EL EFECTO SUSTITUCION DENTRO DE LA ECUACION DE SLUTSKY Y EL NIVEL DE UTILIDAD. ENFOQUE FINITO*.

HORACIO E. CEJAS **

1. Introducción.

Slutsky, en 1915, y luego Hicks y Allen, en 1934, presentaron su ecuación sobre los efectos del cambio de un precio con renta constante.

Desde entonces, sólo algún autor -recordamos a Alpha Chiang, 5, págs. 370 a 373- se ha limitado a describir el informe cualitativo que brindan la ecuación y el sistema del cual se deriva.

La mayoría, en cambio, avanzando en el campo finito, ha destacado, además, dos interpretaciones de que, según se afirma, es susceptible el término sustitución de la ecuación (Cf. Ellis, 6, Secc. 5), o se ha enrolado en alguna de ellas.

Teniendo en cuenta que el sistema sirve también para aproximar, pensamos que esta supuesta validez de dos interpretaciones, que conducirían a resultados diferentes, no debía prevalecer.

Esto nos llevó, dado que el proceso de cambio es, en la realidad, naturalmente finito, a seguir la sugerencia de examinarlo desde este ángulo para establecer cuál de ambas, o quizás una tercera, es la interpretación que corresponde.

Para ello hemos trabajado con un pequeño conjunto de funciones de utilidad y hemos integrado, entre límites, las derivadas que expresan los efectos sustitución y renta.

* En este trabajo no se tratan correspondencias de demanda. Sobre el particular puede consultarse Olivera, Julio H. G., Preferencias Subdiferenciables, en Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 29, 1984.

** Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Buenos Aires.

Agradecemos al profesor Dr. Julio H. G. Olivera sus importantes sugerencias y comentarios a la versión preliminar de este trabajo, al igual que al Dr. Omar Chisari sus útiles observaciones, y al Lic. José M. Giúdice su colaboración como ayudante de investigación.

La investigación realizada ha demostrado que la información que proporciona el enfoque local no autoriza a sostener, para el caso finito, que en virtud del efecto sustitución de la ecuación el consumidor permanece en forma estable en el mismo nivel de utilidad o que accede en igual forma a uno superior. Ambas tésis, como veremos, deben desecharse.

2. La ecuación de Slutsky y el contexto de maximización de la utilidad con una renta dada.

Cuando cambia un precio permaneciendo la renta constante, la ecuación de Slutsky es el instrumento matemático que destaca claramente en sus dos términos los dos efectos que, obrando simultaneamente, intervienen para modificar las adquisiciones que realiza el consumidor, de forma de volver a maximizar su utilidad. Estos efectos son: el de los precios relativos, cuya evaluación cualitativa o cuantitativa surge del término "sustitución", y el efecto del "sobrante" o "faltante" de renta con el que se encuentra el consumidor - a raíz del nuevo precio y la constancia del ingreso- si compara con su situación anterior; la evaluación de este segundo efecto surge del término "renta".

La ecuación se obtiene, como sabemos, del sistema que se logra derivando o diferenciando totalmente el sistema estructural que permitió encontrar el equilibrio maximizando la utilidad, dado un cierto vector de precios y la restricción de una renta dada[1].

Ello nos recuerda que las cantidades de equilibrio que se manejan y la utilidad marginal del ingreso -respuestas de la maximización-, son funciones de los precios y la renta. Este antecedente, de la mayor importancia, no debe perderse de vista al tratar la ecuación, en cuyo término sustitución figura el valor de equilibrio de la utilidad marginal del ingreso, y en cuyo término renta figura la cantidad de equilibrio del bien cuyo precio varió. Cuando se integre, en las expresiones simbólicas desarrolladas que reemplazarán a los símbolos de la utilidad marginal de la renta y de la cantidad del bien aparecerán como variables o como constantes aquellas magnitudes que en la maximización previa revistieron igual carácter.

Esta misma circunstancia desvirtúa el argumento que se invoca a menudo en apoyo de que el término sustitución mide la reacción ante

1 Ambos sistemas se exponen sucintamente para dos bienes en la Sección 6.

el cambio de precio permaneciendo la utilidad constante, y que se basa en que, derivando por segunda vez el sistema que permite, dado un vector de precios, minimizar la renta conservando un cierto nivel de utilidad, se llega a la misma expresión que consigna el término sustitución (Lancaster, 10, págs. 79 a 81; Mosak, 12, pág. 70, nota 3). Indicando con "x" e "y" las cantidades de los bienes y con "p" y "q" los precios respectivos, como en la exposición que se hace más adelante, dentro de este contexto minimizador se escribe:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{U = \text{cte.}} = \frac{\bar{\lambda} D_{11}}{D} \quad ó \quad \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)_{U = \text{cte.}} = \frac{\bar{\lambda} D_{21}}{D}$$

según sea el propio precio o el del otro bien el que cambia; y análogamente para el bien Y.

El aditamento U = cte. es indicativo de que el nivel de utilidad se mantiene para cambios de precio no necesariamente infinitesimales, como son los que ocurren en la realidad.

De las expresiones transcriptas se infiere que el accionar del término sustitución, que reconocemos en el segundo miembro, deja invariante la utilidad. Sin embargo la coincidencia es sólo local, pues si bien el factor $\frac{D_{11}}{D}$ ó $\frac{D_{21}}{D}$ es el mismo que aparece en el término sustitución y es también el mismo el valor del lambda de equilibrio que figura en las derivadas, la coincidencia desaparece cuando ante un cambio finito la integración pone de relieve que el lambda que tiene como antecedente la minimización es función de los precios y la utilidad, en tanto que el que procede de la maximización es función de los precios y la renta. En el caso de una función específica las expresiones simbólicas desarrolladas del lambda son reflejo del proceso de optimización del cual surgió y, naturalmente, no concuerdan[2].

3. Sobre el tratamiento del problema y algunos resultados.

Efectuada la integración entre límites de los efectos sustitución y renta, se verificó que las sumas de estas expresiones a las respectivas cantidades de equilibrio conducía a una expresión idéntica a la que resulta de la maximización con la renta constante y el nuevo precio.

2 En la función U (x, y) = xy tendríamos, como expresión del lambda de equilibrio, cuando varía p, en la maximización: $\bar{\lambda} = R_o/2pq_o$, y en la minimización: $\bar{\lambda} = \sqrt{U^o/pq_o}$. Esta última expresión se convierte, usando la equivalencia del equilibrio anterior $U^o = R^2_o/4p_oq_o$, en: $\bar{\lambda} = R_o/2q_o \sqrt{p_op}$.

Luego se comparó con el nivel de utilidad inicial, el nivel de utilidad de la combinación que resulta de sumar los incrementos que proporciona la integración definida de los efectos sustitución a las cantidades de equilibrio primitivas, y esta prueba y la de comparar con la renta primitiva el costo de la combinación aludida a los precios viejos, y con la renta ajustada por Laspeyres, el costo a los precios nuevos, permitieron delimitar la zona a la que conduciría el efectos sustitución **si pudiera aislarse** (Véase secciones 6.1 a 6.4).

Además, siendo opinión prevaleciente en la doctrina que el término sustitución de la ecuación de Slutsky nos dá el efecto sobre la cantidad demandada de un bien cuando el cambio de precio se compensa con un ajuste de la renta de la medida necesaria para conservar el ingreso real, y siendo que sobre este tópico hay dos interpretaciones[3], se procedió, atendiendo a cada una de ellas, a obtener las expresiones simbólicas de las cantidades de los bienes a que conduce:

1) maximizar la utilidad con el nuevo precio y la renta ajustada según la variación de Laspeyres; esta expresión la denominamos "función punto de Slutsky"; y
2) minimizar la renta con el nuevo precio manteniendo el nivel de utilidad primitivo; la denominamos "función punto de Hicks".

La derivación de estas expresiones con respecto al precio y su comparación con la respectiva expresión del término sustitución puso en

3 Para unos la conservación del ingreso real depende de que la renta se ajuste de forma que, con el nuevo precio, subsista la posibilidad de adquirir la combinación primitiva (lo que, sin embargo, el consumidor no hará, pues optimizará en una curva superior). Este ajuste fue denominado por Hicks "variación de Laspeyres" (Hicks, 9, pág. 128) y la posición reseñada se conoce como interpretación "en el sentido de Slutsky". Esta denominación resulta apropiada porque refleja el pensamiento de este autor (1, págs. 14 y 15).
Para otros el ingreso real se conserva cuando la combinación que demanda el consumidor con el nuevo precio y la renta ajustada pertenece a la curva de indiferencia primitiva, es decir, cuando el nivel de utilidad se mantiene constante. El ajuste que en este caso se practica fue denominado por Hicks "variación compensadora de la renta" (Hicks, 9, pág. 127), y esta posición se conoce como interpretación "en el sentido de Hicks". Cabe destacar que, no obstante la denominación que se le ha dado, si bien Hicks en forma literaria y gráfica (2, págs. 27 y 28) y sin aludir a la ecuación de Slutsky, describe el accionar de los precios relativos como un movimiento sobre una curva de utilidad dada, en el apéndice matemático de su obra (2, págs. 379 y 380) después de obtener por derivación del sistema estructural la ecuación de Slutsky, a la que llama "Ecuación Fundamental de la Teoría del Valor", dice: ". . . se sigue de la ecuación que el término sustitución representa el efecto sobre la demanda de x_s de un cambio en el precio de x_r **combinado con un cambio en el ingreso que permita al consumidor, si lo desea, comprar las mismas cantidades que antes de todas las mercancías a pesar del cambio en p_r"**.

evidencia que difieren en su estructura (al menos en una de las coordenadas); por lo tanto, su comportamiento al integrar ha de ser diferente, lo que no obsta para que, evaluadas en el óptimo, tengan el mismo valor (Véase Sección 6).

Como dijimos, la doctrina acepta la interpretación "en el sentido de Slutsky" (Schultz, 15, págs. 40 y sigtes.) o la interpretación "en el sentido de Hikcs" (Lancaster, 10, págs. 80 y 81; Malinvaud, 11, págs. 51 a 53; Quirk, 13, pág. 74 y sigtes.; Samuelson, 14, págs. 104 y 105; Varian 17, págs. 112 a 114) o menciona ambas (Allen, 3 págs. 750 a 759; Baumol, 4, págs. 193 y sigtes.; Fernández Pol, 7, págs. 316 y 317; Henderson y Quandt, 8, págs. 25 y sigtes.; Mosak, 12, págs. 69 y sigtes.; Yokoyama, 17, págs. 273 y sigtes.), y se destaca que, si bien ante un cambio finito de precios conducirían a resultados diferentes, cuando el cambio sea infinitesimal las soluciones diferirán en un infinitésimo de orden superior (Mosak, 12, pág. 73). Evidentemente esto es así porque, como veremos al analizar la "función punto de Hicks" y la "función punto de Slutsky", que se derivan precisamente de las interpretaciones aludidas, las derivadas de ambas con respecto al precio, evaluadas en el óptimo, coinciden en valor.

4. Sistema del que se deduce la ecuación de Slutsky.

El sistema brinda información cualitativa cuando cambian una o varias variables relacionadas, y permite aproximar en los mismos casos, aunque no estén relacionadas. Cuando el cambio es finito y en una variable, cabe integrar directamente las expresiones que proporciona el sistema, y cuando lo es en más de una se definirá un camino que asigne como límite inferior de la integración, a todas las variables, los valores del óptimo primitivo, que son los que el sistema proporciona; el artificio reflejaría, así, la simultaneidad de los cambios, en concordancia con la naturaleza del proceso. Es el procedimiento a seguir en la variación compensada de precio.

5. Gráficos

Sugerimos los siguientes gráficos que ponen de resalto la simultaneidad señalada:

Cambio de un precio con renta constante[4]

El diagrama 1 refleja aproximadamente el comportamiento de

4 A diferencia de la generalidad de los autores que grafican el problema en forma secuencial, Varian (16, pág. 114, fig. 3.10) ofrece un gráfico similar a nuestro gráfico 1, aunque ubica los vectores de acuerdo con su exposición, a nuestro juicio errónea.

las variables en la función de utilidad $U(x, y) = xy - 2y$, al bajar el precio del bien X y permanecer la renta constante. R_o es la renta primitiva cuya tangencia con la curva de indiferencia U^0 da lugar al equilibrio inicial: 1. La caida del precio permite alcanzar un nivel de utilidad más alto, U', en el lugar en que éste resulta tangente a R' -renta de igual monto que R_o pero que exhibe los nuevos precios- : es el nuevo óptimo 2.

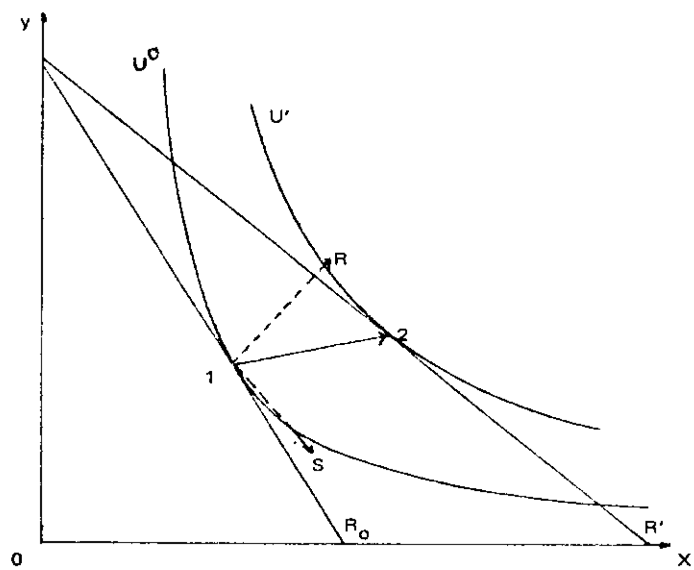

Gráfico 1

S: El extremo del vector señala la combinación de bienes a que conduciría el efecto sustitución si tuviera existencia independiente; no es posición de equilibrio.

R: El extremo del vector señala la combinación de bienes a que conduciría el efecto renta si tuviera existencia independiente; tampoco es posición de equilibrio.

2: El extremo del vector suma señala la combinación resultante de los dos efectos señalados: es el efecto total del cambio de precio con renta constante, que constituye un nuevo óptimo.

Variación compensada de precio

Supondremos que la renta se ajusta según la variación de Laspeyres. Esta renta, que incorpora el nuevo precio y cuyo monto es igual a $R_o + \bar{x}\ \Delta p$, se indica con RL.

El diagrama debe incluir no sólo los tres vectores anteriores sino dos más: el V, que señala el punto a que llevaría el cambio en la renta -que, aunque busca compensar el efecto renta de la baja en el precio, no lo logra totalmente- y el vector que resulta de sumarlo con 2 (que, como sabemos, resume los efectos del cambio de un precio con renta constante). El nuevo vector resultante, que distinguimos con 3, está sobre RL y señala un óptimo, precisamente donde RL hace tangencia con una curva de indiferencia más alta que U.

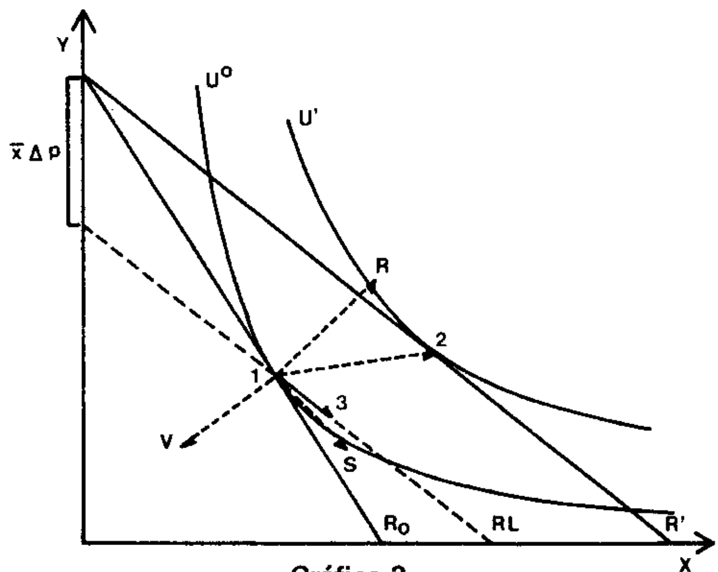

Gráfico 2

6. Ejemplo.

La función de utilidad es $U(x, y) = xy$. Como sabemos, los datos (renta -R- y precios -p, q-) figuran en la ecuación de restricción: $R = px + qy$, y la función objetivo aumentada incluye la tercera variable, λ: $L = xy + \lambda (R - px - qy)$.

El método de Lagrange nos permite llegar al sistema estructural, y luego el de Cramer hallar los valores que maximizan la utilidad con la restricción de una renta dada; esto es:

$$\begin{cases} Lx = & y - \lambda p = 0 \\ Ly = x & -\lambda q = 0 \\ L\lambda = -px - qy + R & = 0 \end{cases} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -p \\ 1 & 0 & -q \\ -p & -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}$$

De aquí resultan: $\overline{x} = \dfrac{R}{2p}$; $\overline{y} = \dfrac{R}{2q}$; $\overline{\lambda} = \dfrac{R}{2pq}$

(La barra sobre el símbolo indica que se trata de un valor de equilibrio).

Diferenciando totalmente el sistema estructural se llega a:

$$\begin{bmatrix} Uxx & Uxy & -p \\ Uyx & Uyy & -q \\ -p & -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} dp \\ \overline{\lambda} dq \\ -dR + \overline{x} dp + \overline{y} dq \end{bmatrix}$$

En el ejemplo que consideramos, la matriz de coeficientes es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -p \\ 1 & 0 & -q \\ -p & -q & 0 \end{bmatrix}$$

Simbolizamos con D su determinante y con D_{11} el cofactor del elemento de la primera fila y primera columna, con D_{12} el del elemento de la primera fila y segunda columna, etc.; y utilizamos el subíndice cero para distinguir aquellas magnitudes que conservan el valor que tenían en el óptimo primitivo.

Entonces, para un cambio en p, tendremos:

$$dx = \frac{\overline{\lambda} D_{11}}{D} dp + \frac{\overline{X} D_{31}}{D} dp = \frac{\overline{\lambda} D_{11}}{D} dp - \overline{x} \frac{\partial x}{\partial R} dp =$$

$$= \frac{\dfrac{R_0}{2p_o q_o} (-q_o^2)}{2p_o q_o} dp - \frac{R_o}{2p_o} \quad \frac{1}{2p_o} dp =$$

$$= \underbrace{-\frac{R_o}{4p_o^2} dp}_{\text{Término Sust.}} \underbrace{- \frac{R_o}{4p_o^2} dp}_{\text{Término Renta}}$$

Y para integrar el término sustitución entre p_0 y p' (siendo p' el nuevo precio), haremos:

$$\int_{p_o}^{p'} dx^{(\text{Sust.})} = - \frac{R_o}{4} \int_{p_o}^{p'} \frac{dp}{p^2} = \frac{R_o}{4} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_o} \right)$$

Un cálculo similar conduce, cuando se trata del bien Y, a:

$$dy = \frac{R_o}{4p_o q_o} dp - \frac{R_o}{4p_o q_o} dp \; ; \; y$$

Término Sustituc. Término Renta

$$\int_{p_o}^{p'} dy^{(\text{Sust.})} = \frac{R_o}{4q_o} \int_{p_o}^{p'} \frac{dp}{p} = \frac{R_o}{4q_o} \ln \frac{p'}{p_o}$$

En la **"función punto de Slutsky"** interviene una nueva renta, cuya expresión es $R = R_0 + x_0 \; \Delta p$; y un nuevo precio $p = p_0 + \Delta p$.

Dada la función de utilidad que estudiamos, las coordenadas del punto de Slutsky serán:

$$\overline{x}^{\text{;Slutsky}} = \frac{R_o + \frac{R_o}{2p^0} (p - p_0)}{2p} = \frac{R_o}{4} \left(\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p} \right)$$

$$\overline{y}^{\text{Slutsky}} = \frac{R_o + \frac{R_o}{2p^0} (p - p_o)}{2q_o} = \frac{R_o}{4q_o} \left(1 + \frac{p}{p_o} \right)$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\overline{x}^{\text{ Slutsky}} \right) = - \frac{R_o}{4p^2} \; ; \; \frac{\partial}{\partial p} \left(\overline{y}^{\text{ Slutsky}} \right) = \frac{R_o}{4p_o q_o}$$

Si bien las derivadas del "término sustitución" y las del "punto de Slutsky" evaluadas en el óptimo, coinciden en valor, y aún las de la coordenada x tienen la misma estructura, no ocurre así con la de la coordenada y, lo que se pone de relieve al integrar:

$$\int_{p_o}^{p'} dy^{\text{Slutsky}} = \int_{p_o}^{p'} \frac{R_o}{4p_o q_o}\, dp = \frac{R_o}{4p_o q_o}\,(p' - p_o)$$

En la **"función punto de Hicks"** , cuando el precio p cambia se minimiza la renta con $U = U^0$. De ese proceso resultan:

$$\overline{x}^{\text{Hicks}} = \sqrt{\frac{q_o U^0}{p}}\ ;\ \overline{y}^{\text{Hicks}} = \sqrt{\frac{pU^0}{q_o}}\ ;\ \overline{\lambda}^{\text{Hicks}} = \sqrt{\frac{U^0}{pq_o}}$$

U^0 puede expresarse en función de R_o:

$$U^0 = \frac{R_o}{2p_o}\ \frac{R_o}{2q_o} = \frac{R_o^2}{4p_o q_o} \quad \text{Entonces:}$$

$$\overline{x}^{\text{Hicks}} = \frac{R_o}{2\sqrt{p_o}}\, p^{-1/2}\ ;\ \overline{y}^{\text{Hicks}} = \frac{R_o}{2q_o\sqrt{p_o}}\, p^{1/2}$$

Derivando estas expresiones se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial p}(\overline{x}^{\text{ Hicks}}) = -\frac{R_o}{4\sqrt{p_o}}\, p^{-3/2}\ ;\ \frac{\partial}{\partial p}(\overline{y}^{\text{Hicks}}) = \frac{R_o}{4q_o\sqrt{p_o}}\, p^{-1/2}$$

Estas derivadas, cuando se da a p el valor p_o, coinciden con el valor que arrojan los términos sustitución en el óptimo $\left(\frac{-R_o}{4p_o^2}\ ;\ \frac{R_o}{4p_o q_o}\right)$ pero esta coincidencia no las identifica con éstos, porque difieren en su estructura.

Efectivamente, si deseamos integrar, deberemos escribir:

$$\int_{p_o}^{p'} dx^{\text{Hicks}} = -\frac{R_o}{4\sqrt{p_o}} \int_{p_o}^{p'} p^{-3/2}\, dp = \frac{R_o}{2\sqrt{p_o}}\left(\frac{1}{\sqrt{p'}} - \frac{1}{\sqrt{p_o}}\right)$$

$$\int_{p_o}^{p'} dy^{\text{ Hicks}} = \frac{R_o}{4q_o\sqrt{p_o}} \int_{p_o}^{p'} p^{-1/2}\, dp = \frac{R_o}{2q_o\sqrt{p_o}}\left(\sqrt{p'} - \sqrt{p_o}\right)$$

6.1. Comparación del nivel de utilidad primitivo con el de la combinación que resultaría de sumar al resultado de la integración definida de los términos sustitución las respectivas cantidades del equilibrio original.

Queremos establecer si hay diferencia entre uno y otro nivel y, en caso afirmativo, cuál es su signo.

Recordando que en la función $U(x, y) = xy$ es[5]:

$$\Delta^s x = \frac{R_o}{4}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_o}\right); \text{ y que: } \Delta^s y = \frac{R_o}{4q_o} \ln \frac{p'}{p_o},$$

escribimos:

$$U\,[(\overline{x} + \Delta^s x), (\overline{y} + \Delta^s y)] - U\,(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}\Delta^s y + \overline{y}\Delta^s x + \Delta^s x\, \Delta^s y =$$

$$= \frac{R_o}{2p_o}\,\frac{R_o}{4q_o} \ln \frac{p'}{p_o} + \frac{R_o}{2q_o}\,\frac{R_o}{4}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_o}\right) +$$

$$+ \frac{R_o}{4}\,\frac{R_o}{4q_o}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_o}\right) \ln \frac{p'}{p_o} =$$

$$= \frac{R_o^2}{8p_o q_o}\left(\ln \frac{p'}{p_o} + \frac{p^0}{p'} - \frac{p^0}{p^0} + \frac{p^0}{2p'} \ln \frac{p'}{p_o} - \frac{p^0}{2p_o} \ln \frac{p'}{p_0}\right)$$

Haciendo $\alpha = \dfrac{p'}{p_o}$, podemos escribir la diferencia así:

$$\frac{R_o^2}{8p_o q_o}\left(\ln \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{2\alpha} \ln\alpha - \frac{1}{2} \ln\alpha\right) =$$

$$= \frac{R_o^2}{8p_o q_o}\left(\frac{\alpha\ln\alpha + 2 - 2\alpha + \ln \alpha}{2\alpha}\right)$$

Como el primer factor es positivo, la nulidad de la diferencia, o su signo, dependerá del segundo. Prescindiendo del primero, llamamos $f(\alpha)$ al segundo, observando que $f(1) = 0$.

Para saber qué ocurre en otros valores de α procedemos a derivar:

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha - 1 - \ln\alpha}{2\alpha^2}.$$ Advertimos que $f'(1) = 0$.

5 Simbolizamos los cambios operados en las cantidades de los bienes por el efecto sustitución con $\Delta^s x$ ó $\Delta^s y$, según el caso.

Para establecer el signo de $f'(\alpha)$, siendo el denominador un cuadrado, nos circunscribimos al numerador que llamamos $g(\alpha)$.

Entonces: $g(\alpha) = \alpha - 1 - \ln \alpha$; siendo $g(1) = 0$ y $g'(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$

De aquí resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha < 1 \Rightarrow g'(\alpha) \text{ negativa} \Rightarrow g(\alpha) \text{ decrece} \\ \alpha > 1 \Rightarrow g'(\alpha) \text{ positiva} \Rightarrow g(\alpha) \text{ crece} \\ \quad \text{y como } g(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g(\alpha) \text{ es siempre} \\ \text{positiva, salvo en} \\ \alpha = 1, \text{ donde se} \\ \text{anula.} \end{array}$$

Lo dicho para $g(\alpha)$ es aplicable a $f'(\alpha)$. En consecuencia, $f'(\alpha)$ es siempre positiva, salvo en $\alpha = 1$, donde se anula pasando por un mínimo. Luego $f(\alpha)$ es creciente, anulándose en $\alpha = 1$, donde pasa por un punto de inflexión horizontal.

Entonces:

para $p' < p_o$, es decir $\alpha < 1$, $f(\alpha)$ es negativa, esto es, la utilidad disminuye;

para $p' > p_o$, es decir $\alpha > 1$, $f(\alpha)$ es positiva, esto es, la utilidad aumenta;

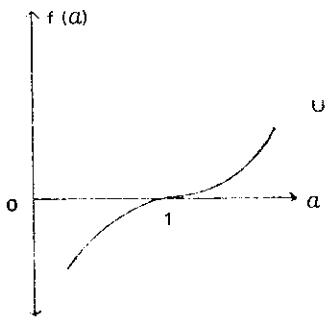

Gráfico 3.a.

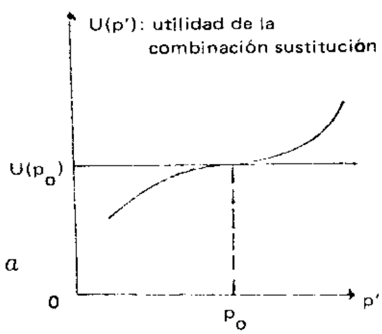

Gráfico 3.b.

y para un cambio infinitesimal a partir de p_o la utilidad es constante.

6.2. Comparación del costo al nuevo precio de la combinación que resulta de la integración de los términos sustitución, más las cantidades de equilibrio, con la renta ajustada por Laspeyres.

Hacemos: $(\bar{x} + \Delta^s x)\,p' + (\bar{y} + \Delta^s y)\,q_o - (\bar{x}p' + \bar{y}q_o) =$

$$= \Delta^s x p' + \Delta^s y q_o = \left[\frac{R_o}{4}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_o}\right)\right] p' + \left[\frac{R_o}{4q_o}\ln\frac{p'}{p_o}\right] q_o =$$

$$= \frac{R_o}{4}\left[1 - \frac{p'}{p_o} + \ln\frac{p'}{p_o}\right]$$

Prescindiendo de $\frac{R_o}{4}$ que es siempre positivo hacemos $\frac{p'}{p_o} = \alpha$ y llamamos $f(\alpha)$ a la expresión entre corchetes; su análisis dirá si hay diferencia y, en su caso, qué signo tiene.

$f(\alpha) = 1 - \alpha + \ln\alpha$; $f(1) = 0$; $f'(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$; $f'(1) = 0$

$\alpha < 1 \Rightarrow f'(\alpha)$ positiva $\Rightarrow f(\alpha)$ crece

$\alpha > 1 \Rightarrow f'(\alpha)$ negativa $\Rightarrow f(\alpha)$ decrece.

pero $f(1) = 0$; luego $f(\alpha)$ será negativa o cero.

La "combinación sustitución" estará por debajo de la renta ajustada por Laspeyres, ante cualquier cambio finito de precio.

6.3. Comparación con R_o del costo de la "combinación sustitución" al precio p^0.

Hacemos: $(\bar{x} + \Delta^s x)\,p_o + (\bar{y} + \Delta^s y)q_o - (\bar{x}p_o + \bar{y}q_o) =$

$$= \Delta^s x p_o + \Delta^s y q_o = \left[\frac{R_o}{4}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_o}\right)\right]p_o + \left[\frac{R_o}{4q_o}\ln\frac{p'}{p_o}\right]q_o =$$

$$= \frac{R_o}{4}\left(\frac{p^0}{p'} - 1 + \ln\frac{p'}{p_o}\right)$$

Prescindiendo de $\frac{R}{4'}$ hacemos $\frac{p'}{p_o} = \alpha$ y llamamos f (α) a la expresión entre paréntesis, que nos dirá si hay diferencia y, en su caso, qué signo tiene.

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - 1 + \ln \alpha; \; f(1) = 0; \; f'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2}$$

$\alpha < 1 \Rightarrow f'(\alpha)$ negativa $\Rightarrow f(\alpha)$ decrece

$\alpha > 1 \Rightarrow f'(\alpha)$ positiva $\Rightarrow f(\alpha)$ crece

pero $f(1) = 0$; luego $f(\alpha)$ será positiva, o cero en $p' = p_o$

La "combinación sustitución" estará por encima de R_o, ante cualquier cambio finito de precio.

6.4. Zona en que se ubicaría la "combinación sustitución".

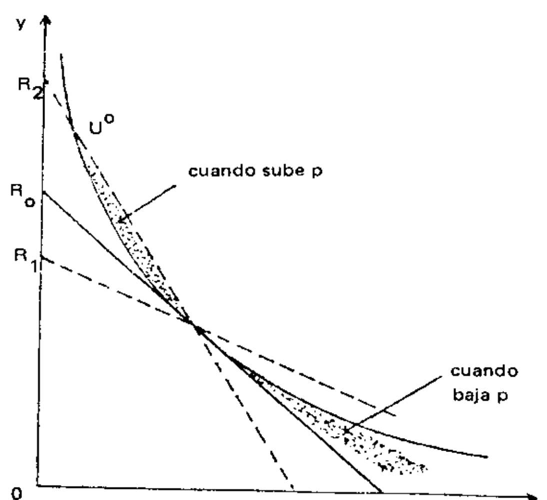

Gráfico 4

R_1 y R_2 : rentas ajustadas por Laspeyres.

7. Conclusiones

El estudio realizado nos permite enunciar, como valederas dentro del contexto examinado, las siguientes:

Sólo cabe una interpretación para el término sustitución de la ecuación: es la que surge del proceso de maximización de la utilidad con una renta dada, a partir del cual Slutsky, y luego Hicks y Allen, creadores de la ecuación, la dedujeron. El término es, pues, extraño a todo contexto minimizador de la renta con utilidad constante y no debe derivarse de él.

Los efectos "sustitución" y "renta" son, en la ecuación, simultáneos y componentes inseparables de un efecto único -el efecto del cambio de un precio con renta constante- y sólo a los fines del análisis pueden ser considerados separadamente. La posición que se alcanzaría con el efecto sustitución solo no sería posición de equilibrio; luego, el accionar del sistema -que es optimizador- no puede producir ese resultado en forma aislada, no obstante los ajustes en el ingreso que pudieran hacerse para eliminar el efecto renta. Ello torna superflua la discusión sobre si el término sustitución conserva o no el nivel de utilidad.

Lo dicho conlleva que la "variación de precio compensada" -que se logra ajustando la renta con vistas a mantener el nivel de utilidad o a conservar la posibilidad de comprar la combinación primitiva-, que sí es posición de equilibrio, no debe confundirse con el efecto del término sustitución, es decir, éste no es la expresión de aquélla.

BIBLIOGRAFIA

1. SLUTSKY, E., "Sulla teoría del bilancio del consumatore", en revista Giornale degli Economisti, julio 1915.

2. HICKS, J.R., Valor y Capital, Fondo de Cultura Económica, 1976.

3. ALLEN, R.G.D., Economía Matemática, Aguilar, 1967.

4. BAUMOL, W.J., Teoría Económica y Análisis de Operaciones, Herrero Hnos., 1970.

5. CHIANG, A.C., Métodos Fundamentales de Economía Matemática, Amorrortu, 1967.

6. ELLIS, D.F., "A Slutsky Equation for Demand Correspondences", Econométrica, Vol. 44, Nro. 4, July 1976.

7. FERNANDEZ POL, J. E., Demanda de los Consumidores, Rancagua, 1967.

8. HENDERSON, J.M. y QUANDT, R.E., Microeconomic Theory, Mc Graw Hill Book Company, 1980.

9. HICKS, J.R., "Consumers Surplus and Index-Numbers", Review of Economics Studies, Vol. 9, Nro. 2.

10. LANCASTER, K., Economía Matemática, Antoni Bosch, 1972.

11. MALINVAUD, E., Lecciones de Teoría Microeconómica, Ariel, 1974.

12. MOSAK, J.L., "On the interpretation of the Fundamental Equation of Value Theory", Studies in Mathematical Economics and Econometrics, O. Lange, Chicago, 1952.

13. QUIRK, J. y SAPOSNIK, R., Introducción a la Teoría del Equilibrio General y a la Economía del Bienestar, Antoni Bosch, 1972.

14. SAMUELSON, P.A., Fundamentos del Análisis Económico, El Ateneo, 1977.

15. SCHULTZ, H., The Theory and Measurement of Demand, Chicago, 1938.

16. VARIAN, H., Análisis Microeconómico, Antoni Bosch, 1980.

17. YOKOYAMA, T., "A Logical Foundation of the Theory of Consumer's Demand", Osaka Economic Papers, Vol. 2, 1953.

EL EFECTO SUSTITUCION DENTRO DE LA ECUACION DE SLUTSKY Y EL NIVEL DE UTILIDAD. ENFOQUE FINITO.

RESUMEN

El "término sustitución" de la ecuación surge **exclusivamente** del sistema que resulta de derivar o diferenciar el sistema estructural de maximización de la utilidad con renta constante; luego, es extraño a todo contexto minimizador de la renta con utilidad constante, del que resulta una expresión aparentemente idéntica.

En las funciones de utilidad examinadas resultó que, como el sistema es optimizador y la posición a que llevaría el efecto sustitución no sería de equilibrio, no podría lograrse -ajustando el ingreso para eliminar el efecto renta- que aquella quedase como solución final del cambio producido. Luego, la "variación de precio compensada" -equilibrio obtenido ajustando la renta para mantener la utilidad o la posibilidad de comprar la combinación primitiva- no debe confundirse con el efecto sustitución.

THE SLUTSKY EQUATION: SUBSTITUTION EFFECT AND UTILITY LEVEL – A FINITE APPROACH.

SUMMARY

The "substitution term" of the equation results **exclusively** from the system obtained by derivating or differentiating the structural system of utility maximization with constant income; then, the "substitution term" is foreing to any income-minimizing situation with constant utility, from which results an apparently identical expression with the "substitution term".

In those utility functions examined was found that, given the optimizing nature of the system and that the position to which the substitution effect would lead would not be one of equilibrium, it would not be possible -by adjusting the income in order to eliminate the income effect- to keep such a position as the final solution to the affected change. Hence, the "price-compensating variation" - equilibrium obtained as a result of adjusting the income so as to keep the same utility or the possibility of buying the "old" bundle of goods- must not be confused with the substitution effect.