CALCULO DE LAS PERTURBACIONES DE LA ANOMALIA MEDIA Y DEL RADIO VECTOR DE UN ASTEROIDE

Pedro Carlos Riú
(Observatorio Astronómico, La Plata)

1): La función perturbadora $R = \Sigma B. \cos (k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2) + \Sigma C. \mathrm{sen}(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)$ no es utilizable para la mayoría de los asteroides, porque en la integración de R, en el caso $-k_1/k_2$, aproximadamente igual a n'/n, el divisor $(k_1 n + k_2 n')$ es muy pequeño y origina desigualdades de largos períodos que pueden alcanzar valores muy considerables. Para evitar esa dificultad, Hansen y Bohlin han ideado teorías que seguimos en este trabajo, donde resolvemos las ecuaciones diferenciales de los mencionados autores por medio de series trigonometricas, utilizando como variable independiente a la función $\zeta = A \int_0^t \Delta_o^{-3} (t)\, dt$, en lugar de la anomalía excéntrica.

En nuestra contribución sobre este tema, publicada en el Boletin Nº 4 de la Asociación Argentina de Astronomía, hemos empleado un método numérico. En este trabajo, desarrollamos un método analítico para el cálculo de las perturbaciones de la anomalía medio y del radio vector, en primera aproximación, con una aplicación para el caso particular del asteroide Thule.

Aunque la variable independiente ζ no es una variable regularizadora en el sentido de las teorías de Levi-Civita y Sundman, sin embargo tiene la propiedad de absorber las singularidades de carácter práctico cuando la distancia mutua $\Delta > 0$, alcanza valores muy pequeños.

Suponemos (caso particular del problema de los tres cuerpos) que las órbitas del planeta perturbador Júpiter y del asteroide no perturbado son coplanares y que la órbita de Júpiter es circular. La pequeñez de la excentridad del asteroide, permite hacer algunas consideraciones que contribuyen a simplificar los desarrollos, como veremos en el próximo párrafo.

2): Por la hipótesis que formulamos, la distancia mútua debe expresarse:

$$(1) \qquad \Delta = (r^2 + a'^2 - 2ar' \cos H)^{\frac{1}{2}}$$

donde a' es el semieje de Júpiter y r el radiovector Sol-Asteroide. Por otra parte, de $r = a(1 - e.\cos E)$, resulta:

$$r^2 = a^2 + a^2 e^2 \cos^2 E - 2\,a\,e\,\cos E$$

de donde:

$$(a'^2 + a^2 + a^2 e^2 \cos^2 E - 2ae\cos E - 2aa'\cos H + 2aa'e\cos H.\cos E)^{\frac{1}{2}}$$

Sea:

$$\Delta_o^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos H$$

$$e.C = 2aa'e\cos H\,.\,\cos E - 2ae\cos E$$

de manera que, despreciando el término $a^2e^2\cos^2E$, la (1) puede escribirse:

$$(2) \qquad \Delta = \Delta_o(1 + e\,.\,C\,.\,\Delta_o^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

y su desarrollo en pocos términos es el siguiente:

$$(3) \qquad \Delta = \Delta_o + \tfrac{1}{2}\,e.C.\,\Delta_o^{-1} - 1/8\; e^2C^2\Delta_o^{-3} + \ldots$$

En primera aproximación es suficiente considerar $\Delta = \Delta_o$ y por consiguiente la variable independiente puede expresarse:

$$\zeta = A\int_o^t \Delta_o^{-3}(t).dt$$

3): Sean $\varepsilon, \varepsilon'$ anomalías excéntricas del Asteroide y Júpiter, respectivamente.

n, n', movimientos medios diarios del Asteroide y Júpiter, resp.

c, c', constantes

a, a' semiejes del Asteroide y Júpiter, resp.

φ variable auxiliar

$\alpha = a/a' \qquad H = \varepsilon - \varepsilon' \qquad \varepsilon' = nt + c \qquad \varepsilon' = n't + c' \qquad n'/n = \mu$

$\beta = (1 - \mu)^{-1} \qquad m = 2\,(1 - \mu_o)^{-1} \qquad H = 2\,\varphi + \pi$

de donde:

$\varepsilon' = \mu\varepsilon - \mu c + c' \qquad (5)\ H = (1 - \mu)\varepsilon + \mu c - c' \qquad (6)\ H = (1 - \mu)\,nt + c - c'$

$(7)\ \beta\,dH = d\,\varepsilon \qquad (8)\ d\varepsilon = 2\beta\,d\varphi$

Efectuado el cambio de variable en (4), para $A = n/2\beta$, resulta:

$$\zeta = b_o \int_{\varphi_o}^{\varphi} (1 - k^2 \mathrm{sen}^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi$$

$$k^2 = 4\alpha/(1+\alpha)^2 \qquad b_o = [(1+\alpha)^3 a'^3]^{-1}$$

de donde, haciendo ζ - Const = ζ''

$$(9) \qquad \zeta'' = b_o \int_{o}^{\varphi} (1 - k^2 \mathrm{sen}^2 \varphi)^{-3/2} d\varphi$$

La integral (9), elíptica de tercera especie, puede expresarse:

$$(10) \qquad \zeta'' = \frac{b_o}{k'^2} \left(E(\varphi) - \frac{k^2 \mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi}{(1-k^2 \mathrm{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \right) \qquad k'^2 = 1 - k^2$$

donde:

$$(11) \quad E(\varphi) = \frac{2E(\pi/2)}{\pi} \varphi + \sum_{p=1} B_p \mathrm{sen}\, 2p\varphi \quad (*)$$

$$(12) \quad \frac{k^2 \mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi}{(1-k^2 \mathrm{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = k^2 \mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi \sum_{p=o} \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2p} k^{2p} \mathrm{sen}^{2p} \varphi$$

Con los desarrollos (11) y (12), la función (10) queda expresada por la serie trigonométrica:

$$\zeta'' = c_o \varphi + \sum_{p=1} c_p \mathrm{sen}\, 2p\varphi$$

y haciendo $2\varphi = \varphi'$

$$(13) \qquad \zeta'' = \tfrac{1}{2} c_o \varphi' + \sum_{p=1} c_p \mathrm{sen}\, p\varphi'$$

Como necesitamos obtener $\varphi = F(\zeta'')$, es decir, debemos efectuar la inversión de la serie (13), y a tal efecto procedemos de la siguiente manera(*):

$$(14) \quad \mathrm{sen}\, p\varphi' = \sum_{n=o} (-)^n \frac{(p\varphi')^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(*) Houel: Recuil de Formules ...(1901) pag. XLV y reemplazando con (14) en la serie (13), obtenemos:

$$\zeta'' = d_o\varphi' + d_3\varphi'^3 + d_5\varphi'^5 + d_7\varphi'^7 + \ldots$$

$$(15)\quad \frac{\zeta''}{d_o} = \bar{\zeta} = \varphi' + \frac{d_3}{d_o}\varphi'^3 + \frac{d_5}{d_o}\varphi'^5 + \frac{d_7}{d_o}\varphi'^7 + \ldots$$

y de la inversión de la serie de potencias (15), resulta la serie:

$$\varphi' = \bar{\zeta} + f_3\bar{\zeta}^3 + f_5\bar{\zeta}^5 + f_7\bar{\zeta}^7 + \ldots$$

o sea:

$$(16)\quad \varphi = 0{,}5\,(\bar{\zeta} + f_3\bar{\zeta}^3 + f_5\bar{\zeta}^5 + f_7\bar{\zeta}^7 + \ldots)$$

La serie de potencias (16) la expresamos en una serie trigonométrica de sen $p\bar{\zeta}$. En efecto: (ver Comrie, Mathematical Tables, vol.II)

$$\bar{\zeta} = \sum_{p=0}\left(\frac{1.3.5.\ldots\ldots(2p-1)}{2.4.6.\ldots\ldots\ldots 2p}\right)\frac{\operatorname{sen}^{2p+1}\bar{\zeta}}{(2p+1)}$$

de donde:

$$(17)\quad \varphi = g_o\bar{\zeta} + g_1\operatorname{sen}\bar{\zeta} + g_2\operatorname{sen}2\bar{\zeta} + g_3\operatorname{sen}3\bar{\zeta} + \ldots$$

4): De las teorías de Hansen y Bohlin, tenemos:

$$(18)\ \varepsilon - e\operatorname{sen}\varepsilon = nt + n\delta z + c \qquad (19)\quad r = r_o(1+\nu) \qquad (20)\quad T = \frac{dW}{d\varepsilon}$$

$$(21)\quad \frac{d(n\delta z)}{d\varepsilon} = \bar{W}$$

donde $n\delta z$ y ν son las perturbaciones de la anomalía media y del radio vector, respectivamente, y T es la función:

$$(22)\quad T = M'a\frac{\partial\Omega}{\partial\upsilon} + N'a^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

donde:

$$\Omega = m'\left(\frac{1}{\Delta_o^3} - \frac{r}{r'^2}\cos H\right)$$

(*) No utilizamos el desarrollo de Lagrange $F(\varphi) = F(\bar{\zeta}) + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{h^p}{p!}\frac{d^{p-1}}{d\bar{\zeta}^{p-1}}\left(F'(\bar{\zeta})\,\Phi^p(\bar{\zeta})\right)$ porque en el caso particular de $n'/n = 3/4$, resultan series que convergen muy lentamente.

Hacemos (23) $\varepsilon = m\varphi + \theta + B$

$$\theta = -(\mu_o \beta m) w \varphi \qquad\qquad B = c' - c/(1-\mu)$$

donde w es el parámetro que se determina de la relación:

$$(24) \quad \mu_o - \mu = w\mu_o$$

siendo μ_o el valor numérico de la fracción de dos números enteros más próximos a n' y n. La función T para $\mu \sim 3/4$ es la siguiente ('):

$$(25) \quad T = m' \left\{ 3G_o \operatorname{sen} 2\varphi + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) \left[3G_o (\cos 6\varphi - \frac{1}{3} \cos 10\varphi) + 2a^3 \Delta_o^{-3} \cos 8\varphi \right] \right.$$

$$\left. + \cos(\psi - \theta - B) \left[3G_o (\frac{1}{3} \operatorname{sen} 10\varphi - \operatorname{sen} 6\varphi) - 2a^3 \Delta_o^{-3} \operatorname{sen} 8\varphi \right] \right\}$$

donde:

$$G_o = (\alpha^2 - a^2 a' \Delta_o^{-3})$$

Efectuamos el cambio de variable en la e.d. (20) y siendo $\frac{d\varphi}{d\zeta} = \Delta_o^3$ resulta $\frac{dW}{d\bar{\zeta}} = 2\beta T \Delta_o^3$. Reemplazando Δ_o^3 por $a'^3 S_o^3 = \Delta_o^3$ y dividiendo ambos miembros de (25) por a'^3, resulta:

$$(26) \quad \frac{dW}{d\bar{\zeta}} = 2\beta T S_o^3 = 6m'\beta\alpha^2 G_1 \operatorname{sen} 2\varphi +$$

$$+ \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) \left(6m'\beta\alpha^2 G_1 (\cos 6\varphi - \frac{1}{3} \cos 10\varphi) + 4m'\beta\alpha^3 \cos 8\varphi\right) +$$

$$+ \cos(\psi - \theta - B) \left(6m'\beta\alpha^2 G_1 (\frac{1}{3} \operatorname{sen} 10\varphi - \cos 6\varphi) - 4m'\beta\alpha^3 \operatorname{sen} 8\varphi\right)$$

donde:

$$G_1 = (S_o^3 - 1)$$

Diferenciando la serie (17), resulta:

$$(27) \quad \Delta_o^3 = \frac{d\varphi}{d\bar{\zeta}} = g_o + g_1 \cos\bar{\zeta} + 2 g_2 \cos 2\bar{\zeta} + 3 g_3 \cos 3\bar{\zeta} + \ldots$$

$$(28) \quad G_1 = (S_o^3 - 1) = a'^{-3}(g_o + g_1 \cos\bar{\zeta} + 2 g_2 \cos 2\bar{\zeta} + \ldots) - 1$$

(') Tisserand: Mec. Céleste, Tomo IV.

5): Con la fórmula (24) queda determinado el parámetro w, en función del cual expresamos φ, α y β. A tal efecto, con la fórmula de Taylor:

$$f(w) = f(0) + \left(\frac{\partial f(w)}{\partial w} \right)_{w=0} w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(w)}{\partial^2 w} \right)_{w=0} w^2 + \dots$$

y además:

$$(29) \qquad \alpha = \mu_0^{2/3}(1 - w)^{2/3}$$

resultan:

$$(30) \quad \begin{cases} \beta^2 = h_0 + h_1 w + h_2 w^2 + \dots \\ 6m' \beta\alpha^2 = q_0 + q_1 w + q_2 w^2 + \dots \\ 4m' \beta\alpha^3 = s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + \dots \end{cases}$$

donde los coeficientes dependen de μ_0.

Por otra parte, de (5), (24) y $H = 2\varphi + \pi$, obtenemos:

$$(31) \qquad 2\varphi = [(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] + [w(\varepsilon - c)\ \mu_0]$$

y a efectos de obtener sen $p\varphi$ y cos $p\varphi$ como funciones del parámetro w, utilizamos la fórmula de Taylor y resulta:

$$(32)\ \operatorname{sen} p\varphi = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}p[(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] + [(d_0\varphi + d_1)p.\cos\tfrac{1}{2}p((1-\mu_0)\varepsilon + c\mu_0 - c' - \pi)]w + \dots$$

$$(33)\ \cos p\varphi = \cos\tfrac{1}{2}p[(1-\mu_0)\varepsilon + \mu_0 c - c' - \pi] - [(d_0\varphi + d_1)p.\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}p((1-\mu_0)\varepsilon + c\mu_0 - c' - \pi)]w + \dots$$

donde hacemos $\frac{1}{2}[(1-\mu_0)\varepsilon + c\mu_0 - c' - \pi] = \varphi$ por ser $\mu_0 \sim \mu$ y obtenemos:

$$(34) \qquad \operatorname{sen} p\varphi = \operatorname{sen} p\varphi + ((d_0\varphi + d_1)\ p \cos p\varphi) w + \dots$$

$$(35) \qquad \cos p\varphi = \cos p\varphi - ((d_0\varphi + d_1)\ p \operatorname{sen} p\varphi) w + \dots$$

siendo:

$$d_0 = (\beta\mu_0 - \tfrac{1}{4}p(1 - \mu_0)\, m\beta\mu_0^2)$$

$$d_1 = \tfrac{1}{4}p(1 - \mu_0)[\beta\mu_0 c(1 - \beta + \mu) + \mu_0(c' - \mu c + \pi - c)]$$

Las funciones trigonométricas deben ser expresadas en función de la variable independiente $\bar{\zeta}$. A tal efecto, con la serie (17) se obtiene:

$$\operatorname{sen} p\varphi = \operatorname{sen} pg_o\bar{\zeta}\cos p(g_1 \operatorname{sen}\bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} + \ldots) + \cos pg_o\bar{\zeta}\operatorname{sen} p(g_1 \operatorname{sen}\bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} \ldots)$$
$$\cos p\varphi = \cos pg_o\bar{\zeta}\cos p(g_1 \operatorname{sen}\bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} + \ldots) - \operatorname{sen} pg_o\bar{\zeta}\operatorname{sen} p(g_1 \operatorname{sen}\bar{\zeta} + g_2 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} \ldots)$$

que pueden desarrollarse en series trigonométricas rapidamente convergentes del tipo:

$$\cos p(g_j \operatorname{sen} j\bar{\zeta}) = J_o(pg_j) + 2\sum_{n=1} J_{2n}(pg_j)\cos 2jn\bar{\zeta}$$
$$\operatorname{sen} p(g_j \operatorname{sen} j\bar{\zeta}) = 2\sum_{n=o} J_{2n+1}(pg_j)\operatorname{sen}(2n+1).j\bar{\zeta}$$

cuyos coeficientes son las funciones de Bessel de primera especie. Reemplazando con estas series en las series (34) y (35), donde también la variable φ es reemplazada por la serie (17) y poniendo las series (30) en lugar de $6m\,\beta\alpha^2$ y $4m\,\beta\alpha^3$ la (26) queda expresada:

$$(36)\quad \frac{dW}{d\bar{\zeta}} = L_1 + L_1'w + \cos(\psi - \theta - B)(L_2 + L_2'w) + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B)(L_3 + L_3'w)$$

donde $L_n = L_n(\bar{\zeta})$ y $L_n' = L_n'(\bar{\zeta})$ son funciones trigonométricas.

6): Si en la (6) hacemos $\tau = t + \dfrac{c - c' - \pi}{(1-\mu)n}$, entonces $\varphi = \frac{1}{2}(1-\mu)n\tau$ de donde, para $\tau = 0$ es $\varphi = 0$ y también $\bar{\zeta} = 0$ en virtud de la serie (15). De esto, el límite inferior de las integrales que determinan W y $n\delta z$ es $\bar{\zeta} = 0$, para $\varphi = 0$:

$$(37)\qquad W = 2\beta\int_c^{\bar{\zeta}} T.S_o^3.\,d\bar{\zeta} \qquad\qquad (38)\qquad n\delta z = 2\beta\int_0^{\bar{\zeta}} \bar{W}.\,\Delta_o^3.\,d\bar{\zeta}$$

Para integrar la e.d.(20) donde $W = W(\bar{\zeta},\theta,w)$, suponemos que la solución es desarrollable en la serie $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + \ldots$ y satisface a la ecuación a derivadas parciales:

$$(39)\qquad \frac{dW}{d\bar{\zeta}} = \frac{\partial W}{\partial\bar{\zeta}} + \frac{\partial W}{\partial\theta}\,\frac{d\theta}{d\bar{\zeta}} = T = T_o + T_1 w + T_2 w^2 + \ldots$$

Por lo visto para β y θ en los párrafos 4 y 5, de la ecuación (39) resulta:

$$(40) \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial W_2}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial W_3}{\partial \bar{\zeta}} + \dots - m\mu_o(h_o + h_1 w + h_2 w^2)\, w \left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} \frac{\partial W_3}{\partial \theta} \right) \Delta_o^3 =$$

$$= (T_o + T_1 w + T_2 w^2 + T_3 w^3 + \dots)$$

Igualando los términos a derecha e izquierda en (40) que tienen w del mismo orden, resulta el siguiente sistema de e.d. para determinar W:

$$(41) \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{\zeta}} = 0$$

$$(42) \quad \frac{\partial W_2}{\partial \bar{\zeta}} = -m\, \mu_o h_o w.\, \Delta_o^3.\, \left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right) = T_o$$

$$(43) \quad \frac{\partial W_3}{\partial \bar{\zeta}} = -m\, \mu_o h_o\, w. \Delta_o^3 \left(\frac{\partial W_2}{\partial \theta} \right) - m\, \mu_o h_1 w^2.\, \Delta_o^3 \left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta} \right) = T_1$$

donde:

$$(44) \quad T_o = L_1 + \cos(\psi - \theta - B)\, L_2 + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B)\, L_3$$

$$(45) \quad T_1 = L_1' + \cos(\psi - \theta - B)\, L_2' + \operatorname{sen}(\psi - \theta - B)\, L_3'$$

En la e.d. (41) la funcion W_1 no depende de $\bar{\zeta}$ y es función de la variable θ o sea $W_1 = F_1(\theta)$ y suponemos por las condiciones iniciales sea W_1 = Constante. Integramos la e.d. (42):

$$(46) \quad W_2 = \int_0^{\bar{\zeta}} T_o \, d\bar{\zeta} + F_2(\theta)$$

y con la condición deducida de $F_1(\theta)$ para que W_2 no contenga términos seculares en $\bar{\zeta}$ y que $F_2(\theta) \doteq 0$, resulta:

$$(47) \quad W_2 = \int_0^{\bar{\zeta}} L_1(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} + \cos(\psi - \theta - B) \int_0^{\bar{\zeta}} L_2(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} +$$

$$+ \operatorname{sen}(\psi - \theta - B) \int_0^{\bar{\zeta}} L_3(\bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}$$

y así sucesivamente para W_3, $W_4 \dots W_p$.

En consecuencia queda determinada W:

$$W = \text{Const} + W_2 + W_3 + W_4 + \dots$$

donde W_2, W_3 ... son series trigonometricas.

Reemplazando el parámetro ψ por $\varepsilon = m\varphi + \theta + B$, los $\cos(\psi - \theta - B)$ y $\operatorname{sen}(\psi - \theta - B)$ se escriben $\cos m\varphi$ y $\operatorname{sen} m\varphi$ que pueden expresarse como funciones de $\bar{\zeta}$ siguiendo el método indicado en el párrafo 5 y reemplazando en las series que resultan de la integración de (44) y (46), se tiene la función $\bar{W}$:

$$\bar{W} = \bar{W}_1 + \bar{W}_2 + \dots$$

Efectuando el cambio de variable en la e.d. de Hansen (21) e integrando, resulta:

$$n\delta z = 2\beta \int_0^{\bar{\zeta}} \bar{W} \Delta_0^3 \, d\bar{\zeta}$$

de donde obtenemos las series trigonométricas:

$$(n\delta z)_1 = \sum_{p=1} s_{o,p} \operatorname{sen} p\bar{\zeta}$$

$$(n\delta z)_2 = w \sum_{p=1} s_{1,p} \operatorname{sen} p\bar{\zeta}$$

para calcular las perturbaciones de la anomalía media $(n\delta z)_1$ y $(n\delta z)_2$ de primer y segundo orden,respectivamente,en primera aproximación.

7): Para el caso particular del asteroide Thule, hemos obtenido el siguiente resultado para la perturbación de primer orden de la anomalia media:

$$(48) \quad (n\delta z)_1 = 0{,}00333 \operatorname{sen} \bar{\zeta} + 0{,}00246 \operatorname{sen} 2\bar{\zeta} - 0{,}00209 \operatorname{sen} 3\bar{\zeta} - \\ - 0{,}00015 \operatorname{sen} 4\bar{\zeta} - 0{,}00060 \operatorname{sen} 5\bar{\zeta} - 0{,}00023 \operatorname{sen} 6\bar{\zeta} - \\ - 0{,}00004 \operatorname{sen} 7\bar{\zeta} + 0{,}00007 \operatorname{sen} 8\bar{\zeta} + 0{,}00005 \operatorname{sen} 9\bar{\zeta} + \\ + 0{,}00001 \operatorname{sen} 10\bar{\zeta} \quad \dots$$

Las series de Bohlin (') cuyos coeficientes hemos calculado para $\mu \sim 3/4$, estan publicadas en nuestra contribución al Boletín no.4, de la Asoc.Arg.de Astronomía. En este trabajo nos limitamos al cálculo de las perturbaciones de primer orden de la anomalía media y los resultados,cotejados con los obtenidos según la teoría de Bohlin, son los siguientes:

(') Bohlin: Formeln und Tafeln zur Gruppenweisse...(Upsala,1896).En esta publicación los coeficientes de las series para calcular las perturbaciones estan dados para $\mu \sim 1/3$.Nosotros los hemos modificado para $\mu \sim 3/4$.

τ días	φ	ζ	$\bar{\zeta}$	$(n\,\delta z)_1$	$(n\,\delta z)_1$ (')
0	0	0	0	0	0
10	0,0023	0,000005	0,005	- 2"18	- 2"89
20	0,0046	0,000010	0,010	- 4"36	- 4"43
30	0,0069	0,000015	0,015	- 6"54	- 6"83
40	0,0092	0,000016	0,016	- 7"33	- 7"00
50	0,0115	0,000020	0,020	- 9"00	- 8"55
60	0,0138	0,000024	0,024	- 9"95	- 9"23
120	0,0276	0,000044	0,044	-19"40	-18"13
200	0,0460	0,000070	0,070	-29"65	-29"21
400	0,0920	0,000110	0,110	-43"31	-40"98

donde:

$$\varphi = 0{,}00023\ \tau$$

8): Para calcular la perturbación υ del radio vector, tenemos la e.d. de Hansen:

$$\frac{d\upsilon}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2}\ \frac{\overline{\partial W}}{\partial \psi}$$

donde, efectuando el cambio de variable, resulta:

$$\frac{d\upsilon}{d\bar{\zeta}} = -\frac{1}{2}\ \frac{\overline{\partial W}}{\partial \psi}\ S_o^3\ \beta$$

La derivada parcial $\frac{\overline{\partial W}}{\partial \psi}$ significa que primero se deriva W respecto al parámetro ψ y despues se hace $\psi = \varepsilon = m\varphi + \theta + B$. Como ya hemos obtenido el desarrollo de las funciones W, S_o^3, el cálculo no ofrece dificultades.

(') Valores de la perturbación obtenidos con las series de Bohlin.

Summary:

CALCULATION OF THE PERTURBATIONS OF THE MEAN ANOMALY AND THE RADIUS VECTOR OF AN ASTEROID

The classical disturbing function R is not suitable to most of the Asteroids because in the integration of R, the very small divisor $(k_1 n + k_2 n')$, in the case $-k_1/k_2 \sim n'/n$, gives origin to a very large period inequality. In order to avoid such a difficulty, we have solved the differential equation of the Hansen-Bohlin method, by means of trigonometrical series using as independient variable $\zeta = A\int_0^t \Delta_0^{-3}(t)dt$, instead of the excentrical anomaly. We used an analytical method and an application is made in the particular case of asteroid Thule for which $n'/n \sim 3/4$.