Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

EQUILIBRIO DE UNA ECONOMÍA COMPETITIVA: UNA PRUEBA DE SU EXISTENCIA*

ROLF R. MANTEL**

Introducción

Un rasgo común a todas las pruebas disponibles acerca de la existencia de equilibrio en una economía competitiva es la utilización de algún teorema de punto fijo[1].

Hasta ahora no ha sido muy claro como evitar el usar estas herramientas poderosas en aquellos modelos económicos en que varios consumidores están eligiendo las mejores acciones de acuerdo con sus preferencias, y los productores están fijando sus planes de producción de manera tal de maximizar sus beneficios.

Desde el punto de vista del matemático, estas pruebas de existencia[2] gozan de la ventaja de ser elegantes. El economista, por otra parte, siente que falta algo; como él, por lo general, no es muy experto en las dificultades de la topología algebraica, los teoremas de punto fijo son demasiado misteriosos para poder intuir su significado con facilidad. Más aún, la objeción principal a estas pruebas es que no son constructivas. De ningún modo es claro como encontrar los precios y cantidades de equilibrio cuya existencia ha sido demostrada. Desde el punto de vista de su aplicación a la formulación de una política económica, por lo tanto, los modelos de equilibrio general no tienen mucha utilidad, más que como un esquema general para sistematizar sus datos.

Por supuesto, existen aplicaciones de algunas versiones simplificadas de modelos de equilibrio general, como en el caso de insumo-producto,

---

* El presente trabajo es parte de una disertación presentada al Departamento de Economía de la Universidad de Yale, en candidatura para el título de Doctor de Filosofía. La versión completa será publicada oportunamente por el "Yale Economic Essays".

** Instituto Torcuato Di Tella, Centro de Investigaciones Económicas, Noviembre 1965.

[1] En relación con este tema, son conocidos los nombres de Brower, Begle (1950), Eilenberg y Montgomery (1946), Kakutani (1941), Lefschetz (1949).

[2] Arrow y Debreu (1954), Debreu (1956, 1959 – 1), Gale (1955), McKenzie (1955, 1959), Negishi (1960), Nikaidô (1956), Morishima (1960), Rader (1963).

programación lineal, análisis de actividades, o algunos de los modelos que se utilizan para programación del desarrollo. Común a todos ellos es su negligencia del consumidor individual, que se ve reemplazado por una función de bienestar social, de modo de transformar el problema y convertirlo en uno de programación convexa. En casi todos los casos también ignoran la producción conjunta (excepto en el caso del modelo de von Neumann[3] y sus generalizaciones).

Por otra parte, los estudios llevados a cabo acerca de la estabilidad de mercados múltiples dejaron entrever la posibilidad de encontrar un método general para computar precios y cantidades de equilibrio de bienes y servicios.

Además, los teoremas no consideran todos los casos. Si uno no está preparado a hacer ciertos supuestos restrictivos,[4] surge la posibilidad de que existan economías sin equilibrio estable, como ha sido demostrado por Scarf (1960).

El propósito de este trabajo es demostrar la existencia de un equilibrio competitivo sin recurrir a métodos topológicos avanzados. La comprobación estará basada en una propiedad notable de ciertos conos convexos, descubiertos en forma independiente por Scarf (1965) y Mantel (1965).

La Sección I presenta un modelo simple de equilibrio general, con una discusión breve de los supuestos pertinentes, con la intención de dar un ejemplo representativo del sistema Walrasiano bajo su forma moderna. En la Sección II se discutirán las propiedades de ciertos conos convexos, para transformar luego, en la Sección III, el modelo mencionado en un cono con esas propiedades, por el método ficticio de admitir la posibilidad de considerar fracciones de personas. En la Sección IV se demostrará como la existencia de un equilibrio competitivo en la economía original descansa sobre la existencia de una actividad "preservadora del valor bien por bien" para insumos dados en el cono.

[3] Von Neumann (1937); Karlin (1959); Koopmans (1964); Morishima (1964).

[4] V.g. cualquiera de los supuestos siguientes: sustitutabilidad bruta, dos consumidores, dos bienes. Véase Arrow y Hurwicz (1958), Arrow, Block y Hurwicz (1959), Negishi (1962).

1. El modelo

El modelo de una economía competitiva para el cual se demostrará la existencia del equilibrio, es una versión abreviada del material disponible en la literatura corriente.[5] La única diferencia significativa reside en el supuesto de una representación cóncava de preferencias (función de utilidad). La prueba puede ser extendida a casos más generales; sin embargo, esto no se hará aquí, a fin de asegurar una exposición más sencilla y una centralización de la atención sobre el concepto central.

Los siguientes supuestos describen el modelo.

Existen *n* bienes comerciados en el mercado, con las listas de los mismos representadas como vectores en un espacio Euclídeo de n dimensiones, al que llamaremos espacio de bienes. Cada consumidor (al que designaremos con los valores i = 1, ..., m) tiene un conjunto de consumo X^i de listas de demandas excedentes factibles [6] x^i, en que cada elemento componente x^i_j representa el exceso de demanda del bien j por el consumidor i. La serie $X = \sum_i X^i$ de agregados de consumo está definida por

$$(1)\; X \equiv \{x/x = \textstyle\sum_i x^i \,;\, x^i \in X^i\}$$

El conjunto de planes de producción posible se indicará con Y. Un plan de producción es un *n-vector* cuyos elementos representan productos netos.

Con respecto a estos conjuntos se harán varios supuestos.

Supuesto 1. Para cada i, X^i es cerrado,[7] convexo y acotado inferiormente.

El supuesto de que el conjunto es *cerrado* es conveniente desde el punto de vista matemático, ya que no existe la posibilidad de contradecirlo por medio de experimento alguno, debido a la imprecisión de las mediciones. Que el conjunto es convexo significa que si el mismo contiene los extremos de un segmento, contiene todo el segmento. Que X^i está *acotado inferiormente* significa que existe un vector $\underline{x}$ tal que[8]

[5] Compárese con Debreu (1959-1) o McKenzie (1959). Los supuestos que se enumeran más adelante en el texto corresponden, con ciertas simplificaciones, al modelo de McKenzie (1959)

[6] Una lista de demandas excedentes es factible si le permite al i-ésimo consumidor sobrevivir.

[7] Un conjunto S es cerrado si $x^t \in S$ para todo t, y x^t tiende a x^* implica que $x^* \in S$.

[8] Las relaciones $>$, $\geq$ o $=$ entre vectores se supone que se cumplen para todos los componentes. $x \geq y$ significa que $x \geq y$, y que ambos vectores son distintos entre sí, y no excluye la

$$x^i \in X^i \text{ implica que } x^i \geq \underline{x}$$

Supuesto 2. Para cada i, X^i está completamente ordenado por una relación de preferencia representable por una función de utilidad u_i continua y cóncava.

Continuidad significa que ${}_t x^i \to x^i$ implica que $u_i\,({}_t x^i) \to u_i\,(x^i)$.

Concavidad de u_i significa que

$$(2)\quad u_i(\alpha\, {}_1x^i + (1-\alpha)\, {}_2x^i) \geq \alpha\, u_i({}_1x^i) + (1-\alpha)\, u_i({}_2x^i)$$

para todo ${}_1x^i$ y ${}_2x^i$, y para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Este supuesto es un tanto más fuerte que el común de continuidad y cuasi-concavidad.[9]

Pero, como los casos en los que no existe representación cóncava dependen del comportamiento del ordenamiento de las preferencias en un conjunto de medida cero, la función cóncava u_i se puede elegir de forma tal de aproximar las preferencias a un grado de precisión.

Supuesto 3. Y es un cono cerrado y convexo.

El hecho de que Y es un cono significa que $y \in Y$ implica que $\lambda\, y \in Y$ para $\lambda \geq 0$. Este es el supuesto corriente de rendimientos constantes a escala. Para extender el teorema de existencia a casos más generales con rendimientos a escala no creciente, el lector debe referirse al teorema general de existencia presentado en el trabajo de Mc Kenzie (1959), en que se demuestra que el caso general puede ser resuelto por medio de la introducción apropiada de factores empresariales.

El supuesto de convexidad significa, por supuesto, que cualquier combinación de planes factibles es nuevamente factible.

Supuesto 4. $Y \cap \Omega = \{\, 0 \,\}$

Ω es el ortante no-negativo. Este supuesto postula la imposibilidad de producir algo da la nada.

En el enunciado del próximo supuesto, sea int Z el interior[10] del conjunto Z.

---

posibilidad de x = y. Nota del editor: el $\geq$ se corresponde a $\geqq$ en el trabajo original del Dr. Rolf R. Mantel.

[9] Se dice que una función es cuasi-cóncava si la ecuación (2) se cumple solamente para listas de bienes que son indiferentes; es decir, la ecuación (2) se cumple siempre que $u_i\,({}_1x^i) = u_i\,({}_2x^i)$

[10] Sea $|x|$ la longitud del n-vector x, que se define como $|x| \equiv \sum_j |x_j|$. Entonces, x es un *punto interior* del conjunto S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|x - y| < \varepsilon$ implica que $y \in S$. El *interior* de S es, de esta forma, el conjunto de los puntos interiores de S.

Supuesto 5. Para cada i, $0 \in \text{int } X^i$. Además, $Y - \Omega \in Y$.

La primera parte de este supuesto asegura la supervivencia de todos los consumidores; todos están posibilitados de proveer una cierta cantidad de cada uno de los bienes.

La segunda parte es un supuesto de descarte gratuito, que expresa que no existe costo alguno en términos de recursos ligado al descarte de bienes.

Este supuesto es más fuerte de lo necesario. La prueba es válida también para el caso en que el supuesto 5 hecho por Mc Kenzie (1959), más débil, es utilizado.

Supuesto 6. Las funciones de utilidad u_i son monótonas.[11]

Monotonicidad de preferencias significa que todos los consumidores están en mejor situación con una cantidad mayor de todos los bienes.

El presente análisis sigue siendo válido si este supuesto se reemplaza por el supuesto de irreducibilidad.[12]

Un equilibrio competitivo para esta economía quedará definido por un vector precio p, un plan de producción y, y actividades de consumo $x^1, \ldots, x^m$, que satisfacen las siguientes condiciones:

I) $y \in Y$; $py = 0$, y para todo $\mathbf{y} \in Y$, $p\mathbf{y} \leq 0$,

II) $x^i \in X^i$; $px^i = 0$, y para todo $\mathbf{x}^i \in X^i$, $p\,\mathbf{x}^i \leq 0$ implica que $u_i(\mathbf{x}^i) \leq u_i(x^i)$;

III) $\sum_i x^i = y$

La condición I expresa la condición de un beneficio nulo, y que el plan de producción debe ser maximizador de beneficios.

La condición II expresa el supuesto de que los consumidores maximizan su utilidad, dentro de sus posibilidades.

III es la condición de equilibrio del mercado.

[11] Se dice que una función f es monótona si $x > y$ implica que $f(x) > f(y)$.

[12] Véase Mc Kenzie (1961) o Debreu (1962).

2. Propiedades de ciertos conos convexos

En esta sección, se analizarán las propiedades que caracterizan a ciertos conos convexos. En las secciones siguientes, quedará demostrado que una economía competitiva puede reducirse a este tipo de conos.

De esta forma, se verá que la existencia de un equilibrio competitivo es equivalente a una notable propiedad de conos convexos, a la que llamaremos, por falta de un nombre mejor, la existencia de una actividad preservadora del valor bien por bien.

En lo que sigue se hará referencia al cono T. Los elementos del conjunto T de todas las combinaciones posibles de insumos y productos[13] quedarán designados por dos n-vectores v y w, y el par (v, w) representará una actividad. Un elemento (v, w) del conjunto T recibirá el nombre de actividad *factible*.

La siguiente es una lista de las propiedades que caracterizan al tipo de conos convexos necesarios para la prueba de existencia.

Propiedad 1. T es un cono convexo en el ortante no-negativo de un espacio Euclídeo de 2 n dimensiones.

Este es el supuesto de rendimientos constantes a escala (proporcionalidad) y no interferencia entre actividades (aditividad). En otros términos, si (v, w) y (v', w') son dos actividades factibles, y si $\lambda \geq 0$ es un número real, tanto $(\lambda v, \lambda w)$ como $(v + v', w + w')$ son factibles.

Propiedad 2. T es un conjunto cerrado.

Esto significa que T contiene su frontera. Este supuesto se hace por conveniencia matemática, ya que no se puede verificar empíricamente.

Propiedad 3. (0, w) en T implica que w = 0.

La propiedad 3 postula la imposibilidad de producir algo de la nada.

Propiedad 4. Existe una actividad (v^0, w^0) en T, con $w^0 > 0$.

Esta propiedad expresa que el cono representa una tecnología que permite la producción de todos los bienes.

Propiedad 5. Si (v, w) está en T, y si $v' \geq v$ y $0 \leq w' \leq w$, entonces la actividad (v', w') está en T.

[13] Las propiedaes del conjunto T, que se pasarán a describir, coinciden con aquellas pertinentes a la tecnología del modelo de von Neumann. Véase la presentación de este último y la discusión de sus supuestos en Koopmans (1964) y en las referencias allí citadas.

Este último supuesto postula que se puede descartar cualquier bien sin costo alguno.

A esta altura de la exposición, es necesario hacer algunas definiciones.

Una actividad factible (v, w), será eficiente, si $v' \leq v$, $w' \geq w$; y $(v', w') \in T$ implica que $v' = v$, y que $w' = w$. En otros términos, es imposible encontrar otra actividad factible que no produzca menor cantidad de algún bien sin utilizar más recursos.

La definición implica que si (v*, w*) es eficiente, entonces no puede estar en el interior de T. Por otra parte, los supuestos 4 y 5 implican que T tiene un interior, que es convexo, de acuerdo con el supuesto 1.

Por lo tanto, el teorema de separación de conjuntos convexos,[14] aplicado a los dos conjuntos disjuntos $\{(v^*, w^*)\}$ e int T, asegura la existencia de n-vectores α y β (a los que se denominará precios) tales que

$$(3)\quad \sum_i (\alpha_i w_i - \beta_i v_i) \;\leq\; \sum_i (\alpha_i w^*_i - \beta_i v^*_i)$$

para todo (v, w) en T.

Asimismo, por el supuesto 1, $(\lambda v^*, \lambda w^*)$ está en T para todo $\lambda \geq 0$, de modo que

$$(4)\quad (\lambda - 1)\sum_i (\alpha_i w^*_i - \beta_i v^*_i) \;\leq\; 0$$

para todo $\lambda \geq 0$, lo que a su vez implica que

$$(5)\quad \sum_i \alpha_i w^*_i \;=\; \sum_i \beta_i v^*_i$$

La existencia de precios a los que ninguna actividad tiene beneficio positivo, y a los que la actividad eficiente (v*, w*) no tiene pérdidas, puede expresarse diciendo que *una actividad eficiente es preservadora del valor.*

Esto expresa el hecho de que, de acuerdo con la ecuación (5), el valor de los insumos es igual al valor de los productos. Extendiendo esta terminología, cualquier actividad para la cual, para todo i,

[14] El teorema de separación de conjuntos convexos a que hace referencia es el siguiente: Si A, B son dos conjuntos disjuntos y convexos, existe un hiperplano que los separa. Véase la demostración de este teorema en Debreu (1959-2).

$$(6)\ \alpha_i w_i = \beta_i v_i$$

podrá llamarse *preservadora del valor bien por bien*.

En otros términos, una actividad eficiente es preservadora del valor bien por bien si el valor de cada insumo es igual al valor del producto correspondiente, a los precios de eficiencia asociados con esta actividad.

El problema a resolver es si, dado un vector positivo de insumos v*, existe un vector de productos w* tal que la actividad (v*, w*) es preservadora del valor bien por bien. En la parte restante del presente trabajo, se verá que esta propiedad implica la existencia de un equilibrio competitivo; la verificación de la misma no se intentará aquí, debiendo el lector interesado recurrir a la demostración ofrecida en Mantel (1965).

3. La economía coniforme

En esta sección, quedará demostrada la correspondencia existente entre un punto de equilibrio para una economía competitiva y una actividad preservadora del valor bien por bien para insumos dados. Esto es, la economía competitiva presentada en la Sección I quedará convertida en un cono con las propiedades enunciadas en la sección anterior.

Como un primer paso, se obtendrá un resultado intermedio.

Lema 1. Todas las demandas excedentes obtenibles,[15] x^i, están en una región acotada.

Demostración: Asúmase que para algún consumidor, ${}_t x^i$ tiene una coordenada que aumenta sin límites.

Por el supuesto 1 acerca de la economía competitiva, cada conjunto de consumo X^i está acotado inferiormente, de modo que ${}_t x = \sum_i {}_t x^i$ debe tener una coordenada que aumente sin límites. Pero, para que las actividades sean obtenibles, ${}_t x$ debe estar en Y, donde también debe estar el vector

[15] Una lista de demandas excedentes x^i se denominará obtenible si se puede complementar con listas de demandas excedentes para cada uno de los consumidores restantes, de modo que se cumplan las relaciones: $x^i \in X^i$ para todo i, y $\sum_i x^i \in Y$.

$$y^t = {}_t x / |{}_t x| ,$$

ya que Y es un cono.

Pero $|y^t| = 1$, de modo que existe una subsecuencia que converge a un punto, sea y.

Como $X = \sum_i X^i$ está limitado inferiormente, se tendrá $y \geq 0$, $y =$ de 0[16]

Pero el hecho de que Y es cerrado significa que $y \in Y$, lo que contradice el supuesto 4.

De esta forma se puede proponer el siguiente supuesto sobre los conjuntos de consumo, sin restringir la generalidad del análisis:

Supuesto 7. Para todo i, X^i es acotado. $u_i(x^i) > 0$ para todo $x^i \in X^i$.

Quedará demostrado que las cinco propiedades que caracterizan al tipo de conos presentados en la sección anterior se cumplen para T si las funciones u_i y los conjuntos X^i o Y satisfacen los supuestos 1 – 7 para una economía de competencia.

Teorema. Sea:

$$T \equiv \left\{ (v, w) \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} w_i \leq v_i u_i(x^i); \\ x^i \in X^i \\ \sum_i v_i x^i \in Y \end{array} \right\}$$

Entonces T tiene las propiedades 1 a 5.

Demostración:

1) Convexidad y linealidad.

Supóngase que (v^1, w^1) y (v^2, w^2) son dos actividades factibles, y que t_1 y t_2 son dos números positivos. Entonces para todo i

[16] Nota del editor: Se agregó $y = 0$ para que coincidiera con el trabajo original del Dr. Rolf R. Mantel.

$$t_1 w^1_i + t_2 w^2_i \leq t_1 v^1_i u_i ({}_1x^i) + t_2 v^2_i u_i ({}_2x^i)$$

$$\leq (t_1 v^1_i + t_2 v^2_i) u_i \left\{ \frac{(t_1 v^1_i)\, {}_1x^i + (t_2 v^2_i)\, {}_2x^i \}}{t_1 v^1_i + t_2 v^2_i} \right\}$$

debido a la concavidad de u_i;

$$\frac{(t_1 v^1_i)\, {}_1x^i + (t_2 v^2_i)\, {}_2x^i}{t_1 v^1_i + t_2 v^2_i} \in X^i$$

por la convexidad de X^i; y, como Y es un cono convexo,

$$\Sigma_i \; (t_1 v^1_i + t_2 v^2_i) \quad \frac{(t_1 v^1_i)\, {}_1x^i + (t_2 v^2_i)\, {}_2x^i}{t_1 v^1_i + t_2 v^2_i} =$$

$$= t_1 \; \Sigma_i \; v^1_i \; {}_1x^i \; + \; t_2 \; \Sigma_i \, v^2_i \; {}_2x^i \; \in Y$$

De esta forma, $(t_1 v^1 + t_2 v^2, t_1 w^1 + t_2 w^2)$ está en T.

2) T es cerrado:

Supóngase que $(v^t, w^t) \rightarrow (v, w)$ con $(v^t, w^t) \in T$. Por definición de T existe un ${}_tx^i \in X^i$ para cada t, tal que

$$w_i^t \leq v^t_i u_i ({}_tx^i)$$

$$\Sigma_i v^t_i \, {}_tx^i \in Y \text{ para todo t.}$$

Como cada X^i es compacto, existe una subsecuencia que converge, pongamos por caso, a $x^i \in X^i$. Por la continuidad de los u_i

$$w_i \leq v_i u_i (x^i)$$

y $\Sigma_i v_i x^i \in Y$ ya que Y es cerrado. Por lo tanto, (v, w) está en T.

3) Imposibilidad de libre producción.

Evidentemente, $v_i = 0$ implica que $w_i = 0$ ya que, para todas las i,

$$0 \leq w_i \leq v_i\, u_i\, (x^i)$$

4) Positividad de la producción.

Sea $v_i = 1$ para todas las i, y tómese a $x^i = 0$. Entonces $x^i \in X^i$, por el supuesto 5, y $\sum_i x^i \in Y$ ya que $0 \in Y$. Si se define a w_i por la relación $w_i = u_i(0) > 0$ por el supuesto 7, esta propiedad también se verifica.

5) Descarte gratuito.

Supóngase que (v^1, w^1) es una actividad factible, y sea $v^2 \geq v^1$; $0 \leq w^2 \leq w^1$. Defínase a ${}_2x^i \equiv (v^1_i / v^2_i)\, {}_1x^i$ si $v^2_i > 0$. Si $v^2_i = 0$, tómese a ${}_2x^i = {}_1x^i$ Entonces,

$$w^2_i \leq w^1_i \leq v^1_i\, u_i\, ({}_1x^i) \leq v^2_i\, u_i\, ({}_1x^i) = v^2_i\, u_i\, ({}_2x^i) \text{ si } v^2_i = 0;$$

$$w^2_i \leq w^1_i \leq v^1_i\, u_i\, ({}_1x^i) \leq v^2_i \;\; [(v^1_i / v^2_i)\, u_i\, ({}_1x^i) + (1 - v^1_i / v^2_i)\, u_i\, (0)]$$

$$\leq v_i^2\, u_i\, ({}_2x^i)$$

ya que $u_i(0) > 0$, y u_i es cóncava;

$$(v^1_i / v^2_i)\, {}_1x^i + (1 - v^1_i / v^2_i)\, 0 \equiv {}_2x^i \in X^i$$

porque X^i es un conjunto convexo, al que pertenece el origen, y

$$\sum_i v^2_i\, {}_2x^i = \sum_i v^1_i\, {}_1x^i \in Y$$

Q.E.D.

De esta forma, ha quedado demostrado cómo una economía de competencia puede ser reinterpretada como un cono con las propiedades 1 a 5, mencionadas anteriormente. Para una mejor captación de este artificio, es posible considerar cada índice $i \in \{1, \ldots, m\}$ como un grupo de consumidores con idénticos gustos y posibilidades económicas. La cantidad de consumidores dentro del grupo está dado por v_i, y w_i indica la utilidad total (que se supone es transferible dentro del grupo) obtenida por estos consumidores v_i.

La economía puede entonces considerarse como un proceso de transformación de ciertas combinaciones de personas en utilidades. Por supuesto, no se le puede dar ningún significado económico a una transformación de este tipo, pero es un truco matemático útil.

4. Existencia de equilibrio competitivo

A esta altura de la exposición, es posible demostrar que la existencia de una actividad preservadora del valor bien por bien para insumos dados, implica la existencia de un equilibrio competitivo. La demostración se hará de la siguiente manera: como un primer paso es necesario volver a la economía original retomándola del cono que se construyó en la sección anterior, esto se logra fácilmente, exigiendo que haya exactamente una persona en cada grupo de consumidores.

A partir de esto, se demostrará que la actividad preservadora del valor bien por bien corresponde a un máximo de bienestar, suponiendo que este bienestar es una función lineal de las utilidades de los consumidores individuales con pesos no negativos. El teorema de separación de conjuntos convexos se puede entonces aplicar para obtener precios para estos bienes. Por medio de los mismos es sencillo verificar que las restricciones del presupuesto se satisfacen, y que los consumidores maximizan sus utilidades. Al mismo tiempo podrá verse que los pesos asignados a cada consumidor en la función de bienestar son las recíprocas de las utilidades marginales del ingreso.

Comencemos, entonces, por asumir que $v_i^0 = 1$ para $i \in \{1, ..., m\}$. Como se ha dicho antes, esto refleja el hecho de que existe sólo un consumidor de cada tipo. Como se ha asumido que la propiedad mencionada se cumple para el cono T, definido en la sección anterior, existe un vector de utilidades w^0 tal que la actividad (v^0, w^0) está en T, con la propiedad adicional de que existen precios α y β, no todos cero, tales que

$$(7)\ \sum_i (\alpha_i w_i - \beta_i v_i) \leq 0$$

para todos los (v, w) en T y

$$\alpha_i w^0_i = \beta_i v^0_i = \beta_i$$

Ya que, por la propiedad de descarte gratuito, (v, 0) está en **T** para todo $v \geq 0$, es evidente que $\beta \geq 0$.

Partiendo de los supuestos 1, 2 y 7 es evidente que, para todo i, el número

$$\bar{u}_i = \min_{x^i \in X^i} u_i(x^i)$$

existe y es positivo. De esta forma, si e^i es un vector cuyo iésimo elemento es igual a la unidad y los demás elementos son cero, $(v_i e^i, v_i \bar{u}_i e^i)$ está en T, de tal forma que

$$(\alpha_i \bar{u}_i - \beta_i) v_i \leq 0$$

para todo i y todo $v_i \geq 0$. Entonces,

$$\alpha_i \bar{u}_i \leq \beta_i$$

y por lo tanto $\beta_i = 0$ implica que $\alpha_i \leq 0$.

Ahora se demostrará que α puede siempre tomarse como no negativa. Asúmase lo contrario, es decir que $\alpha_{i_0} < 0$. Defínase los vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{w}$ como sigue:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \alpha_i \; ; \; w_i = \mathbf{w}_i \text{ para } i \neq i_0$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{i_0} = \mathbf{w}_{i_0} = 0;$$

esto es, estos dos vectores se obtienen de los originales reemplazando la coordenada i_0 por cero. Entonces, si $(v, w) \in T$,

$$\sum_i (\boldsymbol{\alpha}_i w_i - \beta_i v_i) = \sum_i (\alpha_i \mathbf{w}_i - \beta_i v_i) \leq 0$$

ya que

$$\boldsymbol{\alpha}_{i0} w_{i0} = \alpha_{i0} \mathbf{w}_{i0},$$

y porque descarte gratuito de la producción implica que $(v, \mathbf{w}) \in T$.

De acuerdo con el resultado obtenido anteriormente, esto significa que el par (α, β) puede elegirse de tal forma que, para toda i,

$$\beta_i = 0 \text{ implica que } \alpha_i = 0.$$

De esta forma, β no puede ser nula, de modo que $\beta \geq 0$ y $\beta = 0$[17] Como $w^0 \geq 0$, esto implica que α no es negativa, y tiene por lo menos una coordenada positiva.

De la ecuación (7) tenemos que las utilidades w^0 corresponden a un máximo de bienestar. Esta ecuación es equivalente a

$$(8) \qquad \max \{\textstyle\sum_i \alpha_i (w_i - w^0_i v_i) \;/\; (v, w) \in T\} = 0$$

---

[17] Nota del editor: Se agregó $\beta = 0$ para que coincidiera con el trabajo original del Dr. Rolf R. Mantel.

Para poder obtener los precios correspondientes a los bienes por medio de la aplicación del teorema de separación a que se ha hecho referencia más arriba, se introducirá el siguiente conjunto:

$$(9)\ S \equiv \left\{ (\lambda, z) \;\middle|\; \begin{array}{c} \lambda \leq \sum_i \alpha_i (w_i - w^0_i v_i);\ \sum_i v_i x^i - y = z; \\ w_i \leq v_i u_i (x^i);\ x^i \in X^i;\ y \in Y; \\ v_i \geq 0;\ w_i \geq 0 \end{array} \right\}$$

Procediendo como con la demostración de convexidad de T, en la sección precedente, se puede demostrar que S es un cono convexo.
Además, por el supuesto 5, S tiene interior.

La maximalidad de la actividad (v^0, w^0) implica que el origen no está en el interior de S. De esta forma, el teorema de separación de conjuntos convexos puede ser aplicado, llegando a la conclusión de que existen precios π (un número real) y p (un n-vector), no todos cero, tales que

$$(10)\quad \pi\lambda - \sum_j p_j z_j \leq 0$$

para todo $(\lambda, z) \in S$. Por la condición de descarte gratuito de λ, es inmediato que $\pi \geq 0$.

El supuesto 5 implica que z puede llegar a tener cualquier valor no negativo; de esta forma, $p \geq 0$. Debe demostrarse que $\pi > 0$.

Supóngase lo contrario, es decir, que $\pi = 0$; entonces; para algún j_0, p_{j_0} debe ser positivo. Si tomamos $v_i = 1$ para todo i, $y = 0$, y $x^i_j = -\varepsilon$ para todo i y todo j, con ε suficientemente pequeño y positivo, se obtiene un punto $(\lambda, z) \in S$ en que $z_j < 0$ para todas las j. Pero esto implica que el primer miembro de la ecuación (10) es estrictamente positivo, lo que es una contradicción. De esta forma, puede suponerse de aquí en adelante que $\pi = 1$.

De las ecuaciones (9) y (10) obtenemos ahora

$$(11)\quad \sum_i \alpha_i \left(u_i (x^i) - w^0_i\right) v_i - \sum_j p_j \left(\sum_i v_i x^i_j - y_j\right) \leq 0$$

para todo $x^i \in X^i$, $y \in Y$, y $v_i \geq 0$.

El próximo paso será demostrar que los beneficios son nulos, y que las restricciones del presupuesto se ven satisfechas si las demandas netas son evaluadas a los precios p.

En primer lugar, considérese la actividad preservadora del valor bien por bien, $(1, w^0)$. Como es factible (es decir, como está en T), existen ${}_0x^i \in X^i$; $y^0 \in Y$ tales que

$$w^0_i \leq u_i\,({}_0x^i)$$

$$(12) \qquad {}_0x^i \in X^i$$

$$y^0 = \Sigma_i\, {}_0x^i \in Y$$

de modo que, como Y es un cono, es posible deducir de (11) que

$$(13)\ \Sigma_i\ \alpha_i\ [u_i\,({}_0x^i) - w^0_i]\ v_i\ -\ \Sigma_j\, p_j\ (\Sigma_i\, v_i\, {}_0x^i_j\ \ t\, y^0_j)\ \leq\ 0$$

para todo $v_i \geq 0$ y para todo $t \geq 0$.

Teniendo en cuenta que

$$(14)\ \Sigma_i\ \alpha_i\ [u_i\,({}_0x^i) - w^0_i]\ -\ \Sigma_j\, p_j\ (\Sigma_i\, {}_0x^i_j\ .\ y^0_j)\ =\ 0$$

se obtiene, restando (14) de (13)

$$(15)\ \Sigma_i\ \{\ \alpha_i\ [u_i\,({}_0x^i) - w^0_i] - \Sigma_j\, p_j\ {}_0x^i_j\ \}\ \ (v_i - 1) + (t - 1)\ \ \Sigma_j\, p_j\ \ y^0_j\ \leq\ 0$$

lo cual implica que

$$\alpha_i\ [u_i\,({}_0x^i) - w^0_i] - \Sigma_j\, p_j\ {}_0x^i_j = 0$$

para todo i, y

$$(16)\ \Sigma_j\ p_j\ \ y^o_j =\ 0$$

de modo que la condición de beneficio nulo está satisfecha. Como $u_i\,({}_0x^i) \geq w^o_i$, y $\alpha_i \geq 0$, es inmediato que

$$\Sigma_j\ \ p_j\ {}_0x^i_j\ \geq\ 0$$

para todo i. Pero

$$\Sigma_i\ {}_0x^i\ =\ y^0,$$

lo que significa que

$$\Sigma_i\ \Sigma_j\ \ p_j\ {}_0x^i_j = \Sigma_j\ \ p_j\ \ y^0_j\ = 0,$$

Y por lo tanto, necesariamente debe ser

$$(17)\ \Sigma_j\ \ p_j\ {}_0x^i_j =\ 0$$

para todo i; de tal forma, las restricciones del presupuesto se ven satisfechas para todos los consumidores.

Para probar que los consumidores maximizan las utilidades, debe demostrarse que $\alpha_i > 0$ para cada i; para lograr este propósito debe saberse que $p \neq 0$. Asúmase entonces que $p = 0$. Como por lo menos una de las α_i es positiva, de la ecuación (11) se puede deducir que, para algunas i_1,

$$u_{i_1}(x^{i_1}) \leq w^0_{i_1}$$

para todo $x^{i_1} \in X^{i_1}$, lo que contradice el supuesto de monotonicidad de preferencias.

Supóngase ahora que $\alpha_{i_0} = 0$: Tomando a $y = y^0$; $x^i = {}_0x^i$ para $i \neq i_0$, y $v_i = 1$ para todo i, se obtiene de (11)

$$-\sum_j p_j x_j^{i_0} \leq 0$$

para todas las $x^{i_0} \in X^{i_0}$. Esto es nuevamente una contradicción, porque, por el supuesto 5, el origen está en el interior de X^{i_0}, de modo que esta expresión puede ser positiva para algunas demandas excedentes. De esta forma, puede llegarse a la conclusión de que, para todo i, $\alpha_i > 0$.

Finalmente, tomando $x^i = {}_0x^i$ para todos los consumidores menos uno, y tomando a $y = 0$, se obtiene de (11)

$$(18) \quad \alpha_i\,(u_i(x^i) - w^0_i) - \sum_j p_j\, x^i_j \leq 0$$

para todo valor de i, y para todo $x^i \in X^i$. Dividiendo todo por α_i, la ecuación anterior es equivalente a

$$(19) \quad u_i(x^i) - (1/\alpha_i) \sum_j p_j\, x^i_j \leq w^0_i$$

Por lo tanto, si las restricciones del presupuesto

$$(20) \quad \sum_j p_j\, x^i_j \leq 0$$

se satisfacen, la ecuación (19) implica que

$$(21) \quad u_i(x^i) \leq w^0_i.$$

En otros términos, ${}_0x^i$ maximiza a u_i, sujeto a la restricción del presupuesto (20) para todas las $x^i \in X^i$.

Del primer miembro de la ecuación (19), se puede ver que $(1/\alpha_i)$ es el multiplicador de Lagrange interpretado por lo general como la utilidad marginal del ingreso en la teoría del consumidor.

REFERENCIAS

ARROW, K.J., Y G DEBREU, (1954): "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica*, 22, 265-290, 1954.

----------------- y L. HURWICZ, (1958): "On the Stability of Competitive Equilibrium. I", *Econometrica*, 26, 522-552, 1958.

-----------------, H.D. BLOCK, Y L. HURWICZ, (1959): "On the Stability of Competitive Equilibrium. II", *Econometrica*, 27, 82-109, 1959.

BEGLE, E.G., (1950): "A Fixed Point Theorem", *Annals of Mathematics*, 51, 544-550, 1950.

DEBREU, G., (1956): "Market Equilibrium", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*., 42, 876-878, 1956.

----------------, (1959 – 1): *Theory of Value*". New York, 1959

----------------, (1959 – 2): "Separation Theorems for Convex Sets", Apéndice al punto 2 en Koopmans y Bausch (1959).

----------------, (1962): "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis", *International Economic Review*, 3, 257-273, 1962.

EILENBERG, s., Y d. Montgomery, (1946): "Fixed Point Theorems for Multi-Valued Transformations", *American Journal of Mathematics*, 68, 214-222, 1946.

GALE, D., (1955): "The Law of Supply and Demand", *Mathematica Scandinavica*, 3, 155-169, 1955.

KAKUTANI, S., (1941): "A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal*, 8, 457-459, 1941.

KARLIN, S., (1959): *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Vol. I, Reading, 1959.

KOOPMANS, T.C., (1964) "Economic Growth at a Maximal Rate", *The Quarterly Journal of Economics*, 78, 355-394, 1964.

-----------------, y A.F. BAUSCH, (1959): "Selected Topics in Economics, Involving Mathematical Reasoning ", SIAM Review, 1, 79-148, 1959.

MANTEL, R., (1965): *Toward a Constructive Proof of the Existence of Equilibrium in a Competitive Economy*, tesis doctoral inédita, Yale University, 1965.

LEFSCHETZ, S., (1949): *Introduction to Topology*, Princeton 1949.

MC KENZIE, L.W., (1955): "Competitive equilibrium with Dependent Consumer Preferences", en H.A. Antosiewicz (ed.), *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*, Washington, 277-294, 1955.

----------------------, (1959): "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive market", *Econometrica*, 27, 54-71, 1959.

----------------------, (1961): "On the Existence of General Equilibrium. Some Corrections", *Econometrica*, 29, 247-248, 1961.

MORISHIMA, M., (1960): "Economic Expansion and the Interest Rate in Generalized Von Newmann Models", *Econometrica*, 28, 352-363, 1960.

----------------------. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford, 1964.

NEGISHI, t., (1960): "Welfare Economics and Existence of an equilibrium for a Competitive Economy", *Metroeconomica*, 12, 91-97, 1960.

---------------, (1962): "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article", *Econometrica*, 30, 635-669, 1962.

NIKAIDÔ, H., (1956): "On the Classical Multilateral Exchange Problem, *Metroeconómica*, 8, 135-145, 1956.

RADER, J.T., (1963): *Edgeworth Exchange and General Equilibrium*, tesis doctoral inédita, Yale university, 1963.

SCARF, H.E., (1960): "Some Examples of Global Instability of the Competitive equilibrium", *International Economic Review*, 1, 157-172, 1960.

----------------. (1965): *The Core of an N-Person Game.* Cowles Foundation Discussion Paper Nº 182. Marzo 23. 1965.

Von NEUMANN. J.. (1937): "Über ein Ökonomischos Gleichungs – System und eine Verallgemeinerung des Browerschen Fixpunktsatzos". en Karl Menger. (ed.). Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. Nº 8. 1935-36. publicado 1937. Traducido al inglés como "A model of General Economic equilibrium". *Review of Economic Studies*. XIII. 1 – 9. 1945-46.