Económica, La Plata, Vol. XXXIV, Nro. 2, Julio-Diciembre 1988

TEORIA DE CARTERAS Y DE LA INTERMEDIACION FINANCIERA*

GUILLERMO ESCUDE**

I. Introducción

Este trabajo se propone hacer accesible en el idioma español una reseña de la extensa literatura sobre la teoría de carteras y la teoría de los intermediarios financieros. Se pone énfasis en la modelización matemática de los fenómenos vinculados con la incertidumbre sobre el futuro que se encuentran en el área de las finanzas.

El instrumental matemático utilizado, si bien es elemental, requiere cierta familiaridad con el análisis y con el cálculo de probabilidades. No obstante, se ha procurado también darle al trabajo cierto valor didáctico en lo matemático, por lo cual se ha optado por incluir todos los pasos intermedios posibles en los desarrollos, lo cual puede tornar la lectura pesada para el lector que tiene entrenamiento matemático.

Por supuesto, debe enfatizarse que aquí se hace una selección a partir de una cantidad muy extensa de materiales, de manera que el trabajo no pretende ser exhaustivo. Como toda selección, ésta está sesgada por las preferencias e intereses del autor. No se encontrará en la reseña prácticamente referencia alguna sobre el desarrollo histórico de la teoría. Además, las referencias a los diversos trabajos en los que se fue perfeccionando los diversos modelos son escasos. Se prefirió citar algunos trabajos pioneros y, sobre todo en el caso de los temas tratados en las partes III y IV, algunas reseñas de la literatura anglosa-

(*) Este trabajo se realizó en el marco del convenio BID/ITDT ATN/TF2312-RE

(**) Instituto Torcuato Di Tella y CONICET.

jona que fueron utilizadas libremente para la confección de esta reseña y donde se pueden encontrar referencias bibliográficas extensas.

El trabajo tiene la siguiente estructura. La sección II expone la teoría de carteras de Markowitz, prestando mayor atención al caso de una cartera formada por dos activos riesgosos. Se expone también el caso de un activo riesgoso y uno exento de riesgo, que se utiliza luego en la sección III. Se ve también en forma somera el caso de más de dos activos. En la sección III se expone la teoría de la intermediación financiera de Pyle. También se aplica la teoría de carteras al caso de un banco que efectúa préstamos riesgosos. En la última sección se analiza los problemas de decisión de los intermediarios financieros en lo que hace a la liquidez y la solvencia.

La reseña ya fue utilizada como material de lectura en el curso de Dinero y Bancos del Posgrado Regular del Instituto Torcuato Di Tella durante el segundo semestre de 1988. El autor agradece a sus alumnos de dicho curso el señalamiento de diversos errores que se encontraban en el primer borrador de este trabajo. Por supuesto, no los responsabiliza por los restantes.

II. La Teoría de Carteras

1. Incertidumbre y teoría de carteras

La incertidumbre sobre el futuro es una característica fundamental de la vida económica y tiene importancia crucial en la manera en que los agentes económicos deciden mantener su riqueza. La teoría de carteras parte del supuesto que un agente tenedor de riqueza desea, a igualdad de riesgo, el máximo retorno posible sobre su inversión pero no conoce con certeza el rendimiento que cada activo le ha de deparar. Se supone que lo que sí conoce el agente es la distribución de probabilidad conjunta sobre las tasas de retorno de los activos que puede adquirir. Tal conocimiento deriva presumiblemente de la información que posee sobre el comportamiento pasado de esas tasas de retorno.

La distribución de probabilidad conjunta que se toma como dato permite calcular la esperanza matemática (o media) de la tasa de retorno de cada activo así como los momentos superiores. En particular, si la distribución es normal, la esperanza y la matriz de covarianzas describen completamente la distribución. Si la distribución no es normal, se necesita utilizar un enfoque más complejo para modelar la elección de cartera bajo incertidumbre. Un enfoque tal es el de la "preferencia sobre los estados de la naturaleza" (state-preference) y se basa en la teoría de la decisión bajo incertidumbre de Von Neumann y Morgenstern. Si bien esa teoría es más general, es de más dificultosa aplicación. Por lo tanto, nosotros nos circunscribiremos al enfoque más restringido de la media y la varianza. Este último enfoque es estrictamente válido sólo bajo condiciones especiales (de la distribución de probabilidad o de la función de utilidad) pero refleja un conjunto de ideas útiles para la conceptualización de las decisiones de composición de cartera.

La tasa de retorno de un activo es incierta por diversas razones. Recordemos que el retorno nominal de un activo en un período dado de tiempo está compuesto por el flujo de renta pactada más la ganancia o pérdida de capital originada en la variación del valor de mercado del activo durante el período. La ganancia o pérdida de capital es siempre incierta debido a que el precio final del activo lo es. A su vez, si el período en cuestión es más extenso que la duración del activo, incluso el flujo de renta puede ser incierto (pues habría que pronosticar las condiciones del mercado en el momento de reinvertir en el activo). Por último, la tasa de retorno **real** depende asimismo de la tasa de inflación que rija durante el período, la cual también es incierta. Este hecho implica que aún el dinero, que tiene una tasa de retorno nominal (en dinero) cierta e igual a cero, tiene una tasa de retorno real incierta. Sin embargo, veremos más adelante que a veces es útil suponer que la tasa de rendimiento del dinero es cierta, lo cual equivale a suponer la ausencia de inflación.

2. Rendimiento esperado y riesgo de una cartera.

Supongamos que un inversor tiene un acervo de riqueza K que desea invertir en dos activos alternativos A_1 y A_2. Definamos k como la proporción del activo 1 en la cartera del inversor:

$$k = A_1/K \qquad 1 - k = A_2/K$$

Sean r_1 y r_2 las tasas de retorno de los activos respectivos. Estas tasas son variables estocásticas. Si K' es la riqueza al final del período, debe darse

$$K' = K + r_1 A_1 + r_2 A_2 \tag{1}$$

de donde la tasa de incremento proporcional de la riqueza es

$$\hat{K} = \Delta K/K = r_1 k + r_2 (1 - k) \tag{2}$$

Obsérvese que K' y $\hat{K}$ son variables estocásticas (pues dependen de las variables estocásticas r_1 y r_2).

La distribución de probabilidad conjunta sobre las tasas de retorno r_1 y r_2, que suponemos es normal, puede caracterizarse completamente mediante las medias ($\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$), las varianzas (σ_1^2 y σ_2^2) y la covarianza (σ_{12}). La tasa de retorno (proporcional) esperada de la cartera es la esperanza matemática de $\hat{K}$, o sea,

$$\mu \equiv E(\hat{K}) = kE(r_1) + (1-k)E(r_2) = k\bar{r}_1 + (1-k)\bar{r}_2 \tag{3}$$

y la varianza de la tasa de retorno es

$$\sigma^2 \equiv E[(\hat{K}-\mu)^2] = E\{[(r_1 - \bar{r}_1)k + (r_2 - \bar{r}_2)(1-k)]^2\} =$$

$$= E\{(r_1 - \bar{r}_1)^2 k^2 + 2k(1-k)(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2) + (r_2 - \bar{r}_2)^2 (1-k)^2\} =$$

$$= k^2 E[(r_1 - \bar{r}_1)^2] + 2k(1-k)E[(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2)] +$$

$$+ (1-k)^2 E[(r_2 - \bar{r}_2)^2] = k^2 \sigma_1^2 + 2k(1-k)\sigma_{12} + (1-k)^2 \sigma_2^2 \tag{4}$$

A su vez, la desviación estándar de la cartera (σ) es la raíz cuadrada de la varianza y puede tomarse como medida de dispersión en lugar de la varianza:

$$\sigma = [k^2 \sigma_1^2 + 2k(1-k)\sigma_{12} + (1-k)^2 \sigma_2^2]^{1/2} \tag{5}$$

3. Correlación y diversificación

La covarianza, σ_{12}, nos mide la correlación entre las tasas de retorno de los dos activos. Cuando la covarianza es positiva, las dos tasas de retorno tienden a variar en las mismas direcciones con respecto a sus respectivas medias. O sea, la mayor parte de las veces, cuando una de las tasas está por encima de su media la otra también está por encima de su media. Y, viceversa, si la covarianza es negativa, las dos tasas tienden a variar en las direcciones contrarias con respecto a sus respectivas medias.

El coeficiente de correlación se define como

$$\rho = \sigma_{12}/\sigma_1 \sigma_2 \qquad (6)$$

donde $\sigma_i \equiv (\sigma_i^2)^{1/2}$ es la desviación estándar de r_i. Este coeficiente puede tomar valores entre menos uno y uno. Cuando es igual a uno, las dos variables están perfectamente positivamente correlacionadas. En ese caso, existen a y $b > 0$ tales que $r_2 = a + br_1$, o sea, todas las ocurrencias de r_1 y r_2 se hallan sobre una línea recta de pendiente positiva. Cuando el coeficiente de correlación es igual a menos uno, las dos variables están perfectamente inversamente correlacionadas y se hallan siempre sobre una recta de pendiente negativa. Por último, cuando el coeficiente de correlación es nulo, o sea, cuando la covarianza es nula, las variables no están correlacionadas. En este caso si se grafican las ocurrencias de r_1 y r_2 en un gráfico que tiene a esas dos variables en los ejes (y donde cada punto es una ocurrencia) se obtiene una masa informe de puntos en torno al punto que representa las medias de las dos variables.

Un concepto fundamental de la teoría de carteras es el de **diversificación.** Supongamos, para tomar el caso más sencillo, que los dos activos no están correlacionados ($\sigma_{12} = 0$) y que ambos tienen la misma tasa de retorno esperada ($\bar{r}_1$) y la misma varianza (σ_1^2). En ese caso, cualquier composición de la cartera (dada por k) dará la misma tasa de retorno esperada. En tales circunstancias, es razonable esperar que un inversor esté interesado en minimizar su riesgo. Si medidos el riesgo por la varianza, tenemos, por (4).

$$\sigma^2 = k^2 \sigma_1^2 + (1-k)^2 \sigma_2^2 = \sigma_1^2 [k^2 + (1-k)^2]$$

En particular, si el inversor distribuye su riqueza por mitades entre los dos activos ($k = 1/2$), se tiene

$$\sigma^2 = \sigma_1^2/2 < \sigma_1^2$$

O sea, la varianza disminuye al diversificar. La cartera será menos variable si se distribuye entre activos alternativos.

Supongamos ahora que en lugar de dos activos tenemos n activos no correlacionados cuyas tasas de retorno tienen iguales medias y varianzas. Si distribuimos la riqueza en partes iguales entre todos los activos, o sea, invertimos K/n en cada uno de ellos, la varianza de la cartera es

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (1/n)^2 \sigma_i^2 = \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{n} 1/n^2 = \sigma_1^2/n$$

De esta fórmula se desprende que cuanto mayor es el número de activos en la cartera menor es el riesgo asumido. Por ello resulta conveniente diversificar.

La disminución del riesgo total mediante la tenencia conjunta de muchos riesgos independientes constituye el principio subyacente a toda empresa aseguradora. Cada póliza de seguro representa un riesgo. Si se tienen muchas pólizas dispersas en la población de manera tal que los rendimientos netos no están correlacionados (covarianzas nulas) el riesgo total de la cartera de pólizas es tanto menor cuanto mayor es el número de pólizas.

Ahora, si los rendimientos de los activos están positivamente correlacionados, la conveniencia de la diversificación disminuye con respecto al caso de falta de correlación. Por ejemplo, si se vende una póliza de seguro o varias casas vecinas, será probable que si se incendia una también se incendie otra. Entonces, no es tan conveniente venderle pólizas a casas vecinas (riesgos correlacionados) que a casas dispersas (riesgos incorrelacionados).

Por otro lado, la correlación negativa permite disminuir el riesgo total de la cartera. Por ejemplo, el alto precio del petróleo (y la nafta) seguramente incide favorablemente en la cotización de empresas petroleras y desfavorablemente en la cotización de empresas automotrices. Luego, un inversor disminuirá su riesgo total manteniendo en su cartera acciones de ambos tipos de empresas. Se estará así cubriendo contra el riesgo del precio del petróleo.

4. Derivación analítica y representación gráfica

Para verificar analíticamente estas consideraciones, volvamos al modelo de carteras básico. Si sustituimos (6) en (4), obtenemos

$$\sigma^2 = k^2 \sigma_1^2 + 2k(1-k)\rho\sigma_1 \sigma_2 + (1-k)^2 \sigma_2^2 \tag{7}$$

Cuando los retornos están perfectamente positivamente correlacionados ($\rho = 1$), (7) se reduce a

$$\sigma^2 = [k \sigma_1 + (1-k)\sigma_2]^2$$

de donde

$$\mu = k\bar{r}_1 + (1-k)\bar{r}_2 \tag{8}$$

$$\sigma = k\sigma_1 + (1-k)\sigma_2 \tag{9}$$

son las ecuaciones que representan el retorno esperado y el riesgo de la cartera. Eliminando k de estas dos expresiones se obtiene una relación lineal entre μ y σ que se representa mediante el trazo punteado que en la Figura 1 une a los dos extremos de la curva.

Cuando los retorno están perfectamente inversamente correlacionados ($\rho = -1$), (7) se reduce a

$$\sigma^2 = [k\sigma_1 - (1-k)\sigma_2]^2$$

de donde

$$\sigma = [k\sigma_1 - (1-k)\sigma_2]$$

o sea,

$$\sigma = \begin{cases} k\sigma_1 - (1-k)\sigma_2 & \text{si} \quad k > \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2) \equiv \bar{k} \\ -k\sigma_1 + (1-k)\sigma_2 & \text{si} \quad k < \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2) \equiv \bar{k} \end{cases} \tag{10}$$

A medida que k varía entre 0 y 1 (y pasa por $\bar{k}$), (8) y la ecuación correspondiente de (10) describen los dos segmentos de recta que se unen en el eje de las ordenadas en la Figura 1.

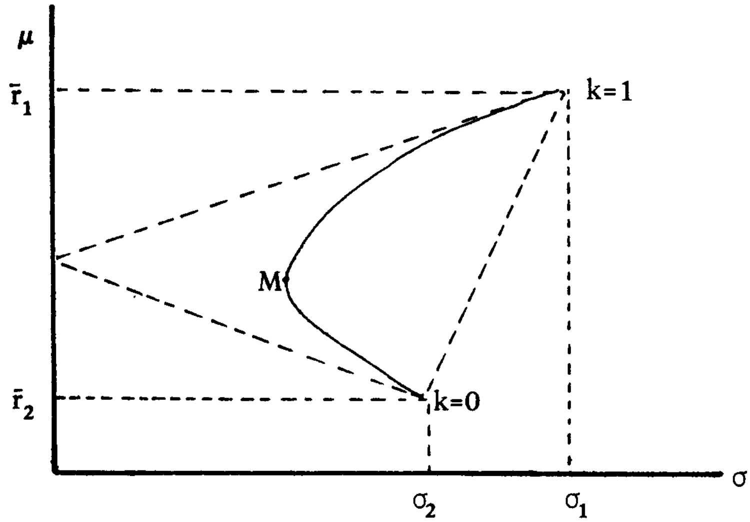

Figura 1

En general, si en la expresión (3) se despeja k en función de μ y se sustituye en (5), se obtiene una relación entre σ y μ que podemos representar como una curva en la Figura 1. Allí se tiene el caso en que el activo 1 tiene mayor rendimiento esperado pero mayor riesgo que el activo 2. Si partimos de una cartera compuesta exclusivamente por el activo 1, a medida que aumenta la participación del activo 2 en la cartera baja el rendimiento esperado y también el riesgo de la cartera hasta que se alcanza el punto M. A partir de allí sigue disminuyendo el retorno esperado de la cartera pero ahora con un riesgo creciente. Cualquier inversor que sólo esté dispuesto a asumir riesgos si ello le posibilita un mayor retorno esperado automáticamente descartará los puntos de la curva por debajo de M. Cualquiera de estos puntos está dominado por M, que garantiza un mayor retorno con un menor riesgo.

Si minimizamos la expresión dada por (4) para la varianza con respecto a k, obtenemos la **participación de varianza mínima**

$$\bar{k} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \tag{11}$$

Cuando $k = \bar{k}$, se está en el punto M de la Figura 1, que define la **cartera de varianza mínima.**

5. El caso de un activo exento de riesgo

Un caso particular ilustrativo es aquel en el que uno de los dos activos es considerado exento de riesgo. En nuestro caso, r_2 podría ser una variable determinística (no estocástica). En tal caso, en (4) la dispersión σ_2 y la covarianza σ_{12} se anulan, por lo cual el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera (ecuaciones (3) y (5) se reducen a

$$\mu = k\bar{r}_1 + (1-k)r_2 \tag{12}$$

$$\sigma = k\sigma_1 \tag{13}$$

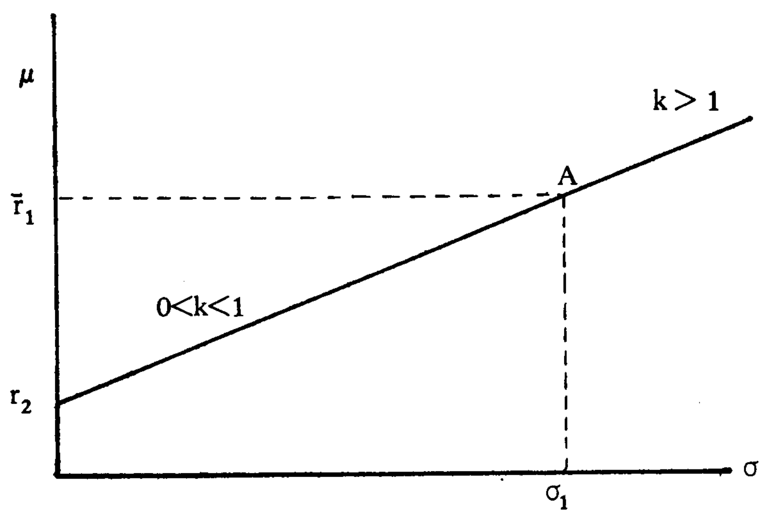

Figura 2

Si despejamos k de (12) y sustituimos en (13) obtenemos la siguiente relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo:

$$\mu = \left(\frac{\bar{r}_1 - r_2}{\sigma_1}\right) \sigma + r_2 \qquad (14)$$

Esta relación es graficada en la Figura 2.

La pendiente de la recta está dada por el diferencial de rendimientos esperados ajustado por riesgo. Cuando toda la riqueza se mantiene en el activo exento de riesgo, no se asume riesgo alguno (σ=0) y el rendimiento esperado es r_2. A medida que se pone una mayor proporción de la riqueza en el activo riesgoso, aumentan tanto el rendimiento esperado (μ) como el riesgo (σ).

6. Endeudamiento y leverage

Podemos ahora introducir la posibilidad de que el agente se endeude en el activo exento de riesgo para invertir en el activo riesgoso un monto superior a su propia riqueza. Para ello, basta con permitir que k asuma valores mayores que la unidad. Podemos plantear el balance del tenedor de riqueza del siguiente modo

A_1	P
A_2	K

donde P es un pasivo. Por la identidad contable entre activos y pasivos (más patrimonio neto) se tiene $K = A_1 + A_2 - P$. Si dividimos por K, obtenemos

$$1 = k + (A_2 - P)/K.$$

Cuando P era nulo, k podía crecer hasta la unidad, en cuyo caso A_2 era nulo. Pero ahora, cuando el agente tiene una deuda neta ($A_2 - P < 0$) en el segundo activo, k debe ser superior a la unidad. El agente puede, si lo desea, invertir en el activo riesgoso más que la totalidad de su capital propio si incurre en deuda neta. En la Figura 2, ello significa estar sobre la recta pero a la derecha del punto A. En ese tramo la tenencia neta del activo exento de riesgo es negativa y k es superior a la unidad. Como veremos luego, este caso es especialmente relevante para el análisis de los intermediarios financieros.

7. Más de dos activos

Cuando existen más de dos activos riesgosos del análisis es bastante similar. Supongamos que hay tres activos. Entonces tendremos dos participaciones independientes, digamos k_1 y k_2, mientras que la participación del tercer activo es necesariamente $1 - k_1 - k_2$. Como hicimos arriba, puede calcularse el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera en términos de k_1 y k_2 y los parámetros de la distribución de probabilidades conjunta, o sea, las varianzas (σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2) y las covarianzas (σ_{12}, σ_{13}, σ_{23}). En este caso, sin embargo, no todas las combinaciones de k_1 y k_2 serán relevantes.

Llamaremos ineficiente a una cartera (definida mediante una combinación de k_1 y k_2) si hay alguna otra que a igual rendimiento esperado es menos riesgosa. Para obtener las carteras eficientes, puede minimizarse la varianza de la cartera para cada nivel dado de rendimiento esperado de la cartera. Ello dará una relación entre el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera similar a la curva de la Figura 1, salvo que para caracterizar un punto de la curva ahora es necesario especificar los valores de dos parámetros (en lugar de 1), k_1 y k_2.

Con tres activos, también podemos, como arriba, simplificar las cosas al suponer que uno de ellos está exento de riesgo. Ejemplificaremos este caso más adelante al considerar un intermediario financiero que tiene un activo riesgoso negativo (depósitos), un activo riesgoso positivo (préstamos) y un activo positivo exento de riesgo.

8. Las preferencias rendimiento-riesgo y el equilibrio de cartera

Hasta ahora hemos presentado las posibilidades de inversión y hemos desechado algunas de las posibilidades por ineficientes, pero no hemos representado teóricamente las preferencias del inversor en cuanto al rendimiento esperado y el riesgo. Para ello, vamos a suponer que el inversor tiene una función de utilidad que depende positivamente del rendimiento esperado de su cartera y negativamente del riesgo. O sea, se tiene

$$U = F(\mu, \sigma), \qquad F_1 > 0, F_2 < 0 \tag{15}$$

En el caso de los activos, entonces, el problema del inversor consiste en maximizar U sujeto a las restricciones

$$\mu = k\bar{r}_1 + (1-k)\bar{r}_2 .$$

$$\sigma = [k^2 \sigma_1^2 + 2k(1-k)\sigma_{12} + (1-k)^2 \sigma_2^2]^{1/2}$$

donde k constituye la variable de decisión.

La condición de primer órden está dada por

$$F_1 \frac{d\mu}{dk} + F_2 \frac{d\sigma}{dk} = 0 \tag{16}$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{d\mu}{dk} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 = E(r_1 - r_2)$$

$$\sigma . \frac{d\sigma}{dk} = k(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + (\sigma_{12} - \sigma_2^2).$$

Sustituyendo estas dos expresiones en (16) y despejando k se obtiene

$$k = \bar{k} + \frac{1}{\theta} \frac{E(r_1 - r_2)}{Var(r_1 - r_2)} \tag{17}$$

En esta expresión, $\bar{k}$ es la participación de varianza mínima (11) que ya encontramos antes. θ es el coeficiente de aversión al riesgo definido como $\theta = -F_2/(\sigma F_1)$. Y Var $(r_1 - r_2)$ es la varianza del diferencial de tasas de rendimiento esperadas. Obsérvese que dicha varianza es:

$$Var\,(r_1 - r_2) = E\{[(r_1 - r_2) - (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)]^2\} =$$

$$= E\{[(r_1 - \bar{r}_1) - (r_2 - \bar{r}_2)]^2\} =$$

$$= E\{(r_1 - \bar{r}_1)^2 + (r_2 - \bar{r}_2)^2 - 2(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2)\} =$$

$$= E[(r_1 - \bar{r}_1)^2] + E[(r_2 - \bar{r}_2)^2] - 2E[(r_1 - \bar{r}_1)(r_2 - \bar{r}_2)] =$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$$

La fórmula (17) nos dice que, dada la esperanza y la varianza del diferencial de rendimientos, entonces cuanto mayor es el coeficiente de aversión al riesgo (θ) más cercana es la participación del activo 1 a la participación de riesgo mínimo. Además, si se espera que ambos activos tengan el mismo rendimiento, el inversor elegirá siempre la cartera de riesgo mínimo. Si se espera que el primer activo tenga un rendimiento mayor, la participación de equilibrio es mayor que la de riesgo mínimo y, viceversa, si se espera que el segundo activo tenga un rendimiento mayor, la participación de equilibrio (del activo 1) es menor que la de riesgo mínimo.

Además, el diferencial esperado de rendimientos, es ajustado según su varianza, de manera tal que dado un cierto diferencial esperado (digamos positivo), cuanto mayor es su varianza menor es la participación del activo 1 en la cartera. Al segundo término del lado derecho de (17) se lo suele denominar la **participación de cartera especulativa**, pues es la parte de la participación en el activo 1 que excede a la participación de mínimo riesgo.

En cualquier caso, la curva de indiferencia que indica la máxima utilidad posible será tangente a la frontera de eficiencia de las carteras en el tramo de pendiente positiva. Cuanto mayor es la aversión al riesgo, más empinadas son las curvas de indiferencia. En el caso extremo en que la aversión al riesgo es infinita, la curva de indiferencia se vuelve vertical y se elige la participación de riesgo mínimo. En el extremo opuesto, cuando hay indiferencia ante el riesgo ($\theta = 0$) las curvas de indiferencia se vuelven horizontales. En ese caso, al inversor le interesa exclusivamente maximizar el rendimiento esperado. Por lo tanto, invierte sólamente en aquel activo que tiene el mayor rendimiento esperado.

III. Teoría de la intermediación financiera

1. El modelo básico de cobertura contra el riesgo

Retomemos el caso planteado en la Sección II del inversor que se endeudaba para poder invertir una suma en exceso de su capital. Como ahora estamos pensando específicamente en un intermediario financiero vamos a denominar reservas (R) al activo exento de riesgo, préstamos (L) al activo riesgoso y depósitos (D) al pasivo. A diferencia del caso planteado, sin embargo, los depósitos van a tener rendimiento incierto. El intermediario financiero (digamos, banco) se endeuda a una tasa incierta para asignar su cartera total entre reservas y préstamos, donde los últimos tienen un rendimiento incierto.

El balance del banco es el siguiente:

R	D
L	K

Sean r_0, r_1 y r_2 los rendimientos sobre las reservas, sobre los préstamos y sobre los depósitos, respectivamente. La identidad contable nos da $R = K - L + D$, por lo cual, si hacemos abstracción de los costos operativos, el rendimiento (absoluto) sobre el capital propio del banco es

$$\Delta K = r_0 R + r_1 L - r_2 D$$

$$= (r_1 - r_0)L - (r_2 - r_0)D + r_0 K.$$

El rendimiento esperado sobre el capital propio está dado por la esperanza matemática de ΔK y es

$$\mu = (\bar{r}_1 - r_0)L - (\bar{r}_2 - r_0)D + r_0 K. \tag{18}$$

A su vez, la varianza del rendimiento es

$$\sigma^2 = E[(\Delta K - \mu)^2] = \sigma_1^2 L^2 - 2\sigma_{12} LD + \sigma_2^2 D^2 \tag{19}$$

Supongamos que el banco maximiza una función de utilidad que tiene como argumentos el rendimiento esperado y la varianza del rendimiento sobre el capital propio. O sea, se tiene

$$U(\mu, \sigma^2), \qquad U_1 > 0, \quad U_2 < 0.$$

Entonces, las condiciones de primer orden para un máximo son:

$$U_1(\bar{r}_1 - r_0) + 2U_2(\sigma_1^2 L - \sigma_{12} D) = 0.$$

$$U_1(\bar{r}_2 - r_0) + 2U_2(\sigma_{12} L - \sigma_2^2 D) = 0.$$

Si resolvemos este sistema para L y D, obtenemos los préstamos y depósitos de equilibrio:

$$L^* = (1/\theta s)\,\{\sigma_2^2(\bar{r}_1 - r_0) - \sigma_{12}(\bar{r}_2 - r_0)\} \tag{20}$$

$$D^* = (1/\theta s)\,\{-\sigma_1^2(\bar{r}_2 - r_0) + \sigma_{12}(\bar{r}_1 - r_0)\} \tag{21}$$

donde $s = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - (\sigma_{12})^2$ y esta vez hemos definido el coeficiente de aversión al riesgo como $\theta = -2U_2/U_1$.

Observemos que siempre que los rendimientos de préstamos y depósitos no están perfectamente positivamente correlacionados (o sea, siempre que en (6) $\rho < 1$), s es positivo. Además, θ también es positivo debido a los supuestos sobre la función de utilidad. Luego, los términos entre llaves de (20) y (21) determinan los signos de L^* y D^*. El banco intermediará entre depositantes y prestatarios si y sólo si L^* y D^* son positivos, lo cual requiere que se verifiquen las condiciones:

$$\sigma_2^2(\bar{r}_1 - r_0) - \sigma_{12}(\bar{r}_2 - r_0) > 0 \tag{22}$$

$$-\sigma_1^2(\bar{r}_2 - r_0) + \sigma_{12}(\bar{r}_1 - r_0) > 0 \tag{23}$$

En el caso particular en que los rendimientos sobre préstamos y depósitos son independintes, se tiene $\sigma_{12} = 0$. En ese caso, para que el banco intermedie es condición necesaria y suficiente que los préstamos tengan una prima de riesgo positiva ($\bar{r}_1 > r_0$) y que los depósitos tengan una prima de riesgo negativa ($\bar{r}_2 < r_0$). O sea, debe pagarse en promedio a los depositantes una tasa de interés menor a la tasa exenta de riesgo que rige para las reservas y debe cobrarse a los prestatarios una tasa de interés superior.

Si hay correlación positiva entre los rendimientos de depósitos y préstamos, la condición necesaria y suficiente para que haya intermediación es:

$$\frac{\sigma_2(\bar{r}_1 - r_0)}{\sigma_1(\bar{r}_2 - r_0)} > \frac{1}{\rho} \equiv \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{12}} \tag{24}$$

Para demostrar que (24) es condición suficiente para la intermediación basta con observar que esa expresión implica directamente que

$$\frac{\bar{r}_1 - r_0}{\bar{r}_2 - r_0} > \frac{\sigma_1^2}{\sigma_{12}} \tag{25}$$

lo cual implica (23). Además, si no hay correlación positiva perfecta, se tiene $s > 0$, o sea

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{12}} > \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} \tag{26}$$

Por (25) y (26) se obtiene (22).

Para la implicación recíproca, puede observarse que (23) implica (25). Multiplicando en ambos lados de esa desigualdad por σ_2/σ_1 se obtiene (24).

De la fórmula (24) podemos sacar algunas conclusiones interesantes. En primer lugar, la intermediación bancaria es más probable cuanto mayor es la prima por riesgo sobre préstamos y cuanto menor es la prima por riesgo sobre depósitos (aunque ésta debe ser positiva si σ_{12} lo es). Además, la intermediación es más probable cuanto mayor es la dependencia positiva entre los rendimientos sobre préstamos y depósitos (reflejada en σ_{12}) y cuanto menor es el riesgo de los préstamos (reflejado en σ_1^2).

Por otro lado, es de interés señalar que en el óptimo la ganancia esperada es positiva. Para comprobarlo, basta reemplazar (20) y (21) en (18), recordar las definiciones de σ_1^2, σ_2^2, σ_{12} y obtener como expresión para μ la esperanza matemática de un término elevado al cuadrado.

Por último, reemplazando (20) y (21) en (19) se comprueba que.

$$1/\theta \equiv -U_1/2U_2 = \sigma^2/\mu.$$

donde σ^2 y μ están calculados para los valores óptimos de L y D. Esta expresión nos dice que en el equilibrio la tasa marginal de sustitución entre rendimiento y riesgo debe ser proporcional al cociente entre riesgo y rendimiento esperado.

2. El banco que hace préstamos riesgosos

Para poder complicar la estructura de activos sin volver inmanejable a la modelización, vamos a tomar el caso de un banco que recibe depósitos en forma totalmente pasiva a una tasa de mercado i_D que es conocida con certeza. El banco utiliza los depósitos (D) y el capital propio (K) para mantener reservas legales (R), efectuar préstamos riesgosos (L) y mantener una cartera de títulos (S). El balance, por lo tanto, es el siguiente:

R	D
L	K
S	

Se considera que tanto las reservas como los títulos están exentos de riesgo, por lo cual tienen tasas de rendimiento ciertas e iguales a i_R y i_S, respectivamente. En cambio, los préstamos son riesgosos, generando un ingreso pactado de i_L por unidad de préstamo. Suponemos que una proporción β de la cartera de préstamos será morosa, por lo cual entendemos que no se recibirá ni los intereses ni el capital sobre esos préstamos. Esto significa que la tasa de rendimiento de los préstamos es $i_L - \beta$.

Vamos a suponer que hay regulaciones bancarias que obligan al banco a mantener un encaje de reserva que consiste en una fracción z de los depósitos y que, además, el banco no desea tener reservas excedentes por encima de ese mínimo. Luego, se tiene la relación R = zD. También suponemos que el capital propio consiste en una fracción k de los depósitos (K = kD) y que los costos operativos consisten en una fracción c de los depósitos. Por último, la identidad contable nos dice que

$$S \equiv D + K - L - R = (1 - z + k)\,D - L.$$

Los beneficios del banco en un período de tiempo unitario son:

$$\Delta K = (i_L - \beta)L + i_R R + i_S S - (i_D + c)D = rL - tD$$

donde hemos definido

$$r = i_L - i_S - \beta, \qquad t = i_D + c - (1 - z + k)i_S - zi_R\,.$$

Efectuando el tipo de cálculo que ya vimos anteriormente, podemos obtener la esperanza matemática y la desviación estándar de la cartera bancaria:

$$\mu = \bar{r}L - tD \qquad (\bar{r} = i_L - i_S - \bar{\beta}) \tag{27}$$

$$\sigma = \sigma_\beta L. \tag{28}$$

De estas dos relaciones obtenemos una relación lineal entre μ y σ:

$$\mu = (\bar{r}/\sigma_\beta)\sigma - tD. \tag{29}$$

Supongamos ahora que el banco maximiza una función de utilidad que depende de la media y la varianza. Por ejemplo, podemos tomar el caso sencillo de una función de utilidad lineal

$$U = U_1\mu - U_2\sigma^2 \tag{30}$$

donde U_1 y U_2 son coeficientes positivos fijos. Si se introducen (27) y (28) en (30) y se maximiza con respecto a L, se obtiene el nivel óptimo de préstamos:

$$L^* = \bar{r}/(\theta\sigma_\beta^2) = (i_L - i_S - \bar{\beta})/(\theta\sigma_\beta^2) \tag{31}$$

donde $\theta = -2U_2/U_1$.

Según (31), el volúmen de préstamos será mayor cuanto mayor sea la tasa de interés pactada, y cuanto menores sean la tasa de interés sobre los títulos, la fracción de insolvencia esperada ($\tilde{\beta}$), la varianza de la fracción de insolvencia (σ^2_β) y el coeficiente de aversión al riesgo (θ). Esto es todo razonable. Sin embargo, llama la atención que ni el volúmen de los depósitos ni ninguno de los coeficientes que figuran en θ afecten al volúmen de préstamos.

La razón de ser de esta peculiaridad radica en la función de utilidad lineal que hemos tomado. Esa función de utilidad implica un grado de aversión (absoluta) al riesgo constante. Si en lugar de (30) utilizamos la función de utilidad

$$V = V_1\mu - V_2\sigma^2 + V_3\mu^2, \tag{32}$$

como señala Mitchell (1986), si V_3 es positivo estaremos suponiendo un grado de aversión (absoluta) al riesgo decreciente y, viceversa, si V_3 es negativo estaremos suponiendo un grado de aversión (absoluta) al riesgo creciente. Ello se verifica fácilmente observando que:

$$-\frac{dV}{d\sigma^2} \div \frac{dV}{d\mu} = \frac{V_2}{V_1 + 2V_3\mu}.$$

Si V_3 es positivo, cuando aumenta el rendimiento esperado de la cartera disminuye el cociente de la derecha del signo de igualdad. O sea, disminuye la tasa marginal de sustitución entre riesgo y rendimiento esperado. Esto significa que a medida que, dado un nivel de riesgo, aumenta el rendimiento esperado, las curvas de indiferencia se van haciendo menos empinadas (en un gráfico que tiene a μ en la ordenada y σ^2 en la abcisa). En tal caso, si comparamos dos curvas de indiferencia, una más arriba que la otra, y consideramos el incremento en el rendimiento esperado que compensa (en nivel de utilidad) un incremento dado en el riesgo, observamos que en la curva más elevada se necesita un incremento menor de la tasa de rendimiento esperado. Ello nos indica que al pasar de la curva de indiferencia inferior a la superior (menos empinada), disminuye la aversión (absoluta) al riesgo.

Mitchell indica que es deseable que la aversión absoluta al riesgo sea decreciente. Sin embargo, a nosotros nos parece que la aversión creciente da resultados más convincentes. Por ello, vamos a suponer en lo que sigue que V_3 es negativo.

Si utilizamos ahora la función de utilidad (32) en lugar de (30) y hacemos los cálculos, obtenemos el nivel óptimo de préstamos siguiente

$$L^* = \bar{r}\,\frac{V_1/2 - V_3 tD}{V_2 \sigma_\beta^2 - V_3 r^{-2}} \tag{33}$$

Obsérvese que la segunda derivada de V con respecto a L es igual a

$$2(V_3 r^{-2} - V_2 \sigma_\beta^2).$$

Como en un máximo esta expresión debe ser negativa, el denominador de (33) es positivo.

Seguimos teniendo la influencia positiva de i_L sobre el nivel de préstamos óptimo (a través de su influencia sobre $\bar{r}$) así como las influencias negativas de $\bar{\beta}$ y σ_β^2. Sin embargo, ahora el nivel de los depósitos y los coeficientes que forman a t también inciden sobre L^*. En particular, si suponemos que t es positivo (lo cual es razonable siempre que los costos operativos sean significativos) los aumentos en los depósitos hacen aumentar los préstamos.

Además, también los aumentos en la tasa de rendimiento de los depósitos, en los costos operativos (por unidad de depósitos) y en el coeficiente de capital propio inciden negativamente sobre el volúmen de préstamos. El mismo efecto tiene un aumento en el coeficiente de encaje (siempre que la tasa de interés sobre los títulos sea superior a la tasa de interés sobre las reservas).

Por otro lado, un incremento en la tasa de interés sobre los títulos tiene ahora un efecto ambiguo sobre L^*. Pues al efecto contractivo a través de $\bar{r}$ se le contrapone un efecto expansivo a través de la influencia de esa tasa sobre t.

IV. Liquidez y Solvencia

En esta sección vamos a exponer un modelo que hace endógena la estructura, ya sea de los activos o de los pasivos. El modelo básico tiene sus orígenes más remotos en el trabajo de Edgeworth, **The mathematical theory of banking**, de 1888. En una primera sección, analizamos el problema de la determinación del nivel óptimo de reservas con unos depósitos dados. En la segunda sección, se plantea el caso polar de la determinación del nivel de capital propio óptimo, dado el volúmen de préstamos a otorgar. El primer modelo analiza entonces la cuestión de la liquidez y el segundo la de la solvencia. En ambos casos suponemos que la entidad financiera es neutra ante el riesgo.

1. El modelo de administración de reservas

En el modelo de administración de reservas, el banco tiene, al principio de un período de tiempo, una cierta cantidad de depósitos que debe distribuir entre reservas y préstamos. Pero durante el período se producen retiros aleatorios de los depósitos iniciales. En otras palabras, el banco está sometido al riesgo de extracción de depósitos en el sentido que la información que posee sobre los retiros potenciales es de carácter probabilístico. Presumiblemente, esta información probabilística, que se resume en una función de densidad de probabilidades, está basada en la experiencia dada.

Sea $\dot{x}$ la variable aleatoria que indica el monto retirado y sea f(x) la función de densidad de probabilidad. Recuérdese que la suma de las probabilidades es necesariamente igual a la unidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad (34)$$

A continuación mostramos el balance del banco al principio y al fin del período (suponiendo que los beneficios se distribuyen íntegramente).

$$\begin{array}{c|c} R & D \\ L & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} R-x & D-x \\ L & \end{array}$$

A la izquierda se tiene el balance antes de saberse el monto de retiros que tiene lugar durante el mes pero después de tomar la decisión de cuánto mantener en reserva, o sea, de cómo distribuir los depósitos entre reservas y préstamos. A la derecha se tiene la situación luego de conocerse el monto de los retiros y, por lo tanto, luego de saber si se cayó o no en una situación de iliquidez. Esto último ocurre si los retiros exceden a las reservas.

Suponemos que cuando el banco entra en estado de iliquidez puede recurrir a una fuente de financiación adicional que le hace incurrir un costo c, por unidad de financiación. Tal podría ser, por ejemplo, el costo de obtener fondos en un mercado de dinero al cual el banco tiene acceso.

Se supone que el banco es neutro ante el riesgo. Por ello, sólo le interesa maximizar la esperanza matemática de los beneficios, o sea, el beneficio esperado. La fórmula que expresa el beneficio dependerá de si el monto de extracciones resulta ser tal que se cae en una situación de iliquidez o no. Por consiguiente, podemos definir el beneficio del siguiente modo:

$$\Pi(x) = \begin{cases} i_L\,(D-R) - i_D D & \text{si } x < R \\ i_L\,(D-R) - i_D D - c(x-R) & \text{si } x > R. \end{cases} \tag{35}$$

El beneficio esperado es

$$E(\Pi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) f(x) dx. \tag{36}$$

Introduciendo (35) en (36), se tiene

$$E(\Pi) = \int_{-\infty}^{R} [i_L (D-R) - i_D D] f(x) dx +$$
$$+ \int_{R}^{\infty} [i_L (D-R) - i_D D - c(x-R)] f(x) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [i_L (D-R) - i_D D] f(x) dx - c \int_{R}^{\infty} (x-R(f(x)dx.$$

Por (34), esta expresión se reduce a

$$E(\Pi) = i_L (D-R) - i_D D - c \int_{R}^{\infty} (x-R) f(x) dx. \tag{37}$$

El banco debe determinar, dado en nivel inicial de depósitos, el nivel de reservas. La diferencia entre ambos es el monto asignado a los préstamos. La condición necesaria para maximizar el beneficio esperado con respecto al nivel de reservas es que la derivada de (4) con respecto a R se anule. Vamos a desarrollar en forma extensiva el cálculo de esa derivada. En primer lugar, tenemos directamente a partir de (4):

$$dE(\Pi)/dR = -i_L - \frac{d}{dR}\int_R^{\infty} c(x-R)f(x)\,dx. \tag{38}$$

Pero

$$\frac{d}{dR}\int_R^{\infty} (x-R)f(x)dx = \frac{d}{dR}\left\{\int_R^{\infty} xf(x)dx - R\int_R^{\infty} f(x)dx\right\} =$$

$$= -\frac{d}{dR}\int_{-\infty}^{R} xf(x)dx - R\frac{d}{dR}\int_R^{\infty} f(x)dx - \int_R^{\infty} f(x)dx =$$

$$= -Rf(R) - R[-f(R)] - \int_R^{\infty} f(x)dx = -\int_R^{\infty} f(x)dx.$$

Luego (38) se anula si se verifica

$$c\int_R^{\infty} f(x)dx = i_L. \tag{39}$$

Obsérvese que la integral del lado izquierdo de (39) representa la probabilidad de que exista un déficit de reservas, o sea, iliquidez. Luego, la igualdad (39) nos dice que el nivel de reservas se determina de manera tal que el costo esperado de un déficit de reservas sea igual a la tasa de interés sobre los préstamos.

Alternativamente, la tasa de interés sobre los préstamos puede considerarse el costo de oportunidad de mantener reservas. Y el último término de (38) (con signo negativo) es la reducción esperada en el costo de iliquidez que tiene lugar con un aumento marginal en el nivel de reservas. Luego, la condición de equilibrio del modelo es que el costo de oportunidad de mantener una unidad adicional de reservas debe ser igual a la reducción esperada en el costo de iliquidez.

En la Figura 1 hemos representado el costo esperado de un déficit de reservas como una función decreciente del nivel de reservas. El nivel de reservas de equilibrio se obtiene cuando esa curva corta a la recta horizontal que pasa por i_L. Obsérvese que si i_L aumenta, el nivel de reservas de equilibrio, $\hat{R}$, disminuye.

El modelo básico de administración de reservas puede ser modificado para captar algunos aspectos que le dan mayor verosimilitud. En particular, vamos a considerar a) el caso en que el banco tiene cierto poder monopólico en el mercado de préstamos, b) el caso en que hay

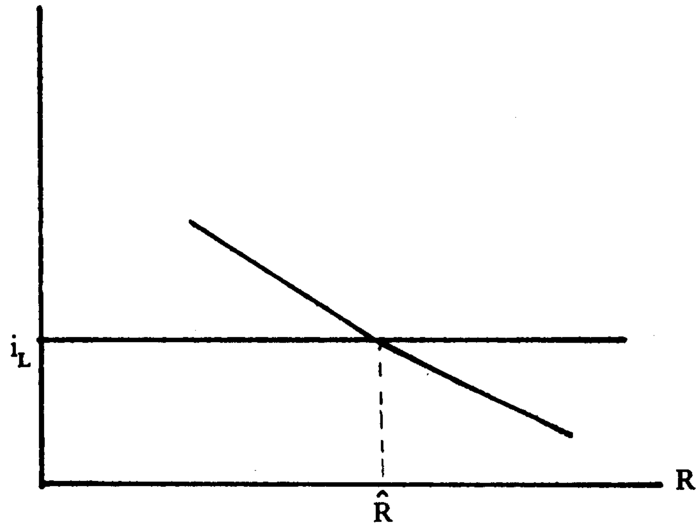

Figura 3

un coeficiente de encaje impuesto por la autoridad regulatoria y c) el caso en que el banco utiliza insumos reales.

a. Poder monopólico en el mercado de préstamos

El poder monopólico del banco individual en el mercado de préstamos implica que no es precio aceptante en ese mercado. O sea, la demanda de préstamos es sensible a la tasa de interés que el banco fije. Sea $i_L = g(L)$ la función (inversa) de demanda de préstamos, donde $g' < 0$. En lugar de (37) tenemos ahora

$$E(\Pi) = g(D-R).(D-R) - i_D D - c\int_R^{\infty} (x-R)f(x)dx \qquad (40)$$

Puede verificarse que la condición de primer orden (39) se convierte en

$$c\int_{R}^{\infty} f(x)dx = i_L + g'(D-R).(D-R) \qquad (41)$$

Como el segundo término del lado derecho de (41) es negativo, el costo de oportunidad de mantener reservas es ahora menor que en el caso competitivo. Ello se debe a que, para prestar más, ahora es necesario bajar la tasa de interés para préstamos. Como el costo de iliquidez no ha variado, para que en el margen se iguale la reducción en el costo de iliquidez con el costo de oportunidad de mantener reservas, es necesario tener un mayor nivel de reservas que en el caso competitivo.

Analíticamente, en (41) puede pasarse restando a la izquierda del signo de igualdad el término g'(D−R).(D−R). La función (de R) que queda del lado izquierdo es mayor que el lado izquierdo de (39). Luego, en la Figura 1 la curva decreciente se desplaza hacia arriba y el nivel de reservas de equilibrio se hace mayor.

En definitiva, no cambia nada fundamental en el modelo de administración de reservas por la introducción de poder monopólico por parte del banco salvo el hecho de que tal poder lo induce a mantener mayores reservas.

b. Coeficiente de encaje

Si z es el coeficiente de encaje, el banco debe asegurarse de que al final del período sus reservas sean al menos iguales que sus depósitos multiplicados por z. Como R−x y D−x son las reservas y depósitos al final del período, respectivamente, siempre que

$$R - x \geqslant k(D - x) \qquad (42)$$

el banco no incurre en costos adicionales a raíz de los depósitos. Sin embargo, cuando no se verifica tal desigualdad, el banco debe recurrir a un financiamiento costoso. Hay un valor crítico del nivel de retiros entre el nivel superavitario y el deficitario. Se comprueba a partir de (42) que ese nivel es

$$\hat{x} = \frac{R - kD}{1 - k}$$

Obsérvese que $\hat{x}$ es necesariamente menor que R. Además, el tamaño del déficit de reservas es

$$k(D-x)-(R-x) \equiv (1-k)x - R + kD.$$

Luego, suponiendo nuevamente que el costo de financiamiento adicional es proporcional, se tiene

$$E(\Pi) = i_L (D-R) - i_D D - c\int_{\hat{x}(R)}^{\infty} c[(1-k)x - R + kD]f(x)dx$$

donde hemos resaltado la dependencia de $\hat{x}$ con respecto a R.

Si calculamos la derivada de $E(\Pi)$ con respecto a R, siguiendo los pasos que ya hemos visto, obtenemos la siguiente condición de primer orden para un máximo:

$$i_L = c\int_{\hat{x}(R)}^{\infty} f(x)dx. \qquad (43)$$

La interpretación de esta condición es la que dimos antes. Pero como el nivel de retiros $\hat{x}$ es menor que el nivel de reservas (como ya se señaló), la probabilidad de un déficit de reservas es mayor que en el caso no regulado para cualquier valor de R. Por ello, el costo de un déficit de reservas es mayor que en el caso no regulado, para cada nivel de reservas dado. Nuevamente, en la Figura 1 la curva que indica el costo de iliquidez se eleva (con respecto al caso no regulado) y el nivel de reservas de equilibrio resulta mayor. Por lo tanto, la existencia de un encaje legal induce un comportamiento más cauto con respecto al mantenimiento de reservas.

c. Existencia de costos por el uso de recursos reales

Supongamos que el banco tiene una función de costos que depende de la magnitud de los depósitos que recibe y de los préstamos que otorga, C(D,L). En la presente extensión del modelo se va a determinar en forma endógena no sólo la distribución de los depósitos entre reservas y préstamos sino también la magnitud de los depósitos. Esta última puede interpretarse como una variable que mide la escala de operaciones de la empresa bancaria.

Dada la endogeneidad de los depósitos, ya no podemos considerar fija a la función de densidad de probabilidades, f(x), pues los retiros están directamente relacionados con los depósitos. Los parámetros de la función de densidad (en particular, la media y la varianza), por lo tanto, dependen de D. Para facilitar las cosas, podemos suponer que f(x) es normal y tiene media nula:

$$f(x) = (1/\sigma_x \sqrt{2\pi}) \exp\{(1/2)(x/\sigma_x)^2\}.$$

Si definimos las variables normalizadas, $X = x/\sigma_x$, $B = R/\sigma_x$ y la función normal estándar

$$\phi(X) = (1/\sigma_x \sqrt{2\pi}) \exp\{X^2/2\},$$

el costo adicional esperado debido a una situación de iliquidez se convierte en:

$$I = c\int_R^\infty (x-R)f(x)dx = c\int_R^\infty \sigma_X (X-B)f(x)dx =$$

$$= c\int_B^\infty \sigma_x (X-B)\phi(X)dX = \sigma_X(D)c\int_B^\infty (X-B)\phi(X)dX.$$

Se tiene, entonces,

$$I = I(D, B), \qquad I_D > 0, \qquad I_B < 0.$$

Pero como $B = R/\sigma_X(D)$, y $R = D - L$, queda, en definitiva, $I = I(D,L)$.

El beneficio esperado resulta ahora

$$E(\Pi) = i_L L - i_D D - C(D,L) - I(D,L).$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias para un máximo son

$$i_L = C_L + I_L, \qquad\qquad i_D + C_D = -I_D.$$

La primera condición dice que el banco debe modificar la estructura de sus activos hasta que el ingreso marginal producido por un préstamo sea igual a la suma del costo marginal en recursos reales más el costo marginal esperado de caer en una situación de iliquidez. La segunda condición dice que el banco debe recibir depósitos (o sea, expandir su escala de operaciones) hasta que la reducción esperada en el costo de iliquidez sea igual al costo marginal en intereses (sobre depósitos) y recursos reales.

2. El modelo de administración de pasivos

El tipo de modelo que usamos en la sección precedente para representar la decisión de cómo asignar los depósitos entre reservas y préstamos puede reelaborarse para que represente la decisión de cómo financiar un volúmen dado de préstamos. Si, en particular, dividimos los pasivos del banco en depósitos y capital propio, se trata de determinar qué volúmen de depósitos captar y qué capital propio invertir para financiar un volúmen dado de préstamos. Tal financiación involucra ciertos costos, uno de los cuales es el costo (esperado) de insolvencia. La decisión óptima se determinará minimizando los costos (esperados) de financiamiento.

Supongamos que están dadas la magnitud y la estructura de los activos del banco, L. Suponemos que estos activos generan un ingreso, Y, durante el período en análisis. Tal ingreso no es conocido con certeza. Es una variable aleatoria de la cual se conoce su función de densidad de probabilidad, g(Y). La incertidumbre puede deberse a la incertidumbre sobre la evolución de la tasa de interés sobre préstamos así como a la incertidumbre sobre la evolución de los precios de mercado de los activos, o a la incertidumbre generada por la posibilidad de que el deudor caiga en insolvencia.

Supongamos que el banco inicia el período con un capital propio K y un volúmen de depósitos D. Se supone que el banco no tiene una actitud pasiva con respecto a los depósitos sino que puede, si lo desea, salir a captar depósitos. Para simplificar no distinguimos entre distintos tipos de depósitos. Si i_D es la tasa de interés sobre depósitos, los balances de principios y fines del período (pero en el último caso, antes de abonar los intereses sobre los depósitos) son:

L	D		L + Y	$D(1+i_D)$
	K			K'

El banco cae en insolvencia si su patrimonio neto al final del período (K') resulta negativo, o sea, si se encuentra con un activo menor que su pasivo:

$$L + Y < D(1 + i_D).$$

Ello ocurre siempre que el ingreso generado por los activos resulta menor que un cierto nivel crítico ($\hat{Y}$), o sea, siempre que

$$Y < D(1 + i_D) - L \equiv \hat{Y}.$$

Por la identidad contable de principios del período, también puede escribirse

$$\hat{Y}(K) \equiv i_D L - (1+i_D)K. \tag{44}$$

Como L y i_D están dados, en definitiva el ingreso crítico que se requiere para no caer en insolvencia depende negativamente de la magnitud del capital propio invertido. Cuanto mayor es el capital propio invertido, menor es el ingreso mínimo requerido. Esto es exactamente lo mismo que decir que cuanto mayores son los depósitos utilizados (y, por lo tanto, menor el capital propio invertido) mayor debe ser el ingreso mínimo.

Vamos a suponer que cuando el banco cae en insolvencia, ello le implica un costo adicional, directamente proporcional a su déficit de ingresos. O sea, siempre que $Y < \hat{Y}$, que sufre un costo $a(Y-\hat{Y})$ donde a es una constante positiva. Como Y es una variable aleatoria, al principio del período el banco (que es nuestro ante el riesgo) puede estimar el costo esperado de su deficiencia de capital (o insolvencia):

$$S(K) = a \int_{-\infty}^{\hat{Y}(K)} (\hat{Y}(K) - Y)g(Y)dY \tag{45}$$

donde la integral representa la esperanza matemática de la deficiencia de capital, o sea, la deficiencia de capital esperada.

Los costos dados por la constante a pueden deberse a la necesidad de hacer cambios rápidos en la estructura de la cartera, lo cual puede implicar la interrupción de sus actividades normales. También pueden deberse a la pérdida de confianza de los clientes si se enteran de la situación. Por último, pueden deberse a la necesidad de obtener fondos adicionales en forma rápida y, por lo tanto, a mayor costo. En este último caso, se trata de costos asociados a los esfuerzos del banco para evitar una verdadera situación de insolvencia.

Sea ρ el costo de oportunidad del capital propio. Dada una ocurrencia de Y, el costo de financiamiento es

$$C(Y) = \begin{cases} i_D D + \rho K + a(\hat{Y}(K) - Y) & \text{si } Y < \hat{Y}(K) \\ i_D D + \rho K & \text{si } Y > \hat{Y}(K) \end{cases}$$

Luego, el costo esperado de financiamiento es

$$E(C) = i_D D + \rho K + S(K) = i_D L + (\rho - i_D)K + S(K).$$

El banco, que es neutro ante el riesgo por hipótesis, desea determinar el capital propio que minimiza su costo esperado de financiamiento. Por lo tanto, debe minimizar E(C) con respecto a K.

La condición de primer orden es

$$\frac{dE(C)}{dK} = \rho - i_D + S_K = 0$$

o sea

$$\rho - i_D = -S_K. \tag{46}$$

Nótese que

$$S_K = S_{\hat{Y}} \hat{Y}_K$$

con

$$S_{\hat{Y}} = a\frac{d}{d\hat{Y}} \int_{-\infty}^{\hat{Y}(K)} (\hat{Y}(K) - Y)g(Y)dY = \tag{47}$$

$$= a \int_{-\infty}^{\hat{Y}(K)} g(Y)dY.$$

$$\hat{Y}_K = -(1 + i_D).$$

Para calcular (47) hemos seguido la misma técnica de integración utilizada en la primera parte de esta sección.

Interpretemos ahora la condición (46). $\rho - i_D$ es el costo de oportunidad de incrementar el capital propio en el margen (en lugar de utilizar depósitos). $-S_k$ es la reducción en el costo de insolvencia esperado por incrementar el capital propio en el margen. Luego, la condición (46) dice que el capital propio (y, por lo tanto, los depósitos) debe determinarse de manera tal que se iguale el costo de oportunidad de un incremento en el capital propio con la reducción en el costo esperado de insolvencia.

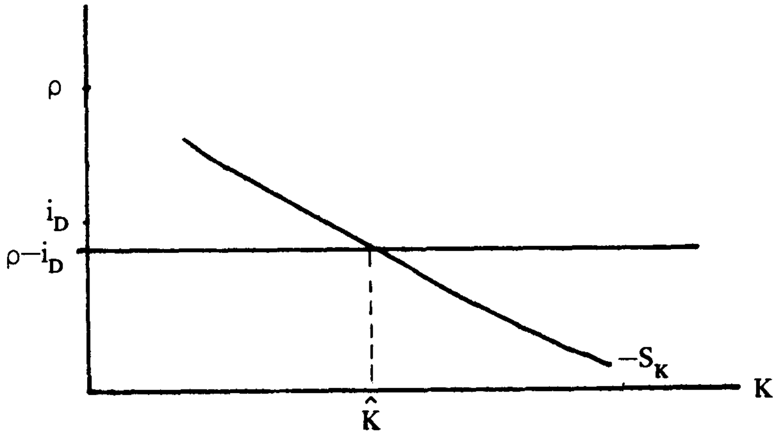

Figura 4

Obsérvese que cuando aumenta K, $\hat{Y}$ disminuye. Por (47), también disminuye la probabilidad de insolvencia (dada por la última integral de (47)), y, por consiguiente, el costo esperado de insolvencia. Por lo tanto, $S_{\hat{Y}}$ es una función decreciente y $-S_K$ también. En la Figura 2 se representa la determinación del nivel de capital propio de equilibrio. Si aumenta el costo unitario de deficiencia de capital propio, a, la curva decreciente se desplaza hacia arriba y aumenta el capital propio de equilibrio.

Cabe señalar que hubiéramos podido determinar $\hat{K}$ maximizando el beneficio esperado, $E(\Pi) = E(Y) - E(C)$, en lugar de minimizar el costo esperado. Como la distribución de Y está dada (y es conocida por el banco) su esperanza matemática (o media) es una constante conocida, $\bar{Y}$. Luego, el resultado hubiera sido el mismo.

Podemos ahora modificar el modelo de administración de pasivos en algunas direcciones. En particular, vamos a considerar a) el caso en que la tasa de interés pasiva depende del grado de *leverage* del banco, b) el caso en que hay seguro de depósitos, c) el caso en que hay costos derivados de la utilización de recursos reales.

a. Tasa de interés pasiva endógena

Supongamos que el pago total de intereses que efectúa el banco a los depositantes (T) depende de su estado de solvencia:

$$T = \begin{cases} i_D D & \text{si } Y > \hat{Y} \\ i_D D - (1 + a)(Y - Y) & \text{si } Y < \hat{Y}. \end{cases}$$

Si los depositantes saben esto, pueden estimar el pago esperado de intereses:

$$E(T) = i_D D - (1 + a)\int_{-\infty}^{\hat{Y}(D)} (\hat{Y} - Y) g(Y) dY$$

$$= i_D D - (1 + 1/a) S(\hat{Y}(D)).$$

Por lo tanto, el interés esperado por unidad de depósito, o tasa de interés efectiva, es

$$i_D^* = E(T)/D = i_D - (1 + 1/a)\frac{S(Y(D))}{D} \equiv i_D^* (D).$$

Dada la tasa nominal i_D, i_D^* depende de D. Podría darse el caso, por ejemplo, que i_D^* dependa negativamente de D. O sea, un aumento en los depósitos (a costa de capital propio y con un volúmen de préstamos dado) aumenta el costo esperado de insolvencia por unidad de depósito. Por ello, disminuye el interés esperado por unidad de depósito.

Pero si existe una situación competitiva, la tasa de interés nominal i_D no podría permanecer constante ante un aumento en los depósitos captados. Pues cuando el banco aumenta su exposición (o coeficiente de *leverage*), D/K, se ve obligado a incrementar la tasa de interés nominal. Ello se debe a que pasa a vender un producto de inferior calidad: la tenencia de un pasivo que le reditúa menos (en términos esperados) al depositante. Bajo condiciones competitivas, el banco debe elevar i_D de manera que se restablezca la tasa de interés efectiva de mercado. En definitiva, es como si i_D^* fuera constante ante variaciones en el volúmen de depósitos. Cabe observar que la dependencia de la tasa de interés pasiva con respecto al volúmen de depósitos, en este contexto, no tiene nada que ver con la competencia imperfecta.

El beneficio esperado del banco es

$$E(\Pi) = \tilde{\bar{Y}} - i_D^* D - \rho(L - D) - S(Y(D)).$$

Por consiguiente, la condición necesaria para un máximo es:

$$\rho - i_D^* = S_D .$$

Nuevamente, el costo de oportunidad de incrementar el capital propio en el margen debe ser igual a la reducción en el costo esperado de insolvencia.

b. Seguro de depósitos

Cuando los depósitos están asegurados, el riesgo de insolvencia se torna irrelevante para el depositante. Por lo tanto, la tasa de interés sobre los depósitos se vuelve independiente del grado de leverage del banco y, por lo tanto, del volúmen de depósitos. La calidad de los depósitos no disminuye a medida que estos aumentan.

Si la entidad aseguradora le cobra a los bancos una prima de riesgo acorde con su leverage, el problema de optimización del banco no se ve modificado pues éste le debe pagar al ente asegurador lo que en su ausencia le paga al depositante (por los riesgos que éste asume). Por supuesto, la entidad aseguradora, al asumir los riesgos de insolvencia de muchos bancos, probablemente esté en condiciones de ofrecer un seguro más barato que la prima de riesgo que exige el depositante individual en ausencia de un ente asegurador. Si hubieramos introducido una función de costos por recursos no financieros, tendríamos una reducción en la función de costos, con una reducción en el costo marginal. En tal caso, la existencia de un esquema asegurador haría incrementar el volúmen óptimo de depósitos y el grado ds exposición.

Cabe la posibilidad de que el ente asegurador cobre una prima fija (q) a los bancos, no importa cual sea su leverage. En ese caso, el beneficio esperado se torna

$$E(\Pi) = \hat{Y} - (i_D^* + q)D - \rho K - S =$$

$$= \bar{Y} - (i_D + q)D - \rho(L - D) - S/a =$$

$$= \bar{Y} - \rho L + (\rho - i_D - q)D - (1/a)S(\hat{Y}(D)).$$

y la condición de equilibrio es

$$\rho - i_D - q \equiv (1/a)S_D . \tag{48}$$

Como el costo esperado de insolvencia es creciente con D ($S_{DD} > 0$), se puede representar la condición de equilibrio de manera similar a la Figura 2, salvo que en este caso la curva es ascendente y representa el lado derecho de (48) y en el eje de la abcisa se tiene D en lugar de K. Dado L, cuanto mayor es D mayor es el costo esperado de insolvencia.

Evidentemente, si la prima de riesgo es igual para todos los bancos, se benefician aquéllos que tienen carteras más riesgosas y se perjudican los más cautos. Ante una situación tal, existe un claro incentivo para asumir posiciones riesgosas. Se tiene así un típico problema de "riesgo moral" (*moral hazard*), pues la existencia del seguro de depósitos (con prima uniforme) tiende a sesgar las carteras bancarias hacia posiciones más riesgosas, haciendo más complicada la determinación de la prima de riesgo en un contexto en que las carteras activas se determinan en forma endógena.

Por otro lado, si suscribir o no el seguro de depósitos es voluntario para los bancos y hay una prima fija, los bancos más cautos tienen un claro incentivo para no suscribir el seguro para no financiar a los temerarios. Se está, en este caso, ante un problema de "selección adversa" pues los bancos que tenderán a suscribir el seguro son los que tienen carteras más riesgosas. Nuevamente, el efecto es el de elevar la prima de seguro.

En ambos casos, el problema básico es uno de asimetría en la información. Los bancos tienen mejor información con respecto a la calidad de sus carteras que el ente asegurador. Como el ente asegurador sabe esto, debe tomar las precauciones del caso elevando la prima de seguro con respecto al caso en que hay simetría informativa.

c. Existencia de costos por el uso de recursos reales

En el modelo de administración de pasivos puede determinarse el volúmen de préstamos juntamente con la estructura de capital del banco mediante la introducción de los costos en recursos reales, de un modo totalmente simétrico a los que vimos en el modelo de administración de activos. Para ello, basta con suponer que la función de densidad g(Y) depende del volúmen de préstamos y es normal. El costo de insolvencia resulta ser

$$S(L,D) = \sigma_Y(L) \int_{-\infty}^{\hat{y}(D)} a(\hat{y} - y)\psi(y)dy$$

donde $\hat{y} = \hat{Y}/\sigma_Y$, y $\psi(y)$ es la función normal estándar. Si r es la tasa esperada de retorno sobre los préstamos, el beneficio esperado es

$$E(\Pi) = rL - i_D^* D - \rho(L-D) - C(L, D) - S(L, D)$$

y las condiciones de equilibrio son

$$r = C_L + S_L + \rho$$

$$\rho = C_D + S_D + i_D^* .$$

La primera condición dice que, en equilibrio, el ingreso esperado de un préstamo marginal debe ser igual al costo marginal (en recursos reales, en riesgo de insolvencia y en costo de oportunidad del capital propio). La segunda dice que el costo de oportunidad del capital propio debe ser igual al costo marginal (en recursos reales, en riesgo de insolvencia y en depósitos). De tal modo, se determina en forma endógena no sólo la estructura de los pasivos sino también la escala de operaciones, o sea, la magnitud de los activos.

REFERENCIAS

BALTENSPERGER, E., *Alternative approaches to the theory of the banking firm,* Journal · Monetary Economics, *Jan. 1980.*

COPELAND, T.E. y WESTON, F.F. *Financial Theory and Corporate Policy*, Second Edition, Addison Wesley, 1983.

EDGEWORTH, F.Y., *The mathematical Theory of Banking,* Journal of the Royal Statistical Society, 1888.

FRANCIS, J.C. y ARCHER, S.H., *Portfolio Analysis,* Prentice-Hall, 1971. Editado en castellano por Ediciones Ice como Análisis y Gestión de Carteras de Valores, 1977.

MARKOWITZ, Harry, *Portfolio Selection,* The Journal of Finance, March, 1952.

MITCHELL, D.W., *Some regulatory determinants of bank risk behavior,* Journal of Money Credit and Banking, August 1986.

NIEHANS, J. *The theory of money*, Baltimore, 1978.

ORR, D. y MELLON, W.G., *Stochastic reserve loans and expansion of bank credit,* American Economic Review 51, Sept. 1961.

PIERCE, James L., *Monetary and Financial Economics*, Wiley & Sons, 1984.

PYLE, D.H., *On the theory of financial intermediation*, Journal of Finance, June 1971.

SANTOMERO, A.M., *Modeling the Banking Firm: A Survey,* Journal of Money Credit and Banking, November 1984, Part. 2.

TEORIA DE CARTERAS Y DE LA INTERMEDIACION FINANCIERA

RESUMEN

Consiste en una exposición sintética de la teoría de carteras de Markowitz-Tobin y una reseña de diversos modelos sobre intermediación financiera. Luego de exponer la teoría de cobertura contra el riesgo de Pyle, aplicándosela al banco que hace préstamos riesgosos y tiene aversión absoluta al riesgo creciente. Seguidamente, se exponen el modelo de administración de reservas y el modelo de administración de pasivos, ambos en el caso competitivo, y se hacen diversas extensiones que incluyen la existencia de poder monopólico, de costos reales, de un coeficiente de encaje y de garantía para los depósitos.

PORTFOLIO AND FINANCIAL INTERMEDIATION THEORY

SUMMARY

This is a summary exposition of the Markowitz-Tobin portfolio theory followed by a survey of various models of financial intermediation. After a brief exposition of the return-risk theory of portfolio equilibrium. Pyle's theory of risk hedging is presented and applied to an increasingly absolute risk-averse bank that makes risky loans. The basic models of reserve management and liability management under uncertainty are exposited in the competitive case, and various extensions are presented which include the existence of monopoly power, real costs, a reserve coefficient and deposit insurance.