NUEVO METODO PARA LA DETERMINACION DE LA FORMULA INTERPOLATORIA DE HARTMANN

Boris Kucewicz
(Observatorio Astronómico, La Plata)

En el año 1898 Hartmann[1] propuso la siguiente fórmula interpolatoria para relacionar las lecturas de las líneas espectrales (s_n) y las longitudes de onda (λ_n) de estas mismas líneas:

$$s_n - s_o = \frac{c}{(\lambda_n - \lambda_o)^{\alpha}} \tag{1}$$

donde s_o, c, λ_o y α son constantes a determinar. En el caso particular de $\alpha = 1$ las constantes se determinan por el siguiente sistema de fórmulas:

$$\lambda_o = \lambda_1 - \frac{c}{s_1 - s_o} = \lambda_2 - \frac{c}{s_2 - s_o} = \lambda_3 - \frac{c}{s_3 - s_o} \tag{2}$$

$$c = \frac{(s_3 - s_o)(s_1 - s_o)(\lambda_1 - \lambda_3)}{s_3 - s_1} \tag{3}$$

$$s_o = \frac{s_1(\lambda_1 - \lambda_2)(s_3 - s_2) - s_3(\lambda_2 - \lambda_3)(s_2 - s_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(s_3 - s_2) - (\lambda_2 - \lambda_3)(s_2 - s_1)} \tag{4}$$

obsérvese que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ y $s_1 > s_2 > s_3$.

Cuando se desea utilizar el caso general ($\alpha \neq 1$) el cálculo se hace muy engorroso. Por ejemplo, Eberhard[2] en el año 1907 determinó para una serie de valores de α los valores de las constantes s_o, λ_o y c. Adoptó como valor final de α aquel que produce los residuos menores entre las lecturas "calculadas" y las "leídas".

En el año 1917 Hartmann[3] dió dos reglas que alivian algo la búsqueda por tanteo de los valores de las constantes, pero de todos modos la solución del problema es muy dificultosa. Al intentar determinar el valor exacto de α por las dos reglas de Hartmann, el autor de este trabajo ideó un método muy sencillo que expone a continuación.

Se parte de la expresión de la derivada $\frac{d\lambda}{ds} = D$, donde D es la dispersión. De la fórmula (1), como es facil ver:

$$D_n = -\frac{\lambda_n - \lambda_o}{\alpha(s_n - s_o)}, \qquad n = 1;\ 2;\ 3 \tag{5}$$

que permite determinar:

$$\alpha = -\frac{\lambda_n - \lambda_o}{D_n(s_n - s_o)} \tag{6}$$

si se conocen los correspondientes valores de D_n.

La expresión (1) se transforma en la ecuación:

$$s_n - s_o = -\frac{\lambda_n - \lambda_o}{\alpha D_n} \tag{7}$$

donde s_o, λ_o y α son constantes a determinar.

Si se suponen conocidos en tres puntos del espectro los valores: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$; $s_1 > s_2 > s_3$; $|D_1| < |D_2| < |D_3|$, resulta fácil deducir los valores de α, λ_o y s_o mediante transformaciones elementales. En efecto:

$$\alpha = -\frac{1}{D_1}\frac{\lambda_1 - \lambda_o}{s_1 - s_o} = -\frac{1}{D_2}\frac{\lambda_2 - \lambda_o}{s_2 - s_o} = -\frac{1}{D_3}\frac{\lambda_3 - \lambda_o}{s_3 - s_o} \tag{8}$$

$$\lambda_o = \frac{\lambda_1 D_2(s_2 - s_o) - \lambda_2 D_1(s_1 - s_o)}{D_2(s_2 - s_o) - D_1(s_1 - s_o)} \tag{9}$$

$$\lambda_o = \frac{\lambda_1 D_3(s_3 - s_o) - \lambda_3 D_1(s_1 - s_o)}{D_3(s_3 - s_o) - D_1(s_1 - s_o)} \tag{10}$$

$$s_o = \frac{s_1 D_1(\lambda_2 - \lambda_3) + s_2 D_2(\lambda_3 - \lambda_1) + s_3 D_3(\lambda_1 - \lambda_2)}{D_1(\lambda_2 - \lambda_3) + D_2(\lambda_3 - \lambda_1) + D_3(\lambda_1 - \lambda_2)} \tag{11}$$

Un control directo y necesario del sistema de fórmulas: (8), (9),(10) y (11) se obtiene haciendo $\alpha = 1$ con lo que al cabo de algunas transformaciones algebraicas se reencuentra el sistema: (2),(3) y (4) de la fórmula de Hartmann como era de esperar.

Además, de la fórmula (6) podemos deducir que si un espectrógrafo tiene, por ejemplo, tres prismas y por consiguiente gran dispersión, tendrá un α menor que el espectrógrafo de un prisma, si todos los prismas están construidos con el mismo material y tienen las mismas características. Esta deducción se halla comprobada por los valores de α obtenidos para distintos espectrógrafos[4].

Un comentario especial debe hacerse con respecto a la determinación de la dispersión. Habitualmente la dispersión se determina como cociente de diferencias: $D_n = \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta s}\right)_n$ con $\Delta\lambda$ del orden de 35 a 40 Å . Para dispersiones del orden de 18 Å/mm para H_γ la pequeñez del intervalo $\Delta\lambda$ no permite determinar D con mucha exactitud, motivo por el cual conviene utilizar un artificio que hace uso del hecho de que la variación de la dispersión con λ es casi lineal. Conviene siempre representar graficamente $|D| = f(\lambda)$ para elegir el orden del intervalo de $\Delta\lambda$ tal que la curva de dispersión no tenga discontinuidades.

Consideremos tres líneas cercanas: λ_A; λ_B; λ_C (con $\Delta\lambda$ del orden de 35 a 40 Å) y sus respectivas lecturas. Se tendrá entonces:

$$D'_A = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{s_B - s_A} \quad ; \quad D'_B = \frac{\lambda_C - \lambda_B}{s_C - s_B} \tag{12}$$

que dan las dispersiones correspondientes a las longitudes de onda:

$$\lambda'_A = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} \qquad \lambda'_B = \frac{\lambda_B + \lambda_C}{2} \tag{13}$$

Si se admite que la dispersión varía linealmente en el intervalo, es fácil mostrar que:

$$D_A = D'_A - \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_C - \lambda_A}\,(D'_B - D'_A) \tag{14}$$

$$D_B = D'_A + \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_C - \lambda_A}(D'_B - D'_A) \qquad (15)$$

$$D_C = D'_B + \frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C - \lambda_A}(D'_B - D'_A) \qquad (16)$$

A continuación se da un ejemplo numérico basado en datos del promedio de las lecturas de 40 placas obtenidas con el espectrógrafo Hussey de La Plata, con la cámara de 18 Å/mm en H_γ :

Determinamos la dispersión para tres líneas del espectro, aplicando las fórmulas (12), (14), (15) y (16):

	λ	s	D
1)	4071,740	97,1445	- 13,37
	4107,492	94,5260	
	4147,673	91,7090	
2)	4294,128	82,4515	
	4337,049	80,0000	- 17,89
	4375,932	77,8680	
3)	4459,121	73,5770	
	4494,568	71,8510	
	4528,619	70,2485	- 21,60

Determinamos las constantes: s_o, λ_o y α aplicando las fórmulas: (11),(9), (10) y (8) a los datos:

λ_1 = 4071,740 $\quad s_1$ = 97,1445 $\quad D_1$ = - 13,37

λ_2 = 4337,049 $\quad s_2$ = 80,0000 $\quad D_2$ = - 17,89

λ_3 = 4528,619 $\quad s_3$ = 70,2485 $\quad D_3$ = - 21,60

se obtiene:

s_o = - 21,1032 $\quad \lambda_o$ = 2230,162 $\quad \alpha$ = 1,1648393

λ_o = 2230,162 $\quad \alpha$ = 1,1648393

α = 1,1648393

Cuando es necesario reducir un gran número de placas en las cuales se determina la velocidad radial con un mismo conjunto de líneas, es habitual usar una tabla de reducción auxiliar, que da para cada línea de la estrella (suponiendo que ella tenga velocidad radial cero) la lectura "calculada". De lo expuesto se ve inmediatamente como se debe proceder.

Con la (5) se calculan las dispersiones para las líneas del hierro más cercanas a cada línea de la estrella, con la fórmula (15) la dispersión para cada línea del espectro estelar y con la (7) finalmente se determina las "lecturas calculadas", con las cifras decimales necesarias.

Cabe mencionar que el error cuadrático medio de la velocidad radial, determinada con la aplicación de los valores de las constantes obtenidas, resulta un 30 ó 50% menor que cuando se efectúa la reducción de la placa con la aplicación habitual de la fórmula de Hartmann $(\alpha = 1)$.

Bibliografía.

1) Hartmann J., Publ. Potsdam, nº 42, 1898.
2) Eberhard G., Publ.Potsdam, nº 54, 1907.
3) Eberhard G., Handbuch der Astrophysik, Tomo 1, p. 355, 1933.
4) Eberhard G., Handbuch der Astrophysik, Tomo 1, p. 357, 1933.

Summary.

A NEW METHOD FOR THE DETERMINATION OF HARTMANN'S FORMULA

This method permits to determine easily the constants of the Hartmann's formula making use of the equations (8), (9), (10) and (11) of this paper. Specially interesting is the point that the exponent α can be determined accurately. A numerical example is given.