Económica, La Plata, Vol. XLV, Número Especial, Año 1999

OPTIMOS DE BIENESTAR INDUCIDOS POR EL MERCADO*

ROLF. R. MANTEL**

Introducción

Es posible describir una situación de equilibrio en un sistema de mercados múltiples como la solución de un problema de optimización? En otras palabras, es posible identificar una función de bienestar imputable al mecanismo de equilibrio usualmente atribuido a la "mano invisible"? Una candidata obvia para tal función de bienestar es la recíproca de alguna medida de la distancia al equilibrio. Sin embargo, este concepto de óptimo no es muy interesante, ya que a fin de definirlo es necesario conocer de antemano las soluciones de equilibrio. Por lo tanto un requisito mínimo para una función de bienestar social es que sea monótona (creciente) en los niveles de satisfacción alcanzados por los consumidores individuales. Este tipo de función de bienestar usualmente se identifica con los nombres de Bergson y Samuelson; la monotonicidad creciente con el de Pareto. El problema se convierte entonces en el de determinar una función creciente de las utilidades de los consumidores que al ser maximizada proporcione como solución el conjunto de equilibrios competitivos del modelo standard de equilibrio general de Arrow y Debreu. Tal función podrá luego ser analizada a fin de obtener una indicación de los juicios valorativos de bienestar implícitamente involucrados al aceptarse la distribución de la riqueza existente (statu quo). Quizá permita también proporcionar una forma de computar tales equilibrios competitivos.

---

* La presente investigación ha sido realizada mientras el autor era Profesor Titular Visitante en la Cowles Foundation for Research in Economics, Universidad de Yale, Estados Unidos de Norteamérica. Se agradece el apoyo financiero de esta institución y de la National Science Foundation de los Estados Unidos, que posibilitaron llevar a cabo este estudio y el del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina durante su redacción final. A mis colegas de la Cowles Foundation, y de las universidades de Minnesota, Northwestern y Washington, debo agradecer la paciencia de haber escuchado las primeras versiones y haberme proporcionado críticas y sugerencias que permitieron mejorar considerablemente el producto final.

** Universidad Católica Argentina e Instituto Torcuato Di Tella.

1. Casos especiales en que el modelo competitivo puede ser resuelto por métodos de programación no-lineal.

Existen unos pocos casos en que la solución del problema, sea por medio de la existencia de una función a maximizar, o por conocerse algún método sencillo de llegar a la solución, es conocida. Estos casos pueden ser clasificados de acuerdo con la siguiente tabla.

1. Preferencia no homotéticas.

i. Todos los consumidores tienen las mismas preferencias y dotaciones de bienes – se trata de un caso especial del punto siguiente -.

ii. Las dotaciones iniciales de bienes se hallan distribuidas óptimamente de acuerdo con el criterio de Pareto.

2. Preferencias homotéticas.

i. Todos los consumidores tienen las mismas preferencias, aunque las dotaciones pueden diferir. En este caso los precios de equilibrio son las utilidades marginales de la dotación agregada; los consumidores demandarán bienes en las mismas proporciones que esta dotación agregada, en niveles consistentes con el valor de su propia dotación a dichos precios.

ii. La distribución del ingreso relativa es independiente de los precios del mercado. Este caso ha sido analizado por Eisenberg: Chipman, Sonnenschein y Shafer, y Chipman y Moore han generalizado sus resultados. Gale analizó el caso particular en que las funciones de utilidad son lineales. En el caso bajo consideración, la economía agregada se comporta como si se tratara de un solo consumidor. La función de bienestar que maximiza la comunidad está compuesta de las utilidades de los consumidores individuales promediada con ponderaciones dadas por la distribución relativa de ingresos – se trata de una media geométrica si las funciones de utilidad son linealmente homogéneas -. Este caso es especialmente atractivo, ya que el equilibrio competitivo puede ser calculado maximizando este promedio, que por lo tanto proporciona una función de bienestar social, que posee la ventaja adicional de ser una función cóncava.

2. Descripción del modelo y las herramientas utilizadas

El modelo analizado en el presente estudio es el modelo usual de equilibrio general de una economía de propiedad privada de Arrow y Debreu, , tal como fuera presentado por Debreu (1951). Como el trabajo trata de la búsqueda de una función que depende de los niveles de utilidad alcanzados por los individuos, el modelo será examinado en el espacio de dichos niveles de utilidad. Por lo tanto, para los propósitos presentes, las asignaciones de consumo y producción no necesitan ser conocidas, como tampoco necesitan conocerse los precios y los ingresos de los agentes. A fin de simplificar la exposición se utilizará sin demostración la siguiente.

<u>Proposición</u>: El modelo usual de Arrow y Debreu es, desde el punto de vista de las asignaciones de niveles de utilidad de equilibrio competitivo, equivalente a la siguiente economía de intercambio puro (si se cumple un supuesto especial sobre las preferencias dado más adelante). Hay m comerciantes (consumidores), designados con el índice i con dotaciones iniciales wi -un punto en el conjunto de posibilidades de consumo que simplemente consiste del ortante no negativo R^n_+ de espacio n- dimensional de bienes y servicios-, y con preferencias representadas por medio de funciones de utilidad u^i: R^n_+ - R^n_+ que son continuas, cóncavas, linealmente homogéneas y monótonas crecientes.

Intuitivamente, para demostrar esta proposición se pueden asignar los procesos productivos a las familias para luego definir preferencias inducidas sobre las cantidades comerciadas. La función de utilidad de cada comerciante se "homogeniza" introduciendo un nuevo bien, su "ego" o "esencia".

Supuesto especial sobre preferencias. Las preferencias de los consumidores pueden ser representadas por funciones cóncavas y continuas.

Dados los demás supuestos usuales en la teoría del equilibrio general, este supuesto no es demasiado restrictivo, debido a que tales funciones de utilidad pueden aproximar preferencias de consumidores convexas y continuas tanto como se desee, como demostraran Mantel (1967), Kannal (1972) y Mas-Colell (1972).

Una vez reducido el modelo a uno de estructura más sencilla como el descripto en la Proposición, es posible definir el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad U.

$$U = \{ u \in R^m_+ : u_i \leq u^i(x^i); X \geq 0; Xe \leq We \}$$

donde la asignación de consumo X es una matriz de n filas y m columnas de elementos no negativos. Su i-ésima columna es la asignación individual de consumo x^i; el m-vector e tiene todas sus coordenadas iguales a la unidad. Si a es una m-vector de ponderaciones positivas de bienestar, calculando el máximo de $a.u = \sum a_i u_i$ en el conjunto U lleva un óptimo de Pareto. Dados los supuestos, todos los óptimos de Pareto pueden ser considerados como un máximo de tal naturaleza para algún vector de ponderaciones a. Como es sabido que un equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto, se podría esperar que una manera de determinar un equilibrio de esa naturaleza sería por medio de la selección de ponderaciones de bienestar apropiadas y la posterior maximización del promedio ponderado de los niveles de utilidad individuales. Negishi (1961) fue el primero en demostrar que si tales ponderaciones son ajustadas tomando en cuenta los superávits en los presupuestos de los consumidores correspondientes al óptimo de Pareto alcanzado, evaluando las cantidades comerciadas en el punto óptimo utilizando los precios implícitos asociados con las restricciones de recursos, el proceso resultante tiene un punto estacionario que corresponde a las ponderaciones buscadas. Como las restricciones presupuestarias se han satisfecho en ese punto, el mismo corresponde a un equilibrio competitivo en el que los precios de mercado coinciden con los precios implícitos mencionados. Lamentablemente, tal proceso no es en general estable (Mantel, 1971). Tampoco es posible relacionar de manera sencilla las ponderaciones de bienestar de equilibrio con los datos iniciales del problema. Por ello, la función de bienestar lineal no es de la clase buscada, teniendo en cuenta en especial que usualmente llevará a varias asignaciones de niveles de utilidad máximas, no todas correspondientes a equilibrios competitivos, mientras que otras soluciones de equilibrio no maximizarán esta función de bienestar tan sencilla, sin modificar los coeficientes de ponderación.

Nótese que el conjunto de posibilidades de utilidad no contiene suficiente información como para localizar asignaciones de equilibrio competitivo. Para ello es necesario conocer la distribución de tenencias iniciales de bienes y servicios por los individuos. Una manera de retener más información es la de utilizar el cono de transformación de utilidades

$$T = \{(u, v) \geq 0 : u_i \leq u^i(x^i); X \geq 0 : Xe \leq Wv\}$$

que puede ser interpretado como un conjunto de procesos que transforma a personas – el número v_i de consumidores de tipo i – en niveles de utilidad. Por supuesto que al final el interés reside sólo en la economía dada inicialmente, en la que existe un solo consumidor de cada tipo; ésta se obtiene igualando el vector $v = e$. Nótese que la definición del conjunto T es parecida a la de U; este último es igual a la sección del cono T correspondiente al caso en que hay una sola persona de cada tipo. Este cono fue introducido por Mantel (1965), conjuntamente con el conjunto de demanda recíproca a ser definido más adelante. Allí se ha demostrado que el cono T tiene todas las propiedades usualmente asignadas a la tecnología del modelo de crecimiento de Von Neumann.

Definase el cono dual – o polar – de T por

$$T^0 = \{(a,b) \geq 0 : au - bv \leq o \text{ para todo } (u,v) \in T\}.$$

En tal caso, el conjunto de demanda recíproca se define, en el espacio de niveles de utilidad, como

$$T^*(e) = \{u : \text{existe (a,b) en } T^0 \text{ tal que } b_i = a_i u_i \text{ para todo i}\}.$$

La designación dada a este conjunto proviene de su frontera cuando hay dos comerciantes y dos bienes, que consiste de las asignaciones de niveles de utilidad correspondientes a pares de asignaciones de consumo situadas sobre las curvas de demanda recíproca de los dos individuos, dado algún precio relativo entre los dos bienes.

Como fuera demostrado por Mantel (1965) la intersección del conjunto de demanda recíproca con el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad es precisamente el conjunto de asignaciones de niveles de utilidad competitivas; allí tales asignaciones fueron denominadas como preservadoras de valor en cada coordenada. La existencia de equilibrio competitivo fue allí demostrada probando que es posible determinar, en un número finito de pasos, un punto en el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad que se encuentra a una distancia preasignada del conjunto de demanda recíproca, y dejando luego que dicha distancia tienda a cero. Dicha demostración no era constructiva en el sentido de convergencia a la solución pero proveían una solución aproximada en el sentido de los métodos actuales de determinación de puntos fijos de transformaciones.

El cono de transformación de utilidades está íntimamente relacionado con otros conceptos en las teorías económica y de juegos de estrategia. Si e^i representa el i-ésimo vector unidad en el espacio m-dimensional R^m, y si $e^S = \sum e^i$, donde S es una coalición (es decir, un subconjunto) del conjunto de consumidores M, es posible considerar las secciones

$$T(v) = [u : (u, v) \in T].$$

Como se hiciera notar anteriormente, $T(e^M)$ es el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad U. La restricción de la correspondencia $T(.)$ a subconjuntos de a lleva a juegos de mercado en forma de función característica. Extensamente analizados por una secuencia de artículos por Billera y Bixby, y por Mas-Colell (1975). La restricción de la misma correspondencia a argumentos cuya coordenadas son enteros no negativos que no exceden algún entero K proporciona el juego de mercado asociado con la k-uple réplica de una economía, concepto sumamente útil en el tratamiento de los teoremas de límites de Scarf y Debreu. Finalmente, la restricción a las cápsulas convexas de las coaliciones proporciona los juegos "fuzzy" de Aubin.

El cono de transformación de utilidades puede ser definido para cualquier juego en forma de función característica, si éste es balanceado, aplicando los teoremas de caracterización que aseveran que tales juegos son generados por alguna economía: tal procedimiento permite extender conceptos económicos tales como equilibrio competitivo a juegos que no se hayan originado en mercados. Alternativamente, si V es una función característica definida para las coaliciones, siendo sus valores subconjuntos en el espacio de niveles de utilidad, defínase al cono T como la unión de sumas de la terna $\sum_S d_S V(S)$ para ponderaciones no negativas d_S. La restricción de $T(.)$ a las coaliciones corresponde a la cobertura del juego, que coincide con el juego dado si éste es totalmente balanceado. Aquí se utiliza el concepto de juego balanceado definido por Billera y Bixby, en oposición al concepto de juegos quasi-balanceados debido a Scarf.

3. El caso de funciones de utilidad lineales

Gale (1957) demostró la existencia de equilibrio competitivo en el modelo de intercambio puro cuando todos los consumidores poseen funciones de utilidad lineales. También se debe a él un argumento para demostrar que las asignaciones de niveles de utilidad competitivas son funciones racionales de los datos del problema. Eaves (1975) transformó el problema en uno de complementariedad lineal, del que se sabe que posee soluciones que son funciones racionales de los coeficientes, y demostró la existencia de equilibrio por medio de un algoritmo que permite calcular la solución, utilizando un argumento del tipo del utilizado por Lemke para la determinación de la solución de juegos bimatriciales.

Sin embargo las herramientas utilizadas por estos dos autores, en ambos casos relacionadas con las que se emplean en los métodos para calcular puntos fijos, son demasiado poderosas para el problema en cuestión. El mismo puede ser resuelto dentro del marco del análisis convexo. De hecho, si las funciones de utilidad están dadas por $u^i = c^i \,.\, x^i$ con el vector c^i positivo, entonces es posible explicitar una función de bienestar cóncava, linealmente homogénea y estrictamente monótona que al ser maximizada lleva a la única asignación de niveles de utilidad competitiva en el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad. Esta función está definida para u en R^m_+ por

$$b(u) = max_{p \in P} \in min_{i,j} u_i p_j / (c^i_j w^i . p)$$

donde $P = \{p \in R^n_+ : e.p = 1\}$. En consecuencia se debe agregar a la lista de la sección 1. el ítem 2.iii. Todos los consumidores tienen funciones de utilidad lineales. En general, el juego de mercado asociado es perfectamente balanceado.

Nótese que la función $b(.)$ depende tanto de la distribución de dotaciones iniciales de bienes y servicios, como de las preferencias. Esto era de esperar ya que si las dotaciones iniciales no se tomaran en cuenta no podría esperarse que las restricciones presupuestarias se vean satisfechas en el óptimo, cualesquiera sean los precios. Es este modelo sencillo el que proveyó la inspiración para el enfoque presente al problema del equilibrio económico como un óptimo de alguna especie – aunque por supuesto la idea de que la "mano invisible" optimiza es sumamente antigua-. Obviamente la "optimalidad" presente consiste sólo en la existencia de una función que una vez maximizada lleva al conjunto de soluciones de equilibrio.

Como el modelo de utilidades lineales es, considerando como un juego de mercado, sólo un subconjunto de una clase de mercados – el de mercados perfectamente balanceados – no se proveerán más resultados en esta dirección, excepto por implicancia de los resultados presentados en la sección siguiente.

4. Mercados perfectamente balanceados

Introducimos el siguiente concepto, siendo M el conjunto de participantes en el juego y V la función característica.

Definición: Un juego (M,V) es perfectamente balanceado si

$$\sum_S d_S e^S = e^m; d \text{ no negativo}$$

implica

$$\sum_S d_S V(S) = V(M).$$

Nota. Un juego es balanceado si la última igualdad en esta definición se reemplaza por la inclusión del conjunto del miembro izquierdo en el del miembro derecho. Es totalmente balanceado si todo subjuego es balanceado.

El cono de transformación de utilidades de un juego perfectamente balanceado es una suma de la forma

$$T = \sum_i T^i$$

donde cada T^i es el cono generado por $(V(i), e^i)$, siendo convexo si la función característica V tiene valores convexos. Véase la fig. 1, donde $U^i = V(i)$, $m=2$.

En el caso de utilidades lineales se tendrá

$$V^j = \{u \geq 0 : u_i \leq c^i x^i; X \geq 0; Xe \leq W^j\}$$

Si las preferencias son homotéticas y la distribución de ingresos relativa es constante –o alternativamente, la distribución de ingresos relativa, incluyendo el valor imputado de los "egos" de los consumidores es constante- se tendrá

$$V^j = \{u \geq 0 : u_i \leq u^i(x^i); X \geq 0; Xe \leq \sigma_j We\}$$
$$= \sigma_j U.$$

Aquí σ_j representa la participación del consumidor j en el ingreso agregado.

Defínanse las funciones

$$m^i(a) = max\, a.V(i) = a.u^i$$

que resultarán ser convexas, crecientes y linealmente homogéneas. Defínanse también las cantidades

$$\overline{u}_i = m^i(a)/a_i.$$

Entonces el conjunto de demanda recíproca T*(e) estará definido por las desigualdades

$$u_i \geq m^i(a/a_i)$$

Este conjunto resulta ser convexo, ya que

$$u_i \geq m^i(a/a_i); v_i \geq m^i(b/b_i)$$

implican

$$\frac{1}{2}(u_i + v_i) \geq m_i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a_i} + \frac{b}{b_i} \right) \right] \geq m_i (c / c_i)$$

si se toma

$$c_i = (a_i b_i)^{1/2} .$$

En consecuencia es posible demostrar la proposición siguiente.

Proposición. El conjunto de posibilidades de niveles de utilidad y el conjunto de demanda recíproca no pueden ser separados estrictamente por algún hiperplano.

Indicadores para la demostración. Sea el m-vector a normal a un hiperplano que separe ambos conjuntos. Sea u un elemento de U que maximice el producto interno $a.u$. En tal caso, $a.u = \sum_i m^i (a)$, de modo que $\bar{u}_i = m^i (a / a_i)$ da las coordenadas de un punto en el conjunto de demanda recíproca que está situado sobre el mismo hiperplano que u. Por lo tanto la separación de los dos conjuntos no puede ser estricta, de modo que dichos conjuntos deben intersecarse. Ver figura 1.

Corolario. Existe un equilibrio competitivo.

Este corolario es simplemente una reformulación de la existencia de un elemento común a los conjuntos de posibilidades de niveles de utilidad y de demanda recíproca.

Es ahora una cuestión sencilla la de construir una función cóncava, monótona, linealmente homogénea de los niveles de utilidad competitivas. Tal función puede definirse por la relación

$$b(u) = sup\{t : u \in T^*(te)\}$$

siendo continua sobre R^m_+ dados los supuestos presentados, si se agrega uno de los requisitos usuales que garantizan que los consumidores tienen ingresos positivos cuando el sistema se encuentra en un quasi-equilibrio o equilibrio compensado. Explícitamente, se considera válido el supuesto de relación a través de los recursos de Arrow y Hahn (1971). En nuestra terminología, este supuesto equivale a requerir que el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad puede ser expandido en la dirección de la satisfacción de algún consumidor en una coalición dada por medio de aumentos proporcionales en la dotación de recursos de consumidores que no se encuentran en dicha coalición. Formalmente, si $u \in T(e)$, para cada subconjunto S de M existe un m-vector v con elementos $v_i = 1$ para $i \in S$, y un m-vector $\bar{u} \in T(v)$ tal que $\bar{u} \geq u$ con

$\bar{u}_i > u_i$ para algún $i \in S$. Obviamente este supuesto permite ignorar la frontera del espacio en que se hallan definidas las ponderaciones de bienestar, ya que gracias a él las ponderaciones de bienestar competitivas siempre resultarán ser estrictamente positivas.

Evidentemente, la asignación competitiva u^* maximiza la función $b(u)$ sujeto a la restricción $u \in T(e)$, siendo además $b(u^*) = 1$.

En el caso de mercados perfectamente balanceados, el cono de transformación de utilidades es una suma

$$T = \sum_i T^i$$

de conos generados por conjuntos de la forma V^i x $\{e^i\}$. Un caso diferente en el que es dable esperar resultados similares es aquél en que cada T^i es un cono generado por un conjunto de la forma $\{e^i\}$ x V^i. En vez de asignar a cada consumidor su dotación inicial de bienes y servicios y considerar los niveles de satisfacción que puede proveer a la sociedad con la misma, uno está ahora interesado en la combinación de niveles a que deben proveerse dichas dotaciones iniciales para que el consumidor i pueda disfrutar de determinado nivel de satisfacción.

Un ejemplo se tiene en el caso en que las preferencias son homotéticas e iguales. De modo que las funciones de utilidad están dadas por

$$u^i(.) = u(.) / c_i$$

donde los coeficientes c_i son positivos y suman a la unidad, y la función $u(.)$ es linealmente homogénea, siendo por lo tanto todas las utilidades proporcionales.

En este caso,

$$\begin{aligned} T &= \left\{(u,v) \in R_{+}^{2m} : u_i c_i \leq u(x^i); X \geq 0; Xe \leq Wv\right\} \\ &= \left\{(u,v) \in R_{-}^{2m} : c.u \leq u(Wv)\right\} \end{aligned}$$

si la función $u(.)$ es cóncava y creciente.

Por lo tanto es posible describir a los conos T^i de la manera descripta más arriba

$$V^i = c_i V$$

donde

$$V = \left\{v \in R_{+}^{n} : u(Wv) \geq 1\right\}.$$

En consecuencia, el cono polar de T es la intersección de conos definidos por las desigualdades

$$a_i \leq min b.V^i$$

y el conjunto de demanda recíproca consiste de aquellos puntos b que satisfacen para todo i la relación

$$b_i / u_i \leq min\, b.V^i$$

con $b>0$. El conjunto de demanda recíproca es convexo, como puede verse a continuación si todos los conjuntos V^i son iguales.

Defínase la función $g(b) = min\ b.V$. Entonces el conjunto de demanda recíproca está dado por

$$u_i g(b) \geq b_i,$$

o equivalente por

$$g(u) \geq 1.$$

Como la función $g(.)$ es cóncava y creciente, el conjunto $T^*(e)$ es convexo.

5. Optimos inducidos por el mercado

En el caso general, aún si el conjunto de demanda recíproca no es convexo, la función de bienestar $b(.)$ definida en la sección anterior existirá, y será continua, homogénea de grado unidad, y estrictamente monótona para argumentos positivos. Tomará su valor máximo en el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad U en cualquier asignación de niveles de utilidad competitivos u^*, siendo por supuesto el valor máximo $b(u^*)$ igual a la unidad, mientras que ninguna otra asignación de niveles de utilidad con el conjunto de demanda recíproca, o lo que resulta los mismo, el conjunto de asignaciones de niveles de utilidad competitivas. Como en general el conjunto de demanda recíproca no es convexo, la función de bienestar $b(.)$ no será cóncava. Es imposible que sea cóncava si existen varias asignaciones de niveles de utilidad competitivas aisladas.

La figura 2 muestra cómo se construye el conjunto $T^*(e)$ de demanda recíproca en el caso general. El punto e es el origen para el conjunto de posibilidades de niveles de utilidad $U = T(e)$; la dimensión adicional corresponde a distintos valores relativos de los números v_1 y v_2. El cono T ha sido normalizado de manera tal que σ las sumas de las coordenadas de v es constante a fin de posibilitar la representación gráfica. Correspondiendo a un vector de ponderaciones de bienestar a hay un punto eficiente u en U. El hiperplano H es uno de apoyo a T en u, y es por lo tanto un punto de T^0. Si

$m=2$, la intersección de h con el ortante no negativo tiene cuatro vértices. Considérense aquellos correspondientes a los ejes $0_i\ u_i$. Estos definen una "diagonal" – en realidad un subespacio lineal m-dimensional – que interseca la variedad lineal definida por $v = e$ en el punto único $\bar{u}$ *de* $T^*(e)$. El ortante no negativo, desplazado de manera que su origen coincide con $\bar{u}$, es un subconjunto de $T^*(e)$. Como el hiperplano H no necesita ser único, el vector de ponderaciones a puede generar varios puntos como el $\bar{u}$.

En el caso de dos consumidores es bastante evidente que siempre es posible elegir el vector de ponderaciones a de manera tal que u coincida con $\bar{u}$. Cuando hay más de dos consumidores se necesitan argumentos de punto fijo. Nótese que la "diagonal" que pasa por $\bar{u}$ no interseca el interior de T. Esto significa que en dicho cono no hay punto alguno que domine a $\bar{u}$ en el sentido de que ningún punto en T provee en mayor nivel u_i por unidad de v_i para cada i. Ninguna transformación posible provee una tasa de expansión más elevada para todo i.

Por la definición de H, correspondiendo a ponderaciones de bienestar dadas por el vector a que pueden ser interpretadas como "precios" de los "productos" $\bar{u}$ uno puede asociar "precios" con los "insumos" v, tales que v_i lleva el "precio" $a_i\ \bar{u}_i$. En particular, en equilibrio, donde $v = e$, esta relación entre precios implica que el valor del producto i, es decir $a_i\ \bar{u}_i$, iguala el valor del insumo correspondiente, es decir $(a_i\ \bar{u}_i) \times 1$, donde la unidad representa en este caso la cantidad insumida.

Esta propiedad de la asignación de niveles de utilidad de equilibrio ha sido designada con el nombre de preservadora del valor del bien por bien por Mantel (1965).

A fin de comprender mejor el significado del concepto de óptimo involucrado, es instructivo traducir los conceptos expresados en términos de asignaciones de niveles de utilidad a sus equivalentes en el espacio de bienes y servicios.

Es bien sabido que la contrapartida del conjunto de posibilidades de niveles de utilidad en el diagrama de la caja de Edgeworth es la familiar curva de contratación. La definición usual de un óptimo de Pareto es la siguiente. Se trata del conjunto de asignaciones de demandas netas $Y = X - W \geq -W$ tales que Y satisface

i. es balanceado, es decir, $Y e \leq 0$.

ii. ningún conjunto de demandas netas Z es superior a él en el sentido del ordenamiento de Pareto – es decir, o bien ningún i prefiere z^i *a* y^i, o algún i prefiere y^i *a* z^i -.

A fin de restringir el conjunto de óptimos de Pareto al conjunto de equilibrios competitivos, es necesario disponer de un conjunto de comparación más amplio en el punto ii. De la observación previa, de que las asignaciones de niveles de utilidad competitivas tienen "tasas de expansión" no dominadas, se ve de inmediato que esto significa que las utilidades en términos per capita no pueden ser incrementadas para todos los consumidores por medio de alguna modificación en el número de consumidores de cada tipo. Esto puede ser dicho de otra manera como sigue, a fin de evitar la ficción que significa alterar el número de consumidores. Defínase a la asignación de bienes Y como una asignación de cantidades comerciadas débilmente balanceada si es factible desde el punto de vista de los individuos: $Y + W \geq 0$, y si existe una corrección de ponderaciones positivas t tal que $Y\ t \leq 0$. Es decir, que existe alguna asignación que provee a cada consumidor con un conjunto de cantidades comerciadas a lo largo del mismo rayo por el origen y al mismo tiempo es balanceada. Defínase un *óptimo inducido por el mercado* requiriendo que un conjunto de vectores de demandas netas (cantidades comerciadas) factibles Y satisface el criterio de óptimo si

i. Y es balanceado

ii. Ningún conjunto de demandas netas débilmente balanceado es superior a él en el sentido de Pareto.

Puede demostrarse que bajo los supuestos usuales del modelo standard de Arrow y Debreu, el conjunto de óptimos inducidos por el mercado coincide con el conjunto de asignaciones competitivas. Esta es una generalización de los resultados presentados previamente, que eran válidos sólo para preferencias con una representación cóncava. Nótese que el conjunto de cantidades comerciadas débilmente balanceadas es más amplio que las cantidades comerciadas alternativas con los que Schmeidler y Vind comparan sus cantidades comerciadas a fin de concluir que las mismas son equitativas. Estos autores no permiten cualquier alternativa débilmente balanceada, sino sólo asignaciones que son múltiplos enteros de los candidatos a asignaciones equitativas. Esto implica, en particular, que cantidades comerciadas equitativas no necesitan ser óptimas en el sentido de este ensayo, a menos que el candidato a conjunto de demandas netas equitativo cubra todos nuestros conjuntos de demandas netas débilmente balanceadas.

De las definiciones involucradas, se ve de inmediato que los óptimos inducidos por el mercado son óptimos en el sentido de Pareto, y además equitativos.

Es interesante analizar el significado de la condición ii el la definición de óptimos inducidos por el mercado. Es decir, observamos el conjunto Q de demandas netas posibles que no son dominadas en el sentido de Pareto por demandas netas débilmente balanceadas. Puede demostrarse que en el caso en que las preferencias tienen representaciones cóncavas, las utilidades asociadas con tales demandas netas son exactamente los puntos en el conjunto $T^*(e)$. Por lo tanto denominaremos a Q "conjunto de demanda recíproca" en el espacio de bienes y servicios. Además, la frontera de $T^*(e)$ consiste de asignaciones de niveles de utilidad en el conjunto de demandas netas que no dominan a otras en el mismo conjunto; en el espacio de bienes y servicios esto define al conjunto de demandas netas que no son superiores en el sentido de Pareto a demandas netas débilmente balanceadas, y no dominan a otras con la misma propiedad. En el diagrama de la caja de Edgeworth, un punto de este conjunto se representa por medio de un par de puntos, uno para cada consumidor, tal que existe una recta por el punto dado por las dotaciones iniciales que separe a las correspondientes curvas de indiferencia. En otras palabras, consiste de un par de demandas excedentes para un dado vector de precios, como podría haber sido inferido del hecho de que los óptimos inducidos por el mercado son asignaciones competitivas: puntos en la frontera del conjunto de demanda recíproca son débilmente balanceados, por lo tanto son asignaciones competitivas en una economía con un origen distinto para cada consumidor, y en consecuencia deben ser puntos sobre la curva de demanda recíproca para un sistema de precios de equilibrio competitivo.

De estas consideraciones es posible ver que un máximo para la función de bienestar presentada en este ensayo, $b(u)$, provee una asignación de niveles de utilidad que es factible y se halla en el conjunto de demanda recíproca, de manera que la asignación de demandas netas correspondiente es factible (en la caja de Edgeworth los puntos para los dos consumidores coinciden) y un óptimo inducido por el mercado (los dos puntos están sobre las correspondientes curvas de demanda recíproca para alguna línea de precios que pase por el punto de dotación inicial de bienes y servicios).

Figura 1

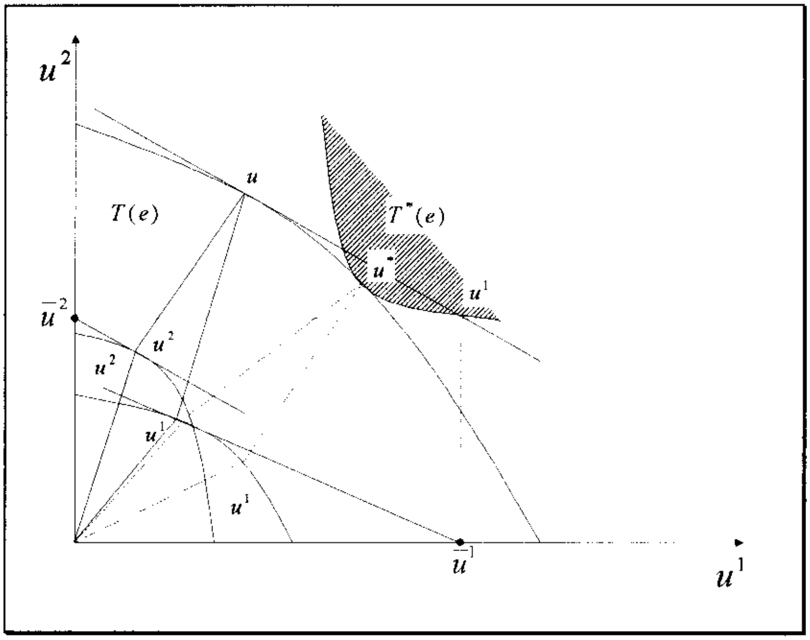
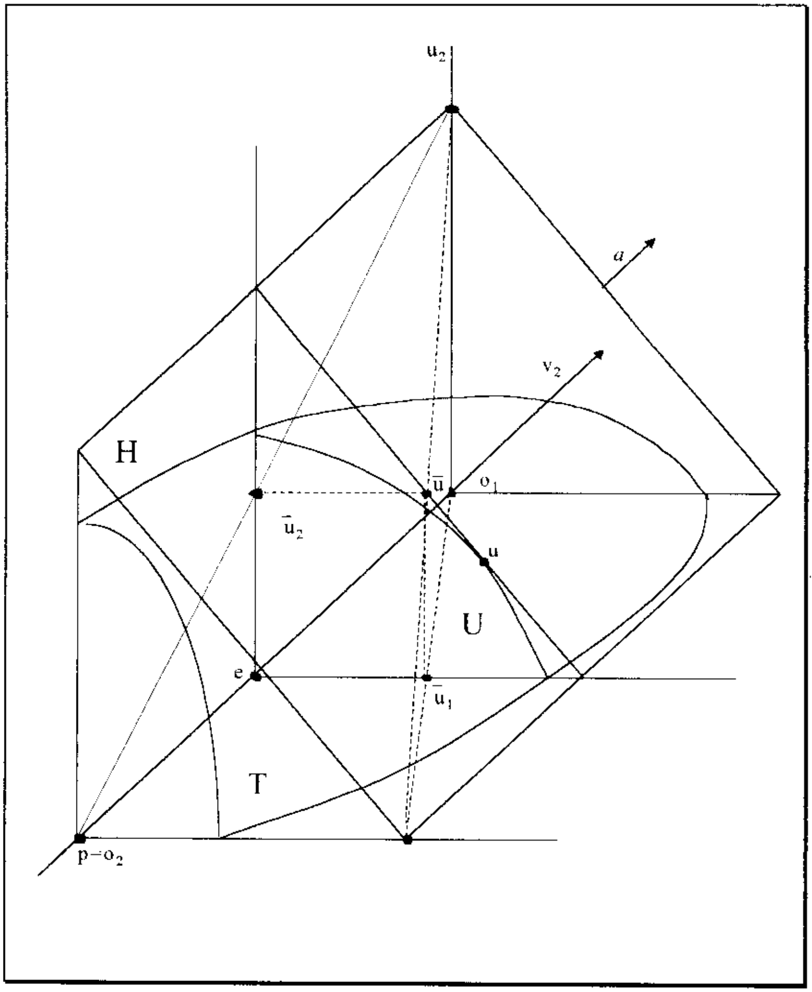


Figura 2



REFERENCIAS

ARROW, K. Y F. HAHN (1971), *General Competitive Analysis,* San Francisco, Holden Day.

AUBIN, J. (1972), Equilibrium of a convex cooperative game. Wisconsin, Madison, Mathematics Center Report 1279.

BAUDIER, E. (1973), Competitive Equilibrium in a game, *Econometrica* 41, 1049-68.

BILLERA, L.J. (1974), On games without sidepayments arising from a general class of markets. *Journal of Mathematical Economics* 1, 129-39.

BILLERA, L.J. Y R.E. BIXBY (1973), A characterization of polyhedral market game, *International Journal of Game Theory.* 2, 253-61.

CHIPMAN, J.S. (1974), Homothetic preferences and aggregation, *Journal of Economic Theory,* 8, 26-38.

CHIPMAN, J.S. Y B.J. MOORE (1975), trabajo presentado ante el Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, Canadá.

DEBREU, G. (1950), *The Theory of Value,* New York, Wiley.

DEBREU, G. Y H.S. SCARF (1963), A limit theorem on the core of an economy, *International Economic Review,* 4, 235-46.

EAVES, B.C. (1975), A finite algorithm for the linear exchange model, Cowles Foundation Discussion Paper 389.

EISANBERG, E. (1961), Duality in Homogeneous programming, *Proceedings of the American Mathematical Society* 12, 783-7.

GALE, D. (1960), *The theory of linear economic models*, New York: McGraw-Hill.

GALE, D. (1957), Price equilibrium for linear models of exchange, Rand report P-1156.

KANNAIS, Y. (1974), Approximation of convex preferences, *Journal of Mathematical Econmics,* 1, 101-6

LEMKE, C.E. Y J.T.HOWSON (1964), Equilibrium points of bimatrix games, *SIAM Journal* 12, 412-23.

MANTEL, R. (1965), Equilibrio de una economía cmpetitiva, una prueba de su existencia. Mimeo, Instituto Di Tella.

MANTEL, R. (1966), Toward a constructive proof of the existence of equilibrium in a competitive economy. Ph. D. dissertation, Yale University, publicada *en Yale Economic essays* 8 (1968), 155-196.

MANTEL, R. (1967), On the representation of preferences by concave utility functions. Mimeo, Instituto Di Tella.

MANTEL, R. (1971), The welfare adjustment process: its stability properties. *International Economic Review* 12, 415-430.

MANTEL, R. (1975), General equilibrium and optimal taxes, *Journal of Mathematical Economics* 2, 187-200.

MAS-COLELL, A. (1974), Continuous and smooth consumers: Approximation theorems, *Journal of Economic Theory*, 8, 305-336.

MAS-COLELL, A. (1975), A further result on the representation of games by markets, *Journal of economic Theory*, 10, 117-122.

NEGISHI, T (1960), Welfare economics and the existence of an equilibrium for a competitive economy, *Metroeconomica* 12, 92-97.

RADER, T. (1963), Edgeworth exchange and general equilibrium, Ph.D. Dissertation Yale University.

SAMUELSON, P.A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge: Harvard University Press.

SCARF, H.E.(1967), The core of an n-person game, *Econometrica* 35, 50-69.

SCARF, H.E.(1973), *The computation of economic equilibra*, New Haven, Yale University Press.

-----------------(1972), Fair net trades, *Econometrica* 40, 637-642

SHAFER, W. Y H. SONNENSCHEIN (1975). Some theorems on the existence of competitive equilibrium, *Journal of Economic Theory* 11, 83-93.

SHAPLEY, L.S. Y M. SHUBIK (1969), On market games, *Journal of Economic Theory* 1, 9-25.

WILSON, R. (1967), Budgetary surplus adjustment, *International Economic Review* 8, 103-108.

WILSON, R. (1976), The bilinear complemenatry problem, Tech. report 191, Stanford University.