FUNCION DE TRANSFORMACION Y FUNCIONES DE PRODUCCION *

HECTOR L. DIEGUEZ * *

I

La función de transformación —o frontera de posibilidades de producción— es un instrumento analítico muy utilizado en varias áreas de teoría económica, como, por ejemplo, economía internacional y economía del bienestar. De acuerdo a mi conocimiento, no ha sido presentado un tratamiento formal que permita considerar rigurosamente las características de esta función en relación a las de las funciones de producción subyacentes. En la literatura económica ya no se cometen errores como el de Marsh [1], quien confundía los rendimientos de transformación con los de las funciones de producción. Sin embargo, no se aprecia —a mi juicio— una debida consideración del tema, por la falta de una formalización matemática que permita analizarlo adecuadamente. La demostración de convexidad (en el sentido matemático de teoría de conjuntos) de la función de transformación en el caso de funciones de producción con rendimientos constantes a escala y diferente intensidad de uso de factores, ha sido realizada sólo en términos geométricos, según los métodos propuestos por Savosnick [2] [1] y Black [3]. En un trabajo anterior [4] he rese-

* Dejo constancia de mi agradecimiento al Dr. Rolf MANTEL, cuya ayuda matemática me ha resultado una vez más indispensable. Agradezco asimismo a la Lic. Marta BLANCO su colaboración en la revisión matemática final. Como es habitual en estos casos, debo consignar que habiéndolos consultado solo en aspectos parciales del trabajo, la responsabilidad por los eventuales errores es exclusivamente mía. Una versión preliminar de este artículo fue publicada como Cuaderno Nº 1 del Instituto de Investigaciones Económicas de la Universidad Nacional de La Plata, en 1970.

** Profesor titular de Política Económica y miembro del Instituto de Investigaciones Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de La Plata.

1 El método de SAVOSNICK es válido únicamente para funciones homogéneas, de modo que no es correcta su utilización por de PABLO [1] para considerar el caso de readopción de técnicas, por cuanto las propiedades de las funciones homogéneas impiden —cualquiera sea el grado de homogeneidad— que puedan dar lugar a readopción de técnicas. Tal situación solo puede presentarse si las funciones no son homogéneas, en cuyo caso la función de transformación puede tener cualquier forma, con la única restricción de mantener derivada primera negativa.

ñado los artículos existentes sobre el tema, como también lo acaba de hacer de Pablo [5].

En este trabajo me propongo obtener expresiones de las derivadas primera y segunda de la función de transformación, cuando las funciones de producción que le dan origen son de cualquier grado de homogeneidad, sin poner tampoco restricciones en cuanto a las elasticidades de sustitución [2], excepto el hecho de excluir el caso de elasticidad nula (coeficientes fijos). El proceso de análisis comenzará demostrando la convexidad de la función de transformación para el caso de rendimientos constantes a escala y diferencias en la intensidad de uso de factores; se pondrá en evidencia la razón de ser de funciones de transformación con un tramo cóncavo y otro convexo; y se mostrará cómo resulta modificada la función de transformación si las funciones de producción son homogéneas de grado distinto de uno.

No parece relevante entrar en un análisis de la forma de la función de transformación, excepto, como se hará, en lo referente a su pendiente y convexidad. En [6] de Pablo muestra el caso de diferentes elasticidades de substitución en las funciones de producción. Cabe al respecto realizar cuatro observaciones. Primero, induce a error la referencia a reversión de factores: lo que se hace en [6] es ilustrar geométricamente la forma de las funciones en caso de diferencias en las elasticidades de substitución, y tal diferencia da lugar —en otro contexto, el correspondiente a una economía abierta— a reversión en la intensidad de uso de los factores. Segundo, para considerar el tema habría que sistematizarlo formulando además referencias al efecto de mayores o menores diferencias en la intensidad de uso de los factores en las funciones de producción. Tercero, sólo la convexidad o concavidad son esenciales en la utilización del concepto de función de transformación, tanto en economía internacional como en economía del bienestar. Y, por último, debe observarse que la forma de las funciones de óptimos y de transformación depende de la convención que se adopte en cuanto a unidades de medición de factores y productos. A este último respecto cabe señalar que en [6] se utiliza un diagrama de caja cuadrado para eliminar este problema de uni-

[2] Algunos trabajos recientes —incluso uno muy interesante de Harry JOHNSON [7]— se han presentado con el ejemplo de funciones COBB-DOUGLAS, procedimiento que oculta la influencia de las elasticidades de sustitución, al restringir el análisis al caso en que tal elasticidad es unitaria.

dades de medida y deformación de los diagramas: ello equivale a definir una relación capital-trabajo igual a la unidad para el conjunto de la economía, o, lo que es lo mismo, a definir como una unidad de capital el monto del mismo que corresponde a una unidad de trabajo. Tal convención sirve únicamente para una economía cerrada vista estáticamente, pero no es utilizable cuando se analizan dos economías o una economía en dos momentos del tiempo, si son distintas las relaciones capital-trabajo. En consecuencia, al considerar cualquier aspecto de la forma de la función de transformación debe estudiarse si el mismo depende de la convención de unidades de medición de productos y factores.

II

Sean dos funciones de producción (X, Y) en términos de dos factores (K, L),

$$Y = F\ (K_y, L_y) \tag{1}$$

$$X = G\ (K_x, L_x) \tag{2}$$

Estas funciones se postulan homogéneas lineales —correspondiendo al concepto económico de rendimientos constantes a escala— y se reescriben expresándolas en términos de intensidades medias de uso de factores, y definiendo las variables por unidad del factor L, o sea en términos "per cápita" dividiéndolas por la cantidad total de L ($L_x + L_y = L_t$). En consecuencia, (1) y (2) resultan ahora

$$y = t\ f\ (\rho_y) \tag{3}$$

$$x = (1 - t)\ g\ (\rho_x) \tag{4}$$

$$\text{siendo } \rho_i = \frac{K_i}{L_i}\,,\ t = \frac{L_y}{L_t}\,.$$

Las funciones (3) y (4) están ligadas por la restricción de factores, pues $L_x + L_y = L_t$, $K_x + K_y = K_t$, expresiones que pueden resumirse en

$$(1 - t)\ \rho_x + t\ \rho_y = \rho \tag{5}$$

siendo ρ la dotación media de recursos de la economía.

La curva de óptimos, lugar geométrico de los puntos en que se igualan las tasas marginales de sustitución de ambas funciones, adopta en nuestro caso la forma [3]

$$\frac{f}{f'} - \rho_y = \frac{g}{g'} - \rho_x = \gamma \tag{6}$$

denominando γ a esta condición de equilibrio, pues su utilización posterior hace conveniente una notación compacta.

En lo que sigue se procede a determinar $\frac{d\rho_y}{d\,t}$ y $\frac{d\rho_x}{d\,t}$. Para ello se deriva la (6), respecto a t; se reemplazan las derivadas segundas de las funciones de producción en términos de las respectivas elasticidades de sustitución; se obtiene el valor de $\frac{d\rho_y}{d\,t}$ en función de $\frac{d\rho_x}{d\,t}$; y por último se obtiene $\frac{d\rho_x}{d\,t}$ derivando la ecuación de restricción de factores (5).

$$\frac{f\,f''}{(f')^2}\;\frac{d\rho_y}{d\,t} = \frac{g\,g''}{(g')^2}\;\frac{d\rho_x}{d\,t}$$

$$\sigma_y = -\frac{f'\,(f - \rho_y\,f')}{\rho_y\,f\,f''}$$

[3] De aquí en más se prescinde de indicar los argumentos de las funciones: "f" debe leerse como f (ρ_y), etc.

Se explica a continuación cómo se llega a (6). La condición a cumplir por la función de óptimos es

$$\frac{\dfrac{\partial\,y}{\partial\,l_y}}{\dfrac{\partial\,y}{\partial k_y}} = \frac{\dfrac{\partial\,x}{\partial\,l_x}}{\dfrac{\partial\,x}{\partial k_x}}$$

y de la (3) se verifica que

$$\frac{\partial y}{\partial\,l_y} = f + t\,f'\,\frac{\partial\rho_y}{\partial\,t} = f - \rho_y\,f'$$

$$\frac{\partial\,y}{\partial k_y} = t\,f'\,\frac{\partial\rho_y}{\partial\,k} = f'$$

$$\frac{f - \rho_y\,f'}{f'} = \frac{f}{f'} -$$

Con un tratamiento simétrico de la función x se obtiene el segundo miembro de la (6).

$$\sigma_x = -\frac{g'\,(g - \rho_x\, g')}{\rho_x\, g\, g''}$$

$$\frac{\dfrac{f}{f'} - \rho_y}{\sigma_y \quad \rho_y} \; \frac{d\rho_y}{d\,t} = \frac{\dfrac{g}{g'} - \rho_x}{\sigma_x \quad \rho_x} \; \frac{d\rho_x}{d\,t}$$

expresión que, tomando en cuenta la (6), se simplifica a

$$\frac{d\rho_y}{d\,t} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,\frac{\rho_y}{\rho_x}\,\frac{d\rho_x}{d\,t} \tag{7}$$

$$\rho_y + t\,\frac{d\rho_y}{d\,t} + (1 - t)\,\frac{d\rho_x}{d\,t} - \rho_x = 0$$

$$\frac{d\rho_x}{d\,t} = \frac{(\rho_x - \rho_y)\,\sigma_x\,\rho_x}{t\,\sigma_y\,\rho_y + (1 - t)\,\sigma_x\,\rho_x} \tag{8}$$

y sustituyendo (8) en (7),

$$\frac{d\rho_y}{d\,t} = \frac{(\rho_x - \rho_y)\,\sigma_y\,\rho_y}{t\,\sigma_y\,\rho_y + (1 - t)\,\sigma_x\,\rho_x} \tag{9}$$

Si $\rho_x < \rho_y$, $\dfrac{d\rho_y}{d\,t} < 0$ y $\dfrac{d\rho_x}{d\,t} < 0$, y si $\rho_x > \rho_y$, $\dfrac{d\rho_y}{d\,t} > 0$ y $\dfrac{d\rho_x}{d\,t} > 0$, indicando si la curva de óptimos está por arriba o por debajo de la diagonal del diagrama de caja. En cualquiera de los dos casos, un movimiento sobre la curva de óptimos implica que ambas funciones se hacen más intensivas en el uso del mismo factor, puesto que en ambas líneas de producción aumenta la utilización media del factor cuyo precio relativo disminuye.

Corresponde determinar las variaciones en la producción de ambos bienes al variar t.

$$\frac{d\,y}{d\,t} = f + t\,f'\,\frac{d\rho_y}{d\,t} = f + t\,f'\;\frac{(\rho_x - \rho_y)\;\sigma_y\;\rho_y}{t\;\sigma_y\;\rho_y + (1 - t)\;\sigma_x\;\rho_x}$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{-\,t\;\sigma_y\;\rho_y\;(\rho_y\,f' - f) + t\;\sigma_y\;\rho_y\;\rho_x\;f' + (1 - t)\;\sigma_x\;\rho_x\;f}{t\;\sigma_y\;\rho_y + (1 - t)\;\sigma_x\;\rho_x}$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = f'\left[\frac{t\;\sigma_y\;\rho_y\;(\gamma + \rho_x) + (1 - t)\;\sigma_x\;\rho_x\;(\gamma + \rho_y)}{t\;\sigma_y\;\rho_y + (1 - t)\;\sigma_x\;\rho_x}\right] \tag{10}$$

$$\frac{d\ x}{d\ (1-t)} = g' \left[\frac{(1-t)\ \sigma_x\, \rho_x\ (\gamma + \rho_y)\ +\ t\ \sigma_y\, \rho_y\ (\gamma + \rho_x)}{t\ \sigma_y\, \rho_y\ +\ (1-t)\ \sigma_x\, \rho_x} \right] \qquad (11)$$

$$\frac{d\ x}{d\ t} = \frac{d\ x}{d\ (1-t)}\ \frac{d\ (1-t)}{d\ t} = -\ \frac{d\ x}{d\ (1-t)} \qquad (12)$$

verificándose que

$\dfrac{d\ y}{d\ t} > 0$, $\dfrac{d\ x}{d\ t} < 0$ y que, relacionando (10) y (11) [4]

$$\frac{d\ y}{d\ x} = -\ \frac{f'}{g'} \qquad (13)$$

Se consideran ahora las variaciones de esta derivada, para demostrar la convexidad de la función de transformación.

[4] Es más sencillo demostrar que la derivada primera de la función de transformación es igual a la relación de las productividades marginales de cada factor en las dos industrias, si se consideran las funciones en su forma original, o sea sin expresarlas en función de las utilizaciones medias (ρ_y, ρ_x) de factores.

$$d\ Y = \frac{\partial\ Y}{\partial K_y}\ d\ K_y + \frac{\partial\ Y}{\partial L_y}\ d\ L_y$$

$$d\ X = \frac{\partial\ X}{\partial K_x}\ d\ K_x + \frac{\partial\ X}{\partial L_x}\ d\ L_x$$

$$\frac{d\ Y}{d\ X} = \frac{\dfrac{\partial\ Y}{\partial K_y}}{\dfrac{\partial\ X}{\partial K_x}} \cdot \frac{d\ K_y\ +\ \dfrac{\dfrac{\partial\ Y}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial Y}{\partial K_y}}\ d\ L_y}{d\ K_x\ +\ \dfrac{\dfrac{\partial\ X}{\partial L_x}}{\dfrac{\partial\ X}{\partial K_x}}\ .\ d\ L_x}$$

Por la restricción de recursos,

$$d\ L_x = -\ d\ L_y$$
$$d\ K_x = -\ d\ K_y$$

y por la ecuación de óptimos

$$\frac{\dfrac{\partial\ Y}{\partial L_y}}{\dfrac{\partial\ Y}{\partial K_y}} = \frac{\dfrac{\partial\ X}{\partial L_x}}{\dfrac{\partial\ X}{\partial K_x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\,t} \cdot \frac{d\,t}{d\,x} = \left[-\frac{d\,t}{d\,x} \frac{1}{(g')^2} \right] \left(g'\,f''\,\frac{d\rho_y}{d\,t} - f'\,g''\,\frac{d\rho_x}{d\,t}\right)$$

y como los valores de f'', g'', $\frac{d\rho_y}{dt}$ y $\frac{d\rho_x}{dt}$ ya fueron hallados en el proceso anterior,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{d\,t}{d\,x} \frac{1}{(g')^2} \right] \left[g'\,\frac{f'\,(f - \rho_y\,f')}{-\,f\,\sigma_y\,\rho_y} \frac{(\rho_x - \rho_y)\,\sigma_y\,\rho_y}{t\,\sigma_y\,\rho_y + (1 - t)\,\sigma_x\,\rho_x} - \right.$$

$$\left. -\,f'\,\frac{g'\,(g - \rho_x\,g')}{-\,g\,\sigma_x\,\rho_x} \cdot \frac{(\rho_x - \rho_y)\,\sigma_x\,\rho_x}{t\,\sigma_y\,\rho_y + (1 - t)\,\sigma_x\,\rho_x} \right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d\,t}{d\,x} \frac{1}{(g')^2}\,\gamma\,f'\,g'\,\frac{\rho_x - \rho_y}{t\,\sigma_y\,\rho_y + (1 - t)\,\sigma_x\,\rho_x} \left[\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} \right]$$

de modo que

$$\frac{d\,Y}{d\,X} = -\frac{\frac{\partial\,Y}{\partial K_y}}{\frac{\partial\,X}{\partial K_x}}$$

De aquí resulta, además, que la derivada primera de la función de transformación indica también la relación de precios entre los dos bienes, en condiciones de competencia. En efecto, si cada factor es retribuido según el valor de su productividad marginal, y en ambas líneas de producción se paga la misma retribución por el mismo factor,

$$\frac{\partial\,Y}{\partial K_y}\,\pi_y = r$$

$$\frac{\partial\,X}{\partial K_x}\,\pi_x = r$$

donde π_y , π_x son los precios de los bienes y r la retribución unitaria del capital.

Luego,

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{\frac{\partial\,Y}{\partial K_y}}{\frac{\partial\,X}{\partial K_x}} = -\frac{\pi_x}{\pi_y}$$

y como

$$\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} = \frac{1}{\gamma + \rho_x} - \frac{1}{\gamma + \rho_y} = \frac{-(\rho_x - \rho_y)}{(\gamma + \rho_x)\ (\gamma + \rho_y)}$$

entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,t}{d\,x}\ \frac{1}{(g')^2}\ \frac{\gamma\ f'\ g'}{(\gamma + \rho_x)\ (\gamma + \rho_y)}\ \ \frac{(\rho_x - \rho_y)^2}{t\ \sigma_y\ \rho_y + (1 - t)\ \sigma_x\ \rho_x} \tag{14}$$

y tomando en cuenta (11), (12)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{\gamma\ f'}{(g')^2\ (\gamma + \rho_x)\ (\gamma + \rho_y)}$$

$$\frac{(\rho_x - \rho_y)^2}{(1 - t)\ \sigma_x\ \rho_x\ (\gamma + \rho_y) + t\ \sigma_y\ \rho_y\ (\gamma + \rho_x)} \tag{15}$$

III

Consideremos ahora funciones homogéneas de cualquier grado, tales como V (de grado m) y Z (de grado n),

$$V = F_1\ (K_v, L_v)$$

$$Z = G_1\ (K_z, L_z)$$

Estas funciones se reescriben con el propósito de descomponerlas de modo que resulte una función básica homogénea de primer grado y una transformación de escala. Supongamos que las funciones básicas que corresponden son, respectivamente, las y, x estudiadas en II. Expresando todo en términos "per cápita", resulta entonces

$$v = y^m$$

$$z = x^n$$

Este procedimiento, muy útil para el tratamiento matemático de las funciones homogéneas no lineales, utiliza el hecho de que, geométricamente, nada se modifica en el plano K, L si se hace variar el grado de homogeneidad de las funciones, manteniendo en lo demás la estructura de las mismas; sólo se producen cambios de escala en los ejes verticales que miden niveles de producción.

De ese modo, el análisis de la función de transformación entre v, z resulta sencillo al estar ya estudiada la transformación entre x, y.

$$\frac{dv}{dt} = m\ y^{m-1} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = n\ x^{n-1} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{m\, y^{m-1}}{n\ x^{n-1}} \frac{dy}{dx} \tag{16}$$

y la (16) es negativa por serlo $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\left[\frac{dv}{dz}\right]}{dt}\ \frac{dt}{dz} = \frac{d\left[\frac{dz}{dz}\right]}{dt}\ \frac{dt}{dx}\ \frac{dx}{dz}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{m\, y^{m-1}}{n\ x^{n-1}}\ \frac{dt}{dx}\ \frac{dx}{dz}\left[\frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dt} + \frac{dy}{dx}\left[\frac{m-1}{y}\ \frac{dy}{dt} - \frac{n-1}{x}\ \frac{dx}{dt}\right]\right]$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{m\ y^{m-1}}{n^2\ x^{2n-2}}\left[\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{m-1}{y}\ \frac{dy}{dx} - \frac{n-1}{x}\right)\right] \tag{17}$$ [5]

[5] La (17) indica el valor de $\frac{d^2v}{dz^2}$ en función de t, dependiendo la función de los parámetros de las funciones de producción. Por ejemplo. si éstas son del tipo C.E.S.

$$V = \left[\ s\ K_y^{-a} + (1 - s)\ L_y^{-a}\ \right]^{-\frac{m}{a}}$$

$$Z = \left[\ r\ K_x^{-b} + (1 - r)\ L_x^{-b}\ \right]^{-\frac{n}{b}}$$

los parámetros serán los de distribución (que indican asimismo el concepto de intensidad de uso de factores, o sea r, s) las elasticidades de substitución ($\sigma_y = \frac{1}{1+a}$, $\sigma_x = \frac{1}{1+b}$) y los parámetros de escala (m, n).

Lo mismo ocurre con la (15), excepto que en dicha expresión no aparecen m y n por ser y, x de rendimientos constantes a escala.

IV

Corresponde ahora analizar los resultados obtenidos, que se sintetizan en las expresiones (13), (15), (16) y (17).

1. De (13) y (15) surge que $\frac{d\,y}{d\,x} < 0$ y $\frac{d\,v}{d\,z} < 0$, confirmando la regla general de que la función de transformación siempre debe tener pendiente negativa, pues sobre la curva de óptimos (denominada a veces, por esa razón, curva de conflictos) el aumento de la producción de un bien sólo puede obtenerse si la del otro bien se contrae.

2. Si $\rho_y = \rho_x$ ambas funciones de producción tienen la misma intensidad de uso de factores (la curva de óptimos es la diagonal de la caja). Surge de la (15) que $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, o sea que en ese caso la función de transformación entre y, x es una recta. En cuanto a la transformación entre v, z, la forma de la función depende de los grados de homogeneidad de dichas funciones de producción. Se distinguen tres casos: a) si $m > 1$, $n > 1$, entonces $\frac{d^2v}{dz^2} > 0$; si $m < 1$, $n < 1$, resulta $\frac{d^2v}{dz^2} < 0$; y si $m > 1$, $n < 1$ (o viceversa) existen un tramo de concavidad y otro de convexidad.

Lo expresado anteriormente es la demostración matemática del concepto aceptado que dos funciones de producción con igual intensidad de uso de factores dan lugar (cualesquiera sean las elasticidades de substitución) a una función de transformación recta si las funciones son de rendimientos constantes a escala; la transformación es cóncava si las dos funciones de producción son de rendimientos crecientes a escala; convexa si son de rendimientos decrecientes; y presenta un tramo de concavidad y otro de convexidad si una función es de rendimientos crecientes y la otra de rendimientos decrecientes.

Este último caso resulta de las variaciones en las ponderaciones en la expresión entre paréntesis, dentro del corchete, en la (17). En efecto, $\frac{d\,y}{d\,x}$ es una constante en este caso y al aumentar la producción de y disminuye la de x, variando la ponderación dada a dos términos de signos opuestos.

Debe indicarse que el punto de inflexión se presenta donde

$$\frac{m-1}{y}\,\frac{d\,y}{d\,x} - \frac{n-1}{x} = 0$$

que puede escribirse

$$\frac{d\,y}{d\,x}\,\frac{x}{y} = \frac{n-1}{m-1}$$

o sea que el punto de inflexión en la transformación entre v, z corresponde a niveles de producción tales que la elasticidad de la función de transformación de las funciones homogéneas lineales correspondientes (y, x) es igual a la relación de los apartamientos que las funciones v, z presentan respecto a los rendimientos constantes a escala.

3. Si $\rho_y \neq \rho_x$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$: si dos funciones de producción homogéneas lineales difieren en la intensidad de uso de los factores, entonces la función de transformación es convexa. La expresión $(\rho_x - \rho_y)^2$ garantiza dicha convexidad sea que la función de óptimos esté por arriba o por debajo de la diagonal. En este caso de diferente intensidad de uso de factores, el signo de la derivada segunda de la función de transformación entre funciones de producción homogéneas no lineales depende del signo del corchete en la (17) cuyo primer término, $\frac{d^2y'}{dx^2}$, se ha demostrado es negativo. Por consiguiente si v, z son funciones homogéneas de grado menor que uno ($m < 1$, $n < 1$), se acentúa la convexidad. Si $m > 1$, $n > 1$ el resultado depende de si predomina la convexidad resultante de la diferencia en intensidad de uso de factores o la concavidad que imprimen a la curva de transformación los rendimientos crecientes. Esta demostración confirma el concepto económico habitual, tal como se lo formula por ejemplo en [8]. Por último, si $m > 1$, $n < 1$ (o

viceversa) entonces una parte de la función de transformación se hará más convexa y otra parte menos, pudiendo esta última parte llegar a presentar concavidades, según la intensidad de los rendimientos crecientes de la correspondiente función de producción.[6]

[6] A modo de comentario final, deseo indicar que las conclusiones de este trabajo fueron incluidas en mi comentario al artículo [5] de de PABLO en el VI Congreso de Centros de Investigaciones Económicas, que tuvo lugar en Rosario a fines de octubre de 1970. En el intercambio de ideas que se suscitó al respecto, el profesor Julio H. G. OLIVERA me hizo notar que las condiciones de convexidad de la superficie de transformación en un mundo de n bienes y m factores han sido consideradas por LANCASTER (*Mathematical Economics*, New York, 1968). Considero que ello no resta utilidad a la presentación que formulo, pues las expresiones matemáticas que presento permiten precisar en forma explícita —para el caso de dos bienes y dos factores— la influencia de las elasticidades de substitución y de los rendimientos a escala. Especificadas las funciones de producción, las fórmulas no se limitan a proporcionar el signo sino el valor de las derivadas en cada punto, por lo que permiten evaluar las consecuencias sobre la forma de la función de transformación del no cumplimiento de algunos de los requisitos que aseguran su convexidad. Además, resulta de interés su utilización —como se hace en el trabajo— para evaluar casos particulares de interés, como el que da lugar a una transformación con un tramo cóncavo y otro convexo.

Un punto del trabajo que necesita ser aclarado —por cuanto en la discusión se produjo al respecto una confusión— es el correspondiente a reversión en el uso de factores (p. 3). Con funciones de producción homogéneas y dotación fija de factores ofrecidos inelásticamente, diferencias en las elasticidades de sustitución de las funciones de producción determinan la existencia de una relación crítica entre factores. Si la dotación de factores de una economía se caracteriza por una relación capital-trabajo superior a la crítica, será por ejemplo más intensiva en capital una producción, pero si la relación es menor a la crítica será más intensiva en capital la otra producción. Dada la dotación fija de factores queda determinada qué producción será intensiva en qué factor, de modo que en una economía cerrada no aparece reversión en la intensidad de uso de factores. Ello se debe —como se muestra en [6]— a que el tramo admisible de relaciones entre factores queda obligadamente a un solo lado de la relación crítica.

En el contexto de una economía abierta, la reversión aparece no en el sentido de que en un país cambie la intensidad relativa de factores en sus producciones sino en el sentido de que si dos países tienen dotaciones medias de factores que sean en un caso menor y en otro mayor que la relación crítica, entonces la producción que en un país sea intensiva en trabajo será intensiva en capital en el otro país, y viceversa.

Sólo si las funciones de producción no son homogéneas puede ocurrir que en un país —ante cambios en la demanda interna o al pasar de economía cerrada a economía abierta— se produzcan reversiones en la intensidad relativa de factores en las dos funciones de producción, de modo tal que la que era por ejemplo más intensiva en capital pase a ser más intensiva en trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARSH, D. B. *"Comercio mundial e inversión internacional"*, versión castellana editada por Fondo de Cultura Económica, México, 1957.

[2] SAVOSNICK, K. M. "The box diagram and the production possibility curve", *Economisk Tidskrift,* September 1958.

[3] BLACK, J. "A formal proof of the concavity of the production possibility curve". *Economic Journal,* March 1957.

[4] DIEGUEZ, H. L. "Dos instrumentos de análisis en la teoría pura del comercio internacional: el diagrama de caja y la función de transformación de una economía" (mimeo, 1964).

[5] de PABLO, J. C. "Una reseña sobre la frontera de posibilidades de producción" (mimeo, 1970).

[6] de PABLO, J. C. "La reversión de factores, la readopción de técnicas y la frontera de posibilidades de producción". *Económica,* Mayo-Agosto 1970.

[7] JOHNSON, H. G. "Factor market distortions and the shape of the transformation curve". *Econometrica,* July 1966.

[8] BATOR, F. M. "The simple analytics of welfare maximization". *The American Economic Review,* March 1957.

FUNCION DE TRANSFORMACION Y FUNCIONES DE PRODUCCION

Resumen

Se ha determinado una expresión matemática que demuestra que dos funciones de producción que tienen igual intensidad de uso de factores generan una función de transformación recta si los rendimientos a escala son constantes: cóncava, si son crecientes; convexa, si son decrecientes; y con un tramo cóncavo y uno convexo si una función de producción es de rendimientos crecientes a escala y la otra de rendimientos decrecientes, en cuyo caso el punto de inflexión resultará a niveles de producción tales que la elasticidad de la función de transformación de las funciones homogéneas lineales correspondientes es igual a la relación de los apartamientos que las funciones homogéneas de grado distinto de uno presentan respecto a los rendimientos constantes a escala.

Si las funciones de producción difieren en la intensidad de uso de factores, la curva de transformación es convexa en caso de que aquellas sean de rendimientos constantes a escala. La convexidad se acentúa en el caso de ser ambas de rendimientos decrecientes. Surge una fuerza que contrarresta la convexidad —proveniente de la diferencia en intensidad de uso de factores— si una o ambas funciones de producción son de rendimientos crecientes. Si ambas lo son, pero de escasa magnitud, la curva de transformación puede mantener su convexidad; si una función de producción es de rendimientos crecientes y la otra de rendimientos decrecientes, un tramo de la transformación se hace aún más convexa y el otro menos, pudiendo llegar este último tramo a ser cóncavo.

TRANSFORMATION FUNCTION AND PRODUCTION FUNCTIONS

Summary

A mathematical formula is derived in order to discuss the concavity-convexity of the transformation curve in a simple two goods-two factors model, using the parameters of the underlying production functions representing returns to scale and elasticities of substitution.

Several cases are considered. For instance, two production functions with the same factor intensity generate a lineal transformation function if the returns to scale are constant; concave if such returns are increasing; convex, if they are decreasing; and with two zones, one concave and the other one convex if one production function has increasing returns to scale and the other one decreasing returns; in such a case the inflexion point appears where the allocation of factors is proportional to the relation of the departures from constant returns to scale. The formula is also applied to consider other cases.