta que si $\eta + h \epsilon (a_i, \alpha)$:

$$x'_i(\eta + \theta h) > x'_i(\eta) \qquad \text{para } h > 0$$

$$x'_i(\eta + \theta h) < x'_i(\eta) \qquad \text{para } h < 0$$

Encontraríamos que:

$\bar{x}_i\ (\eta + h) > \bar{x}_i\ (\eta)$, para todo h tal que $\eta + h \epsilon\ (a_i, \alpha)$.

Y repitiendo el razonamiento ya hecho, deduciríamos finalmente que si existe un punto estacionario $\eta \epsilon\ (a_i, \alpha)$, es único y corresponde a un mínimo relativo de $\bar{x}_i\ (v_i)$.

Dos alternativas (a) y (b) pueden presentarse entonces, siempre dentro del caso I.

a) $\bar{x}\ (a_i) \leqslant x'\ (a_i)$; es decir: la productividad media en el origen del intervalo de definición es menor o igual que la productividad marginal. En esas condiciones $\bar{x}_i\ (v_i)$ no admite ningún punto estacionario $\eta \epsilon\ (a_i, \alpha)$, pues si tal punto existiera sería necesariamente un mínimo y por tanto $\bar{x}_i\ (v_i)$ sería decreciente por izquierda en el punto η. Como por otro lado $\bar{x}_i\ (\eta) = x'_i\ (\eta) > x'_i\ (a_i) \geqslant \bar{x}_i\ (a_i)$, resultaría que entre a_i y η existiría un punto η' para el cual $\bar{x}_i\ (v_i)$ pasaría por un máximo relativo, lo que es absurdo.

b) $\bar{x}_i\ (a_i) > x'_i\ (a_i)$

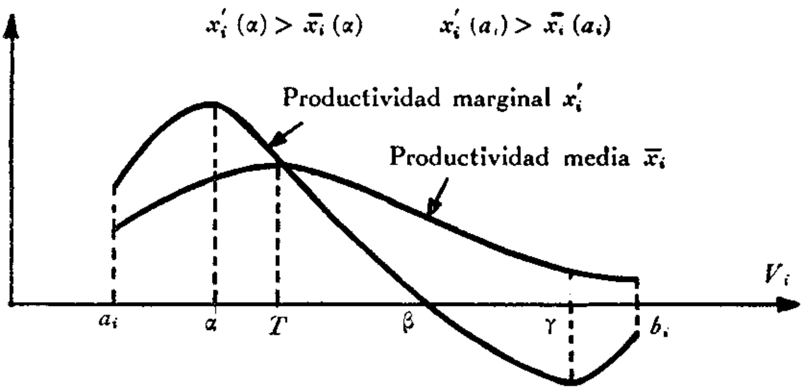
Tenemos entonces:

$$\bar{x}_i\ (a_i) - x'_i\ (a_i) > 0$$
$$\bar{x}_i\ (\alpha) - x'_i\ (\alpha) < 0$$

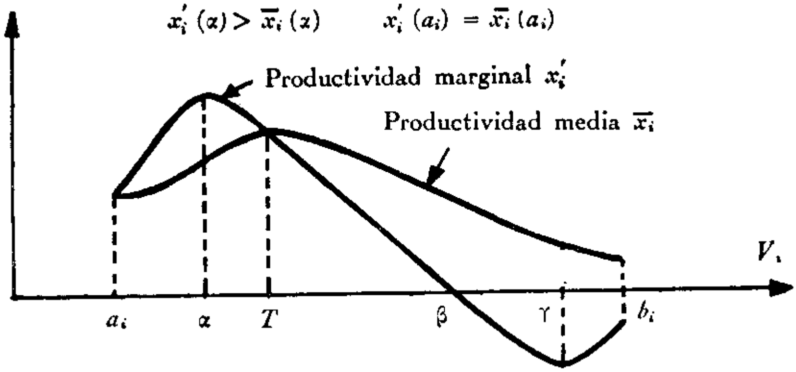
Por lo tanto la función contínua $Z\ (v_i) = \bar{x}_i\ (v_i) - x'_i\ (v_i)$ se anula en un punto $\eta \epsilon\ (a_i, \alpha)$. Tal punto es la única raíz de $Z\ (v_i) = 0$ en (a_i, α) y corresponde al único mínimo de $\bar{x}\ (v_i)$ en (a_i, α).

En resumen: para que dentro del caso I, la función de producción x cumpla con la ley del óptimo técnico para el factor v_i es necesario y suficiente que se verifique la alternativa (a).

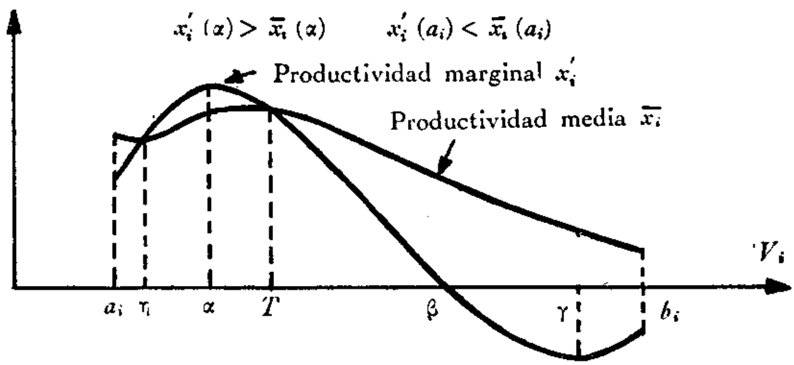
Se representa gráficamente, a continuación, la curva $\bar{x}_i$ en relación con la curva x'_i para las diversas alternativas del caso I.



Se cumple la ley del óptimo técnico: $\bar{x}_i$ es monótona creciente en $[a_i, \tau]$, monótona decreciente en $[\tau, o_i]$ y pasa por un máximo en el punto τ.



Se cumple la ley del óptimo técnico: $\overline{x}_i$ es monótona creciente en $[a_i\ \tau]$, monótona decreciente en $[\tau,\ b_i]$ y pasa por un máximo en el punto τ. La tangente a $\overline{x}_i$ en el punto a_i es horizontal: $\overline{x}'_i\ (a_i) = 0$.



No se cumple la ley del óptimo técnico: $\overline{x}_i$ es monótona decreciente en $[a_i\ \eta]$, monótona creciente en $[\eta,\ \tau]$, monótona decreciente en $[\tau,\ b_i]$, pasa por un mínimo en el punto η y por un máximo en el punto τ.

CASO II

La productividad media es igual a la productividad marginal en el punto donde esta última alcanza su valor máximo. Es decir:

$$\overline{x}_i\ (\alpha) = x'_i\ (\alpha)$$

Entonces $v_i = \alpha_i$ es, por hipótesis, solución de (3).

Si aplicamos nuevamente el teorema del valor medio y tomamos cuenta que, en este caso, es:

$$x'_i\ (\alpha + \theta\ h) < x'_i\ (\alpha) \qquad \text{para todo h}$$

encontraremos que:

$$\overline{x}_i\ (\alpha + h) > \overline{x}_i\ (\alpha) \qquad \text{para } h < 0$$

$$\overline{x}_i\ (\alpha + h) < \overline{x}_i\ (\alpha) \qquad \text{para } h > 0$$

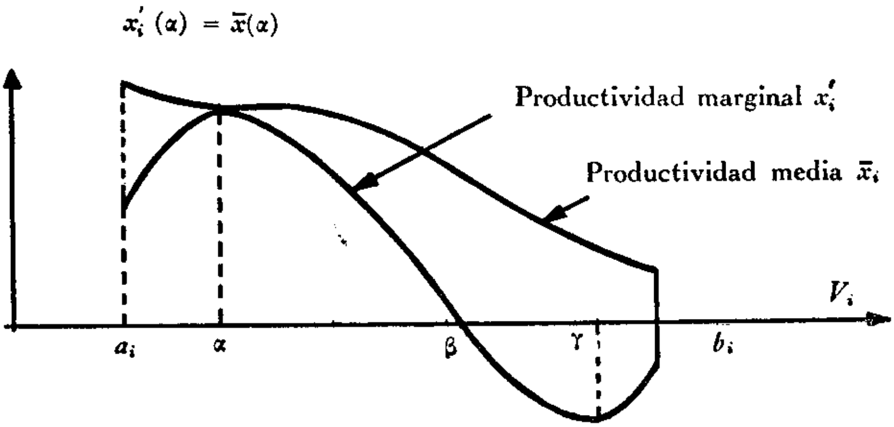
Lo que nos muestra que el punto $v_i = \alpha$ corresponde a un punto estacionario de inflexión de la productividad media $\overline{x}_i\ (v_i)$.

No puede haber otro punto estacionario $\tau \epsilon\ (\alpha, \beta)$, pues en ese caso τ correspondería a un máximo de $\overline{x}_i\ (v_i)$ y, por tanto,
$\overline{x}\ (v_i)$ sería creciente por izquierda en el punto τ.
Como $\overline{x}_i\,(\alpha) > \overline{x}_i(\alpha) > x_i(\tau)$, resultaría la existencia de un punto intermedio entre α y τ para el cual $\overline{x}_i(v_i)$ pasaría por un mínimo, lo que es absurdo.

De manera análoga se demuestra que no puede existir un punto estacionario $\eta \epsilon\ (a_i, \alpha)$.

Por tanto, en este caso II, la productividad media $\overline{x}_i$ es una función monótona decreciente en $[a_i, b_i]$. No se cumple la ley del óptimo técnico.

A continuación se representa gráficamente el correspondiente aspecto de la curva $\overline{x}_i$.



CASO III

La productividad media es mayor que la productividad marginal en el punto donde esta última alcanza su valor máximo. Es decir:

$$\overline{x}_i\ (\alpha) > x'_i\ (\alpha)$$

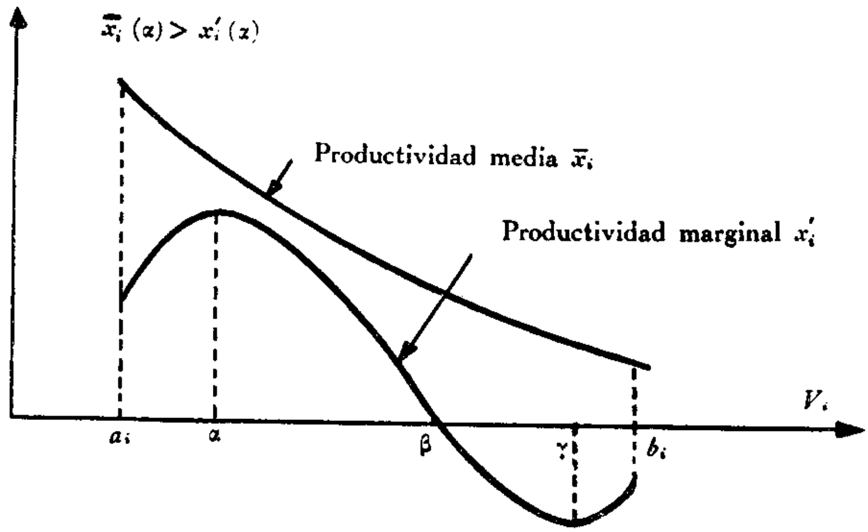
Entonces, teniendo en cuenta (2), resulta

$$\overline{x}_i{}'\ (\alpha) < 0$$

No puede existir un punto $\eta \epsilon\ (a_i, \alpha)$ que corresponda a un mínimo de $\overline{x}_i\ (v_i)$ pues, en ese caso, $\overline{x}_i\ (v_i)$ sería creciente por derecha en η y como $\bar{x}_i$ (v_i) es decreciente en α, existiría un punto situado entre η y α para el cual $\bar{x}_i$ (v_i) pasaría por un máximo relativo.

Tampoco puede existir un punto $\tau \in (\alpha, \beta)$ que corresponda a un máximo de $\bar{x}_i$ (v_i) porque, entonces, $\bar{x}_i$ (v_i) sería decreciente por izquierda en τ y, como $\bar{x}$ (α) $>$ $\bar{x}$ (τ), existiría un punto situado entre α y τ para el cual $\bar{x}_i$ (v_i) pasaría por un mínimo relativo.

Por consiguiente en el caso III no se cumple la ley del óptimo técnico ya que $\bar{x}_i$ (v_i) es monótona decreciente en $[a_i, b_i]$, como se ilustra a continuación:



De todo lo que acabamos de ver deducimos que, suponiendo verificada la condición (1º), la desigualdad $\bar{x}_i$ (a_i) $>$ x'_i (a_i) involucra el no cumplimiento de la ley del óptimo técnico, mientras que la condición $\bar{x}_i$ (a_i) $\leqslant$ x'_i (a_i) es solo posible si se cumple que $\bar{x}_i$ (α) $<$ x'_i (α) (Caso I, alternativa [a]).

Ello nos permite decir que es necesario y suficiente para que la función de producción x cumpla con la ley del óptimo técnico para el factor de producción v_i, el que se verifique la condición (1º) y que la productividad media de la variable v_i sea en el origen a_i de su intervalo de definición menor o igual que la productividad marginal:

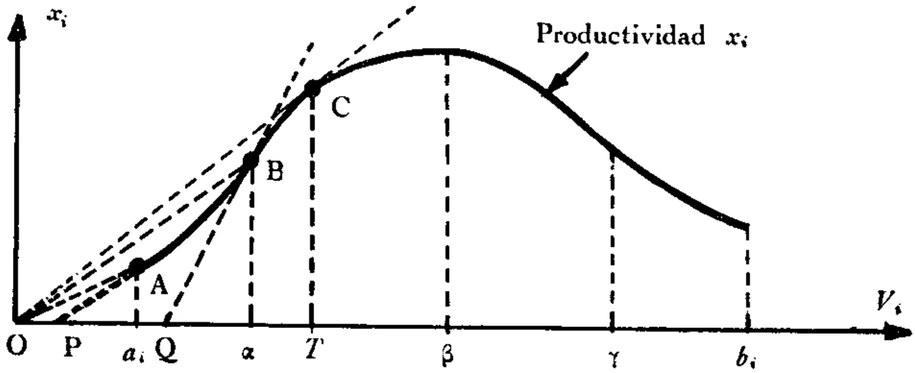
$$\bar{x}_i\ (a_i) \leqslant x'_i\ (a_i)$$

Es esta la forma más económica de formular la ley del óptimo técnico a que nos habíamos referido anteriormente.

INTERPRETACION GEOMETRICA

El estudio de la curva $\bar{x}_i$ puede encararse de la siguiente manera: $\bar{x}_i$ (v_i) es la pendiente de un radio vector cuyo origen se aplica en el origen de coordenadas y cuyo extremo describe la curva $y = x$ (v_i); los puntos estacionarios de $\bar{x}$ (v_i) son los puntos de tangencia de dicho radio vector con la curva $y = x\ (v_i)$. Ello se representa gráficamente a continuación para los tres casos que hemos considerado:

CASO I — alternativa (a): $x'_i\ (\alpha) > \overline{x}_i\ (\alpha)$ $\overline{x}_i\ (a_i) \leqslant x'_i\ (a_i)$



OA OB y OC: radios vectores.
PA, QB y OC: tangentes.
a x_i en los puntos A, B y C respectivamente.

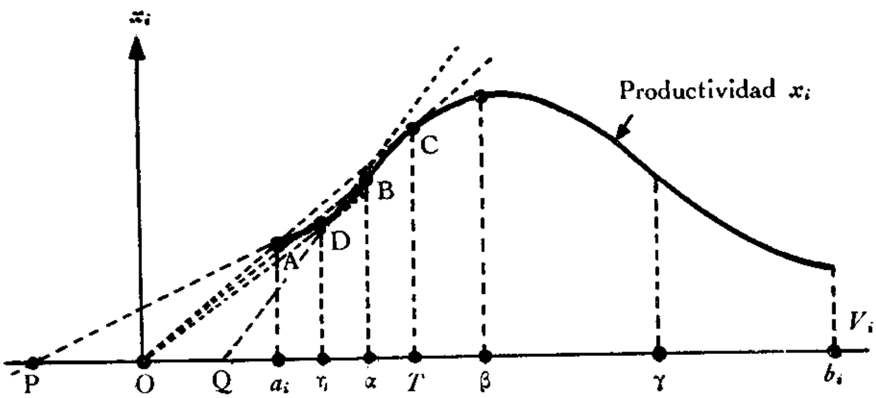
$\operatorname{tg} A\hat{O}a_i = \overline{x}_i(a_i)$ $\qquad$ $\operatorname{tg} A\hat{P}a_i = x'_i(a_i)$

$\operatorname{tg} B\hat{O}\alpha = \overline{x}_i(\alpha)$ $\qquad$ $\operatorname{tg} B\hat{Q}\alpha = x'_i(\alpha)$

$\operatorname{tg} C\hat{O}\tau = \overline{x}_i(\tau)$ $\qquad$ $\operatorname{tg} C\hat{O}\tau = x'_i(\tau)$

Se puede trazar una única tangente OC desde el origen O a la curva x_i; la abscisa τ del punto de tangencia C determina el único máximo de x_i, siendo $\operatorname{tg} C\hat{O}\tau = \overline{x}_i\ (\tau)$. Se cumple la ley del óptimo técnico.

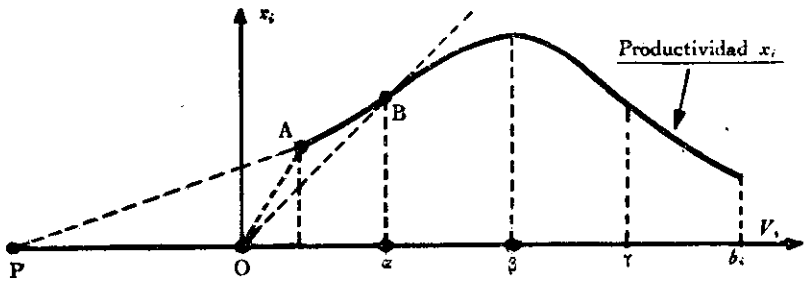
CASO I, alternativa (b) ; $x'_i(\alpha) > \overline{x}_i(\alpha)$, $\overline{x}_i(a_i) > x'_i(a_i)$



OA, OD, OB y OC: radios vectores. PA, OD, QB y OC: tangentes a x_i en los puntos A, D, B y C, respectivamente. Se pueden trazar dos tangentes OD y OC desde el origen O a la curva x_i. Las abcisas η y τ de los puntos de tangencia D y C determinan respectivamente el mínimo y el máximo de x_i siendo $\operatorname{tg} D\hat{O}\eta = \overline{x}_i\ (\eta)$ y $\operatorname{tg} C\hat{O}\tau = \overline{x}_i\ (\tau)$. No se cumple la ley del óptimo técnico.

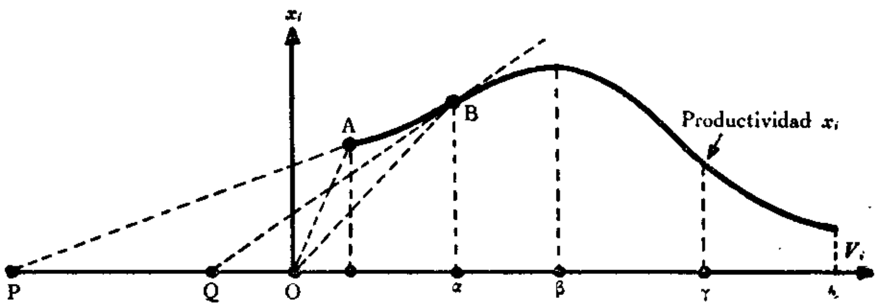
CASO II. $x'_i(\alpha) = \overline{x}_i(\alpha)$

x_1



OA y OB: radios vectores PA y OB: tangentes a x_i en los puntos A y B, respectivamente. Se puede trazar una única tangente OB a la curva x_1 desde el origen O. La abcisa α del punto de tangencia B determina el único punto estacionario de $\overline{x}_i$, que es un punto de inflexión. Se tiene: tg B$\hat{O}\alpha = \overline{x}_i(\alpha)$. No se cumple la ley del óptimo técnico.

CASO III. $\overline{x}_i(\alpha) > x'_i(\alpha)$



OA y OB: radios vectores. PA y QB: tangentes a x_i en los puntos A y B, respectivamente. No se puede trazar ninguna tangente desde el origen O a la curva x_i. No se cumple la ley del óptimo técnico.

CONSIDERACIONES FINALES

Cuando la función de producción x cumple con la ley del óptimo técnico para el factor V_i es conveniente dar nombre a las diversas zonas en que puede subdividirse el intervalo de definición $[a_i, b_i]$:

El intervalo semicerrado por izquierda $[(a_i, \tau)$ define "la zona hipoóptima de v_i", en la cual la productividad media x_i es monótona creciente, el intervalo semicerrado por derecha $(\tau, b_i)]$ define "la zona hiperóptima de v_i" en la cual $\overline{x}_i$ es monótona decreciente, mientras que el punto τ donde $\overline{x}_i$ (v_i) pasa por un máximo, define "el óptimo técnico de v_i".

El intervalo $[(a_i\ \alpha)$ define "la zona hipomáxima de v_i", en la cual la productividad marginal x'_i es monótona creciente, el intervalo $(\alpha, b_i)]$

define "la zona hipermáxima de v_i" mientras que el punto α donde x'_i (v_i) pasa por un máximo define "el máximo técnico de v_i".

En el punto a_i, la elasticidad marginal $\epsilon_i\ (a_i) \geqslant 1$, en todo otro punto de la zona hipoóptima $\epsilon_i\ (v_i) > 1$, en correspondencia con el óptimo técnico de $v_i = \tau$ es $\epsilon_i\ (\tau) = 1$, en (τ, β) es $0 < \epsilon_i < 1$, para $v_i = \beta$ es $\epsilon_i\ (\beta) = 0$ y finalmente en $(\beta, b_i)]$ es $\epsilon_i < 0$.

Por último vale la pena hacer notar que en los casos en que fuera válido extender el origen del intervalo de definición de v_i hasta el origen de coordenadas: $a_i = 0$, las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla la ley del óptimo técnico siguen valiendo textualmente si definimos adecuadamente el valor de $\overline{x}_i\ (v_i)$ en el punto 0.

Dos casos (A) y (B) son posibles:

(A): $x_i\ (v_i) = 0$. Podemos entonces definir

$$\overline{x}_i\ (0) = \lim_{v_i = 0} x_i\ (v_i) = x'_i\ (0)$$

(B): $x_i\ (v_i) > 0$. Estamos forzados a definir $\overline{x}_i\ (0) = \infty$

Por consiguiente la ley del óptimo técnico para el factor v_i sólo se cumple en el caso (A). Es decir que suponiendo, como siempre, verificada la condición (1º) y el intervalo de definición del factor V_i extendido ahora hasta el origen de coordenadas, es necesario y suficiente para que se verifique la ley del óptimo técnico para v_i que la ausencia de ese factor anula toda producción sea cualquiera el valor que tomen los demás factores.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

De la bibliografía que conocemos indicamos especialmente el excelente tratado de Ragnar FRISCH *Las leyes técnicas y económicas de la producción,* traducción versión y prólogo de José Manuel de LA TORRE y DE MIGUEL, Editorial Sagitario S. A., Barcelona 1963.

Hay allí el capítulo 6, entero, pág. 93 a 110, trata sobre la ley del óptimo técnico.

DAS GESETZ DES TECHNISCHEN OPTIMUMS

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Studium des technischen Optimums hinsichtlich der fortlaufenden Produktionsfunktionen.

Man nimmt an, dass die Produktionsfunktion im Dimensionsintervall n

$$a_i \leqslant v_i \leqslant b_i, \text{ mit } a_i > o, \; i = 1, 2, \ldots n$$

definiert ist, wobei erste forthlaufende partielle Differentialquotienten zugelassen sind, aber das Vorhandensein von zweiten Differentialquotienten wird nicht verlangt.

Man nimmt an, dass die Grenzproduktivität $x'_i \ (v_i)$ zuerts monoton positiv ist, unter Anwachsen bis zum Maximum, von wo ab sie unter Abnahme monoton ist, bis sie ein Minimum mit negativem Wert erreicht, um dann unter Anwachsen monoton negativ zu sein.

Auf dieser Grundlage wird die Form der Durchschnittsproduktivitätskurve $\overline{x}_i \ (v_i)$ analytisch für die verschiedenen Fälle, die auftreten können, abgeleitet, womit man schliesslich zur notwendigen und ausreichenden Voraussetzung für die Erfüllung des Gesetzes des technischen Optimums gelangt.

Danach erfolgt eine geometrische Interpretierung der Frage unter Abschluss mit der Betrachtung des Spezialfalles $a_i = o$.

LA LOI DE L'OPTIMUS TECHNIQUE

Résumé

Ce travail se propose d'étudier la nommée loi de l'optimus technique en rapport avec les fonctions continuelles de production.

On suppose que la fonction de production est définie dans l'intervalle *n* dimensionel

$$a_i \leqslant v_i \leqslant b_i, \text{ avec } a_i > o, \; i = 1, 2, \ldots n$$

où on admet dérivatives partielles premières continuelles mais l'existence des dérivatives partielles secondes n'est pas postulé. On suppose que la productivité marginale $x'_i \ (v_i)$ est premièrement positive monotone croissante jusqu'atteindre un maximum à partir duquel devient monotone décroissante jusqu'atteindre un minimum avec valeur négative pour devenir enfin monotone croissante. Sur cette base on déduit analitiquement la forme de la courbe de productivité moyenne $\overline{x}_i \ (v_i)$ dans les divers cas qu'on peut se présenter et finalement on arrive à la condition nécéssaire et suffisant pour l'accomplissement de la loi de l'optimus technique.

Puis on donne une interprétation géometrique de la question et on finit en considérant le cas spécial $a_i = o$.

THE LAW OF THE OPTIMUM TECNITIAN

Summary

The object of this article is to study the so-called Law of the Optimum Tecnitian in relation to the continuous function of productio.

We presume that the production function is defined by the dimention interval of *n*.

$$a_i \leqslant v_i \leqslant b_i, \text{ with } a_i > o, \ i = 1, 2, \ldots n$$

where parcial first continuous derivatives are allowed, but the existence of parcial second derivatives are not sought.

We presume that marginal productivity $x'_i\ (v_i)$ is first a positive monotony, increasing until it reaches a maximum, after which it is a decreasing monotony until it reaches a minimum of negative value, to later become an increasing negative monotony.

Based on this we analitically deduce that the medium productivity curve $\overline{x}_i\ (v_i)$ in the different cases which may arise finally brings us to the needed condition, sufficient to fulfill the Law of the optimum tecnitian.

This is followed by a geometric interpretation of the question, and concludes by considering the special case of $a_i = o$.

LA LEGGE DELL'OTTIMO TECNICO

Riassunto

Questo lavoro ha l'oggetto di studiare la cosi chiamata legge dell'ottimo tecnico in rilazione colle funzione continue di produzione.

Si suppone che la funzione di produzione è definita nell' intervalo *n* dimensionale.

$$a_i \leqslant v_i \leqslant b_i, \text{ con } a_i > o, \ i = 1, 2, \ldots n$$

dove si ammette derivate parziale prime continue ma non si postula l'essistenza delle derivate parziale seconde.

Si suppone che la produttività marginale $x'_i\ (v_i)$ è primeramente positiva monotona crescente fin'un massimo a partire dal quale è monotona decrescente fin'un minimo con valore negativo, e poi si torna negativa monotona crescente.

Su questa base si può dedurre analiticamente la forma della curva della produttività media $\overline{x}_i\ (v_i)$ nei diversi casi che possono presentarsi e finalmente si arriva alla condizione necessaria e sufficente per l'accomplimento della legge dell'ottimo tecnico.

Poi si dà un'interpretazione geometrica della questione e si conclude considerando il caso speciale $a_i = o$.