Hacia un Sistema I Polimórfico

Cristian Sottile[1,2,3], Alejandro Díaz-Caro[2,4], and Pablo E. Martínez López[2]

[1] LIFIA, Facultad de Informática, Universidad Nacional de La Plata
La Plata, Buenos Aires, Argentina
[2] Departamento de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de Quilmes
Bernal, Buenos Aires, Argentina
[3] Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CICPBA)
La Plata, Buenos Aires, Argentina
[4] Instituto de Ciencias de la Computación (CONICET–UBA)
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

Resumen Sistema I es un lambda cálculo simplemente tipado con pares, extendido con una teoría ecuacional obtenida a partir de los isomorfismos de tipos existentes entre los tipos simples con pares. En este trabajo en progreso proponemos una extensión de Sistema I hacia tipos polimórficos, añadiendo al sistema de tipos tanto el cuantificador universal como sus isomorfismos relacionados.

Keywords: Lambda cálculo; Teoría de tipos; Isomorfismos de tipos; Polimorfismo

1. Introducción

Dos tipos A y B se consideran isomorfos si existen dos funciones $f : A \Rightarrow B$ y $g : B \Rightarrow A$ tales que la composición $g \circ f : A \Rightarrow A$ es semánticamente equivalente a la identidad en A, y la composición $f \circ g : B \Rightarrow B$ es semánticamente equivalente a la identidad en B. Di Cosmo y sus colaboradores caracterizaron los isomorfismos existentes en diferentes sistemas: tipos simples, tipos simples extendidos con pares, polimorfismo, y otros (ver [2] para una referencia completa). Utilizando dicha caracterización, Díaz-Caro y Dowek [3] definieron Sistema I, un lambda cálculo con pares simplemente tipado donde los tipos isomorfos son considerados iguales. Así, si A y B son isomorfos, todo término de tipo A puede ser utilizado como un término de tipo B. Por ejemplo, el isomorfismo conocido como currificación dice que $(A \wedge B) \Rightarrow C$ es isomorfo a $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, y por lo tanto una función esperando un par puede ser utilizada como una función esperando los argumentos por separado. Para esto Sistema I incluye a su vez una equivalencia entre términos: $t\langle r, s\rangle \rightleftarrows trs$, ya que si t espera un par de elementos, también puede tomar uno a uno por separado.

Díaz-Caro y Martínez López [4] implementaron una versión preliminar de Sistema I extendido con un operador de recursión en Haskell, lo que produjo un lenguaje con características muy particulares; por ejemplo, utilizando el isomorfismo existente entre $A \Rightarrow (B \wedge C)$ y $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$, se puede construir un término que sea la proyección de una función que compute un par de elementos, para obtener mediante evaluación una de las funciones más simples que computan solo uno de los elementos del par, sin haber aplicado previamente la función y descartando así el código que computa el resultado que no nos interesa.

En este trabajo proponemos una extensión de Sistema I a tipos polimórficos, agregando los isomorfismos existentes en presencia del cuantificador universal, con el fin de enriquecer el lenguaje.

Este es un trabajo en progreso, y como tal, las propiedades formales del sistema se dejan para trabajo futuro.

El paper está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 presentamos Sistema I, tal y como fue definido por Díaz-Caro y Dowek [3]. En la Sección 3 presentamos nuestro aporte, que es la versión polimórfica de Sistema I. Finalmente en la Sección 4 damos algunas conclusiones y una descripción de los trabajos en progreso y a futuro.

2. Sistema I

2.1. Definiciones

Sistema I es una extensión al Lambda Cálculo Simplemente Tipado con Pares (al que llamaremos de forma abreviada Cálculo Simple). La sintaxis de tipos no se ve modificada, y Sistema I conserva los mismos tipos que el Cálculo Simple:

$$A \quad := \quad \tau \mid A \Rightarrow A \mid A \wedge A$$

Sin embargo, la extensión de Sistema I con respecto al Cálculo Simple consiste en agregar la siguiente regla de tipado:

$$[A\equiv B]\frac{t : A}{t : B}\ (\equiv)$$

válida para todo par de tipos A y B isomorfos. Este agregado, no menor, trae aparejado la modificación de la semántica operacional del cálculo, ya que, por ejemplo, una abstracción de tipo $A \Rightarrow (B \wedge C)$ podrá ser tipada con el tipo del par de funciones $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$, y por lo tanto podremos proyectar una función a partir de una abstracción. Es decir, las abstracciones pueden convertirse en pares.

Los isomorfismos considerados son los cuatro existentes para el Cálculo Simple (cf. [2]), y se detallan en la Figura 1.

Los isomorfismos (1) y (2) definen la conmutatividad y asociatividad de la conjunción, el isomorfismo (3) es la distributividad de la implicación con respecto a la conjunción, y el isomorfismo (4) es la currificación.

La regla de tipado ($\equiv$), para los isomorfismos considerados, induce ciertas equivalencias entre términos. La conmutatividad y asociatividad de la conjunción implican que el par de términos $\langle t, r\rangle$ y el par de términos $\langle r, t\rangle$ son indistinguibles, ya que ambos son tipados con $A \wedge B$ y con $B \wedge A$, por lo tanto, consideraremos que dichos términos son equivalentes, de la misma manera que

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \tag{1}$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \tag{2}$$
$$A \Rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \tag{3}$$
$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \tag{4}$$

Figura 1. Isomorfismos del Cálculo Simple

$\langle t, \langle r, s\rangle\rangle$ y $\langle\langle t, r\rangle, s\rangle$ son indistinguibles. Esta modificación implica que la proyección usual de pares definida con respecto a la posición (e.g. $\pi_i\langle t_1, t_2\rangle \hookrightarrow t_i$) no está bien definida para nuestro sistema, y por consiguiente, Sistema I utiliza proyecciones con respecto al tipo:

$$\text{Si } t : A \text{ entonces } \pi_A\langle t, r\rangle \hookrightarrow t$$

Esta regla torna Sistema I en un sistema no determinista, ya que si t y r tienen tipo A, $\pi_A\langle t, r\rangle$ podrá reducir indistintamente a t o a r. Este no determinismo no presenta un problema mayor ya que, en presencia de la propiedad de preservación de tipos y si se piensa a Sistema I como un sistema de pruebas, implica que el sistema identifica las diferentes pruebas de proposiciones isomorfas (como una forma de *proof-irrelevance*). Por otra parte, si se considera a Sistema I como un lenguaje de programación, el determinismo se puede recuperar codificando los términos t y r del mismo tipo como $\lambda x^B.t$ y $\lambda x^C.r$, con $B \not\equiv C$. Por lo tanto dicho no determinismo se considera una característica deseable y no un problema (ver discusión en [3]).

La sintaxis de términos entonces es la sintaxis del Cálculo Simple, excepto porque las proyecciones dependen de los tipos (lo que también implica que todos los términos son tipados, y por lo tanto utilizamos la notación *à la Church*, o sea con las variables explicitando su tipo):

$$t \quad := \quad x^A \mid \lambda x^A.t \mid tt \mid \langle t, t\rangle \mid \pi_A t$$

Se considera por convención que para todo tipo A existe un conjunto infinito de variables de tipo A denotado por $\mathcal{V}_A$ tal que si $A \equiv B$ entonces $\mathcal{V}_A \equiv \mathcal{V}_B$, y si $A \not\equiv B$ entonces $\mathcal{V}_A \cap \mathcal{V}_B \neq \emptyset$. Esto tiene como consecuencia que no hay variables diferentes con el mismo nombre (cf. [1, Página 26]).

Se definen de la forma usual las funciones FV_t (variables de término libres en términos), FTV_t (variables de tipo libres en términos), FTV_A (variables de tipo libres en tipos), y la substitución de términos en términos ($[x := r]t$).

El sistema de tipos de Sistema I es el sistema de tipos del Cálculo Simple con la modificación correspondiente a la proyección con respecto al tipo y la adición de la regla ($\equiv$), mencionada al principio de esta sección. Se detalla el sistema completo en la Figura 2. La presentación elegida para las reglas de tipado es sin un contexto específico (a diferencia de como es usual encontrar en los juicios de tipado más tradicionales, $\Gamma \vdash t : A$), ya que toda variable lleva su propio tipo y por lo tanto el contexto sería redundante.

$$\frac{}{x : A}\ (ax)\ [x \in \mathcal{V}_A] \qquad \frac{t : A}{t : B}\ (\equiv)\ [A \equiv B]$$

$$\frac{t : B}{\lambda x^A.t : A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{t : A \Rightarrow B \quad r : A}{tr : B}\ (\Rightarrow_e) \qquad \frac{t : A \quad r : B}{\langle t, r\rangle : A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{t : A \wedge B}{\pi_A(t) : A}\ (\wedge_e)$$

Figura 2. Reglas de tipado de Sistema I

De la misma manera que los isomorfismos (1) y (2) implican la conmutatividad y asociatividad de pares en los términos, así como un cambio en la proyección, el isomorfismo (3) implica que ciertos términos deben ser identificados: una abstracción que retorna un par de funciones se identifica con un par de abstracciones y un par aplicado a un término, distribuye dicha aplicación:

$$\lambda x^A.\langle t, r\rangle \rightleftarrows \langle \lambda x^A.t, \lambda x^A.r\rangle$$
$$\langle t, r\rangle s \rightleftarrows \langle ts, rs\rangle$$

donde $\rightleftarrows$ es un símbolo simétrico.

Finalmente, el isomorfismo (4) induce la siguiente identificación de términos:

$$t\langle r, s\rangle \rightleftarrows trs$$

sin embargo, esta identificación produce ambigüedad con la beta-reducción. Por ejemplo, si $t : A$ y $r : B$, el término $(\lambda x^{A\wedge B}.s)\langle t, r\rangle$ puede beta-reducir a $[x := \langle t, r\rangle]s$, pero a su vez este término será equivalente a $(\lambda x^{A\wedge B}.s)tr$, que beta-reduce a $([x := t]s)r$. Para evitar dicha ambigüedad, la beta-reducción deberá realizarse sólo en el caso en que el tipo esperado en la abstracción y el tipo del argumento coincidan:

$$\text{Si } r : A \text{ entonces } (\lambda x^A.t)r \hookrightarrow [x := r]t$$

Los isomorfismos (1) y (2) definen la conmutatividad y asociatividad de la conjunción, el isomorfismo (3) es la distributividad de la implicación con respecto a la conjunción, y el isomorfismo (4) es la currificación.

Resumiendo, la semántica operacional de Sistema I viene dada por la relación $\hookrightarrow$ la cual se toma módulo la relación simétrica $\rightleftarrows$. Es decir, se considera la relación $\to\ :=\ \rightleftarrows^* \circ \hookrightarrow \circ \rightleftarrows^*$, donde $\rightleftarrows^*$ es la clausura transitiva de $\rightleftarrows$. Como es usual, notaremos también con $\to^*$ a la clausura reflexotransitiva de $\to$. Las reglas de ambas relaciones ($\hookrightarrow$ y $\rightleftarrows$) se detallan en la Figura 3.

2.2. Ejemplos

En esta sección mostramos algunos ejemplos para discutir la necesidad de las reglas presentadas.

El primer ejemplo muestra el uso de la equivalencia entre términos para producir aplicaciones no tradicionales, que no es posible construir en el Cálculo Simple. En particular, la función $\mathit{apply} = \lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx$ se puede aplicar a un par, e.g. $\langle g, t\rangle$ con $g : A \Rightarrow B$ y $t : A$, ya que la siguiente derivación de tipo es válida, debido al isomorfismo (4):

$$\langle r,s\rangle \rightleftarrows \langle s,r\rangle \qquad (\textsc{comm})$$
$$\langle r,\langle s,t\rangle\rangle \rightleftarrows \langle\langle r,s\rangle,t\rangle \qquad (\textsc{asso})$$
$$\lambda x^A.\langle r,s\rangle \rightleftarrows \langle \lambda x^A.r, \lambda x^A.s\rangle \qquad (\textsc{dist}_\lambda)$$
$$\langle r,s\rangle t \rightleftarrows \langle rt, st\rangle \qquad (\textsc{dist}_{\text{app}})$$
$$r\langle s,t\rangle \rightleftarrows rst \qquad (\textsc{curry})$$

$$\text{Si } s:A,\ (\lambda x^A.r)s \hookrightarrow [x:=s]r \qquad (\beta_\lambda)$$
$$\text{Si } r:A,\ \pi_A\langle r,s\rangle \hookrightarrow r \qquad (\pi)$$

$$\frac{t \rightleftarrows r}{\lambda x^A.t \rightleftarrows \lambda x^A.r} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{ts \rightleftarrows rs} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{st \rightleftarrows sr} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{\langle t,s\rangle \rightleftarrows \langle r,s\rangle} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{\langle s,t\rangle \rightleftarrows \langle s,r\rangle} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{\pi_A t \rightleftarrows \pi_A r}$$
$$\frac{t \hookrightarrow r}{\lambda x^A.t \hookrightarrow \lambda x^A.r} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{ts \hookrightarrow rs} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{st \hookrightarrow sr} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{\langle t,s\rangle \hookrightarrow \langle r,s\rangle} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{\langle s,t\rangle \hookrightarrow \langle s,r\rangle} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{\pi_A t \hookrightarrow \pi_A r}$$

Figura 3. Relaciones que definen la semántica operacional de Sistema I

$$\cfrac{\cfrac{\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx : (A\Rightarrow B)\Rightarrow A\Rightarrow B}{\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx : ((A\Rightarrow B)\wedge A)\Rightarrow B}(\equiv) \qquad \cfrac{g:A\Rightarrow B \quad t:A}{\langle g,t\rangle : (A\Rightarrow B)\wedge A}(\wedge_i)}{(\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)\langle g,t\rangle : B}(\Rightarrow_e)$$

La reducción ocurre de la siguiente manera:

$$(\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)\langle g,t\rangle \ \rightleftarrows_{(\textsc{curry})}\ (\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)gt \ \hookrightarrow^2_\beta\ gt$$

El segundo ejemplo muestra que la misma aplicación puede usarse de otras formas. Por ejemplo, $(\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)tg$ también está bien tipado, usando los isomorfismos (1) y (4), y reduce a gt, como se puede observar en la siguiente reducción.

$$\begin{aligned}(\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)tg \ &\rightleftarrows_{(\textsc{curry})}\ (\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)\langle t,g\rangle \\ &\rightleftarrows_{(\textsc{comm})}\ (\lambda f^{A\Rightarrow B}.\lambda x^A.fx)\langle g,t\rangle \ \to^*\ gt\end{aligned}$$

También la función *apply'* $= \lambda x^{(A\Rightarrow B)\wedge A}.\pi_{A\Rightarrow B}(x)\pi_A(x)$ puede aplicarse a $g : A \Rightarrow B$ y $t : A$ como si estuviera currificada:

$$\begin{aligned}&(\lambda x^{(A\Rightarrow B)\wedge A}.\pi_{A\Rightarrow B}(x)\pi_A(x))gt \ \rightleftarrows_{(\textsc{curry})} \\ &\qquad (\lambda x^{(A\Rightarrow B)\wedge A}.\pi_{A\Rightarrow B}x\pi_A x)\langle g,t\rangle \ \hookrightarrow_\beta\ \pi_{A\Rightarrow B}\langle g,t\rangle\pi_A\langle g,t\rangle \ \hookrightarrow^2_\pi\ gt\end{aligned}$$

Hemos mostrado diferentes maneras isomorfas de aplicar g a t mediante *apply*. De igual forma sucede con los pares y otras combinaciones.

Otro ejemplo que resulta de interés es el mencionado en la Sección 2.1: una función que devuelve pares se puede proyectar. Supongamos que tenemos el término $proj_f$ definido como $\pi_{A\Rightarrow B}(\lambda x^A.\langle t,r\rangle)$, con $t : B$ y $r : C$; en primer lugar, es tipable, utilizando el isomorfismo (3):

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \quad (1)$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \quad (2)$$
$$A \Rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \quad (3)$$
$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow B \Rightarrow C \quad (4)$$
$$\forall X.\forall Y.A \equiv \forall Y.\forall X.A \quad (5)$$
$$\text{si } X \notin FTV_A(A) \qquad \forall X.(A \Rightarrow B) \equiv A \Rightarrow \forall X.B \quad (6)$$
$$\forall X.(A \wedge B) \equiv \forall X.A \wedge \forall X.B \quad (7)$$

Figura 4. Isomorfismos de Sistema F con pares considerados

$$\dfrac{\dfrac{\lambda x^A.\langle t, r\rangle : A \Rightarrow (B \wedge C)}{\lambda x^A.\langle t, r\rangle : (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)}\,(\equiv)}{\pi_{A\Rightarrow B}(\lambda x^A.\langle t, r\rangle) : A \Rightarrow B}\,(\wedge_e)$$

La reducción se produce como sigue:

$$proj_{\mathsf{f}} = \pi_{A\Rightarrow B}(\lambda x^A.\langle t, r\rangle) \ \rightleftarrows_{(\text{DIST}_\lambda)} \ \pi_{A\Rightarrow B}\langle \lambda x^A.t, \lambda x^A.r\rangle \ \hookrightarrow_\pi \ \lambda x^A.t$$

Observar que la función es proyectada a pesar de no estar aplicada, devolviendo una función.

3. Sistema I Polimórfico

3.1. Definiciones

En esta sección describimos la extensión polimórfica a Sistema I. La sintaxis de tipos es extendida con el cuantificador universal, obteniendo los tipos de Sistema F [5] con pares:

$$A \quad := \quad X \mid A \Rightarrow A \mid A \wedge A \mid \forall X.A$$

Además consideramos también algunos de los isomorfismos que surgen como consecuencia de este nuevo símbolo (también caracterizados por Di Cosmo y sus colaboradores [2]). Los isomorfismos considerados se detallan en la Figura 4. Los primeros cuatro son los detallados en la sección precedente, y por lo tanto Sistema I Polimórfico incluye las mismas relaciones entre términos que las de Sistema I. El isomorfismo (5) nos indica que de alguna manera deberemos considerar la conmutatividad de los argumentos de una aplicación de tipos. Sin embargo, dicha conmutatividad haría que la aplicación del término a un tipo no sólo sea no determinista, sino que además no se podría probar la preservación de tipos. Por ejemplo, $(\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x^X.x)[A][B]$ reduce a $\lambda x^A.x$, pero si se pueden conmutar los argumentos, también reduciría a $\lambda x^B.x$, para tipos A y B cualesquiera. Por consiguiente, agregamos una etiqueta a la aplicación de tipos para indicar a qué variable corresponde. Por ejemplo, el término anterior se escribirá

$$(\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x^X.x)[A_X][B_Y]$$

$$
{}_{[x \in \mathcal{V}_A]}\frac{}{x : A}\ (\text{ax}) \qquad {}_{[A \equiv B]}\frac{t : A}{t : B}\ (\equiv)
$$

$$
\frac{t : B}{\lambda x^A.t : A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{t : A \Rightarrow B \quad r : A}{tr : B}\ (\Rightarrow_e) \qquad \frac{t : A \quad r : B}{\langle t, r\rangle : A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{t : A \wedge B}{\pi_A(r) : A}\ (\wedge_e)
$$

$$
{}_{[X \notin FTV_t(t)]}\frac{t : B}{\Lambda X.t : \forall X.B}\ (\forall_i) \qquad \frac{t : \forall X.B}{t[A_X] : [X := A]B}\ (\forall_e)
$$

Figura 5. Reglas de tipado de Sistema I Polimórfico

lo que hace que la identificación de este término con $(\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x^X.x)[B_Y][A_X]$ no modifique su semántica operacional.

Por lo antedicho, la sintaxis de términos de Sistema I Polimórfico es la siguiente:

$$
t \quad := \quad x^A \mid \lambda x^A.t \mid tt \mid \langle t, t\rangle \mid \pi_A t \mid \Lambda X.t \mid t[A_X]
$$

Las definiciones de variables libres y substituciones se extienden de forma usual a las nuevas construcciones, con una excepción: en la substitución de tipos en términos cerrados, la aplicación de tipos debe renombrar las variables por variables nuevas tomadas del conjunto correspondiente al tipo que se sustituye, ya que las variables se eligen de conjuntos diferentes dependiendo de su tipo.

Las reglas de tipado se establecen en la Figura 5, y son las reglas estándares de Sistema F con pares, a la cual hemos agregado la regla $(\equiv)$.

Las seis reglas que definen la relación simétrica $\rightleftarrows$ entre términos en Sistema I son heredadas directamente en Sistema I Polimórfico. Además, debemos agregar reglas a esta relación que reflejen los nuevos isomorfismos. La semántica operacional de Sistema I Polimórfico, que, al igual que en Sistema I, viene dada por la relación $\hookrightarrow$ módulo la relación simétrica $\rightleftarrows$, se detalla en la Figura 6.

3.2. Ejemplos

En esta sección introducimos ejemplos para mostrar la necesidad de las reglas presentadas. Los términos elegidos en los ejemplos no son tipables en Sistema F con pares.

La regla (P-SWAP) permite no prestar atención al orden de los argumentos de tipos, lo cual es una consecuencia del isomorfismo (5). Así, el término $(\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x^X.\lambda y^Y.x)[B_Y][A_X]$ reduce a $\lambda x^A.\lambda y^B.x$, a pesar de que las instanciaciones de tipos están en diferente orden; la reducción procede así:

$$
\begin{aligned}
(\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x^X.\lambda y^Y.x)[B_Y][A_X] \ &\leftrightarrows_{(\text{P-SWAP})}\ (\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x^X.\lambda y^Y.x)[A_X][B_Y] \\
&\hookrightarrow_{\beta_\lambda}\ (\Lambda Y.\lambda x^A.\lambda y^Y.x)[B_Y] \ \hookrightarrow_{\beta_\lambda}\ \lambda x^A.\lambda y^B.x
\end{aligned}
$$

La regla $(\text{P-COMM}_{\forall_i \Rightarrow_i})$ permite no prestar atención al orden de los argumentos de términos y tipos, como en el siguiente ejemplo:

$$
\begin{aligned}
(\Lambda X.\lambda x^A.\lambda f^{A\Rightarrow X}.fx)t \ &\rightleftarrows_{(\text{P-COMM}_{\forall_i \Rightarrow_i})} \\
&(\lambda x^A.(\Lambda X.\lambda f^{A\Rightarrow X}.fx))t \ \hookrightarrow_{\beta_\lambda}\ (\Lambda X.\lambda f^{A\Rightarrow X}.ft)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lcr}
 & \langle r,s\rangle \rightleftarrows \langle s,r\rangle & (\textsc{comm})\\
 & \langle r,\langle s,t\rangle\rangle \rightleftarrows \langle\langle r,s\rangle,t\rangle & (\textsc{asso})\\
 & \lambda x^A.\langle r,s\rangle \rightleftarrows \langle \lambda x^A.r, \lambda x^A.s\rangle & (\textsc{dist}_\lambda)\\
 & \langle r,s\rangle t \rightleftarrows \langle rt, st\rangle & (\textsc{dist}_{\mathrm{app}})\\
 & r\langle s,t\rangle \rightleftarrows rst & (\textsc{curry})\\
 & t[A_X][B_Y] \rightleftarrows t[B_Y][A_X] & (\textsc{p-swap})\\
\text{si } X \notin FTV_A(A) & \Lambda X.\lambda x^A.r \rightleftarrows \lambda x^A.\Lambda X.r & (\textsc{p-comm}_{\forall_i \Rightarrow_i})\\
\text{si } X \notin FTV_A(A) & (\lambda x^A.t)[B_X] \rightleftarrows \lambda x^A.t[B_X] & (\textsc{p-comm}_{\forall_e \Rightarrow_i})\\
 & \Lambda X.\langle r,s\rangle \rightleftarrows \langle \Lambda X.r, \Lambda X.s\rangle & (\textsc{p-dist}_{\forall_i \wedge_i})\\
 & \langle r,s\rangle[A_X] \rightleftarrows \langle r[A_X], s[A_X]\rangle & (\textsc{p-dist}_{\forall_e \wedge_i})\\
 & \pi_{\forall X.A}(\Lambda X.r) \rightleftarrows \Lambda X.\pi_A r & (\textsc{p-dist}_{\forall_i \wedge_e})\\
\text{si } t:\forall X.(B\wedge C) & (\pi_{\forall X.B} t)[A_X] \rightleftarrows \pi_{[X:=A]B}(t[A_X]) & (\textsc{p-dist}_{\wedge_e \forall_e})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{Si } s:A,\ (\lambda x^A.r)s \hookrightarrow [x:=s]r & (\beta_\lambda)\\
\text{Si } r:A,\ \pi_A(\langle r,s\rangle) \hookrightarrow r & (\pi)\\
(\Lambda X.r)[A_X] \hookrightarrow [X:=A]r & (\beta_\Lambda)
\end{array}
$$

$$
\frac{t \rightleftarrows r}{\lambda x^A.t \rightleftarrows \lambda x^A.r} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{ts \rightleftarrows rs} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{st \rightleftarrows sr} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{\langle t,s\rangle \rightleftarrows \langle r,s\rangle} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{\langle s,t\rangle \rightleftarrows \langle s,r\rangle} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{\pi_A t \rightleftarrows \pi_A r}
$$

$$
\frac{t \rightleftarrows r}{\Lambda X.t \rightleftarrows \Lambda X.r} \quad \frac{t \rightleftarrows r}{t[A_X] \rightleftarrows r[A_X]}
$$

$$
\frac{t \hookrightarrow r}{\lambda x^A.t \hookrightarrow \lambda x^A.r} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{ts \hookrightarrow rs} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{st \hookrightarrow sr} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{\langle t,s\rangle \hookrightarrow \langle r,s\rangle} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{\langle s,t\rangle \hookrightarrow \langle s,r\rangle} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{\pi_A t \hookrightarrow \pi_A r}
$$

$$
\frac{t \hookrightarrow r}{\Lambda X.t \hookrightarrow \Lambda X.r} \quad \frac{t \hookrightarrow r}{t[A_X] \hookrightarrow r[A_X]}
$$

Figura 6. Relaciones que definen la semántica operacional de Sistema I Polimórfico

La regla $(\textsc{p-comm}_{\forall_e \Rightarrow_i})$ es consecuencia del isomorfismo (6). Por ejemplo, el término $(\lambda x^{\forall X.(X\Rightarrow X)}.x)[A_X](\Lambda X.\lambda x^X.x)$, está bien tipado. Notamos con $\mathbb{X}$ al tipo $\forall X.(X \Rightarrow X)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\lambda x^{\mathbb{X}}.x : \mathbb{X} \Rightarrow \mathbb{X}}{\lambda x^{\mathbb{X}}.x : \forall Y.\mathbb{X} \Rightarrow (Y \Rightarrow Y)}\ (\equiv)}{(\lambda x^{\mathbb{X}}.x)[A_X] : \mathbb{X} \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\ (\forall_e) \qquad \Lambda X.\lambda x^X.x : \mathbb{X}}{((\lambda x^{\mathbb{X}}.x)[A_X])(\Lambda X.\lambda x^X.x) : A \Rightarrow A}\ (\Rightarrow_e)
$$

La reducción ocurre como sigue:

$$
\begin{array}{l}
(\lambda x^{\forall X.(X\Rightarrow X)}.x)[A_X](\Lambda X.\lambda y^X.y) \ \rightleftarrows_{(\textsc{p-comm}_{\forall_e \Rightarrow_i})}\\
\quad (\lambda x^{\forall X.(X\Rightarrow X)}.x[A_X])(\Lambda X.\lambda y^X.y) \ \hookrightarrow_{\beta_\lambda} \ (\Lambda X.\lambda y^X.y)[A_X] \ \hookrightarrow_{\beta_\Lambda} \ \lambda y^A.y
\end{array}
$$

La reglas ($\text{P-DIST}_{\forall_i\wedge_i}$) y ($\text{P-DIST}_{\forall_i\wedge_e}$) son consecuencia del isomorfismo (7). Por ejemplo, el término $\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,t\rangle)$ está bien tipado:

$$\dfrac{\dfrac{\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,t\rangle : \forall X.((X\Rightarrow X)\wedge A)}{\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,t\rangle : (\forall X.(X\Rightarrow X))\wedge(\forall X.A)}\,(\equiv)}{\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,t\rangle) : \forall X.(X\Rightarrow X)}\,(\wedge_e)$$

Las siguientes son dos reducciones alternativas de dicho término:

$$\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,t\rangle) \rightleftarrows_{(\text{P-DIST}_{\forall_i\wedge_i})} \pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}\langle\Lambda X.\lambda x^X.x,\Lambda X.t\rangle \hookrightarrow_\pi \Lambda X.\lambda x^X.x$$

$$\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,t\rangle) \rightleftarrows_{(\text{P-DIST}_{\forall_i\wedge_e})} \Lambda X.\pi_{X\Rightarrow X}\langle\lambda x^X.x,t\rangle \hookrightarrow_\pi \Lambda X.\lambda x^X.x$$

Otra consecuencia del isomorfismo (7) es la regla ($\text{P-DIST}_{\forall_e\wedge_i}$), para la cual podemos considerar el siguiente ejemplo:

$$\langle\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^A.t,\ \Lambda X.\lambda x^X.\lambda z^B.r\rangle[C_X]$$

el cual está bien tipado. Por simplicidad, asumimos $t : D$ y $r : E$ con $X \notin FTV_A(D)\cup FTV_A(E)$:

$$\dfrac{\dfrac{\langle\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^A.t,\ \Lambda X.\lambda x^X.\lambda z^B.r\rangle : \forall X.(X\Rightarrow A\Rightarrow D)\wedge\forall X.(X\Rightarrow B\Rightarrow E)}{\langle\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^A.t,\ \Lambda X.\lambda x^X.\lambda z^B.r\rangle : \forall X.((X\Rightarrow A\Rightarrow D)\wedge(X\Rightarrow B\Rightarrow E))}\,(\equiv)}{\langle\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^A.t,\ \Lambda X.\lambda x^X.\lambda z^B.r\rangle[C_X] : (C\Rightarrow A\Rightarrow D)\wedge(C\Rightarrow B\Rightarrow E)}\,(\forall_e)$$

La reducción ocurre como sigue:

$$\langle\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^A.t,\ \Lambda X.\lambda x^X.\lambda z^B.r\rangle[C_X] \rightleftarrows_{(\text{P-DIST}_{\forall_e\wedge_i})} \langle(\lambda x^X.\lambda y^A.t)[C_X],(\lambda x^X.\lambda z^B.r)[C_X]\rangle \hookrightarrow_{\beta_\Lambda} \langle\lambda x^C.\lambda y^A.t,\ \lambda x^C.\lambda z^B.r\rangle$$

Finalmente, la regla ($\text{P-DIST}_{\wedge_e\forall_e}$), también consecuencia del mismo isomorfismo, nos permite considerar el siguiente ejemplo:

$$(\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle))[A_X]$$

el cual también está bien tipado. Asumiendo $r : C$, tenemos la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle : \forall X.((X\Rightarrow X)\wedge C)}{\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle : (\forall X.(X\Rightarrow X))\wedge(\forall X.C)}\,(\equiv)}{\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle) : \forall X.(X\Rightarrow X)}\,(\wedge_e)}{(\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle))[A_X] : A\Rightarrow A}\,(\forall_e)$$

La reducción ocurre como sigue:

$$(\pi_{\forall X.(X\Rightarrow X)}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle))[A_X] \rightleftarrows_{(\text{P-DIST}_{\wedge_e\forall_e})} \pi_{A\Rightarrow A}(\Lambda X.\langle\lambda x^X.x,r\rangle[A_X]) \hookrightarrow_{\beta_\Lambda} \pi_{A\Rightarrow A}\langle\lambda x^A.x,[X:=A]r\rangle \hookrightarrow_\pi \lambda x^A.x$$

4. Conclusión

En este paper hemos presentado una extensión a Sistema I a tipos polimórficos, extendiendo el número de isomorfismos a considerar y, en consecuencia, extendiendo la equivalencia entre términos del lenguaje.

Este es un trabajo en progreso, y como tal, aún estamos desarrollando las pruebas de corrección (preservación de tipos y normalización fuerte). Además, como trabajo a futuro planeamos extender la implementación presentada por Díaz-Caro y Martínez López [4] con las construcciones introducidas aquí.

Referencias

1. Barendregt, H.: The lambda calculus: its syntax and semantics, Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 103. Nord-Holland (1981)
2. Di Cosmo, R.: Isomorphisms of types: from λ-calculus to information retrieval and language design. Progress in Theoretical Computer Science, Birkhauser (1995)
3. Díaz-Caro, A., Dowek, G.: Proof normalisation in a logic identifying isomorphic propositions. In: Proceedings of FSCD 2019. LIPIcs, vol. 131, pp. 14:1–14:23. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik (2019)
4. Díaz-Caro, A., Martínez López, P.E.: Isomorphisms considered as equalities: Projecting functions and enhancing partial application through an implementation of λ^+. In: Proceedings of IFL'15. pp. 9:1–9:11. ACM (2015)
5. Girard, J.Y.: Une extension de l'interpretation de Göedel à l'analyse, et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types. In: Proceedings of the second Scandinavian logic symposium. pp. 63–92 (1971)