DIFERENCIA ENTRE LAS CLASES UV Y DV.

Marisa Gutierrez[♭] y Silvia B.Tondato[†]

[♭]*Conicet, Departamento de Matemática, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, marisa@mate.unlp.edu.ar, www.conicet.gov.ar, www.unlp.edu.ar*
[†]*Departamento de Matemática, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, tondato@mate.unlp.edu.ar, www.unlp.edu.ar*

Resumen: Los grafos cordales, utilizados para modelar problemas en Biología, fueron definidos como aquellos que no poseen ciclos inducidos de 4 o más vértices. En este trabajo se prueba que los grafos UV no DV minimales son los soles impares; utilizando árboles cliques y la caracterización de Monma y Wei. De aquí, se tiene entonces otra forma de obtener la familia de grafos no DV minimales a partir de la familia de los no UV minimales.

Palabras clave: *cordales, árboles clique*
2000 AMS Subject Classification: 21A54 - 55P54

1. INTRODUCCIÓN

Los grafos cordales fueron definidos como aquellos que no poseen ciclos inducidos de 4 o más vértices. Gavril [1] probó que un grafo es cordal si y sólo si existe un árbol, llamado árbol clique, cuyos vértices son los cliques del grafo y para cada vértice en el grafo, el conjunto de cliques que lo contienen forman un subárbol del árbol clique. A partir de esta caracterización fueron definidas distintas subclases de grafos cordales. Grafos UV: si existe un árbol clique cuya familia de subárboles resultan caminos. Dicho árbol se denomina UV-árbol clique. Grafos DV: si existe un árbol clique dirigido cuya familia de subárboles resultan caminos. Dicho árbol se denomina DV-árbol clique. De la propia definición, todo grafo DV es UV. También se sabe que los grafos DV, UV y Cordales son clases hereditarias, por ello admiten una caracterización por subgrafos prohibidos. Panda [4] encuentra los prohibidos para la clase DV basándose en una caracterización dada por Monma y Wei [3]. La familia de prohibidos para la clase UV fue obtenida de distintas maneras en [2] y en [5]. En este trabajo se prueba que los grafos UV que no son DV son exactamente los soles impares, proporcionando así una prueba alternativa para los resultados de Panda.

2. PRELIMINARES

En este trabajo los grafos son finitos, no dirigidos, simples, conexos y cordales. Un grafo G es un par (V, E), siendo V su conjunto de *vértices* y E su conjunto de *aristas*. Dos vértices u y v son *adyacentes o vecinos*, si existe un arista que los tiene como extremos. Denotamos $N(v)$ al conjunto de *vecinos* de v y $N[v]$ a $\{v\} \cup N(v)$. Si V' es subconjunto de V, $G[V']$ es el *subgrafo inducido* de G, su conjunto de vértices es V' y 2 vértices son adyacentes si y sólo si lo son en G. Un subconjunto C de V es un *clique* de G si $G[C]$ es un subgrafo completo maximal de G. $C(G)$ es el *conjunto de cliques* de G, y para cada v de V, $Cv = \{C \in C(G)|v \in C\}$. Un vértice a se dice *simplicial* si el conjunto formado por a y sus vecinos es un clique. El *grafo de intersección* de una familia de conjuntos $(F_i)_{i\in I}$, es el grafo cuyos vértices son los conjuntos de la familia, F_i y F_j son adyacentes siempre que su intersección sea no vacía. El *grafo clique valuado* es el grafo de intersección de la familia de cliques de G donde cada arista C_iC_j está valuada por el cardinal de la intersección de los cliques C_i y C_j.

Teorema 1 *[Gavril, [1]] G es cordal si y sólo si existe un árbol T cuyo conjunto de vértices es C(G) y para cada v vértice de G, C_v induce un subárbol en T.*

Un árbol que satisface las condiciones del Teorema 1 es denominado árbol clique de G. Se le dice *representación canónica* de G al par $(T, (C_v)_{v\in V(G)})$. Se sabe que los árboles clique son árboles generadores de peso máximo del grafo clique valuado y $(C_v)_{v\in V(G)}$ es una familia Helly y separadora.

Lema 1 ([5]) *Sea T un árbol clique de G, $V_0 = \{w \in V(G)|C_w \cap V(T_0) \neq \emptyset\}$ y T_0 un subárbol de T. $(T_0, (C_v \cap V(T_0)_{v\in V_0})$ es una representación canónica de $G[V_0]$.*

Un clique C se dice *separador* de G en componentes H_i para $i = 1, .., n$ si $G - C$ es no conexo.

A los grafos $G_i = G[H_i \cup C]$ se les dice *separados* de G por C. Sean G_i, G_j dos grafos separados de G por C se dice que: son *disjuntos* si para todo $C_1 \in C(G_i)$ y para todo $C_2 \in C(G_j)$, $C_1 \cap C_2 \cap C = \emptyset$; G_i *domina* a G_j si para todo $C_1 \in C(G_i)$ y para todo $C_2 \in C(G_j)$ o $C_1 \cap C_2 \cap C = \emptyset$ o $C_1 \cap C \supseteq C_2 \cap C$; son *antipodales* si existen $C_1 \in C(G_i)$ y $C_2 \in C(G_j)$ tales que $C_1 \cap C \cap C_2 \neq \emptyset$, $C_1 \cap C \not\supseteq C_2$ y $C_2 \cap C \not\supseteq C_1$.

Monma y Wei caracterizan a los grafos DV a partir de un clique separador C de G, construyendo un grafo auxiliar Π_C cuyo conjunto de vértices son los separados de G por C siendo adyacentes si y sólo si son antipodales.

Teorema 2 *[Monma-Wei, [3]] G es DV si y sólo si cada vértice de Π_C es DV y Π_C es 2-coloreable.*

3. ÁRBOLES CLIQUE.

En lo que sigue se enuncian propiedades de los árboles clique, algunas de las cuales fueron desarrolladas en [5].

Teorema 3 *[[5]] Sea T un árbol clique de G, AB una arista de T, B' un vértice de T tal que $A \in T[B, B']$ y $A \cap B \subset B'$. Entonces $T' = (T - \{AB\}) \cup \{BB'\}$ es un árbol clique de G.*

Prueba. Como T es un árbol generador de peso máximo entonces $A \cap B = A \cap B'$ y T' tiene el mismo peso que T. Luego T' es un árbol clique de G. □

En un árbol clique T de G, un vértice v de G se denominará *claw* de T si $T[C_v]$ no es un camino en T. Los grafos UV son aquellos para los cuales existe un árbol clique sin claw. En un árbol T un vértice se dice *hoja* si su grado es 1 en otro caso se dice *interno*. Se dice que un vértice a de G *cubre a un vértice* A de T, si $a \in A$. Respectivamente a *cubre a una arista* AB, si $a \in A \cap B$. Una arista de T cubierta sólo por vecinos de a se dice *a-arista*. Si H es una hoja de T, AB es una arista de T tal que $B \in T[A, H]$, un vértice v de G que está en B y no en A se dice *separador de B en dirección a las hojas* de T.

Corolario 1 *[[5]] G es UV y T es un UV árbol clique de G, AB una arista de T, B' una hoja de T tal que $A \in T[B, B']$ y $A \cap B \subset B'$. Entonces $T' = (T - \{AB\}) \cup \{BB'\}$ es un UV-árbol clique de G.*

Prueba. Por el Teorema 3, sabemos que T' es un árbol clique. Los únicos vértices de T que modifican su vecindad en T' son A, B y B'. Como B' es hoja de T, en T' tiene grado 2 con lo cual no puede formarse un claw. Tampoco puede formarse un claw centrado en A pues el grado de A en T' disminuye en uno y T es un UV-árbol clique. Si existiera un claw v, deberá centrarse en B con lo cual deberían existir C, C' vecinos de B en T tales que $v \in C \cap C' \cap B \cap B'$. Como T es un árbol clique $v \in A$ entonces v sería claw de T que es un UV-árbol clique, absurdo. □

En lo que sigue si T es un árbol clique de G y C es un vértice interno de T, es claro que C es un clique separador de G. Se notará $e_i = A_i B_i$ para $i = 1, .., k$ las aristas de T cubiertas sólo por elementos de C, siendo $A_i = C$ para $i = 1, .., l$ y B_i el extremo de e_i más lejano a C en T para todo $i = 1, .., k$. Sea $E = \{e_1, .., e_k\}$ y T_i la componente conexa de $T - E$ que tiene a B_i para $i = 1, .., k$.

Corolario 2 *Las componentes conexas de $G - C$ son exactamente $H_i = \{v \in V(G) | T_i \cap C_v \neq \emptyset\}$ y $T_i \cup B_i C$ es un árbol clique de $G[H_i \cup C]$.*

Prueba. Es claro que todo camino en $G - C$ corresponde a un camino en $T - E$ y recíprocamente. Luego H_i para $i = 1, .., k$ son las componentes conexas de $G - C$. Sea $T' = (T - A_i B_i) \cup B_i C$, por el Teorema 3, T' es un árbol clique de G y $T_i \cup B_i C$ es un subárbol de T'. Luego por el Lema 1 $(T_i \cup B_i C, (C_v \cap V(T_i \cup B_i C)_{v \in H_i \cup C})$ es una representación canónica de $G[H_i \cup C]$ □

Observar que $G[H_i \cup C]$ son separados de G por C.

Por otro lado, en un grafo cordal pueden distinguirse dos tipos de vértices simpliciales: *esenciales* y *no esenciales*. Un vértice simplicial a de un grafo G se dice esencial si $G - N[a]$ es no conexo, en otro caso se dice no esencial. Un grafo sin simpliciales esenciales se dice *compacto*. Un vértice w de G se dice *casi simplicial* si w es adyacente a un vértice simplicial de G y $|Cw| = 2$. Un grafo compacto sin casi simpliciales se dice *supercompacto*.

Corolario 3 *G es UV, si a es un simplicial esencial de G existe un UV-árbol clique de G, tal que C_a es un vértice interno del árbol.*

Prueba. Sea T un UV-árbol clique de G. Si C_a no es un vértice interno de T entonces C_a es una hoja de T. Como a es simplicial esencial de G entonces existe una arista $e = AB$ de T no incidente en C_a tal que e está cubierta sólo por vecinos de a. Luego considerando $B' = C_a$ en el Corolario 1, se tiene que $T' = (T - \{AB\}) \cup \{BB'\}$ es un UV-árbol clique de G que tiene a C_a como vértice interno. □

Un grafo es una *estrella* de k puntas si tiene como conjunto de vértices a $x_1, .., x_k, b_1, .., b_k$, siendo $\{x_i, x_{i+1}, b_i\}$ un clique para $i = 1, ..., k-1$, $\{x_1, x_k, b_k\}$ un clique y $\{x_1, .., x_k\}$ un clique.

Teorema 4 *[[5]] G es UV supercompacto y T un UV-árbol clique de G. Si X es un vértice de T de grado k adyacente a k-1 hojas de T entonces existen dos hojas C_y, C_z, adyacentes a X en T, siendo y, z vértices simpliciales de G y un vértice v de G tal que $C_v = \{C_y, C_z, X\}$. Además G tiene a una estrella como subgrafo inducido.*

Prueba. Como G es supercompacto, todo vértice de T adyacente a una hoja tiene grado mayor a 2, pues si el grado fuera 2, G tendría un casi simplicial lo cual es un absurdo. Si X es adyacente a k hojas entonces para separar X con caminos de T, debe existir un vértice como se enuncia. Si X es adyacente a $k-1$ hojas y a un vértice interno Y. Sea C_y hoja adyacente a X, como no existen vértices casi simpliciales, todo cubridor de XC_y está en al menos 3 cliques. Si dicho cubridor estuviera en otra de las hojas, se tiene el vértice deseado. Si no, entonces para toda hoja C_z, todo cubridor de XC_z está en Y. Luego X no está separado lo cual es un absurdo. De lo anterior, existen C_y, C_z hojas incidentes en X y v tal que $C_v = \{C_y, C_z, X\}$. Como $G - N[z]$ es conexo, entonces existe un vértice a que cubre C_yX y no C_z. Además por ser G supercompacto $|C_a| > 2$. Del mismo modo, $G - N[y]$ es conexo, luego existe un vértice b que cubre C_zX y no C_y. Como antes, por ser G supercompacto $|C_b| > 2$. Si $|C_a \cap C_b| > 1$ entonces G tiene como subgrafo inducido a una estrella de 3 puntas. Si en cambio es uno, alguno de los 2 vértices, para fijar ideas b, debe cubrir a una hoja C_c siendo c simplicial de G. Nuevamente existe un vértice d cubriendo XC_c y no C_z, además $|C_d| > 2$. Se analiza la intersección entre C_a, C_b y C_c. Se tiene que o bien G tiene como subgrafo inducido a una estrella de 4 puntas o a una estrella de 3 puntas o se continúa el razonamiento de manera recursiva hasta obtener el resultado. □

4. GRAFOS UV NO DV MINIMALES.

Un grafo es un *sol* si es una estrella con número impar de puntas. Un grafo G es *UV no DV minimal* si G no es DV pero para todo v vértice de G, $G - v$ es DV.

Teorema 5 *Los soles son grafos UV no DV minimales.*

Los siguientes resultados nos permiten probar la recíproca del Teorema 5.

Teorema 6 *G es UV y no es DV minimal entonces G es compacto.*

Prueba. Supongamos que G no es compacto, sea a un simplicial esencial de G. Por el Corolario 3, existe T un UV-árbol clique de G tal que C_a es un vértice interno de T y sea B_1 un vértice de T, o sea, un clique de G tal que $C_a - \{a\} \subseteq B_1$ y B_1C_a es arista de T.
Sean $R_1, .., R_l$ las ramas de T desde C_a tal que $R_i \cap R_j = \{C_a\}$ y $\bigcup_{i=1}^{l} R_i = T$ con $e_i \in E(R_i)$ para $i = 1, ..., l$ y como antes G_i los grafos separados por C_a de G tales que $B_i \in C(G_i)$ para $i = 1, .., k$ y Π_{C_a} el grafo definido por Monma y Wei.
Afirmación 1: Si $1 \leq i \leq l$ y $C(G_j) \subseteq V(R_i)$ entonces $G_j \leq G_i$. Por la posición que ocupan los cliques de G_j respecto de los cliques de G_i en T.
Afirmación 2: Si $1 \leq i \leq l$, $C(G_j) \cup C(G_h) \subseteq V(R_i)$ $h \neq j$ entonces G_j no es adyacente a G_h en Π_{C_a}. Si fueran adyancentes existirían $C_1 \in C(G_j)$ y $C_2 \in C(G_h)$ tales que $C_1 \cap C_2 \cap C_a \neq \emptyset$. Claramente existe $v \in C_1 \cap C_2 \cap C_a$, como $v \in C_a$ resulta $v \in B_1$. Luego $v \in C_1 \cap C_2 \cap C_a \cap B_1$. Por otro lado $j, h \neq 1$ y por la posición que ocupan C_1, C_2, B_1 se tiene que v es un claw de T que es un UV-árbol clique de G,

absurdo.
Afirmación 3: Si $l > 2$ entonces $G_1 \geq G_i$ para $i \neq 1$. Por la posición que ocupan en T los cliques de G_1 respecto de los de G_i.
Afirmación 4: Si $l > 2$ entonces G_i no es adyacente a G_j para $i, j \neq 1$. Si fueran adyacentes usando el mismo razonamiento empleado en la Afirmación 3, existiría un vértice claw en T que es un UV-árbol clique de G, absurdo.

Por las Afirmaciones anteriores se verifica que $A = \{G_1\}$ y $B = V(\Pi_{C_a}) - \{G_1\}$ es una bipartición de Π_{C_a}, con lo cual Π_{C_a} resulta 2-coloreable. Por la minimalidad de G como grafo no DV, cada G_i es DV. Por el Teorema de Monma y Wei, G resulta un grafo DV, absurdo. $\square$

Teorema 7 *G es UV y no es DV minimal entonces G es supercompacto.*

Prueba. Por el Teorema 6, G es compacto. Luego todo simplicial a de G es no esencial por ello el clique que contiene a es hoja de todo árbol clique. Si G no fuese supercompacto, existiría un v casi simplicial vecino de a, vértice simplicial de G, tal que $C_v = \{X, C_a\}$. Sea T un UV-árbol clique de G, es claro que X es un vértice interno de T.
Consideramos ahora una separación de G por X. Análogamente a lo hecho previamente, denotamos $e_i = A_iB_i$ para $i = 1, .., k$ a las v-aristas de T tales que para $1 \leq i \leq l$, $A_i = X$.
Sean $R_1, .., R_l$ las ramas de T desde X tal que $R_i \cap R_j = \{X\}$ y $\bigcup_{i=1}^{l} R_i = T$ con $e_i \in E(R_i)$ para $i = 1, ..., l$; G_i los grafos separados por X de G tales que $B_i \in C(G_i)$ para $i = 1, .., k$ siendo G_1 el grafo que tiene a C_a como uno de sus cliques y Π_X el grafo definido por Monma y Wei.
Afirmación 1: Si $1 \leq i \leq l$ y $C(G_j) \subseteq V(R_i)$ entonces $G_j \leq G_i$. Por la posición que ocupan los cliques de G_j respecto de los cliques de G_i en T.
Afirmación 2: Si $1 \leq i \leq l$, $C(G_j) \cup C(G_h) \subseteq V(R_i)$ $h \neq j$ entonces G_j no es adyacente a G_h. Si fueran adyancentes habría un claw en T que es un UV-árbol clique de G, absurdo.
Supongamos que Π_X no es bipartido entonces Π_X tiene un ciclo impar $G_{i_1}, .., G_{i_{2k+1}}$ con $k \geq 1$. Por la Afirmación 2, dos vértices consecutivos del ciclo no pueden estar en la misma rama R_i. Por otro lado, si G_{i_k} está en la rama R_j o bien $G_{i_k} = G_j$ con $1 \leq j \leq l$ o existe $G_j \geq G_{i_k}$ y se tiene entonces un nuevo ciclo obtenido reemplazando G_{i_k} por G_j que resulta ser un ciclo impar de Π_X. Luego por ser $G_{i_j}, G_{i_{j+1}}$ adyacentes existen $x_i \in B_{i_j} \cap B_{i_{j+1}} \cap X$ para $i = 1, .., 2k$ y $x_{2k+1} \in B_{i_{2k+1}} \cap B_{i_1} \cap X$. Observar que $v \neq x_i$ pues v está sólo en 2 cliques de G, C_a y X. Si b_{i_j} son los separadores de B_{i_j} en dirección a las hojas de T, el subgrafo inducido de G por los vértices $\{x_1, .., x_{2k+1}, b_{i_1}, .., b_{i_{2k+1}}\}$ es un sol impar que no tiene a v entre sus vértices, por ello resulta un subgrafo inducido de $G - v$. Absurdo pues $G - v$ debe ser un grafo DV.

$\square$

Como consecuencia del Teorema 7, se tiene la recíproca del Teorema 5, que nos permite obtener de otra forma la familia de grafos no DV minimales a partir de la familia de los no UV minimales.

Corolario 4 *G es UV no es DV minimal entonces G es un sol.*

Prueba. Por el Teorema 7 G es supercompacto. Luego por el Teorema 4 G tiene como subgrafo inducido a una estrella. Si toda estrella es par, sea T un UV-árbol clique de G, X un vértice de T sobre el cual se ubican los vértices de una estrella par. Se procede como en el Teorema anterior y se prueba que es posible biparticionar Π_X, con lo cual G resulta DV, absurdo. $\square$

REFERENCIAS

[1] F. GAVRIL, *The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs*, Journal of Combinatorial Theory (Series B), 16 (1974), pp. 47-56.

[2] B. LÉVÊQUE, F. MAFFRAY, M. PREISSMANN, *Characterizing paht graphs by forbidden induced subgraphs*, (enviado).

[3] C. MONMA, V. WEI, *Intersection graphs of paths in a tree*, J. Comb. Theory B, 41 (1986), pp. 141-181.

[4] B. S. PANDA, *The forbidden subgraph characterization of directed vertex graphs*, Discrete Mathematics, 196 (1999), pp. 239-256.

[5] S. B. TONDATO, DIRECTORES: M. GUTIERREZ, J. L. SZWARCFITER, *Tesis Doctoral: Grafos Cordales: Árboles clique y Representaciones canónicas*, (Junio 2009).

PROBLEMA DEL BC-COLOREO EN GRAFOS: FAMILIAS POLINOMIALES

G. Argiroffo[♭], G. Nasini[♭, †] y P. Torres[♭, †]

[♭]*Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250 Rosario, Argentina, {garua, nasini,ptorres}@fceia.unr.edu.ar*
[†]*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET) Argentina*

Resumen: Un *k-bc-coloreo* de un grafo es un k-coloreo tal que si dos vértices están coloreados con el color i, la distancia entre ellos es al menos $i+1$. El *número bc-cromático* de G, $\chi_{bc}(G)$, es el mínimo k tal que G admite un k-bc-coloreo. Calcular $\chi_{bc}(G)$ es NP-difícil. En este trabajo definimos dos tipos nuevos de perfección en grafos, relacionados con cotas inferiores del número bc-cromático, caracterizamos sus menores prohibidos y probamos que para estos grafos el cálculo de $\chi_{bc}(G)$ resulta polinomial.

Palabras clave: *grafos, coloreo, bc-coloreo*
2000 AMS Subject Classification: 05C15-05C17

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de coloreo de grafos constituyen una familia de problemas de la Teoría de Grafos de una gran relevancia tanto teórica como práctica (asignaciones de vuelos, asignaciones de frecuencias, problemas de almacenamiento, entre ellas). Los distintos tipos de coloreos surgen de las restricciones adicionales, propias de la naturaleza de la aplicación, que deben imponerse al problema clásico de coloreo. En particular, los problemas de sincronización de procesos paralelos y de asignación de frecuencias de radio han motivado una variedad de coloreos de grafos (ver, por ejemplo, [3] y [6]).

Un *k-coloreo* de un grafo $G = (V, E)$ es una función $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que si $f(u) = f(v)$, entonces $(uv) \notin E$ o, equivalentemente, si $d(u, v)$, la distancia entre u y v en G, es al menos 2. El *número cromático* de G, $\chi(G)$, se define como el mínimo k tal que G tiene un k-coloreo. Calcular $\chi(G)$ es un problema NP-difícil. Si $\omega(G)$ es el tamaño de la máxima clique en G, es fácil ver que, para todo grafo G, $\chi(G) \geq w(G)$.

Recientemente, Goddard et al. [4] introducen el *bc-coloreo* de un grafo $G = (V, E)$ como un k-coloreo de G tal que si dos vértices están coloreados con el color i, la distancia entre ellos debe ser al menos $i + 1$. Análogamente, el *número bc-cromático* de G, que notamos $\chi_{bc}(G)$, es el mínimo k tal que G admite un k-bc-coloreo. También es NP-difícil calcular $\chi_{bc}(G)$ (ver [4]). Claramente, todo bc-coloreo de G es un coloreo y por lo tanto $\chi_{bc}(G) \geq \chi(G) \geq w(G)$.

Una de las líneas tradicionales de trabajo en el área que es la determinación de familias de grafos donde el problema de calcular el número cromático resulte polinomial. La familia de los grafos perfectos constituye una de estas familias y su caracterización a través de subgrafos prohibidos fue un problema abierto por más de 40 años, resolviéndose en 2002 [2]. Los grafos perfectos son aquellos G para los cuales $\chi(G') = \omega(G')$ en todo subgrafo inducido por vértices G' de G.

El objetivo de este trabajo es la determinación de familias de grafos donde calcular el número bc-cromático resulte polinomial. En este sentido y en analogía con los antedecedentes para el coloreo tradicional, definimos dos tipos nuevos de perfección en grafos.

Claramente, $\omega(G)$ es también una cota inferior de $\chi_{bc}(G)$ y permite la definición de los grafos *bcω-perfectos* como aquellos grafos para los cuales $\chi_{bc}(G') = \omega(G')$ para todo subgrafo inducido por vértices G' de G. En este caso, todo grafo bcω-perfecto es perfecto y calcular $\chi_{bc}(G)$ resulta polinomial. El objetivo es entonces, determinar la complejidad computacional del problema de decidir si un grafo es bcω-perfecto. Para ello, en la Sección 2 logramos una caracterización de los mismos por menores prohibidos que nos permite concluir que el problema de decidir si un grafo es bcω-perfecto es polinomial.

En la Sección 3 presentamos una nueva cota inferior del parámetro $\chi_{bc}(G)$, que demostramos es más ajustada que $\omega(G)$. De esta manera, los grafos para los cuales el número bc-cromático de todos sus subgrafos inducidos asume esta nueva cota definen una familia mas amplia que la de los grafos bcω-perfectos, donde analizamos la complejidad computacional del problema de calcular $\chi_{bc}(G)$. Llamamos a estos grafos *bc-perfectos* y probamos que esta familia coincide con la familia de los co-grafos y que el cálculo de $\chi_{bc}(G)$ resulta polinomial.

2. GRAFOS BCω-PERFECTOS

En esta sección caracterizamos los grafos *bcω-perfectos* por menores prohibidos. Por simplicidad, diremos que G es un grafo *sin* H, si G no tiene a H como subgrafo inducido por vértices. Más aún, denotemos por $d(G)$ al diámetro de un grafo G, es decir la máxima distancia ente dos de sus vértices y $\alpha(G)$ a su número de estabilidad.

Tal como fue mencionado en la introducción, un grafo G es *bcω-perfecto* si $\chi_{bc}(G') = \omega(G')$ para todo subgrafo G' de G.

Es inmediato verificar que si G es alguno de los grafos en la Figura 1 (P_4, C_4 y $2-K_3$) $\chi_{bc}(G) > \omega(G')$.

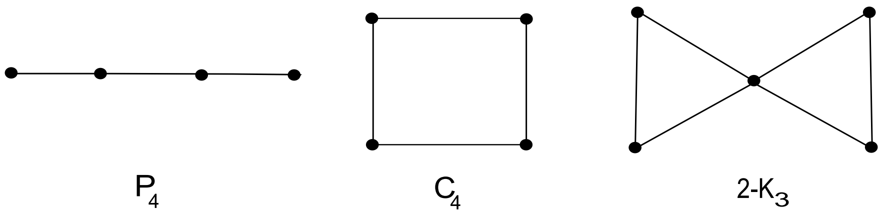

Figura 1: Grafos no bcω-perfectos

Por lo tanto, si G es bcω-perfecto, G es sin P_4, C_4 ni $2-K_3$. Veremos que en realidad estos menores prohibidos caracterizan a los grafos bcω-perfectos. Para ello utilizaremos los siguientes resultados

Lema 1 ([4]) *Sea G un grafo. Si para toda clique máxima Q de G se verifica que los vecinos de Q forman un conjunto estable, y al menos un vértice de Q no tiene vecinos en $V - Q$, entonces $\omega(G) = \chi_{bc}(G)$.*

Lema 2 *Si G es sin P_4, C_4 ni $2 - K_3$, todo subgrafo conexo de G satisface las condiciones del lema 1.*

Por lo tanto,

Teorema 1 *Un grafo G es bcω-perfecto si y solo si G es sin $2 - K_3$, P_4 ni C_4.*

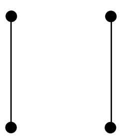

Figura 2: $2K_2$

Se sabe que un grafo conexo G es sin P_4 ni C_4 si y solo si todo subgrafo conexo de G tiene un vértice universal (ver [1]). Con este resultado, y recordando que un grafo *umbral* es un grafo sin $2K_2$ (ver Figura 2), P_4 ni C_4, obtenemos

Teorema 2 *Un grafo G es bcω-perfecto si y solo si cada una de sus componentes conexas es un grafo umbral.*

Puesto que el problema de reconocer si un grafo es umbral es polinomial (ver [5]), reconocer si un grafo es bcω-perfecto también resulta polinomial.

Además, como para todo grafo G sin P_4 resulta $d(G) \leq 2$, se sabe (ver [4]) que $\chi_{bc}(G) = n+1-\alpha(G)$. Como los grafos umbral son perfectos, tenemos que el problema de calcular el número bc-cromático de los grafos bcω-perfectos es polinomial.

3. Grafos bc-perfectos

Sean $G = (V, E)$ un grafo, $n = |V|$ y $k \geq 1$ entero. Un conjunto k-estable de G es un subconjunto $S_k \subset V$ tal que la distancia entre dos vértices distintos de S_k es al menos $k+1$. Llamamos *número de k-estabilidad* de G, y lo denotamos por $\alpha_k(G)$ al tamaño del máximo conjunto k-estable de G.

El c'alculo del número bc-cromático puede ser formulado como un problema de mínimo cubrimiento-empaquetamiento de nodos de G por k-estables. A partir del problema dual de la relajación lineal de su formulación como programa lineal $0, 1$, obtenemos el siguiente

Teorema 3 *Para todo grafo G, es* $\chi_{bc}(G) \geq 2n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(G)$.

Esto nos induce a definir el siguiente parámetro de un grafo:

$$\theta(G) = 2n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(G). \tag{1}$$

Observemos que es posible encontrar grafos G tales que $\theta(G') > \theta(G)$ para algún subgrafo G' de G. En efecto, es fácil verificar que $\theta(P_5) = 1$ y $\theta(P_4) = 2$. Por lo tanto, llamando

$$\omega_{bc}(G) = \text{máx}\{\theta(G') : \ G' \,\text{subgrafo de}\, G\},$$

obtenemos el siguiente

Teorema 4 *Para todo grafo G, es*

$$\chi_{bc}(G) \geq \omega_{bc}(G) \geq \omega(G).$$

Es fácil verificar que $\omega_{bc}(C_5) = 4 > 2 = \omega(C_5)$. Por lo tanto, $\omega_{bc}(G)$ es una cota inferior de $\chi_{bc}(G)$ más ajustada que la proporcionada por $\omega(G)$.

De esta manera, si llamamos *bc-perfecto* a un grafo G tal que $\chi_{bc}(G') = w_{bc}(G')$ para todo subgrafo inducido por vértices G' de G, a partir del Teorema 4 resulta que la familia de los grafos bc-perfectos contiene a los bcω-perfectos. En este caso C_4 y $2 - K_3$ resultan ser bc-perfectos y por lo tanto dicha contención es estricta. Sin embargo, P_4 no lo es ya que $\chi_{bc}(P_4) = 3 > 2 = \omega_{bc}(P_4)$.

Tenemos entonces que si G es bc-perfecto, G es sin P_4 lo cual incluye a los grafos bc-perfectos en la clase de los co-grafos. Es más, podemos probar que

Teorema 5 *G es bc-perfecto si y solo si G es un co-grafo.*

Nuevamente, como los co-grafos son perfectos, los grafos bc-perfectos también lo son y $\chi_{bc}(G) = n + 1 - \alpha(G)$. Por lo tanto, los grafos bc-perfectos constituyen una nueva familia donde el cálculo de su número bc-cromático es polinomial.

Referencias

[1] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs of Discrete Mathematics and Applications, 1999.

[2] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The Strong Perfect Graph Theorem*, Annals of Math. **164** (2006) pp. 51–229.

[3] J. Dunbar, D. Erwin, T.W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Broadcast in graphs*, Discrete Applied Mathematics 154 (2006) pp. 59–75.

[4] W. GODDARD, S. M. HEDETNIEMI, S. T. HEDETNIEMI, J. HARRIS, D. RALL, *Broadcast Chromatic Numbers of Graphs*, Ars Combinatoria 86 (2008) pp. 33–49.

[5] M. GOLUMBIC, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Pres Inc. 1980.

[6] J. R. GRIGGS, R. K. YEH, *The L(2,1)-labelling problem on graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 9 (1996) pp. 295–377.