

COMUNICACIONES

UNA REPRESENTACION GRAFICA DEL MODELO DE UZAWA

JUAN CARLOS DE PABLO*

En 1961 Uzawa publicó su conocido trabajo sobre un modelo neoclásico de crecimiento de dos sectores. Dicho trabajo, junto con su extensión posterior (Uzawa (1963), basada en una sugerencia de Solow), se ha convertido en un clásico dentro de la teoría del crecimiento.

El objetivo de este ensayo es familiarizar a todo aquel que conozca el diagrama de Caja de Edgeworth con el trabajo de Uzawa, en la creencia de que la presentación original, por ser analítica, desanima a muchos estudiantes que de esta manera ven trabado su avance en la comprensión del problema.

El presente trabajo está dividido en varias secciones. En la primera se especifican detalladamente los supuestos. En la segunda se muestra el establecimiento del equilibrio en un período dado (esto es, el equilibrio con dotaciones de factores fijos).

En la tercera se presenta la existencia (y unicidad) del equilibrio de crecimiento balanceado a largo plazo. Por último en la cuarta sección se discute la estabilidad de dicho equilibrio.

Durante el desarrollo del trabajo haremos referencia, entre paréntesis, a los números de las ecuaciones del trabajo original, sin reproducirlas. De cualquier manera será posible leer el presente ensayo sin el original a la vista.

I

En esta sección detallaremos los supuestos en que se basa el análisis.

1. En la economía existen dos bienes, un bien de consumo y otro de capital.)
2. Cada bien se produce con una función de producción "de bien comportamiento". Existen rendimientos constantes a escala (ecuaciones (1) a (6)).
3. La función de producción del bien de consumo es intensiva en capital. No existe reversión de factores¹.
4. Hay competencia perfecta tanto en los mercados de productos como de factores.
5. Las dotaciones de factores están inelásticamente dadas; los precios de los factores, dada esta restricción, vienen dados por la (estructura de la) demanda (9).

* Economista Jefe, Fundación de Investigaciones Económicas Latinoamericanas (FIEL), Profesor en la Universidad del Salvador. Las opiniones vertidas son personales. Agradezco los valiosos comentarios efectuados por un referee de *Económica*.

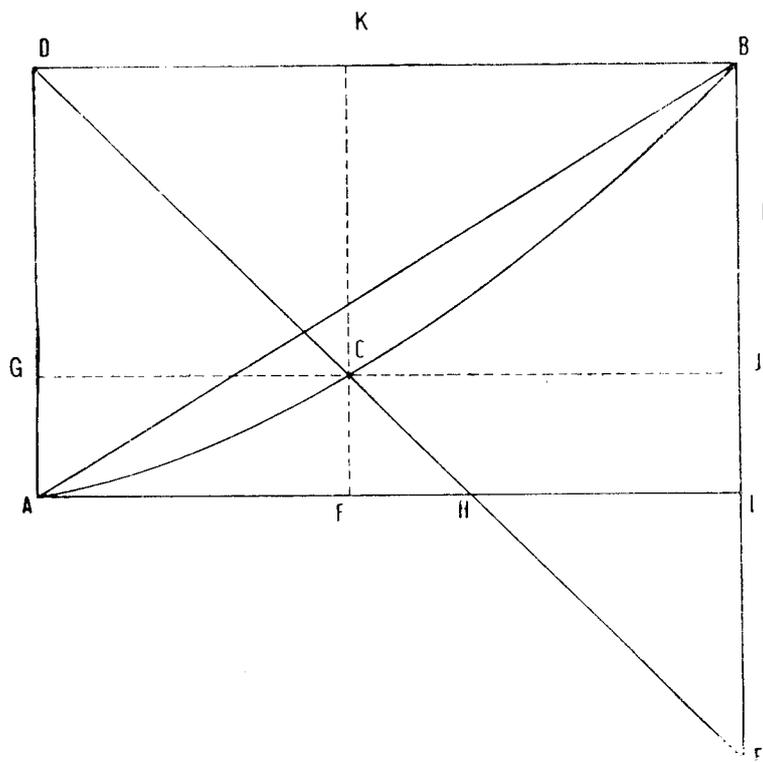
¹ Como probé en un trabajo anterior, en una economía cerrada la ausencia de reversión de factores (en el tramo relevante) no es un *supuesto* sino un *teorema*.

6. Los capitalistas gastan su ingreso íntegramente en la compra de bienes de capital. Los trabajadores lo hacen exclusivamente en bienes de consumo (10).
7. La población (y la fuerza de trabajo) crece a una tasa constante (22). El capital crece en función de la producción de bienes de capital y de la amortización³. Este supuesto habrá de reemplazar desde la sección tercera, al supuesto 5.

II

En base a los supuestos 1 a 6 detallados en la sección anterior, habremos de determinar el equilibrio en un momento dado. El caso se presenta con ayuda del Gráfico 1.

GRÁFICO 1



En el Gráfico 1 el tamaño de la caja viene dado por las dotaciones de los factores. Con origen en *A* dibujamos las isocuantas del bien de consumo y con origen en *B* las del bien de capital. Dada la diferencia en la intensidad

² En el artículo posterior (UZAWA, 1963), el razonamiento se basa en una función de ahorro que depende de la tasa de interés y del ingreso por habitante.

³ En el presente trabajo la depreciación se ignora. Dado que UZAWA asume una depreciación proporcional al stock de capital las conclusiones no habrán de diferir.

del uso de los factores y la competencia perfecta en los mercados de bienes y factores, surge la curva de contrato ACB .

En el caso usual (es decir, cuando no se especifica la demanda) el punto de equilibrio dentro de la curva de contrato en esta economía, o bien queda indeterminado o se determina arbitrariamente. En nuestro caso, por el contrario, contamos con la información suficiente como para determinar el equilibrio con precisión pues como hemos dicho (supuesto 6) los capitalistas dedican todo su ingreso a la compra de bienes de capital y los trabajadores el suyo a la adquisición de bienes de consumo.

Antes de comenzar el razonamiento debemos recordar como se mide un nivel de producción en términos de un factor. Ejemplo: en el Gráfico 1, ¿cuánto vale el nivel de producción indicado por el punto C del bien de consumo (el bien de isocuantas con origen en A) en términos de capital? A los precios relativos de los factores indicados por la recta DE , para producir un nivel C del bien de consumo es necesario utilizar AF de capital y AG (ó CF) de trabajo. ¿Cuánto vale AG de trabajo en términos de capital? A los precios relativos de los factores vigentes, AG de trabajo es igual a FH de capital (pues es AG de trabajo *multiplicado* por el precio relativo de capital en términos de trabajo, es decir, por HF/GA). Por consiguiente el costo total del nivel de producción del punto C del bien de consumo en términos de capital es $AF + FH = AH$. Con el mismo criterio es fácil deducir que la producción del punto C del bien de consumo en términos de trabajo es igual a DA , que la producción del punto C del bien de capital en términos de capital es igual a DB y que la producción del punto C del bien de capital en términos de trabajo es igual a BE . Estas magnitudes serán esenciales en la discusión que sigue.

Con estos elementos en la mano habremos de probar que el equilibrio en un momento dado en el modelo de Uzawa viene dado por la relación de precios de los factores que pasa por el punto D de la figura 1, en nuestro caso la relación DE ⁴. La prueba se puede realizar tanto en términos del factor trabajo como en términos del factor capital.

Comencemos por la discusión en términos de cantidades del factor trabajo. En términos de trabajo el ingreso total de los trabajadores es la dotación de trabajo, es decir, DA . Por su parte el valor (en términos de trabajo) de la producción del bien de consumo, es, como acabamos de ver, también igual a DA . En términos de trabajo el ingreso de los capitalistas es igual a BE . Por su parte el valor del bien de capital (en términos de trabajo) también es igual a BE .

Si realizamos los cálculos en términos de capital llegamos a los mismos resultados. El ingreso de los trabajadores en términos de capital es igual a AH , lo que es lo mismo que el valor de la producción de bienes de consumo en términos de capital. Por otra parte el valor de la producción de los bienes de capital en términos de capital, es decir BD , es igual al ingreso total de los

⁴ Si los trabajadores gastaran su ingreso en bienes de capital y los capitalistas el suyo en bienes de consumo, el equilibrio se obtendría a partir de la relación de los precios de los factores que pasa por el punto I .

capitalistas en términos de capital. Resulta evidente entonces por que el punto C —de equilibrio— se determina por el rayo de precios relativos de los factores que pasan por el punto D .

A fin de que el razonamiento resulte mas claro mostraremos el intercambio de ingresos entre los sectores de la producción de los bienes. En términos de trabajo el ingreso total de los trabajadores es igual a DA . Esto surge de la participación de GA en la producción de los bienes de consumo y de la participación de BJ en la producción de bienes de capital. Por su parte —también en términos de trabajo— el ingreso total de los capitalistas es igual a BE . Esto surge de la participación de DG en la producción de los bienes de consumo (es decir, AF por los precios relativos $DG/GC = DG/AF$) y de la participación de JE en la producción de bienes de capital (es decir, CJ de capital a los precios relativos $DG/GC = JE/CJ$). Queda para el lector la tarea de expresar este razonamiento en términos de capital.

En equilibrio, la participación de los trabajadores en la producción del bien de capital tiene que ser igual a la participación de los capitalistas en la producción del bien de consumo. En el punto que corresponde a los precios relativos de los factores que pasa por D esto se da pues, en términos de trabajo, $BJ = DG$ ⁵. Por consiguiente C es el punto de equilibrio.

Antes de finalizar la sección es necesario hacer notar que este equilibrio es único. Esto resulta claro cuando se piensa, en términos de la figura 1, que la relación de los precios de los factores se hace cada vez mas vertical cuando el gráfico se observa de izquierda a derecha⁶.

III

A partir de la demostración realizada en la sección anterior habremos de analizar la existencia (y unicidad) del equilibrio de crecimiento balanceado a largo plazo.

La cuestión de la existencia de equilibrio balanceado a largo plazo puede en este caso plantearse de la siguiente manera: en un momento dado (Gráfico 1) una economía produce determinada cantidad de bienes de capital. Esto implica un cierto porcentaje de crecimiento en el stock de capital (en el caso del Gráfico 1 sería BC/BD). Si en un período dado el incremento porcentual en el crecimiento de capital es igual al del trabajo, lo será para siempre⁷.

Si esto último es cierto, entonces frente a un incremento porcentual igual en el crecimiento de ambos factores, *en equilibrio*, el nivel de producción de bienes de capital debe seguir siendo proporcional al stock de capital

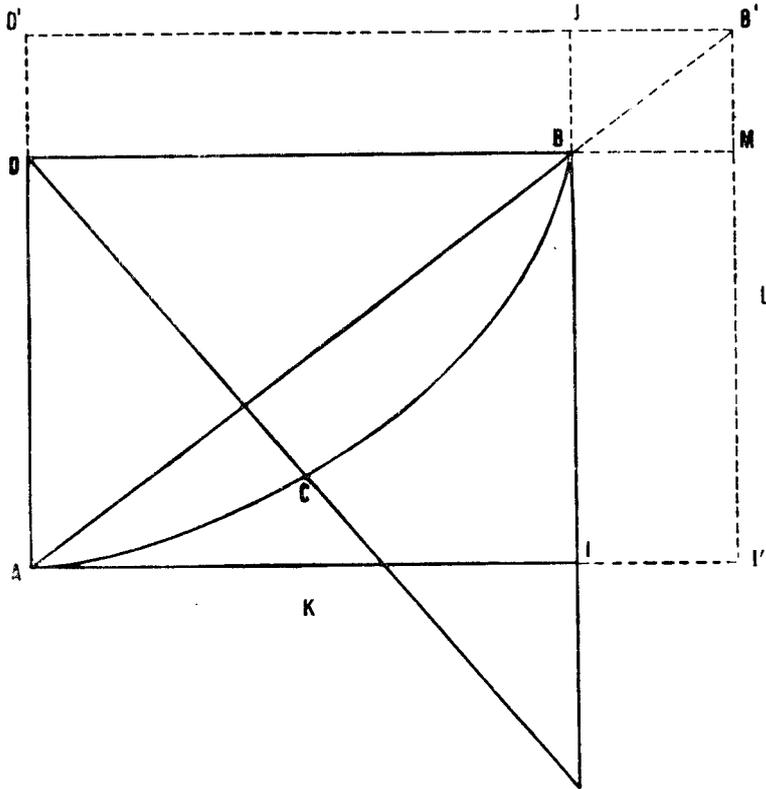
⁵ La derivación explícita del precio relativo de los bienes en este caso puede encontrarse en GABA.

⁶ Por la misma razón es posible pensar en la posibilidad de equilibrio múltiple cuando las ecuaciones de gasto están revertidas (ver nota ⁴).

⁷ Partiendo de la base de que el trabajo siempre crece a la misma tasa porcentual.

(pues esto implica que el capital seguirá creciendo a la misma tasa). La prueba se realiza con ayuda del Gráfico 2.

GRÁFICO 2



En el gráfico 2 hemos conservado las mismas letras para los mismos puntos que en el gráfico 1. La dotación de capital del primer período es igual a DB mientras que la dotación de trabajo correspondiente es DA . En función de estos datos surge un punto de equilibrio C , tal que $BC/DB = D'D/DA$. En otros términos una situación en la cual ambos factores productivos crecen a la misma tasa. Por esto hemos dibujado la caja de Edgeworth que corresponde al segundo período (en líneas punteadas) con la misma relación capital-trabajo que en el primero (nótese que la diagonal en ambas cajas es la misma).

El problema consiste en determinar el punto de equilibrio que corresponde en nuestro caso a una caja de dimensiones $AD'B'I'$ y compararlo con el anterior punto de equilibrio. La prueba de la existencia de crecimiento balanceado a largo plazo es directa una vez que se recuerda que las funciones de producción de ambos bienes son homogéneas y lineales (rendimientos constantes a escala). En estas condiciones los niveles relativos de producción

de los bienes son iguales en cajas de idénticas dimensiones relativas (igual relación capital-trabajo en la dotación de cada período) y los niveles absolutos son proporcionales a la dotación absoluta de dichos factores. En particular el nivel de producción de bienes de capital es proporcional al stock de capital de cada período. Esto implica que si en un período las condiciones de producción de una caja reproducen en el próximo período una caja aumentada en forma proporcional en la dotación de factores, el proceso se repite indefinidamente, en otros términos, el crecimiento balanceado de largo plazo existe⁸.

IV

El resultado de la sección anterior, esto es, la demostración de la existencia de equilibrio de crecimiento balanceado a largo plazo, si bien interesante en sí misma, resulta —en ausencia de otras propiedades— de un limitado valor empírico. En otros términos, si para que una economía pueda lograr una senda de crecimiento balanceado a largo plazo fuera necesario que desde siempre hubiera estado en ella, esto carecería de valor práctico pues sería difícil que tal economía existiera. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿qué sucede cuando partimos de una relación capital-trabajo que no es la que corresponde al crecimiento a largo plazo de los factores de la producción? Lo que acabamos de plantear es el problema de la *estabilidad* del equilibrio de crecimiento balanceado a largo plazo.

Para la demostración haremos uso del teorema de Rybczynski. Dicho teorema dice que, con los supuestos que hemos venido utilizando, un incremento de la dotación de un factor implica, para dados precios relativos de los bienes (y por consiguiente de los factores), un incremento en el volumen de producción del bien que utiliza dicho factor en forma intensiva y una reducción *absoluta* en el volumen de producción del otro bien. Si ambos bienes son superiores, esto lleva consigo en el nuevo equilibrio, en el caso de una economía cerrada⁹ que es el analizado por Uzawa, una reducción en el precio relativo del bien que utiliza en forma intensiva el factor cuya dotación aumentó lo cual a su vez implica una reducción en el precio relativo del factor cuya dotación aumentó. Desde nuestro punto de vista interesa investigar la producción de bienes de capital en *relación* al stock de capital, para cada relación capital-trabajo. Tal estudio se realiza con ayuda del Gráfico 3.

Inicialmente existe *DB* de capital y *AD* de trabajo. En base a los supuestos anteriores esto nos lleva a un punto de equilibrio *C*, lo que implica un aumento en el stock de capital igual a la producción de bienes de capital

⁸ ¿Cómo se comporta la demanda en este caso? Los nuevos trabajadores y capitalistas se incorporan con la misma función de gustos que los existentes (preferencias por el bien de consumo y de capital respectivamente). Esto asegura, junto con las condiciones de oferta descriptas, que a lo largo de la senda de crecimiento balanceado a largo plazo los precios relativos de los factores, el nivel de ingreso por habitante y su distribución permanecen constantes.

⁹ En el caso de una economía abierta donde el país es pequeño en el comercio internacional la acumulación de factores provoca exclusivamente modificaciones en los niveles relativos de producción de los bienes. La comparación de los casos de economía cerrada y abierta puede consultarse en un reciente trabajo de DRÉGUEZ y PORTO.

Si una vez que la economía está en la relación capital-trabajo de equilibrio, permanece indefinidamente en ella y si existe una relación inversa entre la relación capital-trabajo y el aumento porcentual en el stock de capital, resulta claro que el sistema es estable. En otros términos, si la relación capital-trabajo inicial es superior a la de crecimiento balanceado a largo plazo, el crecimiento porcentual en el capital será menor que el del trabajo y viceversa, con lo cual se prueba la convergencia.

También debe resultar claro porque es esencial que la función de producción del bien de consumo sea capital-intensiva. Si así no fuera, la relación entre la relación capital-trabajo de la economía y la tasa de crecimiento en el stock de capital sería *positiva* con lo cual, frente a un aumento en un período seguiría creciendo indefinidamente y frente a una disminución en un período haría desaparecer el stock de capital. En otras palabras, el modelo sería inestable.

REFERENCIAS

- DE PABLO, J. C.: "La Reversión de Factores, La Readopción de Técnicas y la Frontera de Posibilidades de Producción", *Económica*, N.º 2, La Plata, Mayo-Agosto de 1970.
- DIEGUEZ, H. L. y PORTO, A.: "Un Modelo Simple de Equilibrio General. Acumulación de Factores y Variación de los Términos del Intercambio", *Económica*, N.º 3, septiembre-diciembre, 1972.
- GABA, E.: "Participación en un Modelo de Crecimiento de dos Sectores", *Revista de Ciencias Económicas*, LII, Serie IV, N.º 23, Enero-Junio de 1965, p. 31-40.
- RYBCZYNSKI, T. M.: "Factor Endowments and Relative Commodity Prices" *Economica*, XXII, N.º 84, Noviembre de 1955, p. 336-41.
- SOLOW, R. M.: "Note on Uzawa's Two Sector Model of Economic Growth" *Review of Economic Studies*, XXIX, 1961-62, p. 48-50.
- UZAWA, H. (1961): "On a Two Sector Model of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, XXIX, 1961-62, p. 40-47.
- UZAWA, H. (1963): "On a Two Sector Model of Economic Growth II", *Review of Economic Studies*, XXX, N.º 2, Junio de 1963, p. 105-118.