UN MODELO ESTOCASTICO DE DISTRIBUCION DE INGRESOS *

OSCAR JOSE SBARRA MITRE * *

1. – *Introducción*

Una característica inherente a todo proceso de desarrollo la constituye el objetivo, implícito o declarado, de mejoramiento de la distribución del ingreso, tanto desde el punto de vista funcional como personal. Tal concepción del "mejoramiento" es interpretada, comúnmente, como tendencia a la igualación de las rentas percibidas por los integrantes de la comunidad, o, dicho de otra manera, como propensión a lograr una correspondencia biunívoca entre idénticos porcentajes de población y de ingreso nacional.

Esta idea ha informado la trama teórica y los fines de la mayoría de los modelos econométricos de distribución personal que, casi invariablemente, se han propuesto mediciones estadísticas susceptibles de comparaciones para distintos tiempos y lugares, sobre la base de los llamados coeficientes de concentración, cuya misión es determinar grados de desigualdad (igualdad) de la distribución en los universos analizados. Por supuesto, la pauta comentada resulta el eje central de los planes de política económica en los países no desarrollados, donde la polarización es evidente, cimentando la denominada "economía dicotómica".

Sin embargo, la existencia de diferencias individuales congénitas (capacidad, habilidad, inteligencia, etc.) y el propio sentido de la justicia distributiva, lleva a considerar equitativa, no la mera igualdad en el ámbito cuantitativo que, incluso, puede ser artificiosa, sino la nivelación de posibilidades de progreso para todos. En este aspecto los modelos econométricos sólo por eventualidad, y como aportes secundarios, han explicitado algunas conclusiones.

Si se reconoce que la "conservación de la desigualdad", afincada

* El autor agradece a los profesores Dra. Clotilde A. BULA y Dr. Roberto FATTAL JAEF, sus alentadores comentarios pero los exime de cualquier responsabilidad por el resultado del trabajo.

** Jefe de Departamento Análisis de Sistemas del CONADE. Profesor de la Universidad Nacional de Buenos Aires, Católica Argentina y Argentina de la Empresa.

en el acrecentamiento simultáneo, en proporciones similares, de los distintos estratos de renta —o sea, la igualación de las probabilidades de transición a tramos superiores de ingresos—, implica una evolución positiva del bienestar colectivo, ha de coincidirse en la necesidad de estructurar el modelo teórico que permita verificar dicho avance a través de un proceso de desarrollo.

Este resulta, en breves palabras, el objetivo del presente trabajo. Para llegar a él se comenzará por analizar, de los modelos utilizados hasta el presente, aquel que permite derivar conclusiones próximas al mismo.

2. – *El análisis de Pareto*

La formulación de Vilfredo Pareto sobre la función que refleja la distribución de los ingresos en todas las comunidades económicas, es ya parte de la antología econométrica, habiéndose desarrollado acerca de ella numerosos enfoques, algunos con notorios errores —que se originan en el propio Pareto—, fundamentalmente en lo que hace a la interpretación del papel que juega el parámetro α.

La ley paretiana de primera aproximación se expresa

$$N(x) = A\, x^{-\alpha} \qquad (*) \qquad (1)$$

donde N (x) es el número de rentistas que perciben un ingreso igual o superior a x. Es una función de frecuencias acumuladas que no está definida para $x = 0$.

La (1) se interpreta como estocástica si $n(x) = \frac{N(x)}{N}$, siendo n(x) la frecuencia acumulada relativa, por lo que

$$n(x) = \frac{N(x)}{N} = \frac{A}{N} \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad (2)$$

Por cuanto la (2) sigue sin estar definida para $x = 0$, se parte de un ingreso mínimo x_0, superado por toda la población.

Además, de acuerdo a (2), P (x) es la probabilidad de que la

(*) La fórmula de PARETO fue redescubierta en 1935 por el Profesor ZIPF ("The psychobiology of language", Boston, 1935; "National unity and disunity", Bloomington, 1941; "Human behavior and the principle of least effort", Cambridge, 1949), en el campo de la psicología social. Por ello, a veces se la denomina "ley de ZIPF".
Véase HOFSTÄTTER "Psicología social", y el buen trabajo del Profesor Héctor BOGO "Decisiones en comercialización", Apéndice A.

renta de una persona (variable aleatoria ξ) supere a x, vale decir es la antiacumulada

$$P(x) = \frac{A}{N} \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} = P(\xi > x) \tag{3}$$

de la cual se deduce la función de distribución

$$F(x) = 1 - P(x) = 1 - \frac{A}{N} \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} = P(x_0 < \xi \leq x) \tag{4}$$

monótonamente creciente a la derecha de x_0, siendo

$$P(x_0) = \frac{A}{N} \cdot \frac{1}{x_0^{\alpha}} = 1 \tag{5}$$

de donde

$$x_0^{\alpha} = \frac{A}{N} \tag{6}$$

Obviamene, (4) cumple las condiciones de una función de distribución inferiormente truncada, con grado de truncadura en x_0, o sea

$$F(x) \to 1 <=> x \to +\infty$$
$$F(x) \to 0 <=> x \to x_0$$

y, lógicamente

$$P(x) + F(x) = 1 \; ; \; \forall \, x$$

La función de densidad está expresada por

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x} = \alpha \frac{A}{N} \cdot \frac{1}{x^{\alpha+1}} \tag{7}$$

y, como

$$\alpha \frac{A}{N} = \text{constante}$$

es obtenible a partir del tipo VI de curva de Karl Pearson, pues de

$$f(x) = C\,(x-a)^{p-1}\,(x-b)^{q-1}$$
$$x > b \; ; \; a < b \; ; \; q > 0 \; ; \; p + q < 1$$

para

$$a = 0 \; ; q = 1 \; ; p = -\alpha$$

se verifica

$$f(x) = \frac{C}{x^{\alpha+1}} \tag{8}$$

idéntica a (7) si $C = \alpha \frac{A}{N}$. La distribución de Pareto pertenece, al igual que muchas otras, a la familia pearsoniana.

Reemplazando en (7) el valor $\frac{A}{N}$ despejado en (6), se tiene

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha + 1} \tag{9}$$

y en la (3)

$$P(\xi > x) = P(x) = \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha} \tag{10}$$

lo que confirma las condiciones de la antiacumulada:

$$P(x_0) = 1 \; ; \; P(+\infty) = 0$$

Se arriba a resultados semejantes si (1) viene dada directamente para valores relativos de la acumulada, enunciándola, entonces,

$$P(x) = A x^{-\alpha} \tag{11}$$

donde $A = x_0^{\alpha}$, ya que $P(x_0) = 1$.

La función de distribución se visualiza, a partir de la (11), como probabilística truncada, cuyo conjunto de definición, (D), es

$$D = \{ x \ni x_0 < \xi < +\infty \}$$

y, en general, su momento j-ésimo se expresa

$$\mu_j = \frac{\alpha x_0^j}{\alpha - j} \tag{12}$$

definido $\forall \; \alpha > j$. La esperanza matemática, extraída de (9), resulta

$$E(\xi) = \int_{x_0}^{+\infty} x \, f(x) \, dx = \alpha x_0^{\alpha} \int_{x_0}^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{x^{\alpha - 1}} \right]_{x_0}^{+\infty} \tag{13}$$

$$E(\xi) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \tag{14}$$

por lo que la distribución tiene momento de orden uno (media aritmética finita y positiva) solo si $\alpha > 1$, pero existe $\forall \; \alpha > 0$.

La (14) ha inducido a algunos autores a exigir, como condición de existencia de la función paretiana, $\alpha > 1$, pero estudios econométricos, como los del Profesor Theil, han demostrado fehacientemente lo contrario. Es innecesario, desde el punto de vista teórico, recordar que una distribución puede existir sin tener media definida en el campo real, como ocurre con la conocida distribución de Cauchy.

Por otra parte, si bien no es obtenible la esperanza matemática para $\alpha \leqslant 1$, en cambio se da la media geométrica

$$G\ (\xi) = x_o\ e^{\frac{1}{\alpha}} \tag{15}$$

y la armónica, definida por la inversa del momento $j = -1$,

$$H\ (\xi) = x_o\ \frac{\alpha + 1}{\alpha} \tag{16}$$

para $\alpha > 0$. La media antiarmónica, lograda relacionando el momento segundo con el primero.

$$H_A\ (\xi) = x_o\ \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2} \tag{17}$$

se da para $\alpha > 2$. Tal condición también debe cumplirse para el típico parámetro de dispersión, ya que el desvío standard

$$\sigma = x_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}} \tag{18}$$

depende del momento segundo.

De la última ecuación se desprende el papel de α como medida de desigualdad. En efecto, cuando α crece (en valor absoluto) σ disminuye y viceversa, por lo que una magnitud menor de $|\alpha|$ indica una distribución más igualitaria.

El capítulo de la larga serie de controversias acerca del significado de α - iniciado por el mismo Pareto al brindar una explicación equivocada (sostenía una menor desigualdad si α decrecía), opinión sustentada por relevantes econometristas, como Oskar Lange y Harold Davis, y contrarrestada por Benini y Bresciani-Turroni que dieron el cabal sentido de α - parecía definitivamente cerrado hasta que una publicación reciente del profesor Samuelson tiende a demostrar que α es una medida de la kurtosis de la distribución que no afecta sus parámetros de dispersión. No obstante, sin dejar de tener en cuenta tan autorizada opinión, es dable apreciar la relación inversa entre α y σ, directamente de (18), o bien, según (14), establecer

$$\alpha = \frac{E\ (\xi)}{E\ (\xi)\ -x_o}\quad (^*) \tag{19}$$

que indica un α mayor cuando la renta media se aproxima a la mínima, es decir cuando σ baja. Si $E\ (\xi) = x_0$ (todos perciben la renta mínima), α es, prácticamente, $+\infty$.

La función paretiana es homogénea de grado $-\alpha$ similar a las conocidas curvas isoelásticas de demanda siendo $-\alpha$ su elasticidad, exteriorizada por

$$\alpha = -\frac{d \log N(x)}{d \log x} \tag{20}$$

Se cumple, entonces, la identidad de Euler para las funciones homogéneas

$$-\alpha N(x) \equiv x \frac{d\ N(x)}{dx} \tag{21}$$

$$x \frac{d\ N(x)}{dx} = -\alpha\, Ax^{-\alpha\ -1} x = -\alpha\, Ax^{-\alpha} = -\alpha\, N(x) \tag{22}$$

y, dividiendo ambos miembros de (21) por N(x), se tiene

$$-\alpha \equiv \frac{x}{N\ (x)} \cdot \frac{d\ N(x)}{dx} \tag{23}$$

que es la elasticidad constante de la ley de Pareto, comprobable, también, a través de la expresión logarítmica de la (1)

$$\log N(x) = \log A - \alpha \log x \tag{24}$$

cuya derivada primera, constante por tratarse de la ecuación de una recta, resulta $-\alpha$, verificando (21). La perfecta equidad en la dis-

(*) Es obvio que, de acuerdo a (19) resulta $\alpha < 1$ solo si $x. < 0$, es decir si el ingreso mínimo es negativo circunstancia que ha fundamentado la creencia de un $\alpha > 1$ en la forma paretiana pues x_o. a lo sumo, puede ser nulo, pero no negativo. Sin embargo un $x_o < 0$ no aparece más irreal que el fenómeno del desahorro que mantiene la identidad del ingreso para cualquier volumen de éste, cuando el consumo lo supera. El ejemplo típico es el de la función consumo con consumo autónomo, es decir con elasticidad asintótica a la unidad por izquierda, si la función es lineal ($\epsilon < 1$, constantemente). Así como las mediciones econométricas dan ecuaciones de consumo con ordenada al origen, también verifican $\alpha < 1$ en la fórmula de PARETO. El consumo superior al ingreso implica similares consecuencias que el ingreso negativo, siendo el desahorro, por tanto, un supuesto tan fuerte como el $x_o < 0$, dándose ambos para niveles inferiores de renta.

tribución, es decir si E $(\xi) = x_0$ y α es $+\infty$, implicará una recta normal al eje log X.

La función de Pareto no es sino una versión de la ley de Galton o del efecto proporcional de Gibrat, correspondientes a la distribución logarítmico-normal de Kapteyn, en donde las variaciones de la variable son proporcionales a su peso, por lo cual se utilizan logaritmos para su representación. Tales distribuciones, al igual que la paretiana, se presentan notablemente asimétricas a la derecha, cortando al eje de abscisas en el punto correspondiente al grado de truncadura, ya que la función de distribución no existe para valores iguales o menores que dicho punto. Semejantes distribuciones implican concentración de las frecuencias en los valores bajos de la variable, mientras que éstas se dispersan para magnitudes elevadas de la misma. En general, aplicadas a la distribución de ingresos, ajustan mejor que la función paretiana, pero ésta es más apta para ingresos altos.

La probabilidad de que un perceptor de rédito esté comprendido en el tramo $[x_1 - x_2]$, es

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) = \frac{A}{N}\left(x_1^{-\alpha} - x_2^{-\alpha}\right) \quad (25)$$

por (4) y (7).

Ahora bien. ¿Cuál será la probabilidad de transición de un tramo de ingreso a otro? Trataremos de buscar respuesta al interrogante. El diferencial de la (1) se obtiene

$$d\ N(x) = -\alpha\, A x^{-\alpha-1}\ dx \quad (26)$$

y relacionándolo con N (x)

$$\frac{dN(x)}{N\ (x)} = \frac{-\alpha\, A x^{-\alpha-1}}{A x^{-\alpha}}\ dx \quad (27)$$

$$\frac{dN(x)}{N\ (x)} = -\frac{\alpha}{x}\ dx \quad (28)$$

o sea que el decrecimiento relativo de los rentistas que reciben un ingreso dado (x), disminuye al crecer x. Vale decir que el paso a niveles de renta superiores es más probable a medida que se parte de estratos más altos. El signo negativo del segundo miembro de (28) corresponde a que $\dfrac{dN(x)}{N(x)}$ es un decrecimiento en función del crecimiento de x.

Análogos resultados se dan a partir de (23) —si se nos permite la licencia de tratar los incrementos infinitesimales, en el límite, como variaciones finitas—, pues la elasticidad se determina por la relación entre las variaciones relativas de la función y la variable

$$\frac{d\,N(x)\,/\,N(x)}{dx\,/\,x} = -\alpha \tag{29}$$

$$\frac{d\,N(x)}{N(x)} = -\alpha\,\frac{dx}{x} \tag{30}$$

y, en términos porcentuales, tanto (28) como (30)

$$\frac{1}{N(x)} \cdot \frac{d\,N(x)}{dx} = -\frac{\alpha}{x} \tag{31}$$

de donde, la tasa de decrecimiento de perceptores de réditos que superan o igualan a x, disminuye conforme x aumenta.

La probabilidad de paso es $1 - \dfrac{\alpha}{x}$ y en el límite, para $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right) = 1$$

se convierte en certeza.

La conclusión extraída, que tiene una clara explicación lógica partiendo de ciertos supuestos, ha sido utilizada por los autores marxistas —permanentemente preocupados por dar base ideológica a sus modelos— para intentar la enunciación de una ley dialéctica. A esta tentativa parece no poder sustraerse el profesor Lange. Es bastante comprensible que tales efectos pueden atribuirse —quizás con mayor acierto— a las desigualdades implícitas en las habilidades individuales, tanto como a las consecuencias de particulares ordenamientos jurídico-sociales o sistemas económicos determinados. Por supuesto que el marco o matriz de condiciones imperantes puede obrar en el sentido de acentuar o morigerar las diferencias interpersonales.

Es notorio que si α creciera —en lugar de ser constante—, las probabilidades de transición se aproximarían entre sí, igualándose si el ritmo de incremento de α fuera similar al de x. Esto indica claramente que cualquier curva logarítmica cóncava hacia el origen implicaría una más justa distribución medida en función de las probabilidades de paso. En tal sentido, quizás, fue enunciada la ley de Benini para la distribución de las rentas provenientes del capital

$$\log N(x) = \log H - \alpha' (\log x)^2 \tag{32}$$

que, en cierta forma, corresponde a la conclusión de la ley paretiana, si se supone que las rentas del capital forman parte de los más altos ingresos, para los cuales las diferencias entre las probabilidades de paso no son muy grandes.

3. – *Un modelo con proceso estocástico*

El enfoque de la ley de Pareto ha sido completamente estático. Sin embargo, las transiciones se producen en el tiempo, por lo que su análisis no puede ser sino dinámico (*).

Un tratamiento tradicional, del tipo estático-comparativo (no porque el tiempo sea una variable discreta, sino por cuanto se comparan estados de equilibrio finales, hechos ex-post), es el realizado a través de los coeficientes de Gini, que calculan la concentración de las conocidas curvas de Lorenz. Tal valor se expresa

$$C = 2 \int_0^1 (x-y)\, dx \tag{33}$$

donde la renta (x) y el número de perceptores (y) se dan como magnitudes porcentuales (o en tanto por uno) con relación a la renta nacional y el total de población, y sus límites son el cero, para una distribución real igual a la curva de equidistribución ($y = x$), situación que refleja la perfecta igualdad —de ahí que no exista concentración—, y el uno cuando el área de desigualdad (entre $y = x$ y la distribución real) se confunde con la del triángulo, que explicita todas las alternativas posibles de distribución, vale decir cuando la concentración del ingreso es máxima.

El problema, no obstante, subsiste, pues los coeficientes de Gini sirven para comparaciones ex-post —entre distintos tiempos y lugares— del estado total de la distribución, pero no miden la movilidad entre los tramos, salvo indirectamente.

Para reflejar tal hecho hemos de construir una matriz que con-

(*) O, al menos, ha de admitirse un análisis de cinemática económica, es decir sin estudiar las fuerzas que originan el desplazamiento, en el tiempo, de un estado a otro.

tenga las cantidades de perceptores de rentas de distintos estratos prefijados, en un momento t, en el sentido de las filas, y en un momento t + 1, en el de las columnas. La suma de las filas proporciona el total de perceptores de cada tramo. Es obvio que para obtener los datos estadísticos que "llenen" el modelo, se puede proceder por medio de muestras del universo. Pero en el presente trabajo sólo analizaremos la viabilidad teórica del modelo.

Llamando λ_{ij} a los elementos de la matriz que explicitan la cantidad de perceptores que pasarán del tramo i al j, dada la matriz para n estratos

				t + 1	
		1	2	3	n
	1	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{1n}
	2	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{2n}
t	3	λ_{31}	λ_{32}	λ_{33}	λ_{3n}
	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	n	λ_{n1}	λ_{n2}	λ_{n3}	λ_{nn}

se tiene que $\sum_{J=1}^{n} \lambda_{ij} = \Delta_i$, siendo Δ_i, los perceptores correspondientes al tramo i de t. Es dable extraer tres índices muy importantes a partir de $[\lambda_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, en relación a $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \Delta$, donde Δ es el total de la población que recibe rentas. Considérense los λ_{ij} divididos en tres grupos: los correspondientes al triángulo superior de $[\lambda_{ij}]$ (sin comprender la diagonal principal, vale decir sólo los elementos que se encuentran arriba de ella); la diagonal principal; y los elementos del triángulo inferior (los ubicados debajo de la diagonal principal). El primer grupo comprende los rentistas que han pasado a tramos superiores, el segundo los que han permanecido en el mismo estrato y el tercero aquellos que han descendido en el nivel de su ingreso. Relacionándolos con Δ nos proporcionan coeficientes representativos de la importancia de cada conjunto, o sea

$$\pi = \left. \frac{\Sigma \lambda_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \right\} \quad \forall\, i < j \tag{35}$$

$$\rho = \frac{\Sigma \lambda_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad \forall\, i = j \tag{36}$$

$$\sigma = \frac{\Sigma \lambda_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad \forall\, i > j \tag{37}$$

donde

$$\pi + \rho + \sigma = 1.$$

Cada coeficiente oscila entre cero y uno, resultando nulos dos de ellos si el tercero es igual a la unidad. Es factible establecer vinculaciones entre ellos de manera de comparar su importancia relativa. Por ejemplo, la relación

$$\frac{\pi}{\sigma} \lesseqgtr 1$$

o bien la

$$(\pi - \sigma) \ni A \qquad A = [1, -1]$$

indicarían progresivos avances en el bienestar colectivo mientras mayores sean, o, inversamente, denuncian estados estacionarios o regresivos; pero cabe reconocer que sólo brindan una vaga idea de la evolución positiva, neutra o negativa *.

En cambio, a partir de la $[\lambda_{ij}]$, se obtienen coeficientes como

$$a_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\Delta_i} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{38}$$

que señalan los valores de las frecuencias relativas de paso de un estado a otro, cumpliéndose

$$0 \leqq a_{ij} \leqq 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; \Delta_i = \Delta$$

siendo, como ya se había determinado, Δ el total de perceptores.

Con los a_{ij} $(i,j = 1,2, \ldots n)$, se forma una nueva matriz similar a la matriz de transición de un proceso estocástico en cadenas de Markov

(*) Se podría hablar, por ejemplo, de un óptimo paretiano solo si $\sigma = 0$.

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & t+1 & & \\
 & & 1 & 2 & \cdots & n \\
\hline
 & 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & 2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
t & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

ya que cada fila de la misma posee las características de los vectores probabilísticos: sus componentes son no negativos y su suma es uno.

Es interesante saber si el sistema así determinado, para $t \to +\infty$, tiene valores de equilibrio, es decir si es estable en probabilidad. Si se cumple

$$\lim_{t \to +\infty} [a_{ij}]^t = [\overline{a_{ij}}] \tag{40}$$

en donde los $\overline{[a_{ij}]}$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ son los valores de equilibrio, decimos que el sistema posee régimen permanente, o bien que es ergódico. Por otra parte, se sabe que si $[a_{ij}]$ $(i,j = 1,2,\ldots n)$ es una matriz estocástica, $[a_{ij}]^t$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$, también lo será.

Se ha de advertir que, aún cuando se sostiene como necesaria la condición $\overline{a_{ij}} \neq 0$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ para que el sistema sea regular (ergódico), esto es cierto si se parte de valores distintos de cero, de lo contrario, existen ciertos casos de matrices estables con elementos nulos, si hay ceros de partida, como el de una matriz con una columna de unos y las restantes nulas —donde los vectores filas están compuestos por elementos no negativos que suman uno—, cuyo límite es la misma matriz; o la matriz unidad, pues $I^t = I$ para la matriz identidad de cualquier orden. En cambio, la matriz con la diagonal secundaria de unos y los demás elementos nulos no es ergódica, ya que la sucesión de sus potencias es oscilante, dando alternativamente la matriz unitaria y la matriz original. En general, si una matriz estocástica es de la forma $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$, donde [O] son submatrices cuadradas, sus potencias pares será del tipo $\begin{bmatrix} C & O \\ O & D \end{bmatrix}$ y las impares reproducirán la forma original. El sistema se dice, entonces, periódico, vale decir, oscila entre dos subconjuntos de estados (es generalizable para n subconjuntos). Las matrices de esta forma se denominan separables porque los subconjuntos de estados están aislados (en teoría de redes; forman subredes desunidas). Es demostrable que una matriz no periódica ni separable es ergódica.

De hecho que, al conectar nuestro modelo con un proceso markoviano, representándolo por su matriz de trancisión, hemos admitido que la probabilidad del estado del sistema en el momento $t+1$ depende de la posición en el tiempo t, pero es independiente de los estados anteriores a t. Esto se define, comúnmente, diciendo que la "memoria" del sistema alcanza a un estado.

El principio ergódico no es más que la tendencia de los conjuntos estadísticos hacia estados de equilibrio independientes de las condiciones iniciales, y se enuncia afirmando que las medias temporales tienden a las medias estocásticas cuando $t \to +\infty$. Es obvio que el esquema de Bernoulli-Chevichev, conocido como "ley de los grandes números", es un caso particular del principio ergódico, pues éste verifica, a través de los procesos en cadenas de Markov (o los procesos brownianos), que la independencia de las pruebas sucesivas no es condición necesaria para el cumplimiento de dicha ley.

Si se supone dado el vector de estado inicial, V_o (estado del sistema para $t = 0$), el vector V_t se obtiene rápidamente, aplicando el cálculo matricial

$$V_t = A^t V_o \qquad (41)$$

$$A = [a_{ij}], \quad (i,j = 1,2,\ldots,n)$$

estando V_t en función de V_o. El vector V_{t+1} se logra, conociendo V_t, por un sistema de ecuaciones en diferencias finitas, o bien por operaciones matriciales

$$V_{t+1} = A\,V_t \qquad (42)$$

$$V_{t+1} = A^{t+1}\,V_o$$

dependiendo, el empleo de estas formas alternativas, del conocimiento de V_t o V_o. Para obtener A^t es necesario diagonizarla, para lo cual habrá que buscar la matriz diagonal D semejante a A, de manera que

$$D = M^{1-} AM \qquad (43)$$

$$D^t = M^{-1} A^t M \qquad (44)$$

teniendo en cuenta que $A^\circ = I$, y

$$A = MD^t M^{-1} \qquad (45)$$

Verificándose (43) las columnas de M son vectores propios de A y los elementos de la diagonal de D las raíces características de A. La ecuación característica de A se expresa

$$f(\lambda) = | A - \lambda I | = o \qquad (46)$$

siendo $| A - \lambda I |$ el determinante de la $[A - \lambda]$, y λ_i los elementos diagonales de D. La (46) es un polinomio en λ de igual grado que el rango de A.

Por Cayley-Hamilton se sabe que toda matriz cuadrada satisface su ecuación característica, o sea

$$f(\lambda) = f(A) = o$$

que se prueba reemplazando λ por A en f (λ), recordando que

$$\lambda^o = A^o = I$$

Nuestra preocupación es obtener una medida de la variedad que puede existir entre los elementos de la matriz ergódica A^t, o sea las probabilidades de transición a las que tiende el proceso en el límite. Vale decir, se ha de encontrar un coeficiente, similar al de Pareto o Lorenz, pero que mida la igualdad o desigualdad de las oportunidades ex-ante, y no la de una distribución ex-post del ingreso.

Este coeficiente viene dado por la entropía del sistema, partiendo de los valores de entropía de cada vector probabilístico.

$$H_i = - \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \qquad (p = \overline{a}_{ij}) \qquad (47)$$

$$(0 \leq p_i = 1)$$

que da una magnitud positiva, pues los logaritmos de p_i, en cualquier base (por supuesto, mayor que uno) son negativos, salvo para los extremos de su campo de variación. Para cero el logaritmo no existe (el dominio de definición de la función logaritmo no comprende el cero) y para uno es igual a cero.

La (47) responde al concepto de Shannon de la entropía y no a la idea de "cantidad de información" de Wiener, pues esta implica H < 0.

Es fácil determinar los límites del coeficiente que llamamos entropía del sistema, o sea

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i}{n} \tag{48}$$

siendo n el rango de la matriz A, suponiendo que se utilizan logaritmos de base igual al orden de la matriz de transición. En efecto, si estamos en presencia de una matriz con todos sus elementos iguales (que resulta un caso especial de las matrices que Kaufmann denomina completamente ergódicas, o sea aquellas que tienen todas sus filas idénticas, y, por supuesto, su determinante es nulo), la entropía del sistema es uno, pues

$$\log_n \frac{1}{n} \Rightarrow \log_n n^{-1} = -1$$

$$-\sum^{n} \frac{1}{n}(-1) = -\left[n \left(-\frac{1}{n} \right) \right] = +1$$

y, como la base de los logaritmos es igual al orden de A

$$H = \frac{n\,(+1)}{n} = 1$$

Se dice que el sistema presenta, en estas condiciones, una ausencia total de variedad (*). En el lenguaje económico, podemos afirmar que existe una equidistribución de oportunidades, pues todas las probabilidades de transición son análogas.

Por el contrario, la variedad es máxima —y esto constituye el otro límite del coeficiente buscado—, cuando de los n elementos de la fila, uno alcanza el valor de la unidad y, obviamente, los n - 1 restantes son nulos. En tal caso, el logaritmo de uno es cero en cualquier base, lo que anula el término correspondiente de la sumatoria, mientras que los n - 1 términos restantes se hacen cero por que la p_i es nula. Es sabido que el límite, cuando $x \rightarrow 0$, de la expresión x Log x es cero. La entropía resulta, entonces, también nula. Se dice que el

(*) La cadena de MARKOV que presenta una matriz de transición con todos sus elementos iguales corresponde a un conjunto de vectores sin constricción. (Véase: ASHBY "Introducción a la cibernética").

sistema es absolutamente determinado, ya que su estado próximo se predice con certeza. Según Ashby, es el caso extremo de una "máquina" (**) markoviana. Ya se advirtió que no es necesario encontrar una matriz ergódica igual a la unitaria para tener entropía nula; cualquier matriz de permutación verifica $H = 0$. En nuestro modelo este caso implica la existencia de la máxima desigualdad en las oportunidades, medidas por las probabilidades de transición. Nótese que nuestro coeficiente varía en forma inversa al de Lorenz, en el cual la equidad absoluta está dada por el valor cero, y viceversa. No es necesario explicar que todas las posibilidades se dan entre los casos límites mencionados, por lo que, cuando la entropía tiende a uno las probabilidades de transición tienen propensión a igualarse, mientras que si la entropía se acerca a cero dichas probabilidades adquieren una máxima dispersión.

Si no se usan logaritmos de base igual al orden de A, el límite inferior se mantiene (es igual para cualquier base), pero el superior es el logaritmo del rango de A en la base aplicada. Esto es así, pues

$$\log_a \frac{1}{n} = \log_a n^{-1} = -1 \log_a n = -\log_a n$$

por logaritmo de una potencia, o bien

$$\log_a \frac{1}{n} = \log_a 1 - \log_a n = 0 - \log_a n = -\log_a n$$

por logaritmo de un cociente. Pero, como $H_i = -\sum p_i \text{ Log } p_i$, se convierte en $-\sum^{n} \frac{1}{n} \left(-\log_a n \right) = +\log_a n$ y sumando las n filas y dividiéndolas por el orden de A (porque estamos en el caso de la igualdad de todos los elementos de A), se ve que la entropía promedio, o sea la del sistema, es igual a la de cualquier fila. El límite superior del coeficiente será mayor que uno si $n > a$, y menor que uno si $n < a$. Si se desea tener el campo de variación cero-uno, bastará multiplicar las H_i por $\log_n a$, que actuará como módulo de transformación, ya que, según se sabe

$$\log_a n \cdot \log_n a = 1$$

La utilización de los coeficientes obtenidos resulta útil fuera del

(**) Una "máquina" es un sistema cuyo comportamiento es repetitivo o sujeto a leyes, de manera que admite predicción.

campo estrictamente teórico, para verificar la marcha de las pautas de política económica adoptadas en función de los objetivos de la programación del desarrollo. Se ha de notar que en el caso que llamamos de equidistribución de las oportunidades, o sea de entropía igual a uno, las probabilidades de transición resultaban iguales, lo que dista del criterio extraído del análisis paretiano, donde dichas posibilidades crecían con el incremento del ingreso del cual se partía. Quizás la verdadera equidad esté más allá todavía, cuando las probabilidades de transición resulten más elevadas en los tramos inferiores de renta.

Lo cierto es que el modelo implica la introducción de una filosofía no tradicional en la teoría de la distribución: la que viene dada por la igualación de las posibilidades más que por la redistribución del ingreso, que se practica, a veces, como cobertura de situaciones de injusticia, pero sin conmover las causas profundas que las determinan.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

ALLEN, R. G. D.: "Análisis matemático para economistas", Ed Aguilar, Madrid, 1964.

ALLEN, R. G. D.: "Economía matemática". Ed. Aguilar, Madrid, 1965.

AMATO, Vittorio: "Le medie non eccedenti e il modello paretiano", en "Giornale degli economisti e annali di economia", anno XXIV (nuova serie), noviembre-diciembre 1965, Nº 11-12, (pág. 969-986), Milán, 1965.

ASBHY, W. Ross: "Introducción a la cibernética", Ed. Nueva Visión, Buenos Aires, 1960.

BHARUCHA-REID, A. T.: "Elements of the theory of Markov processes", Mc Graw Hill. Book Co. Inc., Nueva York, 1960.

BIRKHOFF, Garret; MAC LANE, Saunders: "Algebra moderna", Ed. Vicens-Vives, Barcelona, 1963.

BOGO, Héctor: "Decisiones en Comercialización", Ed. Macchi, Buenos Aires, 1966.

BOLDRINI, Marcello: "Statistica. Teoría e metodi", Ed. Dott A. Giuffré. Milán, 1957.

BOUTELOUP, Jacques: "Cálculo de matrices", EUDEBA, Buenos Aires, 1966.

BRESCIANI-TURRONI: "Curso de economía política", Ed. F. C. E. México, 1960.

CRAMER, Harald: "Métodos matemáticos de estadística", Ed. Aguilar, Madrid, 1963.

CRAMER, Harald: "Elementos de la teoría de probabilidades y aplicaciones", Ed. Aguilar, Madrid, 1966.

DAVIS, Harold T., "The theory of econometrics", Ed. Principia Press, Inc., Bloomington, 1941.

DEDEDANT, G.; MACHADO, Emilio, A. M.: "Probabilidades", Ed. Coni, Buenos Aires, 1963.

DOOB, J. L.: "Stochastic processes", Ed. Wiley y Sons, Nueva York, 1953.

FELLER, William: "An introduction to probability theory and its applications", Ed. Wiley y Sons, Nueva York, 1957.

FELLNER, W.; HALEY, B. F.: "Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", Ed. Aguilar, Madrid, 1961.

FISZ, Marek: "Probability theory and mathematical statistics", Ed. Wiley y Sons, Nueva York, 1963.

GIRAUTL, M.: "Processus aléatoires", Ed. Dunod, París, 1965.

GOLDBERG, Samuel: "Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas", Ed. Marcombo, Barcelona, 1964.

HOFSTATTER, Peter F.: "Psicología social", Ed. Uteha, México, 1960.

KAUFMANN, A.: "Métodos y modelos de la investigación de operaciones", Ed. CECSA, México, 1964.

KAUFMANN, A.: "Métodos y modelos de la programación dinámica", Ed. CECSA, México, 1966.

KEMENY, John G.; SNELL, J. Laurie; THOMPSON, Gerald L.: "Introducción a las matemáticas finitas", Ed. CECSA, México, 1965.

LANGE, Oskar: "Introducción a la econometría", Ed. F. C. E., México, 1964.

PARETO, Vilfredo: "Cours de economie politique", Ed. F. Rouge, Lausanna, 1897.

SAMUELSON, Paúl A.: "A fallacy in the introduction of Pareto's Law of alleged constancy of income distribution", en "Rivista internazionale di scienze economiche e commerciali", Milán, año XII, marzo 1965.

TINTNER, Gerhard, "Mathematics and statistics for economists", Ed. Holt, Rinehar and Winston, Inc., Nueva York, 1965.

USPENSKY, J. V.: "Matemáticas de las probabilidades", Ed. Nigar, Buenos Aires, 1954.

VEGAS PEREZ, Angel: "Matemática para economistas", Madrid, 1956.

ZIMMERMAN, J. L.: "Países pobres, países ricos. La brecha que se ensancha", Ed. Siglo XXI, México, 1966.

ZIPF, G. K.: "Human behavior and the principle of least effort", Ed. Addison Wesley Press, Cambrigde, 1949.

UN MODELO ESTOCASTICO DE DISTRIBUCION DE INGRESOS

Resumen

Una característica inherente a todo proceso de desarrollo la constituye el objetivo, implícito o declarado, de mejoramiento de la distribución del ingreso, tanto desde el punto de vista funcional como personal. Tal concepción del "mejoramiento" es interpretada, comunmente,

como tendencia a la iguación de las rentas percibidas por los integrantes de la comunidad, o, dicho de otra manera, como propensión a lograr una correspondencia biunívoca entre idénticos porcentajes de población y de ingreso nacional.

Esta idea ha informado la trama teórica y los fines de la mayoría de los modelos econométricos de distribución personal que, casi invariablemente, se han propuesto mediciones estadísticas susceptibles de comparaciones para distintos tiempos y lugares, sobre la base de los llamados coeficientes de concentración, cuya misión es determinar grados de desigualdad (igualdad) de la distribución de los universos analizados.

Sin embargo, la existencia de diferencias individuales congénitas (capacidad, habilidad, inteligencia, etc.) y el propio sentido de la justicia distributiva, lleva a considerar equitativa, no la mera igualdad en el ámbito cuantitativo que, incluso, puede ser artificiosa, sino la nivelación de posibilidades de progreso para todos. En este aspecto los modelos econométricos solo por eventualidad, y como aportes secundarios, han explicitado algunas conclusiones.

Si se reconoce que la "conservación de la desigualdad", afincada en el acrecentamiento simultáneo, en proporciones similares, de los distintos estratos de renta— o sea, la igualación de las probabilidades de transición a tramos superiores de ingresos—, implica una evolución positiva del bienestar colectivo, ha de coincidirse en la necesidad de estructurar el modelo teórico que permita verificar dicho avance a través de un proceso de desarrollo.

Este resulta, en breves palabras, el objetivo del presente trabajo.

AN STOCHASTIC MODEL FOR INCOME DISTRIBUTION

Summary

An inherent characteristic of a development process is its objective, either implicit or stated, to improve the distribution of income, from both the functional as well as the personal point of view. The concept of "improvement" is normally taken to mean a tendency to equalize the rents received by the members of a community, or, in other words, the propensity to achieve a biunivocal correspondence between identical porcentages of population and national income.

This idea has influenced the theory as well as the goals of the majority of econometric models of personal income distribution which, almost invariably, have proposed statistical measurements which can be compared at different periods of time and places, on the basis of the so-called concentration coefficients, which are supposed to determine the degree of inequality (equality) in the distribution of the universes to be analyzed.

Nevertheless, the existence of congenital individual differences

(capacity, hability, intelligence, etc.) and the proper sense of distributive justice, leads us to consider as equitable, not the mere equality in the quantitative sphere, which can be even artificial, but the leveling of opportunities for everybody. With respect to the above, the econometric models have arrived at conclusions by chance an only as secondary contributions.

If we recognize that the "preservation of inequality" based on the simultaneous increase in equal proportions, of the different strata of income —that is, the equalizing of probabilities of transition to superior levels of income, implies a positive evolution of collective wellbeing, then we must agree on the need to structure the theoretical model in such a way as to allow the proos of this progress through a development process.

This, then, is the objective of this work.