Valor mixto en distintas formas de la paradoja del examen sorpresa

Ariel Arbiser[1]

Dpto. de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina, arbiser@dc.uba.ar

Resumen Se formula y estudia la paradoja del examen sorpresa para n días como juego de suma cero entre dos jugadores, el docente y el alumno, considerando los costos de estudio por día y el costo que representa el ser examinado en forma imprevista, permitiendo que el docente pueda tomar el examen cualquiera de los n días o incluso ninguno de ellos, y que el alumno pueda elegir para estudio cualquier subconjunto de esos n días (desde ninguno hasta todos). Calculamos el valor mixto de este juego en función del número de días y del costo de la posible sorpresa, y analizamos el rol de esta sorpresa como determinante para la eliminación de estrategias.

Keywords: juego · valor · examen sorpresa.

1. Introducción

Estudiamos una generalización de la paradoja del examen sorpresa [5,7,17] para n días ($2 \leq n \leq \infty$) formulada como un juego matricial finito para dos jugadores con información imperfecta y suma cero [2,3,15,16,19]. Esta conocida paradoja originalmente se plantea del siguiente modo. Un docente anuncia a un alumno que le va a tomar un examen *sorpresa* durante uno de los próximos n días, en el sentido de que el alumno no podrá saber (determinar, demostrar) antes del examen cuándo va a ser este tomado. Dicho esto, el alumno razona en forma individual del siguiente modo: no puede ser tomado el último día, porque ya lo sabría a la noche del día anterior y no sería una sorpresa; quedando así descartado este día. Del mismo modo no puede tomarlo el día anterior al último porque ya lo sabría en la noche del día previo, descartándolo igualmente, y así continúa descartando el resto de los n días, y concluyendo que no puede haber tal examen. (La paradoja puede continuarse con que, después de esto, el docente finalmente le toma el examen uno de esos días, resultando por cierto una sorpresa ya que el estudiante había descartado todos los días.) Uno podría, ingenuamente, concluir que la explicación que resuelve la paradoja es sencillamente que no hay posibilidad de tomar un examen sorpresa, pero esto no es realmente así, aceptando el hecho de que las sorpresas son factibles en este y otros terrenos, aun cuando es anunciada con anterioridad - esta modalidad de examen de hecho puede darse en la realidad[1].

Hubo varias formulaciones de esta paradoja a lo largo de más de 60 años [5] con sus consiguientes resoluciones, algunas controvertidas o que escapan a la esencia de la verdadera paradoja. Existe discusión en torno a cuál es el verdadero problema a resolver, así como de la esencia de la noción de "sorpresa". Los tratamientos existentes básicamente se enmarcan en dos escuelas: la epistémica, que considera propiedades (a veces, axiomas) sobre el conocimiento, y la logicista o racionalista, que utiliza en los argumentos el concepto de prueba o consistencia a lo largo del desarrollo [4,9,10,17,18], y en una posición intermedia hallamos trabajos más recientes que tienen en cuenta los *juegos psicológicos* [6,8,13]. Tan sólo una de las formas de explicar la paradoja sugiere que el profesor podría mentir, es decir, no hay por qué creerle, lo cual le estaría quitando valor al anuncio que hace. Pero, aun con esta simplificación tan categórica, hay discusión en cuanto a cuál es el error en el razonamiento del alumno. Por otro lado, tiene sentido el análisis para estudiar la conveniencia de las distintas acciones del estudiante y del docente en el contexto presentado.

Nuestro objetivo es introducir una formulación de la paradoja del examen sorpresa, para n días, en forma de juego de información imperfecta de suma cero para dos jugadores, desde un punto de vista prescriptivo, incorporando un costo de estudio diario y otro (generalmente mayor) por ser examinado un día no previsto. De este modo, aceptando que a priori la noción de sorpresa aparece entrelazada dentro del mismo razonamiento del alumno y del docente, "resolveremos" la paradoja en el sentido de encontrar estrategias óptimas para el docente y para el alumno. Esto es, los equilibrios mixtos del juego y su valor mixto.

El presente análisis sigue un camino distinto de los propuestos con anterioridad. Hasta donde nuestra información indica, todos los tratamientos como juego matricial partían del hecho de que la decisión del docente se limita simplemente a tomar o no tomar el examen [5,6,8,13], mientras que el objetivo de los alumnos es (tan sólo) la posibilidad de preverlo, es decir "adivinar" si se toma o no, ya sea como estrategia pura o mixta, concluyendo luego sobre el valor del juego resultante. Además, la mayoría de los trabajos estudia el caso para $n = 2$ o 3 días, esto es, un valor acotado. Nosotros ampliamos la información disponible, teniendo en cuenta el costo de estudio por día, un número que indica el *factor sorpresa*, esto es, el costo para el alumno de ser examinado un día para el cual no estudió, y la posibilidad de que el alumno elija un subconjunto cualquiera de días de estudio entre n días (sin limitarse a una mera previsión del examen a lo largo de los distintos días), a la vez que abordamos la variación que incluye la posibilidad de que no se tome nunca el examen. Estudiamos finalmente el caso de un período de tiempo infinito haciendo variar el factor sorpresa linealmente con el número de días.

[1] Al menos tiempo atrás, en la educación media, eran habituales y muy temidos por varios estudiantes.

1.1. Preliminares

Partimos de las siguientes definiciones que son estándar de la teoría de juegos [2,3,11,12,14,15,16,19]. Representamos un juego finito o infinito numerable de suma cero para dos jugadores con una matriz A de $m \times n$ números reales. Las filas representan las decisiones del jugador max y las columnas las del jugador min. El mecanismo consiste en que el jugador max elige una fila, a la vez que el jugador min elige una columna - cada uno toma su decisión sin conocer la decisión del otro. Los elementos de la matriz representan el pago del jugador min al jugador max, en cada caso de elección de fila-columna; esto es, si max elige la fila i y min elige la columna j, max ganará $a_{i,j}$ puntos/pesos a la vez que min perderá esa cantidad. Naturalmente, valores negativos indican que el pago y cobro se revierten (max pagará a min si $a_{i,j} < 0$). El valor inferior de A es $min_{1 \leq j \leq n} max_{1 \leq i \leq m} a_{i,j}$ y el valor superior de A es $max_{1 \leq i \leq m} min_{1 \leq j \leq n} a_{i,j}$. Si ambos valores coinciden, esa cantidad se llama el valor del juego. Una estrategia dominada para el jugador max es una fila i tal que exista otra fila i' con $a_{i',j} \geq a_{i,j}$ para $1 \leq j \leq n$; y análogamente se define esta noción para el jugador min mediante columnas y la otra desigualdad. Un equilibrio de Nash puro es un elemento (y posición) de la matriz $(a_{i,j})$ que sea máximo por filas y mínimo por columnas, en el sentido amplio; es decir $a_{i,k} \geq a_{i,j} \geq a_{r,j}$ para todo $1 \leq k \leq m$, $1 \leq r \leq n$. Un equilibrio de Nash puro estricto es un elemento (y posición) $a_{i,j}$ tal que $a_{i,k} > a_{i,j} > a_{r,j}$ para todo $1 \leq k \leq m$, $1 \leq r \leq n$. Cuando una estrategia conjunta es un equilibrio puro, en ella cada una de las dos estrategias individuales constituye una *mejor respuesta* a la estrategia individual del otro jugador. Cuando un juego no tiene valor puro, se complican las decisiones y aparecen criterios que pueden pretender juzgar el comportamiento o medir la racionalidad del oponente, ya sea en el ámbito de los juegos cooperativos o no cooperativos. En estos casos el juego resulta más significativo cuando se compite una cierta cantidad de veces (finita o no), ya que las decisiones pueden depender de resultados anteriores, los que dan a cada jugador indicios del comportamiento del oponente, para futuras decisiones (en el mismo juego o incluso en otros en que ambos participen posteriormente). Un equilibrio de Nash mixto es un equilibrio puro en el juego que resulta de sustituir los conjuntos de estrategias de cada jugador por sus conjuntos de respectivas distribuciones de probabilidad. Así, cada jugador elige una de dichas (infinitas) funciones, con el mecanismo indicado, y el pago se calcula como el valor esperado de la estrategia conjunta que resulta de ambas decisiones.

2. Forma de juego matricial y resultados preliminares

Nuestra formulación será como juego finito, en el cual se prevé que el docente tome el examen un único día en una semana de n días, y que el alumno pueda de antemano planificar el estudio para un subconjunto cualquiera de esos n días (incluso todos o ninguno de estos). Más adelante agregaremos el caso de que el docente tenga además la opción de no tomar nunca el examen.

Sea $s > 0$ el *factor sorpresa* (precio que paga el alumno si le toman el examen un día para el que no estudió). Sea b_i el costo de estudio para el día i-ésimo, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Más abajo los consideraremos constantes para todo i, no obstante esto lo que prevalece es que, a medida en que pasan los días, el costo de estudio se acumula, haciéndose por ende cada vez (linealmente) mayor.

Queda planteado de este modo una familia de juegos finitos de suma cero, en donde el jugador I o alumno elige una fila, que representa un subconjunto de días en que estudia; este jugador busca el valor máximo; mientras que el jugador II o docente elige una columna, que representa un día en que toma el examen; este jugador busca el valor mínimo. Por consiguiente, la matriz de pagos está dada por $A_n(C, k) = -\sum_{i=1, i\in C}^{k} b_i - s\chi_k(C)$ para todo $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ y $1 \leq k \leq n$, donde $\chi_k(C) = 1$ si $k \notin C$, 0 si $k \in C$.

En honor a una situación realista, el estudiante interrumpe el estudio una vez rendido el examen, es decir que los costos para él tienen en cuenta los días de estudio hasta el día en que rinde el examen y no los días subsiguientes, haya o no haya planificado estudiar en ellos. Si bien el orden entre las filas y el orden entre las columnas son irrelevantes en un juego dado en forma matricial, para los resultados que siguen hace falta suponer las filas de A_n ordenadas, lo que haremos usando la numeración binaria característica de los subconjuntos de días (desde el vacío hasta todos los n días).

Dada A una matriz y a un número real, sea $n_a(A)$ la cantidad de apariciones de a entre los elementos de A. Para costos b_i unitarios, la distribución los distintos elementos $-1, -2, \ldots, -s - n + 1$ en A está dada por la

Proposición 1 *Si $s > n \geq 1$ y para todo $1 \leq i \leq n$, $b_i = 1$, entonces $n_{-j}(A_n) = n_{1-s-j}(A_n) = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{k}$ para $1 \leq j \leq n$ i.e., una suma de coeficientes binomiales consecutivos. En particular, $n_{-1}(A_n) = n_{-s}(A_n) = 2^{n-1} - 1$.*

□

Lo siguiente que se advierte en la matriz para n días con la numeración de filas indicada es

Lema 1 *Para todo n, si $s > b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces, en A_n*

1. *cada fila impar está dominada por la fila siguiente*
2. *no hay más filas ni columnas dominadas fuera del caso (1).*

□

Esto se traduce en el hecho de que, si la sorpresa tiene un costo suficientemente grande, "el planear estudiar cierto conjunto de días que no incluya el último siempre es peor que planear estudiar ese mismo conjunto de días incluyendo el último". En la numeración representa el cambio de 0 a 1 del dígito de las unidades. Así, la dimensión de la matriz relevante/reducida es $2^{n-1} \times n$. Por simplicidad llamaremos directamente A_n a esta matriz simplificada, para n días.

Proposición 2 *Para todo n, si $s > b_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces A_n no tiene equilibrios de Nash puros, mientras que si $b_i = 1$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces:*

- *Si* $s = 1$*, los equilibrios de Nash puros de* A_n *son todos los elementos de las filas 1 y 2.*
- *Si* $0 \leq s < 1$*, los equilibrios de Nash puros de* A_n *son todos los elementos de la fila 1.*

□

A partir de acá supondremos que los b_i son todos iguales; y se pueden normalizar a 1, para lo cual cambiamos el valor de s por $s' = s - b_i + 1$, al cual por simplicidad seguiremos llamando s. Esto es factible ya que tanto los equilibrios puros como los mixtos sufrirán la misma transformación afín positiva i.e. función de la forma $\alpha x + \beta$ con $\alpha > 0$. Quedan entonces como parámetros s y n.

En los ejemplos que siguen, tomamos como factor sorpresa $s = 100$ ($>> n$).

Por ej., para $n = 3$ días, la matriz de pagos a priori es de 8×3, pero al descartar las filas impares -cada una dominada por la siguiente- resulta la siguiente matriz de 4×3:

$$A_3 = -\begin{bmatrix} 100 & 100 & 1 \\ 100 & 1 & 2 \\ 1 & 101 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular el valor mixto de este juego concreto usando un resolvedor[2] que calcula el valor y un equilibrio mixto entre los que podrían existir para tal matriz.

Siguen ejemplos ilustrativos y sus soluciones[3]:

$$A_2 = -\begin{bmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El valor (mixto) del juego es -1.99. Una estrategia óptima para el jugador fila es (0.01, 0.99) y una estrategia óptima para el jugador columna es (0.01, 0.99) (hay 1 equilibrio mixto extremo, esto es, vértice del poliedro definido por las desigualdades del problema de programación lineal asociado).

De hecho, si s es el factor sorpresa, es decir se considera la matriz

$$\begin{bmatrix} -s & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

con $s > 2$, calculamos a mano el único equilibrio mixto, que es $(1/s, 1 - 1/s)$ tanto para el alumno como para el docente, y el valor del juego es $1/s - 2$.

[2] Para matrices concretas el problema se reduce a un problema de programación lineal. Por ej. mediante el *online solver* de https://www.math.ucla.edu/ tom/gamesolve.html

[3] Con el fin de describir los distintos casos escribimos un programa que, dados n, s y los b_i, genere la matriz, borre las filas/columnas dominadas, confirme la presencia o ausencia de equilibrios en los casos relevantes y grafique las funciones de mejor respuesta (Fig 1).

Para la A_3 de más arriba, el valor es -2.9701. Una estrategia óptima para el jugador fila es (0.01, 0.0099, 0, 0.9801) y una estrategia óptima para el jugador columna es (0.01, 0.0099, 0.9801) habiendo 2 equilibrios extremos.

$$A_4 = -\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 1 & 2 \\ 100 & 1 & 101 & 2 \\ 100 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 101 & 101 & 2 \\ 1 & 101 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 102 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

El valor es -3.9404. Estrategias óptimas son por ejemplo (0.01, 0.0099, 0, 0.0098, 0, 0, 0, 0.9703) y (0.01, 0.0099, 0.0098, 0.9703) respectivamente, habiendo 11 equilibrios extremos.

$$A_5 = -\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 1 & 2 \\ 100 & 100 & 1 & 101 & 2 \\ 100 & 100 & 1 & 2 & 3 \\ 100 & 1 & 101 & 101 & 2 \\ 100 & 1 & 101 & 2 & 3 \\ 100 & 1 & 2 & 102 & 3 \\ 100 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 101 & 101 & 101 & 2 \\ 1 & 101 & 101 & 2 & 3 \\ 1 & 101 & 2 & 102 & 3 \\ 1 & 101 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 102 & 102 & 3 \\ 1 & 2 & 102 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 103 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

El valor es -4.901. Estrategias óptimas son por ejemplo (0.01, 0.0099, 0, 0.0098, 0, 0, 0, 0.0097, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,0.9606) y (0.01, 0.0099, 0.0098, 0.0097, 0.9606) respectivamente.

3. Resultados principales

3.1. Rescritura de la paradoja

Con el fin de ofrecer una explicación de la paradoja, y a la vez confirmar la adecuación del modelo, podemos rescribir -transitoriamente- el razonamiento paradójico, que va descartando cada uno de los días, en una secuencia de matrices (como una suerte de combinación entre la forma matricial y la extensiva), es decir hacer prevalecer el efecto paradójico por encima del problema de optimización involucrado. Veamos una reconstrucción del argumento original del alumno a partir de la formulación matricial que hemos adoptado, es decir, reinterpretando el descarte de cada uno de los n días a partir de la información sobre las matrices A_n. Nos basamos en la premisa de que el docente pretende lograr una sorpresa, lo que se manifiesta en cobrar un pago de al menos s, y el alumno a sabiendas de esto busca una manera de evitarlo. Supondremos como antes $s > n$. Partiendo entonces de la matriz de pagos original, el alumno en primer lugar propone descartar la posibilidad del examen el último día, al observar que $|a_{i,n}| < |s|$ para todo i impar, con lo que elimina las filas impares. Vista la matriz resultante, entiende que el docente descartará la columna n a partir de un criterio análogo, porque buscará lograr una sorpresa, esto es un pago de al menos s (siendo la única columna que no incluye la posibilidad de este pago mayor), pasando así a la matriz A_{n-1}. El alumno nuevamente descarta las filas impares de esta matriz, y prevé que el docente descartará la columna $n-1$. Y así se sigue, para llegar finalmente a la matriz trivial A_1, en la que no es posible un pago de s.

Por tanto, en forma similar a la técnica de eliminación de estrategias dominadas [2,3,19], dada una matriz $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, y $s \in \mathbb{R}$, definimos para A la *s-eliminación de una columna* a la matriz $A' \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ que resulta de eliminar de A la columna j siempre que $min_i\ a_{i,j} > -s$, y del modo usual definimos para A la *eliminación de filas dominadas* a la matriz $A'' \in \mathbb{R}^{m'\times n}$ con $m' < m$ que resulta de eliminar de A toda fila i que cumpla $a_{i,j} \leq a_{i',j}$ para todo $1 \leq j \leq n$, para algún $1 \leq i' \leq m$. Una s-eliminación del juego de matriz A es una secuencia alternada de pasos como los descriptos, es decir s-eliminaciones de columnas alternadas con eliminaciones de filas dominadas (comenzando ya sea con las filas o con una columna). Notar que una s-eliminación de un juego no necesariamente coincide con alguna secuencia de eliminación de estrategias dominadas, ni viceversa. De hecho, por el Lema 1 no hay posibilidad de reducir ninguna matriz A_n con la dominación clásica.

Proposición 3 *Dados $n \geq 1$, $s > 0$, $b_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$, si $s > \sum_{1\leq i\leq n} b_i$, existe para A_n una s-eliminación que lleva a la matriz $[-b_1] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.*

□

Es decir, sólo "sobrevive" $-b_1$ que estaba en la posición $(2^{n-1}, 1)$. Esta forma de explicar la paradoja responde a un criterio reduccionista en cuanto a lo cuantitativo, pero no invalida la motivación de conocer el valor y los equilibrios del juego original como indicadores de la ganancia máxima a la que pueden aspirar los agentes así como las estrategias necesarias. Lo interesante de esta interpretación es que provee una explicación de la paradoja, como un intento inválido de descarte de estrategias dominadas: para este descarte está exigiendo mantener sólo las situaciones en las que habrá una diferencia de pagos no menor a s (dado el requisito de la sorpresa), entrelazándose con la dominación clásica.

3.2. Valor del juego n-ésimo

En todos los ejemplos anteriores, se observa la alta probabilidad de que el alumno estudie todos los días (última fila) y la alta probabilidad de que el docente tome el examen el último día (última columna). Esto es natural en presencia de una gran diferencia entre s y la suma de costos de estudio $\sum_{1\leq i\leq n} b_i$.

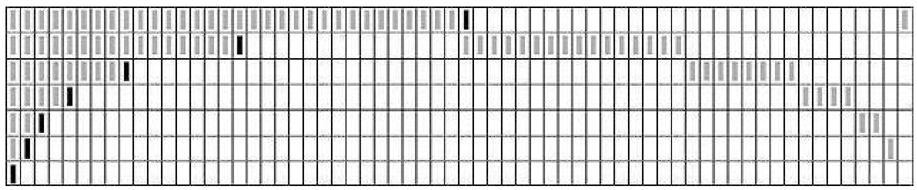

Figura 1. Funciones que indican las (a veces varias) opciones de mejor respuesta para $n = 6$, en negro para el alumno y en gris para el docente, en vertical los días y en horizontal las opciones.

La Fig. 1 (aparece rotada 90º a izquierda) muestra la función de mejor respuesta del alumno y del docente para una semana de 6 días, con las estrategias de ambos en el orden antes establecido. Las casillas grises representan opciones igualmente preferenciales para el docente.La fila superior representa el no tomar nunca el examen, posibilidad presente en la variante que se discute al final del artículo. La siguiente es una descripción de la elección no determinista que constituye la función mejor respuesta del docente:

```
si no se estudia ningún día
  elegir cualquier día
si no
  si se estudia todos los días
    elegir el día n
  si no
    sea d el último día en que no se estudia
    si se estudia en el día n
      elegir el día d
    si no
      elegir cualquier día >= d
```

Nuestro objetivo principal es hallar una fórmula compacta para el valor del juego en función de n y s (en principio conformándonos con considerar los costos b_i unitarios ya descriptos). Así como la cantidad de equilibrios mixtos que sean extremos, los que, fijando un n particular se podrían contar usando el método de [1]. Pero para el valor encontramos otra manera que describimos a continuación, con la virtud de que sirve genéricamente dados como parámetros n y s.

Si un juego (cualquiera, para dos jugadores) es no degenerado (véanse [1] y otras referencias), entonces para cualquier equilibrio mixto (x, y) el soporte de x tiene el mismo tamaño que el soporte de y (es decir, las estrategias puras con probabilidad positiva son la misma cantidad para x que para y). Esto explica la gran cantidad de ceros en la probabilidad del jugador alumno, ya que hay sólo n

posiciones no nulas donde n es el tamaño del soporte de la estrategia del docente (i.e. el número de columnas).

Será interesante dentro de un equilibrio mixto hallar el soporte de alguna estrategia óptima del alumno, es decir, en qué secuencias de posiciones habrá probabilidades no nulas.

Lema 2 *En el juego A_n, para todo n, el soporte de cualquier equilibrio mixto tiene tamaño n.*

Demostración. Por lo anterior, es el mismo tamaño para ambos jugadores. Y el soporte para una estrategia óptima del docente debe tener tamaño n ya que, de haber alguna posición con probabilidad 0, el alumno mejora su estrategia si eliminase ese día en su plan de estudio. □

Proposición 4 *Sea $s > n$. Numerando en binario los índices de las filas que pertenezcan al soporte, a lo largo de esos números aparecen todos los n bits, es decir, entre todas las estrategias puras del alumno que tienen probabilidad positiva aparece cada día del 1 al n al menos una vez.*

Demostración. Dado un equilibrio mixto σ, en el caso en que cierto bit d no apareciera, con $1 \leq d \leq n$, el alumno estaría siempre omitiendo estudiar para el día d, y entonces una estrategia del docente que constituye tomar examen el día d con probabilidad positiva sería una respuesta mejor que la anterior (esto requiere que $s > n$), contradiciendo el hecho de que σ es un equilibrio. □

En otros términos, dado un equilibrio, entre todas las filas que tengan probabilidad positiva por parte del alumno, los n días aparecen indicados para estudiar (posiblemente mezclados). Esto puede pensarse como natural: un día que nunca es contemplado es candidato para la sorpresa.

Lema 3 *Para $s > n$, en todo equilibrio mixto el soporte incluye la última fila.* □

Los ejemplos anteriores dan clara cuenta de esto, que dice que con cierta frecuencia el alumno debe planear estudiar para cada uno de los n días.

Teniendo en cuenta la propiedad de *autosimilaridad* de la matriz de pagos para n días ($n > 1$), vamos a comprobar que esta puede calcularse en forma recurrente a partir de la de $n-1$ días (lo mismo pasa si considerásemos costos b_i no unitarios por día). Damos para esto unas definiciones minimales.

Dada $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, definimos $A^- \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matriz de elementos $A^-_{i,j} = (a_{i,j} - 1)$, es decir el restar 1 a cada elemento de A.

Dadas $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, definimos $g(A, B) \in \mathbb{R}^{2m\times n}$ como la matriz que resulta de la yuxtaposición vertical de A y B.

Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, definimos $h(A, B) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$ la matriz que resulta de la yuxtaposición horizontal de A y B.

Para $k \geq 1$, sea $c_k(s) = -(s, \ldots, s, 1, \ldots, 1)^t$, la columna de dimensión $2k \times 1$ que consiste en k copias de $-s$ seguidas de k copias de -1.

Con el objeto de calcular A_n la matriz del paso n, de dimensión $2^{n-1} \times n$, tenemos

Lema 4 *Valen las siguientes ecuaciones de recurrencia:*

$$A_2 = \begin{bmatrix} -s & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{n+1} = h(c_{2^{n-1}}(s), g(A_n, A_n^-)) \ (n \geq 2)$$

Demostración. Por inducción en n, veamos los pagos en el caso inductivo. Para el examen en el día 1, el no estudio corresponde a la columna 1 mitad superior, y el estudio a dicha columna mitad inferior. Para el examen en alguno de los días 2 a $n+1$, ignorarmos la columna 1. En caso de no estudio ese día, tenemos el juego de la matriz A_n, mientras que en caso de estudio ese día el costo para el alumno excede en 1 al caso de n días, lo que se refleja en la matriz A_n^-. □

Es decir, A_{n+1} se calcula replicando verticalmente A_n, restando 1 a cada elemento en el bloque inferior y agregando a izquierda la columna $c_{2^{n-1}}(s)$.

No hace falta comenzar con $n = 2$, definiendo la matriz inicial para $n = 1$ (juego degenerado/trivial) y las ecuaciones pueden sustituirse por $A_1 = [-1]$ y A_{n+1} con la misma expresión de arriba para $n \geq 1$.

Lema 5 *Si la matriz (cuadrada) A tiene valor v, entonces A^- tiene valor $v-1$.*

Demostración. El valor cambia acorde con cualquier transformación afín $\alpha x + \beta$ aplicada uniformemente a todos los elementos x siempre que $\alpha > 0$. □

Lema 6 *Si $s > 1$ y $0 > v > -s$, el juego de 2×2 cuya matriz de pagos es*

$$\begin{bmatrix} -s & v \\ -1 & v-1 \end{bmatrix}$$

no tiene valor puro, y tiene valor mixto $v((s-1)/s) - 1$.

Demostración. Sea (p, q) una estrategia conjunta, i.e. $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$. El pago para ella será $p(-sq+(1-q)v)+(1-p)(-q+(1-q)(v-1)) = p(-sq+1)+(1-q)v-1$, expresión que indica que la función mejor respuesta del jugador fila a q es una recta con pendiente $-sq+1$, la que alcanza el máximo (i.e. su mejor respuesta dado q) haciendo p máximo cuando $q \leq 1/s$ (y mínimo cuando valga la otra desigualdad). La misma expresión es igual a $q(-sp-v)+p+v-1$, que indica que la función mejor respuesta del jugador columna a p es una recta con pendiente $-sp-v$, la que alcanza el mínimo (i.e. su mejor respuesta dado p) haciendo q mínimo cuando $p \leq -v/s$ (y máximo cuando valga la otra desigualdad); acá se hace uso de que $s > 0$. Luego, el par $(p^*, q^*) = (-v/s, 1/s)$ representa un equilibrio mixto. Sustituyendo p^* y q^* en la expresión anterior, el valor del juego resulta $v((s-1)/s) - 1$. □

Sea v_n el valor de A_n.

Teorema 1 *Si $s > n \geq 1$, $v_n = s((\frac{s-1}{s})^n - 1)$.*

Demostración. La forma recurrente de las matrices lleva a calcular v_n también en forma recurrente. El caso base es el valor de A_1, $v_1 = -1$. Si v_n es el valor de A_n, v_{n+1} se obtendrá con una combinación de v_n que es el valor del bloque superior (A_n), de $v_n - 1$ que, por el lema 5, es el valor del bloque inferior (A_n^-), y de considerar la primera columna, del modo siguiente.

Expresamos al juego A_n como una secuencia de subjuegos, donde en cada etapa el alumno decide en cuál de dos subjuegos de la matriz A_n se encuentra. Para ello, elige la mitad superior con probabilidad p (suma de las probabilidades individuales de esas filas) o la mitad inferior con probabilidad $1 - p$ (a la vez suma de las probabilidades individuales de esas otras filas), para cierto $0 \leq p \leq 1$. Y el docente, análogamente, decide en cuál subjuego se encuentra, eligiendo la columna izquierda con probabilidad q o el resto de la matriz con probabilidad $1 - q$, para cierto $0 \leq q \leq 1$. Así, la matriz del juego n-ésimo (el original, que viene dado) tiene la forma

$$\begin{array}{|c|c|}\hline -s & \\ \cdot & M \\ -s & \\ \hline -1 & \\ \cdot & M^- \\ -1 & \\ \hline \end{array} \qquad (I)$$

donde M es la matriz del juego $(n-1)$-ésimo. Para el subjuego final, dado por $n = 2$, M tendrá dimensión 1×1, y la matriz (I) será

$$\begin{bmatrix} -s & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

cuyo valor es $1/s - 2 < 0$ como fue resuelto más arriba. En otro caso, si v es el valor de M, resulta $v - 1$ el valor de M^-, y dado que la primera columna en cada bloque tiene todos valores iguales, el juego (I) resulta equivalente al (i.e. con el mismo valor que el) siguiente juego de 2×2, donde $-s < v < 0$:

$$\begin{bmatrix} -s & v \\ -1 & v-1 \end{bmatrix}$$

cuyo valor es $v((s-1)/s) - 1$ por el lema 6. (Esto “resuelve” el juego de la etapa n.) Usamos entonces este valor para la recurrencia:

$$\begin{aligned} v_1 &= -1 \\ v_{n+1} &= v_n \tfrac{s-1}{s} - 1 \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

notando que el caso inductivo preserva las condiciones $-s < v_n < 0$.

Dada la forma de la recurrencia, si $n \geq 1$ se sigue que $v_n = P_n(\frac{s-1}{s})$, donde $P_n(x) = -x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1$. Resolviendo, $v_n = s((\frac{s-1}{s})^n - 1)$. $\square$

Por ejemplo, el valor de A_2 visto anteriormente, que es $1/s-2$, coincide con el v_2 dado por este esquema.

3.3. Posibilidad de incumplimiento

Hay trabajos que consideran relevante la posibilidad de que el docente no tome nunca el examen, esto es, que no cumpla "totalmente" su promesa -el tomar el examen- por encima de (o como componente de) la sorpresa. Para contemplar esta variación, extendemos el juego A_n a A'_n agregando como última columna la estrategia adicional para el docente que consiste en no tomar el examen ninguno de los n días. La matriz A'_n tendrá dimensión $2^n \times (n+1)$, con $(A'_n)_{i,n+1} = -n_1(i)$, donde $n_1(j) = |\{0 \leq k < j \ / \text{ el } k\text{-ésimo dígito de la escritura de } j \text{ en base 2 es } 1\}|$ y en el resto de los elementos coincide con la matriz original para n días sin filas borradas (de la sección 2).

Por ejemplo, para $s = 100$

$$A'_3 = -\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 0 \\ 100 & 100 & 1 & 1 \\ 100 & 1 & 101 & 1 \\ 100 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 101 & 101 & 1 \\ 1 & 101 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 102 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Corolario 1 *Si $s > n > 1$, A'_n no tiene equilibrios de Nash puros, y tiene el mismo valor v_n hallado anteriormente.*

Demostración. La columna $n+1$ está dominada por la columna n. Una vez borrada aquella, las filas impares resultan -como antes- dominadas por las pares. Eliminadas las filas impares, se obtiene la matriz A_n, a la cual se aplica el teorema anterior. □

3.4. Valor asintótico

Podemos finalmente estudiar los juegos A_n y A'_n cuando s y n crecen en forma independiente, y cuando están correlacionados, lo que expresa que el factor sorpresa puede crecer a medida en que pasa el tiempo. En el caso en que este sea proporcional al (más generalmente del orden del) número de días transcurridos, tenemos el ítem (3) en el siguiente

Corolario 2 *1. Para $s > 1$ fijo, cuando n crece el valor del juego tiende a 0.*
2. Para $n \geq 1$ fijo, cuando s crece el valor del juego tiende a $-n$.
3. Si $s = an$ con $a > 1$, cuando n crece el valor del juego tiende a $-\infty$.

Demostración. En (3), si $n \to \infty$, $(\frac{an-1}{an})^n - 1 \to e^{-1/a} - 1 < 0$, por lo tanto $v_n = an((\frac{an-1}{an})^n - 1) \to -\infty$. □

El item (1) dice que, en esa situación, en la medida en que el número de días crece, el juego se va volviendo más "justo".

4. Conclusiones

La representación y el estudio de este problema como juego matricial representan para los participantes un avance importante con respecto al razonamiento paradójico que descarta cada uno de los días, independientemente de la forma en que a posteriori se explica la paradoja. Es decir, aceptando la posibilidad del examen cualquier día, así como (opcionalmente) la de que no lo haya, ambos agentes acceden a las condiciones dadas sin que a priori prevalezcan creencias, sugerencias o incentivos, para llegar a un juego de información imperfecta que modela la situación real en un escenario iterado.

La formulación de la paradoja como juego bipersonal no se vincula en forma directa con aspectos netamente lógicos o epistemológicos, sino que permite ganar en el aspecto prescriptivo, y es razonable este efecto ya que el problema está ligado a la autorreferencia y la posibilidad de razonamiento sobre el conocimiento a lo largo del tiempo. La sola noción de sorpresa se supera a la luz de un análisis usando conceptos de teoría de juegos. Este abordaje se sostiene gracias a que esta disciplina está en gran parte motivada por argumentos de autorreferencia desde la misma presunción de racionalidad mutua.

La resolución por recurrencia empleada no es equivalente al (ni derivada del) método de inducción hacia atrás del análisis clásico aplicable a la forma extensiva de un juego, ya que hemos utilizado la forma matricial involucrando a la vez una función de costos que participa en la recurrencia. La misma técnica es en principio factible si se consideran costos b_i no uniformes, a priori bajo ciertas condiciones.

Las aplicaciones son numerosas más allá de la paradoja en sí. Son visibles en el terreno económico tales como en las decisiones dentro del marco de auditorías impositivas, así como en el terreno social, puesto que se están modelando promesas, su cumplimiento y su previsión, con costos asociados. A su vez, la explicación de la paradoja original a partir de la falsa eliminación de estrategias dominadas conlleva a estudiar el rol del concepto de sorpresa mediante la aplicabilidad del criterio de s-eliminación a otros juegos (sean o no de suma cero).

Obviamente el análisis efectuado no se presenta como una crítica dentro del terreno educativo, ni a favor ni en contra de que el estudio tenga que verse como un costo para el estudiante, como tampoco se sostiene que los exámenes sorpresa sean necesariamente apropiados o beneficiosos (quizá, después de todo, estos no existen). Al contrario, lo anterior representa el estudio de un esquema general que en distintas formas se manifiesta en situaciones reales -particularmente en la economía- en donde los agentes con información imperfecta asumen costos que dependen de las negociaciones y del cumplimiento de promesas a lo largo del tiempo.

Existen variadas posibilidades de trabajo futuro. La primera de ellas es tomar los costos b_i como parámetros adicionales. Esto incluye la atractiva posibilidad de involucrar aprendizaje o memoria, vale decir que el efecto del estudio le dé al alumno una “ventana” de conocimiento por un determinado período de tiempo, resignificando los costos de estudio para ciertos días. También la sorpresa podría darse con distintos factores s_i que varíen (eg. decaigan) a lo largo del tiempo. El siguiente paso sería una extensión en la que el docente podría tomar más de un examen. En este contexto tendrá sentido asumir que la toma de cada examen tendrá un costo para aquel, y el juego dejaría de ser de suma cero. Otra línea interesante y realista consiste en incrementar el número de jugadores, esto es, la participación de un número variable de alumnos cuyas decisiones de estudio a lo largo de los días puedan influir de unos a otros. Esto exigirá la consiguiente reformulación del concepto de sorpresa ya que esta se producirá de diferente manera en cada uno de ellos.

Referencias

1. D. Avis, G. D. Rosenberg, R. Savani and B. von Stengel, Enumeration of Nash equilibria for two-player games, Econ Theory 42, 9–37, DOI 10.1007/s00199-009-0449-x, 2010. http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/stengel/ETissue/ARSvS.pdf
2. K. Binmore, Game theory for Applied Economists, Princeton University Press, 1992.
3. D. Blackwell and M. A. Girshick, Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley and Sons, 1954.
4. J. Cargile, The Surprise Test Paradox, Journal of Philosophy 64, 550-563, 1967.
5. T. Y. Chow, The Surprise Examination or Unexpected Hanging Paradox, Amer. Math. Monthly 105, 41-51, 1998.
6. J. L. Ferreira and J. Z. Bonilla, The surprise exam paradox, rationality, and pragmatics: a simple game-theoretic analysis, Journal of Economic Methodology 15, 3, 285-299, 2008. http://dx.doi.org/10.1080/13501780802321459
7. M. Gardner, The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions, Simon & Schuster, Inc., 2nd ed., 1986.
8. J. Geanakoplos, The Hangman's Paradox and Newcomb's Paradox as Psychological Games, Cowles Foundation for Research in Economics, discussion paper no. 1128, Yale University, 1996.
9. J. Y. Halpern and Y. Moses, Taken by Surprise: The Paradox of the Surprise Test Revisited, Journal of Philosophical Logic 15, 281-304, 1986.
10. D. Kaplan and R. Montague, A paradox regained, Notre Dame Journal of Formal Logic, 1(3), 79–90, 1960.
11. S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Vol. 1. Matrix Games, Programming and Mathematical Economics. Reading-London, Addison-Wesley, 1959.
12. D. Monderer, Non-cooperative Game Theory, Technion Course 09570, 2002.
13. N. J. Mourmans, Reasoning about the Surprise Exam Paradox: An application of psychological game theory, EPICENTER Working Paper No. 12, Department of Quantitative Economics, School of Business and Economics, Maastricht University, 2017.
14. J. F. Nash, Equilibrium points in n-person games, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash. 36, 1950.
15. Y. Peres, Game Theory Alive, Dept. of Statistics, University of California, Berkeley, 2007.
16. J. Pérez Navarro, J. L. Jimeno Pastor y E. Cerdá Tena, Teoría de Juegos. Pearson Educación, 2004.
17. W. V. Quine, On a so-called paradox. Mind 62(245), 65–67, 1953.
18. R. Shaw, The Unexpected Examination. Mind 67, 382–384, 1958.
19. J. Von Neumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, 1947.