Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

EL PROCESO DE AJUSTE DEL BIENESTAR: UN EJEMPLO DE INESTABILIDAD

ROLF R. MANTEL

Resumen

Proponemos un nuevo proceso de ajuste dinámico para una economía de mercados múltiples. El proceso consiste en ajustar las ponderaciones asignadas a consumidores individuales en una función de bienestar, de acuerdo con la diferencia entre sus ingresos y sus gastos. Se presentan algunas conclusiones sobre estabilidad global, con resultados nuevos para el caso de preferencias homotéticas. Aún cuando el proceso no siempre es estable, su dominio de estabilidad no coincide con el del proceso de ajuste de precios en un mercado competitivo. La relación entre ambos se analiza localmente, mediante sistemas de ecuaciones diferenciales complementarios. Los resultados son de interés para la aplicación de modelos de equilibrio general a la planificación del desarrollo.

1. Introducción

Mucho se ha escrito sobre procesos dinámicos de ajuste de precios en economías competitivas de mercados múltiples, tanto para el caso en que hay comercio de bienes y servicios fuera del equilibrio como en el caso del tâtonnement Walrasiano, en que el intercambio de efectúa únicamente una vez que las fuerzas del mercado dejaron de ejercer su influencia[1]. En este artículo presentaré un método distinto para alcanzar a una solución competitiva, que llamaré proceso de ajuste del bienestar. Como es sabido[2], bajo ciertas condiciones, la asignación final de bienes y servicios a los consumidores en una economía competitiva en equilibrio es óptima en el sentido de Pareto; es decir, es imposible reasignar esos bienes de manera alguna que aumente la satisfacción para un consumidor cualquiera sin perjudicar a otro de ellos.

---

[1] Ver Negishi (1) para una revisión completa de la literatura en este campo.
[2] Ver Debreu (2).

Negishi [3] demostró que, dada cualquier distribución de la dotación inicial de bienes y servicios entre los consumidores, es posible construir una función de bienestar social tal que las cantidades producidas y consumidas en un equilibrio competitivo maximizan el bienestar. Los argumentos de esta función son las utilidades de los consumidores, y el bienestar total depende linealmente de ellas.

Surge la pregunta de que si no es posible utilizar esta correspondencia entre equilibrio competitivo y máximo de bienestar para construir algún proceso de ajuste que permita calcular una solución de equilibrio competitivo, ajustando las ponderaciones asignadas a cada individuo en la función de bienestar social. A pesar de que tal proceso no imitaría el funcionamiento del mercado, es posible darle una interpretación económica. Imagínese el comportamiento de una Junta de Planificación que desea hallar una solución competitiva, sin información sobre la distribución de las dotaciones iniciales de bienes y servicios, pero con conocimiento de los gustos de la población y de los recursos totales de la economía. Un procedimiento que podría adoptarse a fin de resolver el problema, es asignar ponderaciones arbitrarias a los individuos, promediar las funciones de utilidad utilizando estas ponderaciones para obtener una función de bienestar social, y luego maximizar el bienestar social sujeto a las restricciones dadas por las disponibilidades totales de recursos. La información sobre las resultantes asignaciones óptimas de bienes entre los consumidores y los correspondientes precios imputados se transfiere luego a los consumidores, quienes a su vez calculan el valor de sus tenencias iniciales a esos precios. Restando el valor de la asignación óptima de esta cantidad obtendrán el monto que se verían forzados a ahorrar si recibieran tal asignación. En una segunda iteración, la Junta de Planificación podría entonces proceder a maximizar una nueva función de bienestar, en la que las ponderaciones de consumidores con ahorros positivos han sido aumentadas y las otras disminuyeron.

Este proceso iterativo se repetiría hasta que los ahorros de todos los individuos sean nulos, situación a la que se arribará eventualmente si el proceso es estable. Es el propósito de este artículo el formalizar estas ideas mostrando la relación entre este proceso de ajuste y el más conocido proceso de ajuste de precios. La importancia del análisis reside en el hecho de que los dominios de estabilidad de ambos no coinciden, de modo que es posible que uno de ellos permita el cálculo de una solución cuando no lo permite el otro.

2. La relación entre equilibrio y bienestar máximo

Ya que todas las dificultades inherentes a los problemas de la teoría del equilibrio general se deben al comportamiento de los consumidores, limitaremos el análisis, sin sacrificar su generalidad, a una economía de intercambio puro. Es sencillo introducir los procesos productivos en el cuadro en el futuro.

Denotaremos por x^i, para $i = 1, ..., m$, la lista de demandas netas del i-ésimo consumidor. La j-ésima coordenada de este vector, x^i_j, para $j = 1, ..., n$, representa por lo tanto el incremento sobre la dotación inicial del bien j que el consumidor i recibe con la asignación final, o cuando es negativa, el decremento que sufre. Es decir, en una economía de mercado esta cantidad representa la cantidad neta intercambiada. Supondremos que las preferencias del consumidor i-ésimo pueden ser representadas por una función de utilidad $u^i(.)$, que además supondremos ser continua y derivable continuamente dos veces, estrictamente monótona[3] y estrictamente cóncava.[4] Finalmente, los conjuntos de demandas netas que son al menos tan buenas como el "status quo" dado por la dotación inicial tiene una cota inferior que no es alcanzada por dicho "status quo"[5].

Bajo tales condiciones, podemos enunciar el

Teorema 1. Es posible hallar un vector de precios p positivo, m listas de demandas netas x^i, y un sistema de m ponderaciones positivas w^i, que a la vez representan:

a) un equilibrio competitivo; es decir,
   1) Cada x^i maximiza $u^i(x)$ sujeto a la restricción de presupuesto $px^i \leq 0$.
   2) $w^i = p_j / u^i_j(x^i) = 1$ / utilidad marginal del gasto.
   3) Los mercados están en equilibrio, de modo que $\sum_i x^i = 0$.
b) un máximo de bienestar; es decir
   1) $(x^1, ..., x^m)$ maximiza a $\sum_i w^i u^i(x^i)$ sujeto a $\sum_i x^i \leq 0$.
   2) p es el vector de precios imputados (multiplicadores de Lagrange) asociados a la restricción $\sum_i x^i \leq 0$.

---

[3] Es decir, $x^i \geq y^i$ con $x^i \neq y^i$ implica $u^i(x^i) > u^i(y^i)$. Las relaciones entre vectores deben interpretarse como relaciones entre sus elementos correspondientes.

[4] Es decir, $0 < t < 1$ con $x^i \neq y^i$ implica $u^i(tx^i + (1-t)y^i) > tu^i(x^i) + (1-t)u^i(y^i)$.

[5] Con esto se quiere decir que para cada i hay un $b^i > 0$ tal que $u^i(x^i) \geq u^i(0)$ implica $x^i > -b^i$.

Este teorema ha sido demostrado por Negishi [3] bajo condiciones más generales, incluyendo procesos productivos y funciones de utilidad no diferenciables. Para nuestros propósitos, este enunciado más débil es suficiente.

3. El proceso de ajuste del bienestar

La equivalencia entre equilibrio competitivo y máximo de bienestar sugiere la posibilidad de hallar los precios y cantidades de equilibrio por medio de un proceso de maximización. Ya que no es de esperar que una asignación arbitraria de ponderaciones a los consumidores nos de el resultado deseado, es necesario ensayar varios sistemas de valores para las mismas hasta determinar las correctas. La prueba de existencia de Negishi en [3] nos da una indicación de cómo se podría proceder sistemáticamente hasta obtener una solución: ajústense las ponderaciones de acuerdo con la brecha entre los gastos y los ingresos de los individuos. A continuación presentaremos un proceso basado en estas ideas, con el ajuste realizado en forma continua.

No hay ninguna razón obvia por la cual tal proceso de ajuste deba comportarse de manera cualitativamente similar al proceso de ajuste de precios, en el cual el cambio en los precios depende de las demandas excedentes en los distintos mercados. Sin embargo, como veremos más adelante, existe cierta relación entre las propiedades de estabilidad de ambos procesos.

Formalicemos entonces el proceso de ajuste del bienestar. Dado un sistema cualquiera de ponderaciones positivas $\underline{w}$, el problema del bienestar máximo (párrafo $\underline{b}$ del Teorema 1) puede ser resuelto maximizando el Lagrangeano.

$$(1) \qquad L = \sum_i w^i u^i(x^i) + p \sum_i x^i.$$

De acuerdo con el teorema de Kuhn y Tucker de programación no lineal, siempre será posible hallar un vector positivo $\underline{p}$ tal que la solución de este problema de máximo también sea una solución para el problema de máximo bajo restricciones en $\underline{b}$ del teorema 1. Dados nuestros supuestos, condiciones necesarias y suficientes para tal máximo son

$$(2) \qquad w^i u^i_x = p \; ; \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$(3) \qquad \sum_i x^i = 0,$$

donde el vector de utilidades marginales u^i_x debe ser evaluado en la asignación óptima x^i. Debido al supuesto de funciones de utilidad estrictamente cóncavas, la solución será única, de modo que los ahorros del i-ésimo consumidor

$$(4) \qquad s^i = -px^i$$

están bien definidos para ponderaciones $\underline{w}$ positivas cualesquiera. Las propiedades de continuidad de las funciones de utilidad también garantizan que cada s^i dependa en forma continua de $\underline{w}$. Además, como puede inferirse de las condiciones de máximo (2) y (3), un cambio equiproporcional en todas las ponderaciones induce un cambio similar en $\underline{p}$, sin afectar los valores de las demandas netas x^i, de manera que cada s^i es también una función positivamente homogénea de grado unidad en $\underline{w}$.

El proceso de ajuste continuo más sencillo que puede construirse en base a los lineamientos presentados en la introducción puede ser definido por la ecuación diferencial

$$(5) \qquad \dot{w} = s,$$

donde el punto sobre una variable denota a su derivada con respecto al tiempo.

Este proceso implica un ajuste instantáneo de precios y cantidades a aquellos que corresponden a la solución del problema de máximo de bienestar para ponderaciones dadas; las ponderaciones mismas se ajustan de acuerdo con los ahorros de cada consumidor.

4. Algunos resultados sobre estabilidad global

Nuestro primer resultado global es el equivalente al caso de sustitución bruta para el proceso de ajuste de precios. Siguiendo a Arrow, Block y Hurwicz [4] podemos traducir su lema 5 para nuestro modelo como

Lema 1. Si para todo $i \neq j$ tenemos $\partial s^i / \partial w^j > 0$, entonces la desigualdad

$$(6) \qquad \sum_i s^i / w^i > 0$$

vale para todo sistema de ponderaciones positivas $\underline{w}$ que no sean de equilibrio.

En el enunciado del lema hemos supuesto, como haremos en lo que sigue, que las funciones de utilidad se refieren a una escala tal que en la solución de equilibrio bajo estudio $w^i = 1$ para todo i. La demostración de la aseveración es inmediata, si se observa que una ley análoga a la de Walras es válida, bajo la forma

$$(7) \qquad \sum_i w^i (s^i / w^i) = \sum_i s^i = -\sum_i px^i = -p\sum_i x^i = 0$$

y que las funciones s^i / w^i son positivamente homogéneas de grado cero en $\underline{w}$, de manera que la hipótesis del lema 5 en [4] se cumple. Como ha sido demostrado en dicha referencia, el proceso

$$(8) \qquad \dot{w}^i = h^i (s^i / w^i)$$

es estable para funciones de ajuste h^i (.) continuas y preservadoras del signo cualesquiera; el análogo de su teorema 2.1 para nuestro caso es el

Teorema 2. El proceso de ajuste del bienestar

$$(9) \qquad \dot{w}^i = s^i / w^i,$$

es estable dada la hipótesis del lema 1, y la convergencia es monótona en la norma Euclidea.

Demostración: Sea la distancia al punto de equilibrio dada por

$$(10) \qquad D = (1/2)\sum_i (w^i - 1)^2$$

Entonces,

$$(11) \qquad \dot{D} = \sum_i (w^i - 1)(s^i / w^i) = -\sum_i (s^i / w^i) < 0$$

de modo que la distancia disminuye hasta que todas las ponderaciones son iguales.

En el caso general, con funciones de utilidad arbitrarias, es difícil dar una condición sencilla sobre la estructura de la economia que garantice que la condición $\partial s^i / \partial w^j > 0$ se satisfaga. Aún cuando es fácil expresar esta condición verbalmente, como enunciando que un aumento en la ponderación asignada a un consumidor cualquiera en la función de bienestar disminuye los ahorros de todos los demás, no está claro cómo justificarla desde el punto de vista económico, ya que ahorros y gastos no están evaluados a precios de mercado sino a precios imputados o "sombra", excepto en equilibrio.

Hay sin embargo un caso en que algo puede decirse sobre el signo de estas derivadas. Si todos los individuos tienen preferencias convexas y homotéticas – no necesariamente iguales -, y si estas preferencias son tales que para cada individuo todos los bienes son sustitutos brutos en el sentido usual, independientemente de sus dotaciones iniciales, entonces existe un indicador de utilidad para cada consumidor tal que el proceso de ajuste de bienestar es estable globalmente. Podemos enunciar esta resultado como

Corolario. Sean las preferencias del i-ésimo individuo homotéticas y estrictamente convexas, de manera que por una conveniente selección del indicador de utilidad podemos suponer que la función de utilidad del i-ésimo individuo es estrictamente cóncava y logarítmicamente homogénea, en el sentido de que

$$u^i (x^i) = v^i (b^i + x^i)$$

para algún $b^i > 0$, donde

$$v^i (ax) = v^i (x) + \log (a)$$

para todo a positivo. La función de utilidad cumple con la condición adicional de que, para cualquier $b^i > 0$, las funciones de demanda de mercado resultantes son tales que un aumento en el precio de un bien resulta en un aumento en la demanda por todos los demás (sustitución bruta). Entonces el proceso de ajuste del bienestar (9) es globalmente estable.

Demostración: Debemos demostrar que las hipótesis del corolario implican las del lema 1. Para tal fin es necesario calcular explícitamente las derivadas $\partial s^i / \partial w^i$. El primer paso consiste en analizar las consecuencias del supuesto de sustitución bruta.

Si en un momento dado el individuo i-ésimo se enfrenta con un sistema de precios de mercado p, maximizará su utilidad sujeto a la restricción de presupuesto $p\, x \leq 0$; ignorando por el momento el índice i, sus funciones de demanda pueden obtenerse de las condiciones de equilibrio

$$u_x = \lambda\, p$$

$$px = 0$$

Derivando estas ecuaciones con respecto a los precios, obtendremos

$$u_{xx}\, x_p = \lambda\, I + p\, (\lambda_p)'$$

$$p'\, x_p + (x)' = 0$$

donde los subíndices indican de manera obvia la variable con respecto a la que debe calcularse la derivada, y un apóstrofe ha sido agregado a fin de indicar con mayor claridad la transposición de vectores.

Debido a la homogeneidad supuesta para las v^j (.) tenemos las identidades

$$u'_x (x + b) = 1$$

$$u_{xx} (x + b) + u_x = 0$$

con la matriz de las derivadas parciales de segundo orden negativa definida a causa de la concavidad estricta. Por lo tanto, es posible despejar los efectos de cambios en los precios sobre la demanda como sigue

$$x_p = \lambda\, u^{-1}_{xx} + (1/\lambda)\,(x + b)\,(\lambda_p)'$$

de manera que

$$-x' = p'\, x_p = \lambda\, p'\, u^{-1}_{xx} + (1/\lambda)\, p'\, b\, \lambda'_p$$

$$= -x' - b' + (1/\lambda)\, p'\, b\, \lambda'_p$$

Por lo tanto,

$$x_p = (1/pb)\,[u^{-1}_{xx} + (x + b)\, b']$$

ya que

$$\lambda = [u_x\,(x + b)/\, p\,(x + b)] = (1/pb)$$

El supuesto de sustitutabilidad bruta (estricta) implica que los elementos no diagonales de la matriz x_p son positivos; como el consumo total $x + b$ y las tenencias iniciales $\underline{b}$ son positivos, puede verse fácilmente que esta condición puede ser satisfecha para tenencias iniciales arbitrarias únicamente si los elementos no diagonales de u^{-1}_{xx} son positivos.

Usemos nuevamente el índice $\underline{i}$ para diferenciar los consumidores. Derivando las condiciones de equilibrio (2) y (3) obtenemos

$$w^i\, u^i_{xx}\;(\partial x^i/\partial w^j) + \delta_{ij} u^i_x = \partial p/\partial w^j$$

$$\sum_i (\partial x^i/\partial w^j) = 0$$

donde $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, mientras que $\delta_{ii} = 1$. Despejando $\partial x^i/\partial w^j$, y $\partial p/\partial w^j$, tenemos

$$(\partial x^i/\partial w^j) = (1/w^i)\,(u^i_{xx})^{-1}\,[(\partial p/\partial w^j) - \delta_{ij}\, u^i_x]$$

$$(\partial p/\partial w^j) = Q\,(1/w^j)\,(u^j_{xx})^{-1}\, u^j_x = -\,(1/w^j)\, Q\,(x^j + b^j)$$

donde $Q = [\Sigma_i (1/w^i) (u^i_{xx})^{-1}]^{-1}$, que existe, ya que la matriz entre corchetes, siendo la suma de matrices definidas negativas, es también definida negativa.

Finalmente obtendremos

$$s^i = -px^i = -w^i u^i_x x^i$$

$$= -w^i (1-u^i_x b^i)$$

$$= -w^i + pb^i$$

de modo que para $i \neq j$

$$\partial s^i/\partial w^j = (b^i)' (\partial p/\partial w^j) = -(1/w^j) (b^i)' Q (x^j + b^j)$$

Como w^j, b^i, $x^j + b^j$ son todas positivas, es suficiente para que $\partial s^i/\partial w^j$ sea positiva que la matriz $\underline{Q}$ sea negativa.

Supóngase por el contrario que $\underline{Q}$ tiene algún elemento no negativo. Entonces es posible hallar un vector no negativo $\underline{z}$ tal que $Qz = y$ tiene algún elemento no negativo. En otras palabras, si a la inversa de $\underline{Q}$ la denominamos $\underline{M}$, para el vector $y \not< 0$ tenemos $z = M\, y \geq 0$, con $z \neq 0$.

Si $\underline{y}$ fuera no negativo, podríamos deducir que yMy es no negativo, lo cual es imposible ya que M es definida negativa e $\underline{y}$ no es nula. Por lo tanto $\underline{y}$ debe tener algún elemento negativo. Partamos

$$y = (y_1 , y_2) \text{ con } y_1 < 0,\ y_2 \geq 0;$$

ambos subvectores tienen algún elemento, como ha sido demostrado por el argumento precedente. Aplicando la misma partición a la matriz M obtenemos

$$M_{22}\, y_2 = z_2 - M_{21}\, y_1 > 0$$

ya que

$$z_2 \geq 0 ,\ y_1 < 0$$

y

$$M_{21} > 0;$$

Esta última desigualdad se deduce porque la submatriz M_{21} no contiene elementos de la diagonal de $\underline{M}$. En consecuencia deducimos que y_2 no puede ser nulo, y

$$\begin{pmatrix} 0 & y_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2 M_{22} y_2 > 0$$

contradiciendo el hecho que M es definida negativa. Como conclusión, Q es necesariamente negativa, quedando así demostrado el corolario.

Nuestro próximo caso nos mostrará que el dominio de estabilidad no coincide con el proceso de ajuste de precios. Ha sido demostrado por Gale [5] que aún en una economía con dos individuos puede darse el caso de los que el denomina equilibrios "antiestables", que no pueden ser alcanzados desde ninguna posición inicial excepto el punto de equilibrio mismo. Para el caso del proceso de ajuste del bienestar, la situación puede ser resumida en el siguiente

Teorema 3. En el caso de dos consumidores, el proceso de ajuste del bienestar siempre es estable, en el sentido de que lleva a algún punto de equilibrio.

Demostración: La situación es paralela a la de la economía con dos bienes analizada en [4]. Sea que estemos considerando el sistema de ecuaciones diferenciales (8) o el sistema más sencillo (5), los signos de las derivadas de w^1 y w^2 son opuestos, ya que $s^1 + s^2 = 0$. Por lo tanto sólo debemos demostrar que un valor relativamente alto para w^1 implica que s^1 es negativo, de modo que la razón w^1/w^2 decrece, y que un valor relativamente bajo de este cociente implica que s^1 es positivo y s^2 negativo, de modo que la razón aumenta. Ya que dada cualquier posición inicial esta razón o bien aumenta, o en caso contrario disminuye monótonicamente hasta que tanto s^1 como s^2 sean nulos, habremos demostrado la estabilidad.

Sea entonces $w^1/w^2 = r$. Sea x^* el valor que maximiza a $u^1(x)$ sujeto a la restricción $u^2(-x) \geq u^2(0)$. Debido al supuesto sobre las cotas sobre las demandas netas el máximo existe, de modo que por el teorema de Kuhn y Tucker de programación no lineal existe en r^* positivo tal que x^* maximiza la expresión

$$r^* u^1(x) + u^2(-x)$$

Por otra parte, considérese cualquier $r > r^*$; déjese que x^1 y x^2 maximicen a

$$r\, u^1(x^1) + u^2(x^2)$$

sujeto a la restricción

$$x^1 + x^2 \leq 0$$

y sea p el correspondiente vector de precios imputados. En consecuencia, x^2 maximiza a

$$u^2(x) - px,$$

de modo que

$$\begin{aligned} p\, x^1 &= -p\, x^2 \geq u^2(0) - u^2(x^2) = u^2(-x^*) - u^2(x^2) \\ &= [r/(r-r^*)]\,(r^* u^1 + u^2 + (1 - r^*/r)(u^{*2} - u^2) - r^* u^1 - u^2) \\ &= [r/(r-r^*)]\,[(r^*/r)(r\,u^1 + u^2) + (1 - r^*/r)\,u^{*2} - r^* u^1 - u^2] \\ &= [r/(r-r^*)]\,[(r^*/r)(ru^{*1} + u^{*2}) + (1 - r^*/r)\,u^{*2} - r^* u^1 - u^2] \\ &= [r/(r-r^*)]\,(r^* u^{*1} + u^{*2} - r^* u^1 - u^2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Cómo solo es posible tener una igualdad en la cadena de relaciones precedentes cuando $x^* = x^1$, podemos concluir que $s^1 = -px^1$ es negativo cuando $r > r^*$. Por medio de un argumento simétrico es posible demostrar la existencia de algún r^{**} positivo tal que s^1 es positivo cuando r toma valores inferiores, de modo que la conclusión sigue.

Un resultado que muestra algunas de las similitudes con el proceso de ajuste de precios está dado en el

Teorema 4. Si no hay intercambio en equilibrio, entonces el proceso de ajuste del bienestar (9) es estable para ponderaciones iniciales arbitrarias.

Demostración: Considérese la función de distancia definida por (10) y su derivada dada en (11). Reemplazando los ahorros por sus valores dados por (4), y utilizando las condiciones de máximo (2), obtenemos

$$(12) \qquad \dot{D} = \textstyle\sum_i px^i / w^i = \sum_i u^i_x\, x^i$$

Para las ponderaciones de equilibrio $\bar{w}^i=1$, tenemos de (2) que $\bar{p} = \bar{u}^i_x$. Además, como las funciones de utilidad son estrictamente cóncavas, tenemos para todo i

$$(13) \qquad (u^i_x - \bar{u}^i_x)\,(x^i - \bar{x}^i) < 0.$$

Así, si no hay intercambio a precios de equilibrio, $\bar{x}^i = 0$ para todo i, de modo que

$$(14) \qquad u^i_x\, x^i < \bar{u}^i_x x^i = \bar{p} x^i,$$

y

$$(15) \qquad \dot{D} < \textstyle\sum_i \bar{p} x^i = \bar{p} \sum_i x^i = 0$$

En consecuencia, la distancia Euclídea decrece monótonamente hasta que todas las ponderaciones se igualen.

Como fuera demostrado por Arrow y Hurwicz [6], dos situaciones en las que no se produce intercambio a los precios de equilibrio surgen cuando todos los individuos tienen la misma función de utilidad, y cuando la asignación inicial de bienes y servicios es óptima en el sentido de Pareto, de modo que en ambos casos es estable también el proceso de ajuste del bienestar.

Nuestro último resultado sobre estabilidad global no parece tener paralelo para el proceso de ajuste de precios. Se refiere al caso en que todo el mundo tiene las mismas preferencias homotéticas para listas de consumos pero con dotaciones iniciales de recursos posiblemente diferentes, de modo que la utilidad de las demandas netas pueden diferir entre individuos. Es decir, supóngase que

$$(16) \qquad u^i(x^i) = v\,(b^i + x^i)$$

para todo i, con $b^i > 0$. La función v (.) es el logaritmo de una función homogénea lineal, de modo que se cumplen las identidades

$$(17) \qquad v\,(ax) = v\,(x) + \log\,(a)$$

$$(18) \qquad v_x\,(x) = av_x\,(ax)$$

$$(19) \qquad v_x x = 1$$

Abandonando por el momento nuestra convención sobre la normalización de las funciones de utilidad, supóngase que la suma de las ponderaciones iniciales sea igual a la unidad. Puede verse fácilmente que si las ponderaciones se ajustan de acuerdo con el sistema (5) su suma permanece constante, ya que

$$(20) \qquad \sum_i \dot{w}^i = \sum_i s^i = 0$$

Calculemos la solución del problema del máximo de bienestar en un momento dado. Obtendremos las condiciones de máximo (2) y (3) que, debido a la homogeneidad de v (.), pueden ser escritas como

$$(21) \quad p = w^i u^i_x = w^i v_x\,(b^i + x^i) = v_x\,[(b^i + x^i)/w^i] = v_x(b),$$

donde $b = \sum_i b^i$, puesto que entonces tendrá

$$(22) \qquad \sum_i x^i = \sum_i (w^i b - b^i) = 0$$

Así puede verse que los precios no dependen de w. Como debido a (19), $pb = v_x(b)b = 1$, tenemos

$$(23)\quad \dot{w}^i = s^i = -px^i = p\,(b^i - w^i b) = pb^i - w^i$$

dándonos la solución explícita

$$(24)\quad w^i = pb^i + e^{-t}\,(w^i\,(0) - pb^i),$$

que, como es evidente, es estable y tiende a la solución de equilibrio

$$(25)\quad w^i = pb^i.$$

En resumen, tenemos el

Teorema 5. Si todos los consumidores tienen la misma función de utilidad para consumo logarítmico homogénea, entonces el proceso de ajuste del bienestar simple (5) es estable globalmente.

5. La posibilidad de equilibrios inestables

Presentaremos a continuación un ejemplo que muestra que el proceso de ajuste del bienestar no siempre es estable. El ejemplo está basado en la misma economía que la de Scarf [7]; demostraremos que su única solución de equilibrio también es antiestable para el proceso de ajuste del bienestar.

Hay tres consumidores y tres bienes. La utilidad del i-ésimo consumidor es

$$(26)\qquad u\,(x^i_i\,,\,x^i_{i+1})\qquad (i = 1, 2, 3,\ \text{cíclico})$$

de manera que los tres consumidores son idénticos excepto por la permutación cíclica de los bienes en sus preferencias. Para un máximo de bienestar, tendremos

$$(27)\qquad w^i\,u_j(x^i_i\,,\,x^i_{i+1}) = p_{i+j-1}\qquad (j = 1,2;\ i = 1,2,3\ \text{cíclico})$$

$$(28)\qquad x^{i+1}_i = x^i_i + x^{i+2}_i = 0\qquad (i = 1, 2, 3,\ \text{cíclico})$$

donde u_j representa la derivada parcial de u (.) con respecto a su j-ésimo argumento.

Para un equilibrio competitivo, si se supone que es único, debido a la simetría debemos tener, una vez normalizadas las ponderaciones de modo que su suma sea igual a 3:

$$(29) \qquad w^i = 1 \; ; \; p_i = p$$

$$(30) \qquad x^i_{i+1} = -x^i_i = x$$

$$(31) \qquad u_1(-x\,,\, x) = u_2(-x\,,\, x) = p$$

para todo i.

Supóngase ahora que el sistema de ecuaciones diferenciales (5) tiene una solución con condiciones iniciales tales que $\sum_i w^i(0) = 3$, y considérese la función de distancia (10). Derivando con respecto al tiempo, después de sustituir de (5)

$$(32) \qquad \dot{D} = \sum_i (w^i - 1)\, s^i = f(w)$$

Debido a (29), para un equilibrio competitivo tendremos

$$(33) \qquad f(1) = 0,$$

donde "1" representa en este caso a un vector con todos sus elementos iguales a la unidad.

A fin de demostrar la inestabilidad, es suficiente analizar el comportamiento del sistema en un entorno del equilibrio. A tal fin aplicaremos el teorema de Taylor, de manera que necesitaremos las derivadas parciales de f(.):

$$(34) \qquad \partial f/\partial w^i = s^i + \sum_j (w^j - 1)\, \partial s^j/\partial w^i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Se sigue que en equilibrio

$$(35) \qquad \partial f(1)/\partial w^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

puesto que el primer término del miembro derecho de (34) desaparece por cumplirse la restricción de presupuesto, mientras que el segundo término se anula debido a (29).

Calculando las derivadas de segundo orden,

$$(36) \qquad \partial^2 f(1)/\partial w^i \partial w^k = \partial s^i/\partial w^k + \partial s^k/\partial w^i \qquad (i,k = 1, 2, 3)$$

más un término que desaparece en equilibrio. Denotando a estas derivadas con f_{ik}, tenemos como consecuencia de la simetría cíclica,

$$(37) \qquad \begin{aligned} f_{i,i+1} &= \partial s^i/\partial w^{i+1} + \partial s^{i+2}/\partial w^{i+1} \\ &= -\partial s^{i+1}/\partial w^{i+1} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del balance en el mercado. Similarmente,

$$(38) \qquad f_{i,\,i+2} = \partial s^{i+1}/\partial w^i + \partial s^{i+2}/\partial w^i = -\partial s^i/\partial w^i.$$

Nuevamente debido a la simetría cíclica, todas las $\partial s^i/\partial w^i$ son iguales, de manera que la matriz de derivadas parciales segundas es

$$(39) \qquad f_{ww} = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde $k = \partial s^1/\partial w^1$. Luego de algunas manipulaciones adicionales arribamos finalmente a

$$(40) \qquad k = p\,[2p + x\,(u_{22} - u_{11})]\,/\,(u_{11} + u_{12} + u_{22})$$

donde las u_{ij} son las derivadas parciales de la función de utilidad, y la expresión debe evaluarse a los valores de equilibrio.

Tomando en cuenta a (33), (35) y (39), es posible aproximar (32) por

$$(41) \qquad \dot{D} = (w - 1)\, f_{ww}\, (w - 1) = k\, \textstyle\sum_i (w^i - w^{i+1})^2 \qquad \text{(cíclico)}$$

Cuando $k > 0$, esta expresión es positiva para todo valor de $\underline{w}$, excepto en el caso que todas las coordenadas sean iguales. Entonces, debido a (20) y a la condición inicial supuesta, debemos tener $w = 1$. Es posible concluir, por lo tanto, que el sistema es antiestable si la función de utilidad es tal que la condición (31) implica que $\underline{k}$ definida en (40) es positiva. Como la función de utilidad es estrictamente cóncava, el denominador de esa expresión es negativo, mientras que $\underline{p}$ es positivo, de modo que la función de utilidad debe satisfacer la relación

$$(42) \qquad q = 2p + x\,(u_{22} - u_{11}) < 0.$$

Considérese la función

$$(43) \qquad u\,(y\,,x) = \{(1\,/\,a)\,[b\,(\,(y+1)/b)^{-a} + x^{-a}]\}^{-c}$$

que es estrictamente cóncava para $a > 1$, $b > 0$, $c > 0$, y $ac < 1$. Como quedará demostrado por Scarf en [7], esta función de utilidad implica la unicidad del equilibrio competitivo para nuestro modelo.

Ahora bien, el signo de q es independiente del indicador de utilidad particular que se haya elegido; depende sólo de las preferencias, y no lo afecta una transformación creciente de la función de utilidad. A fin de verificarlo, sea $v = f(u)$, con $f' > 0$. Entonces

$$(44) \qquad 2v_1 + x\,(v_{22} - v_{11}) = 2\,f'u_1 + x\,(f'u_{22} + f''u_2 - f'u_{11} - f''u_1)$$
$$= f'\,[2u_1 + x\,(u_{22} - u_{11})],$$

puesto que $u_1 = u_2$ por la condición (31)

Podemos entonces tomar para $f(u) = -u^{-1/c}$, que nos da la función de utilidad

$$(45) \qquad u\,(y, x) = -(1/a)\,[b\,((y+1)/b)^{-a} + x^{-a}]$$

de la que se obtiene

$$(46) \qquad u_1 = [(y+1)/b]^{-a-1}$$
$$u_2 = x^{-a-1}$$

de modo que en equilibrio tendremos

$$(47) \qquad y = bx - 1 = -x.$$

De ahí que

$$(48) \qquad x = 1/(1+b)$$

y

$$(49) \qquad u_1 = u_2 = (1+b)^{1+a} = p$$

Además

$$(50) \qquad u_{11} = -[(1+a)/b]\,[(y+1)/b]^{-a-2}$$

y

$$(51) \qquad u_{22} = -(1+a)\,x^{a-2},$$

que en equilibrio implica el resultado final

$$(52) \qquad q = (1/b)\,(1+b)^{1-a}\,[2b + (1+a)\,(1-b)]$$

y por lo tanto q es negativo si y sólo si

$$(53) \qquad b > (a+1)/(a-1)$$

condición que coincide con la obtenida por Scarf para un proceso de ajuste de precios antiestable.

6. Sistemas dinámicos complementarios

Los resultados obtenidos hasta el presente muestran que el comportamiento de ambos sistemas -ajuste del bienestar y de precios- presenta algunas similitudes, aunque también hay diferencias. A fin de mostrar más claramente la relación entre ambos, en esta sección los consideraremos en forma conjunta, mostrando su estructura como par de sistemas dinámicos complementarios.

Antes de comenzar describamos el proceso de ajuste del bienestar. Las ecuaciones dinámicas relacionan las tasas de cambio de los precios a las funciones de demanda excedente agregadas; las demandas individuales se obtienen por maximización de utilidad sujeto a la restricción del presupuesto. En otros términos, cada consumidor resuelve el problema en a.1 del teorema 1, de modo que en el óptimo las relaciones en a.2 del mismo teorema se cumplen; éstas a su vez coinciden con las condiciones de máximo de bienestar (2), excepto que ahora las ponderaciones w^i no son conocidas de antemano. Estas ecuaciones, comunes a ambos procesos, pueden ser resueltas para despejar las demandas netas individuales x^i como funciones de $\underline{p}$ y $\underline{w}$. La solución es única debido a la concavidad estricta de las funciones de utilidad, dándonos para todo $\underline{i}$ una función continua

$$(54) \qquad x^i = x^i\,(p/w^i).$$

A partir de este punto los dos procesos difieren entre si. Para el proceso de ajuste de precios debemos elegir las ponderaciones $\underline{w}$ de manera tal que las restricciones de presupuesto se cumplan. En otros términos, si definimos

$$(55) \qquad s^i\,(w,0) \;=\; -\,(1/w^i)\,px^i\,(p/w^i)$$

podremos hallar el valor de w^i igualando esta función a cero sin modificar el valor de $\underline{p}$. Nuevamente, dados nuestros supuestos, la solución está bien definida y es continua en los precios.

Para el proceso de ajuste del bienestar consideramos las ponderaciones como dadas y despejamos los precios. Por lo tanto debemos calcular las funciones de demanda excedente agregada

$$(56) \qquad f\,(w\,,\,p) = \textstyle\sum_i x^i\,(p/w^i)$$

que nos permitirán calcular los precios imputados cuando las igualamos a cero; debido a nuestros supuestos la solución será única y continua en $\underline{w}$.

Con la ayuda de (55) y (56) es posible ver claramente la estructura de ambos procesos. Limitando el análisis a los casos más sencillos –a pesar de que es obvio que la descripción cualitativa no se alterará si aplicamos cualquier transformación preservadora de signos a los miembros derechos– podemos resumir los procesos como sigue:

	Ajuste del bienestar	Ajuste de precios
(57)	a) $\dot{w} = s\,(w\,,p)$	*b)* $0 = s\,(w\,,\ p)$
(58)	*b)* $0 = f\,(w\,,p)$	a) $\dot{p} = f\,(w\,,p)$

El equilibrio competitivo pleno se habrá alcanzado para cualquiera de los procesos cuando las correspondientes derivadas con respecto al tiempo se hayan anulado; es evidente que ambos sistemas poseen las mismas soluciones estacionarias de equilibrio. En cierto sentido, la principal diferencia entre ambos procesos es la velocidad de ajuste de las variables. El conjunto de variables que está sujeto a un ajuste retardado en uno de ellos es ajustando en forma instantánea en el otro. Es una característica de ambos sistemas que tantas variables como es posible son ajustadas instantáneamente; en general, un intento de aumentar esta lista introduciría los problemas de soluciones múltiples al sistema de ecuaciones.

Recordando nuestra convención de que en equilibrio w = 1, podemos aproximar los dos procesos calculando las matriz de derivadas parciales

$$(59)\ M = \begin{pmatrix} s_w & s_p \\ f_w & f_p \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} D & X'+S' \\ S & F \end{pmatrix}$$

donde, si V^i representa la inversa de la matriz de derivadas de segundo orden de la función de utilidad del i-ésimo individuo

$$(60)\qquad D = \text{diag}\,(-\,p\ V^i\ p)$$

$$(61)\qquad F = \textstyle\sum_i (-\ V^i)$$

$$(62)\qquad S = (V^1p,\ \ldots,\ V^m p)$$

$$(63)\qquad X = (x^1,\ \ldots,\ x^m)$$

La estabilidad local de ambos sistemas depende de la matriz $\underline{M}$, que sería simétrica y semi definida negativa de rango m + n –1 si no fuera por la presencia de la matriz de efectos ingreso $\underline{X}$. Es inmediato que cuando no hay efectos ingreso ambos sistemas son localmente estables; esto puede verse de los sistemas complementarios reducidos

$$(64) \qquad \dot{w} = -[D - (X' + S')F^{-1}S]\,w = Aw$$

y

$$(65) \qquad \dot{p} = -[F - SD^{-1}(X' + S')]\,p = Bp$$

donde p y w corresponden ahora a desvíos de los valores de equilibrio. Ambos sistemas están bien definidos, puesto que se deduce de (60) y de (61) que tanto D como F son matrices definidas positivas y por lo tanto tienen inversa.

Debido a la homogeneidad de s y f sabemos que para los valores de equilibrio $\bar{p}$ y $\bar{w}$ (recuérdese que $\bar{w} = 1$)

$$(66) \qquad M(1/p) = 0$$

de manera que

$$(67) \qquad A1 = 0$$

y

$$(68) \qquad B\bar{p} = 0$$

Por lo tanto ninguna de estas matrices puede ser una matriz de estabilidad, en el sentido de que la correspondiente solución del sistema dinámico tienda al origen. Sin embargo diremos que el sistema es localmente estable si la solución tiende a una semirrecta de equilibrio, a una distancia finita del origen. Un caso en que esto evidentemente sucede es aquel en que $V^i = V$ para todo i, es decir, cuando las derivadas parciales de las funciones de utilidad son iguales en equilibrio. En ese caso las matrices de los coeficientes de los sistemas (64) y (65) se reducen a

$$(69) \qquad A = pVp\,(I - (1/m)\,11')$$

y

$$(70) \qquad B = m\,(V - (1/pVp)\,Vp\,p'V)$$

Ambas matrices son semi definidas negativas con exactamente una raíz característica nula, de modo que en este caso ambos procesos de ajuste son localmente estables.

En general la relación entre los dos procesos no es tan sencilla. Nótese que si

$$F^{-1}S = T$$

y

$$D^{-1}\ (X' + S') = R,$$

tendremos

$$(71) \qquad A = D\,(RT - I)$$
$$B = F\,(TR - I)$$

Puede demostrarse que tanto RT como TR tienen las mismas raíces no nulas, de modo que las raíces de las matrices entre paréntesis pueden diferir únicamente en el número de las mismas iguales a menos la unidad, y ambas son estables simultáneamente. Pero hay una dificultad con el primer factor, en ambos casos una matriz definida positiva, que no preserva las propiedades de estabilidad. En el único caso en que he podido hallar una relación significativa es cuando RT es simétrica. Entonces, si $\underline{B}$ es cuasi semidefinida negativa de rango n –1, lo mismo es cierto para $F^{-1/2}\ BF^{-1/2}$, donde $F^{1/2}$ representa la raíz cuadrada positiva de la matriz definida positiva $\underline{F}$. En consecuencia $TR-I=F^{-1/2}(F^{-1/2}BF^{\ 1/2})F^{1/2}$ es estable, por ser similar a una matriz cuasi semi definida negativa. Por lo tanto RT – I es estable; más aún, por ser simétrica es semi definida negativa de rango m-1, de manera que multiplicándola por la matriz diagonal definida positiva $\underline{D}$ no altera los signos de sus raíces, y $\underline{A}$ es estable. Un argumento similar muestra que cuando TR es simétrica y $\underline{A}$ cuasi semi definida negativa, $\underline{B}$ es una matriz estable.

Si se nos permite hablar en término de probabilidades, la relación entre los dos procesos mostrada en (71) nos lleva al enunciado intuitivo de que es probable que ambos procesos de ajuste sean estables simultáneamente. Esto será así en especial si $\underline{F}$ no se desvía mucho de la forma diagonal, como en el caso de utilidades marginales independientes, y cuando los sistemas son estables para una amplia gama de velocidades de ajuste.

7. Conclusiones

Aún cuando en la sección precedente concluimos que es probable que el proceso de ajuste del bienestar tiene propiedades de estabilidad similares a los del mecanismo de ajuste de precios, quedan todavía muchísimas posibilidades de aplicación para el cálculo de equilibrios competitivos, especialmente en el caso de utilidades marginales fuertemente interrelacionadas, y en sistemas que no son estables para todas las velocidades de ajuste. En estos casos los dominios de estabilidad de ambos procesos tenderán a diferir, de modo que si uno de ellos falla el otro puede llevarnos a una solución.

Para ciertos casos sencillos hemos demostrado la estabilidad global del proceso de ajuste del bienestar; en un caso no hay paralelo para el proceso de ajuste de precios. Hemos demostrado también que existen casos de inestabilidad global, de modo que nuestro resultado final no otorga ventajas a un proceso sobre el otro. Entrando en más detalles sobre la estructura de estos sistemas de ecuaciones diferenciales complementarios, hemos mostrado sus relaciones íntimas.

Nuestro principal propósito al escribir este artículo se ha cumplido: presentar un nuevo mecanismo por medio del cual una economía puede alcanzar un equilibrio competitivo, con el propósito de utilizar las ecuaciones dinámicas resultantes en el cálculo de una solución. Esperemos que en la práctica una economía competitiva no se comporte tan mal como en los ejemplos artificiales de inestabilidad. La palabra final, por su puesto, sólo podrá ser dicha después de haberse intentado la aplicación de estos métodos a problemas reales de formulación de medidas de Política Económica.

REFERENCIAS

[1] NEGISHI, TAKASHI, "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article", *Econométrica*, Vol XXX, Nº 4, 1962, 635-669

[2] DEBREU, GERARD, *The Theory of Value*, New York, Wiley, 1959.

[3] NEGISHI, TAKASHI, "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Metroeconómica*, Vol XII, Nº 3, 1960, 92-97.

[4] ARROW, KENNETH J., H.D. BLOCK Y LEONID HURWICZ, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II", *Econométrica*, Vol XXVII, Nº 1, 1959, 82-109.

[5] GALE, DAVID, " A Note on Global Instability of Competitive Equilibrium", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol X, 1963; 81-87.

[6] ARROW, KENNETH J. y LEONID HURWICZ, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, I", *Econométrica*; Vol XXVI, Nº 1, 1958, 522-552.

[7] SCARF, HERBERT, "Some examples of Global Instability of Competitive Equilibrium", *International Economic Review*, Vol I, Nº 3, 1960, 157-172.