NOTAS SOBRE LA TEORIA DE LA DISTRIBUCION Y LA TEORIA DE LA DEMANDA DE LOS FACTORES DE LA PRODUCCION *

JUAN C. BERRA y ALBERTO PORTO **

Este trabajo presenta algunas consideraciones referidas a la teoría de la distribución y la teoría de la demanda de los factores de la producción.

El trabajo ha sido dividido en cinco partes. La parte primera presenta formalmente la generalización realizada por Joan Robinson [5] de la teoría neoclásica de la distribución para comprender casos de competencia imperfecta.

En las partes segunda a cuarta se analizan, en un contexto de estática comparativa, las variaciones que se producirán en los precios y cantidades de los factores empleados y del producto ante cambios en un parámetro del modelo original. La tercera parte presenta una expresión más general de las elasticidades de la demanda derivada por un factor, de la del factor cooperante y del precio del producto, para el caso en que rijan condiciones de competencia imperfecta y que comprende entre otros, como casos especiales, como se demuestra en la parte cuarta, las fórmulas de Marshall [4], Hicks [3] y Allen [1].

Por último, en la parte quinta se verifica la validez de las cuatro leyes de Marshall sobre la demanda derivada de un factor de la producción para todos los casos considerados.

* La idea de realizar el presente trabajo surgió como resultado de las reuniones del Seminario Interno de Teoría Económica del Instituto dirigido por el Prof. Héctor L. DIEGUEZ a quien se agradecen sus comentarios y sugerencias. Asimismo dejamos constancia de nuestro agradecimiento a todos los demás asistentes al Seminario, especialmente a Horacio L. P. PIFFANO, y a Martha L. BLANCO quien colaboró en la revisión de algunos procedimientos matemáticos. Obviamente los errores que puedan subsistir son de nuestra exclusiva responsabilidad. Una versión preliminar de este trabajo fue publicada como Cuaderno Nº 5 del Instituto de Investigaciones Económicas.

** Los autores son Profesores del Departamento de Economía e Investigadores del Instituto de Investigaciones Económicas de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de La Plata.

I

Es sabido que, si prevalecen condiciones de competencia perfecta en los mercados de factores y producto y si el beneficio [1] es cero, en el punto de equilibrio a largo plazo existirán rendimientos físicos constantes a escala. Si el beneficio es negativo o positivo existirán rendimientos físicos crecientes o decrecientes a escala respectivamente.

Joan Robinson [5] generalizó los resultados anteriores para casos en los que una firma actúe en competencia imperfecta; en estos casos, si el beneficio es cero, lo correcto será hablar no de rendimientos físicos, sino de rendimientos en términos de valor y/o de gasto constantes a escala en el punto de equilibrio. Si el beneficio es negativo o positivo existirán rendimientos en términos de valor y/o de gasto crecientes o decrecientes a escala respectivamente [2].

En lo que sigue se tratará de presentar formalmente esos resultados.

Sea una firma que actúa en competencia monopolística en el mercado del producto X a la vez que es monopsonista en el mercado de un factor B, siendo la curva de oferta del otro factor A utilizado por la firma infinitamente elástica. Si el beneficio es cero "... una curva que relacione el valor del producto con el gasto medio por unidad de valor del producto estaría en un mínimo en ese punto ..." [3].

1 Pueden ser utilizados tres métodos para considerar al empresario: a) suponer, a lo WICKSELL, que el empresario no tiene función específica; b) postular que cada firma consiste de una única unidad indivisible de capacidad empresarial cuyo precio de oferta es independiente de la cantidad producida; y c) suponer que el empresario es un factor perfectamente divisible como los demás. "Cualquiera sea el método adoptado es evidente por el Teorema de EULER que en condiciones donde los rendimientos físicos, en el sentido relevante, son constantes, el beneficio, en el sentido relevante, debe ser cero". (ver Joan ROBINSON, op. cit. ps. 352-53).

2 En este modelo se supone que la curva de demanda que enfrenta cada empresa tiene pendiente negativa. Por otra parte, se supone que existe libre entrada de nuevas empresas a la industria. Este último supuesto implica que en el equilibrio a largo plazo el beneficio extraordinario debe ser igual a cero. Si no existe libre entrada, caso de monopolio, el equilibrio implicará la existencia de beneficios extraordinarios y de rendimientos, en términos de valor y/o de gasto, decrecientes a escala.

3 Joan ROBINSON, op. cit., p. 357.

Siendo x, a y b las cantidades de producto X y factores A y B respectivamente, la función de producción de la firma es

$$x = f\ (a, b)$$

que se supone dos veces diferenciable y para la que

$$\frac{\partial x}{\partial a} = f_a > 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial b} = f_b > 0$$

La función de demanda del producto es

$$x = \Phi\ (p)$$

para la que se supone inclinación normal, o sea

$$\frac{d x}{d p} < 0$$

estando la oferta del factor B representada por

$$p_b = \psi\ (b)$$

para la que también se supone inclinación normal, es decir

$$\frac{d p_b}{d b} > 0$$

El gasto medio por unidad de valor del producto viene dado por

$$G_{me} = \frac{1}{x.p}\ (a.p_a + b.p_b) \tag{1}$$

donde p, p_a y p_b representan los precios del producto y de los factores A y B respectivamente.

Teniendo en cuenta que en el equilibrio de largo plazo, si el beneficio es igual a cero, el costo medio debe ser igual al precio, el valor mínimo de (1) se obtiene cuando

$$\frac{\partial G_{me}}{\partial a} = \frac{1}{x.p}\left[p_a - \left[\frac{\partial x}{\partial a}\, p + \frac{d p}{d x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \cdot x\right]\right] = 0$$

$$\frac{\partial G_{me}}{\partial b} = \frac{1}{x.p}\left[p_b + \frac{d p_b}{d b}\, b - \left[\frac{\partial x}{\partial b}\, p + \frac{d p}{d x} \cdot \frac{\partial x}{\partial b}\, x\right]\right] = 0$$

de donde resulta,

$$p_a = \frac{\partial x}{\partial a} \cdot p + \frac{d p}{d x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \cdot x \tag{2}$$

$$p_b = \frac{\partial x}{\partial b} \cdot p + \frac{d p}{d x} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} \cdot x - \frac{d p_b}{d b} b \tag{3}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) y reordenando, resulta

$$x \cdot p = a \left[p \cdot f_a + \frac{d p}{d x} f_a \cdot x \right] + b \left[p \cdot f_b + \frac{d p}{d x} f_b \cdot x - \frac{d p_b}{d b} \cdot b \right] \tag{4}$$

que es una forma generalizada que verifica la validez del Teorema de Euler en el punto de equilibrio. En dicho punto prevalecen rendimientos constantes a escala en términos de valor y de gasto, lo cual implica que un incremento proporcional dado del gasto en cada factor empleado dará lugar al mismo incremento proporcional en el valor del producto.

Varios casos particulares pueden ser analizados a partir de (4).

Si la firma actúa en competencia monopolística en el mercado del producto y enfrenta curvas infinitamente elásticas de oferta de ambos factores, haciendo $\frac{d p_b}{d b} = 0$ se obtiene

$$x \cdot p = a \left[p \cdot f_a + \frac{d p}{d x} f_a \cdot x \right] + b \left[p \cdot f_b + \frac{d p}{d x} f_b \cdot x \right] \tag{5}$$

La firma pagará a cada factor no el valor de la productividad marginal física sino el valor marginal del producto físico y existirán rendimientos, en términos de valor, constantes a escala en el punto de equilibrio. Esto implica que un incremento proporcional dado en la cantidad de cada factor empleado conducirá al mismo incremento proporcional en el valor del producto.

Si la firma actúa en competencia perfecta en los mercados del producto y del factor A y es monopsonista en el mercado del factor B, la expresión relevante se obtiene haciendo $\frac{d p}{d x} = 0$ en (4).

$$x \cdot p = a \cdot p \cdot f_a + b \left[p \cdot f_b - \frac{d p_b}{d b} b \right] \tag{6}$$

y en este caso, en el punto de equilibrio, existirán rendimientos, en términos de gasto, constantes a escala. Esto implica que un incremento proporcional dado del gasto en cada factor empleado dará lugar a un incremento proporcional igual en el producto físico.

Por último, si la competencia perfecta prevalece en los tres mercados, en el punto de equilibrio se verifica que

$$x = a \cdot f_a + b \cdot f_b \tag{7}$$

que se obtiene de (4) haciendo $\frac{d\,p}{d\,x} = \frac{d\,p_b}{d\,b} = 0.$

Es el caso de rendimientos físicos constantes a escala, es decir, la aplicación usual del Teorema de Euler, en la teoría neoclásica de la distribución. Esto implica que un incremento proporcional dado en cada factor empleado conducirá al mismo incremento proporcional en el producto físico.

II

En la sección anterior se obtuvo como condición de equilibrio a largo plazo, que implica el agotamiento del producto, que

$$x = a\,\frac{p_a}{p} + b\,\frac{p_b}{p} \tag{8}$$

donde los valores de p_a y p_b dependen de los supuestos adoptados acerca de las condiciones imperantes en los mercados del producto y de los factores.

Dado que en todos los casos analizados se supuso competencia perfecta en el mercado del factor A, se analizarán los efectos de un cambio exógeno en p_a. En la nueva posición de equilibrio a largo plazo se debe seguir cumpliendo (8).

El cambio en las variables endógenas del modelo se halla derivando dicha expresión con respecto a p_a.

$$\frac{\partial x}{\partial p_a} = \frac{p_a}{p} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + \frac{a}{p} + \frac{p_b}{p} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} - \frac{1}{p^2}\,(a \cdot p_a + b \cdot p_b) \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a}$$

y teniendo en cuenta que

$$a \cdot p_a + b \cdot p_b = x \cdot p$$

se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial p_a} = \frac{p_a}{p} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + \frac{a}{p} + \frac{p_b}{p} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} - \frac{x}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a} \tag{9}$$

Introduciendo las elasticidades de demanda de los factores A y B (λ_a y λ_b) y del precio del producto (λ_p) con respecto a p_a [4], y multiplicando por $\frac{p_a}{x}$ miembro de miembro, (9) se transforma en

$$\lambda_x = k_a \ (1 + \lambda_a - \lambda_b) \ + \lambda_b - \lambda_p \tag{10}$$

donde λ_x es la elasticidad del producto ante cambios en p_a y k_a es la participación del factor A en el costo total.

La expresión (10) es válida para todos los casos considerados en la Parte I, pero los valores de λ_a, λ_b y λ_p (y por consiguiente de λ_x) dependerán de los supuestos que se adopten acerca de las condiciones que prevalezcan en los mercados del producto y del factor B.

III

En la presente sección se intentará determinar las expresiones de λ_a, λ_b y λ_p válidas para los distintos casos considerados.

Las condiciones de equilibrio en los mercados de factores (2) y (3) pueden ser reformuladas en términos de elasticidades como

$$p_a = p \cdot \left[1 - \frac{1}{\eta} \right] \cdot f_a \tag{11}$$

$$p_b = p \cdot \frac{\left[1 - \frac{1}{\eta} \right]}{\left[1 + \frac{1}{\epsilon} \right]} \cdot f_b \tag{12}$$

donde $\eta = - \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$, es la elasticidad de la demanda del producto, y $\epsilon = \frac{db}{dp_b} \cdot \frac{p_b}{b}$, es la elasticidad de la oferta del factor B.

[4] Las elasticidades se definen como

$$\lambda_a = \frac{\partial a}{\partial p_a} \cdot \frac{p_a}{a}$$

$$\lambda_b = \frac{\partial b}{\partial p_a} \cdot \frac{p_a}{b}$$

$$\lambda_p = \frac{\partial p}{\partial p_a} \cdot \frac{p_a}{p}$$

Las ecuaciones (11) y (12) juntamente con la condición de equilibrio en el mercado del producto

$$f\ (a, b) = \Phi\ (p) \tag{13}$$

determinan el equilibrio de la firma y verifican la ecuación (4) de la Parte I.

$$x.p = a\left[\ p.\left[1 - \frac{1}{\eta}\right].f_a\right] + b\left[\ p.\ \frac{\left[1 - \dfrac{1}{\eta}\right]}{\left[1 + \dfrac{1}{\varepsilon}\right]}.f_b\right]$$

Supuesto un cambio exógeno en p_a, derivando (11), (12) y (13) resulta[5]

$$\frac{1}{\left[1 - \dfrac{1}{\eta}\right]} = p\left[f_{aa} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + f_{ab} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a}\right] + f_a \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a}$$

$$\frac{\left[1 + \dfrac{1}{\varepsilon}\right]}{\left[1 - \dfrac{1}{\eta}\right]} \frac{\partial p_b}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} = p\left[f_{ba} \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + f_{bb} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a}\right] + f_b \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a}$$

$$f_a \cdot \frac{\partial a}{\partial p_a} + f_b \cdot \frac{\partial b}{\partial p_a} = \eta \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_a}$$

donde f_{aa}, f_{bb} y f_{ab} representan las derivadas segundas de f (a, b).

Teniendo en cuenta que en el punto de equilibrio los rendimientos, en términos de valor y gasto, son constantes a escala (homogeneidad de grado uno), se tiene que

$$f_{ab} = \frac{f_a\ f_b}{x.\sigma}$$

$$f_{aa} = -\ \frac{b}{a} \cdot f_{ab}$$

$$f_{bb} = -\ \frac{a}{b} \cdot f_{ab}$$

5 El procedimiento matemático utilizado, sigue, con las necesarias adaptaciones, el método de ALLEN (1), ver especialmente ps. 307 y sgtes.; 334 y sgtes.; y 362 y sgtes.

Reemplazando las expresiones anteriores en el sistema formado por las derivadas con respecto a p_a de (11), (12) y (13), resolviendo para $\frac{\partial a}{\partial p_a}$, $\frac{\partial b}{\partial p_a}$ y $\frac{\partial p}{\partial p_a}$, y completando para expresarlas como elasticidades se tiene [6]

$$\lambda_a = \frac{-\left[k_a\, \eta J + \frac{\sigma\eta}{\epsilon} J^2 + k_b\, \sigma\, J\, R \right]}{\left[k_a + k_b\, R \right]^2 + k_a \frac{\sigma}{\epsilon} J + k_b \frac{\eta}{\epsilon} J\, R} \qquad (14)$$

$$\lambda_b = \frac{k_a\, (\sigma - \eta)\, J}{\left[k_a + k_b\, R \right]^2 + k_a \frac{\sigma}{\epsilon} J + k_b \frac{\eta}{\epsilon} J\, R} \qquad (15)$$

$$\lambda_p = \frac{k_a^2 + k_a \frac{\sigma}{\epsilon} J + k_a\, k_b\, R}{\left[k_a + k_b\, R \right]^2 + k_a \frac{\sigma}{\epsilon} J + k_b \frac{\eta}{\epsilon} J\, R} \qquad (16)$$

donde

$$J = 1 - \frac{1}{\eta}$$

$$R = 1 + \frac{1}{\epsilon}$$

$$k_a = \frac{a\, p_a}{x \cdot p}$$

$$k_b = 1 - k_a$$

y σ es la elasticidad de sustitución entre los factores.

Las expresiones de λ_a, λ_b y λ_p dadas en (14), (15) y (16) corresponden al caso en que la firma actúa como competidor monopolístico en el mercado del producto, en competencia perfecta en el mercado del factor A y es, a su vez, monopsonista en el mercado del factor B. (Caso I del Cuadro 1).

[6] Las expresiones siguientes son susceptible de una presentación más reducida; la forma en que están presentadas facilita la obtención de los casos particulares.

CUADRO Nº 1

	Elasticidad de sustitución entre factores	Elasticidad para la firma o firmas		Elasticidades para la industria	
		Demanda del producto	Oferta del factor B	Demanda del producto	Oferta del factor B
Caso I	$\sigma > 0$	$0 < \eta < \infty$	$0 < \epsilon < \infty$	—	—
Caso II	$\sigma > 0$	$0 < \eta < \infty$	$\epsilon = \infty$	—	—
Caso III	$\sigma > 0$	$\eta = \infty$	$0 < \epsilon < \infty$	—	—
Caso IV: Caso MARSHALL	$\sigma = 0$	$\eta = \infty$	$\epsilon = \infty$	$0 < \eta^* < \infty$	$0 < \epsilon^* < \infty$
Caso IV: Caso HICKS	$\sigma > 0$	$\eta = \infty$	$\epsilon = \infty$	$0 < \eta^* < \infty$	$0 < \epsilon^* < \infty$
Caso IV: Caso ALLEN	$\sigma > 0$	$\eta = \infty$	$\epsilon = \infty$	$0 < \eta^* < \infty$	$\epsilon^* = \infty$

Si la firma actúa en competencia monopolística en el mercado del producto y en competencia perfecta en los mercados de los dos factores, las expresiones correspondientes se obtienen haciendo $\epsilon = \infty$ en (14), (15) y (16). (Caso II del Cuadro 1).

Si la firma se comporta como competidor perfecto en el mercado del producto y del factor A y como monopsonista en el mercado del factor B, las formulaciones de λ_a, λ_b y λ_p que corresponden se obtienen haciendo $\eta = \infty$ en (14), (15) y (16). (Caso III del Cuadro 1).

IV

Las expresiones de λ_a, λ_b y λ_p que corresponden a los casos tratados por Marshall, Hicks y Allen (Caso IV del Cuadro 1), surgen de derivar con respecto a p_a el siguiente sistema de ecuaciones

$$p_a = p \cdot f_a \qquad (11.a)$$

$$p_b = p \cdot f_b \text{ [7]} \qquad (12.a)$$

$$f(a, b) = \Phi(p) \qquad (13.a)$$

Este sistema difiere del formado por las ecuaciones (11), (12) y (13) en que las expresiones J y R se consideran iguales a la unidad. Esto se debe a que se ha pasado del análisis referido a una firma al de una industria constituída por firmas que actúan como competidores perfectos en los mercados considerados.

Por tanto, de aquí en más distinguiremos dos tipos de elasticidades de demanda del producto y de oferta del factor B. Por un lado. η y ϵ referidas a las firmas que componen la industria cuyo valor es infinito, lo que transforma (11) y (12) en (11.a) y (12.a); por otro lado η^* y ϵ^* que son las elasticidades correspondientes a las funciones de mercado que enfrenta la industria, que aparecerán en el análisis al derivar con respecto a p_a las funciones $\Phi(p)$ y $\psi(b)$, con la excepción mencionada en nota 7 para el caso Allen en el que $\epsilon^* = \epsilon = \infty$.

Con respecto al mercado del producto, lo anterior implica que aún cuando la curva de demanda del mercado tiene una elasticidad

[7] $p_b = \psi$ (b) para MARSHALL y HICKS, no así para ALLEN para quien p_b es una constante.

finita, para cada una de las firmas componentes de la industria la demanda es perfectamente elástica y por consiguiente el ingreso marginal es igual al precio.

En cuanto al mercado del factor B en los tres casos se supone que las firmas que componen la industria actúan en condiciones de competencia perfecta, pero debe distinguirse el enfoque Marshall-Hicks, del considerado por Allen. En el primero se considera que la industria enfrenta una curva de oferta con elasticidad finita, pero que para cada una de las firmas la oferta del factor B es perfectamente elástica, o sea, que el costo marginal del factor es igual a su precio. En el caso analizado por Allen esta última igualdad se mantiene pero debido a un supuesto distinto, que para la industria y por tanto también para cada firma la curva de oferta es perfectamente elástica.

Puede interpretarse que mientras para Marshall y Hicks el factor B sería una factor específico para la industria considerada, para Allen se trataría de un factor genérico cuya demanda por parte de la industria sería pequeña en relación a la demanda total del factor en el mercado [8].

Por último, el análisis de Marshall se diferencia de los de Hicks y Allen por considerar nula la elasticidad de sustitución entre factores.

Una forma alternativa de obtener las expresiones correspondientes a los casos tratados por Marshall, Hicks y Allen para λ_a, λ_b y λ_p es aplicar los valores de la elasticidad de sustitución, la elasticidad de demanda del producto y la elasticidad de oferta del factor B, consignados en el Cuadro 1 a las formulaciones (14), (15) y (16)

[8] Se coincide con BRONFENBRENNER [2] en su interpretación de MARSHALL y HICKS, pero no con su interpretación de ALLEN: "Mientras a MARSHALL y HICKS les interesaba directamente la demanda de mercado por servicios productivos, R. G. D. ALLEN desarrolló un modelo de demanda individual por estos servicios por parte de un sólo empresario competitivo con una función de producción dada y un mapa de indiferencia en la producción dado" (op. cit. p. 299). Dado que ALLEN supone que la función de producción es homogénea de grado uno, es que no nos parece adecuada la interpretación de BRONFENBRENNER, pues, como es sabido, la existencia simultánea a nivel de firma de rendimientos constantes a escala y competencia perfecta da lugar a que si el precio excede o está por debajo del costo marginal no exista solución de equilibrio y si el precio iguala al costo marginal la solución sea indeterminada.

adaptadas como sigue para tomar en consideración los dos tipos de elasticidades ya mencionados.

$$\lambda_a = \frac{-\left[k_a\, \eta^* \cdot J + \frac{\sigma\, \eta^*}{\epsilon^*} \cdot J^2 + k_b\, \sigma \cdot J \,.\, R\right]}{\left[k_a + k_b \,.\, R\right]^2 + k_a \cdot \frac{\sigma}{\epsilon^*} \cdot J + k_b \cdot \frac{\eta^*}{\epsilon^*} \cdot J \,.\, R} \qquad (14.a)$$

$$\lambda_b = \frac{k_a \cdot (\sigma - \eta^*) \cdot J}{\left[k_a + k_b \,.\, R\right]^2 + k_a \cdot \frac{\sigma}{\epsilon^*} \cdot J + k_b \cdot \frac{\eta^*}{\epsilon^*} \cdot J \,.\, R} \qquad (15.a)$$

$$\lambda_p = \frac{k_a^2 + k_a \cdot \frac{\sigma}{\epsilon^*} \quad J + k_a \,.\, k_b \,.\, R}{\left[k_a + k_b \,.\, R\right]^2 + k_a \cdot \frac{\sigma}{\epsilon^*} \cdot J + k_b \cdot \frac{\eta^*}{\epsilon^*} \cdot J \,.\, R} \qquad (16.a)$$

V

En esta parte se analizará la validez de las cuatro leyes de Marshall sobre la demanda derivada de un factor (A)[9] para los casos en los que el álgebra es de presentación sencilla.

Las leyes de Marshall enuncian que la demanda por un factor de la producción será más elástica,

1ª ley: cuanto mayor sea σ.
2ª ley: cuanto mayor sea η.
3ª ley: cuanto mayor sea k_a.
4ª ley: cuanto mayor sea ϵ.

y serán verificadas si las derivadas parciales de λ_a con respecto a σ, η, k_a y ϵ tienen signo negativo[10].

[9] Confrontar con M. BRONFENBRENNER [2]. En su trabajo se analiza la validez de las cuatro leyes de MARSHALL para las fórmulas de MARSHALL, HICKS y ALLEN.

[10] Se omite la presentación de esas derivadas para la expresión (14) correspondiente al caso más general (Caso I del Cuadro 1) debido a la magnitud de las expresiones resultantes. En este caso se verifica la validez de las leyes primera, segunda y cuarta. En cuanto a la tercera ley, la única posibilidad de que no se cumpla es que $\sigma > \eta$. Estos resultados han sido obtenidos en base a los supuestos ya mencionados de inclinaciones normales de las funciones de demanda de X y oferta de B.

La expresión de λ_a para el caso de una firma que actúa en competencia monopolística en el mercado del producto y en competencia perfecta en los mercados de los dos factores se obtiene haciendo $\epsilon = \infty$ en (14), resultando

$$\lambda_a = - J \cdot [k_a \, \eta + k_b \, \sigma]$$

cuyas derivadas parciales son,

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \sigma} = - k_b \cdot J$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \eta} = - \frac{k_b \, \sigma}{\eta^2} - k_a$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial k_a} = - J \cdot (\eta - \sigma)$$

Al estudiar el signo de estas derivadas parciales, debe tenerse en cuenta que en el caso considerado, en el punto de equilibrio, η debe ser mayor que la unidad y por consiguiente J mayor que cero.

Las dos primeras leyes son confirmadas; la tercera ley sólo será confirmada si $\eta > \sigma$. En razón del supuesto de oferta infinitamente elástica del factor cooperante, la cuarta ley no puede ser verificada.

Si la firma actúa en competencia perfecta en los mercados del producto y del factor A y es monopsonista en el mercado de B, la expresión correspondiente de λ_a se obtiene haciendo $\eta = \infty$ en (14),

$$\lambda_a = - \frac{[k_a \epsilon + \sigma]}{k_b \cdot R}$$

siendo las derivadas parciales,

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \sigma} = - \frac{1}{k_b \cdot R}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial k_a} = - \frac{\epsilon + \sigma}{k_b^2 \, R}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \epsilon} = - \frac{[k_a \epsilon^2 + 2 \, k_a \epsilon + \sigma]}{k_b \cdot (\epsilon + 1)^2}$$

Siempre que $\epsilon > 0$, lo que puede ser considerado el caso normal, las tres leyes que pueden ser verificadas son confirmadas.

La fórmula de λ_a para el caso considerado por Marshall se obtiene de (14.a) haciendo $\eta = \epsilon = \infty$ y $\sigma = 0$, resultando

$$\lambda_a = - \frac{k_a \eta^* \epsilon^*}{\epsilon^* + k_b \eta^*}$$

cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \eta^*} = - \frac{k_a \cdot \epsilon^{*2}}{[\epsilon^* + k_b \eta^*]^2}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial k_a} = - \frac{\epsilon^* \eta^* \cdot (\epsilon^* + \eta^*)}{[\epsilon^* + k_b \eta^*]^2}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \epsilon^*} = - \frac{k_a \, k_b \eta^{*2}}{[\epsilon^* + k_b \eta^*]^2}$$

Las tres leyes que pueden ser verificadas son confirmadas para el caso normal de $\epsilon^* > 0$. (Si ϵ^* fuera menor que cero sólo existirían dificultades con la tercera ley).

La expresión de Hicks para λ_a se obtiene haciendo $\eta = \epsilon = \infty$, en (14.a), de donde resulta,

$$\lambda_a = \frac{- k_a \epsilon^* \eta^* - \sigma \eta^* - k_b \sigma \epsilon^*}{\epsilon^* + k_a \sigma + k_b \eta^*}$$

siendo las derivadas parciales correspondientes,

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \sigma} = - \frac{k_b \cdot (\eta^* + \epsilon^*)^2}{(\epsilon^* + k_a \sigma + k_b \eta^*)^2}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \eta^*} = - \frac{k_a \cdot (\epsilon^* + \sigma)^2}{(\epsilon^* + k_a \sigma + k_b \eta^*)^2}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial k_a} = - \frac{(\eta^* + \epsilon^*) \cdot (\epsilon^* + \sigma) \cdot (\eta^* - \sigma)}{(\epsilon^* + k_a \sigma + k_b \eta^*)^2}$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \epsilon^*} = - \frac{k_a \, k_b \cdot (\eta^* - \sigma)^2}{(\epsilon^* + k_a \sigma + k_b \eta^*)^2}$$

Las leyes primera, segunda y cuarta son confirmadas. El cumplimiento de la tercera ley en el caso normal de $\epsilon^* > 0$, depende de que $\eta^* > \sigma$.

La fórmula de λ_a tal cual fuera presentada por Allen, puede ser obtenida a partir de (14.a) haciendo el supuesto de $\eta = \epsilon = \epsilon^* = \infty$, resultando

$$\lambda_a = - k_a \eta^* - k_b \sigma$$

siendo las derivadas parciales,

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \sigma} = - k_b$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial \eta^*} = - k_a$$

$$\frac{\partial \lambda_a}{\partial k_a} = - (\eta^* - \sigma)$$

Las dos primeras leyes son confirmadas. La tercera ley es confirmada solo si $\eta^* > \sigma$, no pudiendo ser verificada la cuarta ley debido al supuesto de $\epsilon^* = \infty$.

En consecuencia, en esta sección se ha verificado la validez de las leyes de Marshall sobre la demanda derivada de un factor de la producción para tres casos, a nuestro entender no tratados anteriormente.

En estos casos se ha demostrado, bajo supuestos de inclinación normal de las funciones de demanda del producto y oferta del factor cooperante, el cumplimiento de las leyes primera, segunda y cuarta; en cuanto a la tercera ley en dos de los casos su validez depende de que $\eta > \sigma$. Esta condición es la misma que la encontrada por Hicks como necesaria para que dicha ley se verifique en su formulación. Asimismo dicha condición es necesaria en la solución de Allen.

REFERENCIAS

[1] R. G. D. ALLEN, *Análisis Matemático para Economistas,* Aguilar, Madrid, 1966.

[2] M. BRONFENBRENNER, "Notes on the elasticity of derived demand", *Oxford Economic Papers,* Oct. 1961.

[3] J. R. HICKS, *"The Theory of wages"*, Peter Smith, Glowcester, Mass., 1957.

[4] A. MARSHALL, *"Principios de Economía"*, Aguilar, Madrid, 1957.

[5] J. ROBINSON, "Euler's Theorem and the Problem of Distribution", *Economic Journal,* Sept. 1934. Reimpreso en "Readings in Microeconomics", editado por Breit y Hochman, Holt, Rinehart y Winston, 1968.

NOTAS SOBRE LA TEORIA DE LA DISTRIBUCION Y LA TEORIA DE LA DEMANDA DE LOS FACTORES DE LA PRODUCCION

Resumen

En este trabajo se presenta formalmente la generalización de la teoría neoclásica de la distribución realizada por Joan ROBINSON, para comprender casos de competencia imperfecta.

Posteriormente se formula una expresión generalizada para la elasticidad de la demanda derivada por un factor de la producción. Esta nueva formulación permite analizar los mismos casos de competencia imperfecta estudiados con la precedente generalización de la teoría de la distribución.

En la parte final se realiza la verificación de la validez de las cuatro leyes de la elasticidad de la demanda derivada de MARSHALL para las tres nuevas fórmulas presentadas y se comprueba que, suponiendo inclinaciones normales de las curvas de oferta del factor cooperante y de demanda del producto, las leyes primera, segunda y cuarta son válidas en todos los casos. La tercera ley es válida, bajo los mismos supuestos, en el caso de una firma que actúa como competidor perfecto en los mercados del producto y del factor cuya demanda se analiza y como monopsonista en el mercado del factor cooperante. En cambio, en los dos casos restantes, aun con inclinación normal de las curvas citadas, es necesario para su cumplimiento que la elasticidad de demanda del producto sea mayor que la elasticidad de sustitución entre factores: esta condición es la establecida por HICKS también como necesaria para la verificación de la tercera ley en su propia formulación para el caso de una industria que actúa en competencia perfecta en todos los mercados.

NOTES ON THE THEORY OF DISTRIBUTION AND THE THEORY OF FACTORS OF PRODUCTION DEMAND

Summary

A generalization of the neoclassical theory of distribution developed by Joan Robinson is formuly presented, to take into account imperfect competition cases. A general expression of the elasticity of the derived demand is formulated for one factor of production. This formulation allows to analyse the same cases of imperfect competition studied by the prior generalization of the theory of distribution.

In the last section, a verification of the validity of the four Marshallian laws of derived demand elasticity with the three new expresions presented is done and, assuming normal slopes in the offer curve of the cooperant factor second and fourth lows is proved in all cases. The third law is true, under the same assumptions, in the case of a firm which behaves as a perfect competitor in the product market and in the market of the factor whose demand is analysed, and as monopsonist in the cooperant factor market. On the other hand, in the two last cases, even with normal slopes of the curves, the demand elasticity of the product should necessary be higher than the sustitution elasticity between factors of production: this conditon is the one put forward by Hicks also as necessary to the verification of the third law in his own formulation for the industry which behaves as perfect competitor in all markets.