SOBRE ARBOLES QUE SON GRAFOS LOOP PROPIOS

Nicolás Kepes, Liliana Alcón y Marisa Gutierrez

Grupo de Teoría de Grafos, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Resumen: Muchos problemas relativos al ADN pueden ser modelados usando Grafos de Intervalos. Sin embargo, los Grafos de Intervalos no toman en cuenta las estructuras repetidas en la molécula de ADN. Los Grafos Loop fueron introducidos para modelar el problema de mapeo del ADN cuando aparecen $probes$ repetidas, reformulando la definición de intersección entre intervalos. La clase de Grafos Loop contiene a la clase de Grafos de Intervalos y a la clase de Grafos Arco-Circulares.
En un trabajo previo se encontró una caracterización de los árboles que son Grafos Loop, por medio de configuraciones prohibidas minimales [1]. En este trabajo hallamos una caracterización de los árboles que son Grafos Loop Propios, y probamos que un árbol es Grafo Loop Propio si y solo si tiene a lo sumo 4 hojas.

Palabras clave: *GRAFOS LOOP, GRAFOS ARCO CIRCULARES, GRAFOS DE INTERVALOS*

1. INTRODUCCIÓN

Un Loop es un par (A, B) de intervalos cerrados $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2]$ de la recta real tal que $a_1 \leq a_2 < b_1 \leq b_2$ y $b_2 - b_1 = a_2 - a_1$. Notemos $b_1 - a_1$ con ℓ. Dado un intervalo $C = [c_1, c_2]$ definimos $C + \ell = [c_1 + \ell, c_2 + \ell]$ y $C - \ell = [c_1 - \ell, c_2 - \ell]$. Una representación loop de un grafo G consiste en un Loop junto con una familia de intervalos de la recta real $(A, B, \{I_v\}_{v \in V(G)})$ tal que vértices distintos u, v de G son adyacentes si y sólo si

$$I_u \cap I_v \neq \emptyset\,; \quad \text{o} \quad ((I_u \cap A) + \ell) \cap I_v \neq \emptyset \quad \text{o} \quad ((I_u \cap B) - \ell) \cap I_v \neq \emptyset.$$

Un *Grafo Loop* es un grafo que admite una representación loop; y será *Grafo Loop Propio* si existe alguna representación loop propia, es decir, una representación loop tal que para todo $v\,,\, k \in V(G)\,,\, v \neq k$ se tiene que $I_v \nsubseteq I_k$.

Consideremos la curva de la Figura 1 a la cual llamaremos *Soporte*, un segmento loop del soporte es un segmento de la curva de alguno de los tipos de la Figura 2.
En [1] fue probado que un grafo es Grafo Loop si y sólo si es grafo de intersección de una familia de segmentos loop del soporte. Un modelo loop de un grafo loop es una familia $\{I_v\}_{v \in V(G)}$ de segmentos loop del soporte tal que $v \sim w$ si y sólo si $I_v \cap I_w \neq \emptyset$. El ejemplo de la Figura 3 muestra un grafo loop propio, una representación loop propia y un modelo loop propio de él.

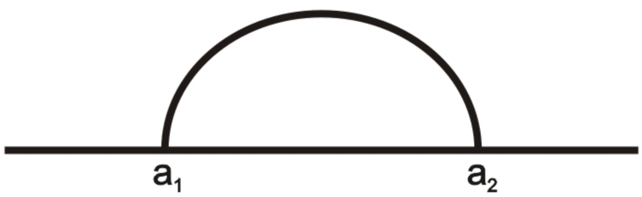

Figura 1: Soporte

Si E es un subconjunto conexo cerrado del soporte, la frontera de E consta de a lo sumo 4 puntos del soporte a los cuales llamaremos salidas de E.
Si G es Grafo Loop y K un subgrafo conexo de G, es claro que en cualquier modelo loop $\bigcup_{k \in V(K)} I_k$ es un conexo cerrado del soporte.

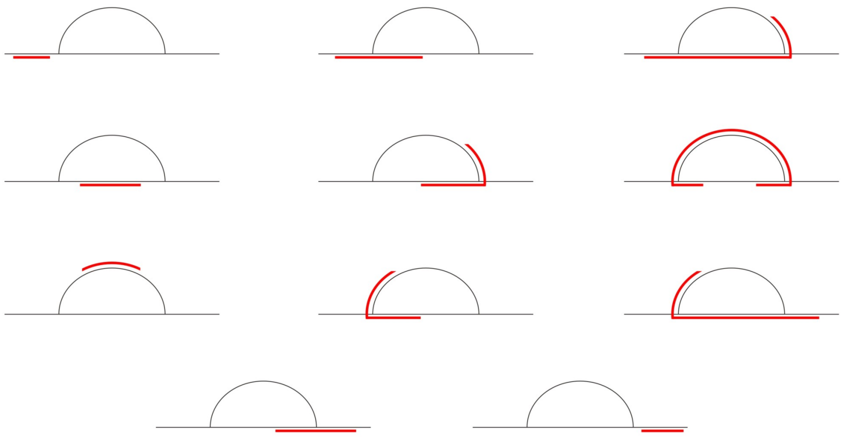

Figura 2: Tipos de segmentos loop

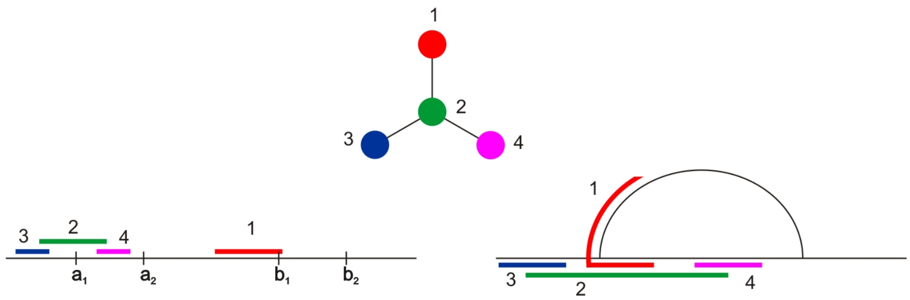

Figura 3: Un Grafo Loop Propio, una representación loop propia y un modelo loop propio de él.

Definición 1 *En un modelo loop de un grafo G, llamaremos salidas de un subgrafo conexo K a las salidas de* $\bigcup_{k \in V(K)} I_k$ *siendo I_k el segmento loop que representa al vértice k.*

Definición 2 *Sea K un subgrafo conexo de G. Un rayo de K es un vértice v de $V(G) - V(K)$ tal que existe un único vértice k de $V(K)$ adyacente a v.*
Notaremos al conjunto de rayos de K con $RAY(K)$, es decir:

$$RAY(K) = \{v \in V(G) - V(K) \,/\, \exists!\, k \in V(K) : v \sim k\}$$

2. Resultados

Teorema 1 *Sea K un subgrafo conexo de un Grafo Loop Propio G. En cualquier modelo Loop Propio de G para todo rayo w de K, I_w contiene una salida de K .*

Prueba. Si suponemos que I_w no contiene una salida de K, tenemos que:

$$I_w \subseteq \bigcup_{k \in K} I_k$$

Pero como w tiene grado 1 en $G[K \cup \{w\}]$ existe $k \in V(K)$ tal que $I_w \subseteq I_k$. Luego este modelo no será propio, absurdo. $\square$

En [1] fue probado que un árbol que es Grafo Loop si y sólo si no tiene como subgrafo inducido al grafo de la Figura 4.

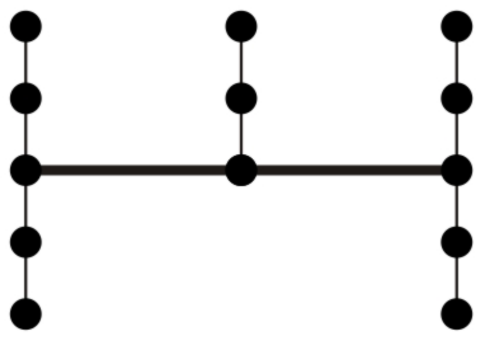

Figura 4: Grafo Prohibido Minimal para Árboles Loop. Las líneas gruesas representan caminos de cualquier longitud.

Teorema 2 *Un árbol T es Grafo Loop Propio si y sólo si tiene a lo sumo 4 hojas.*

Prueba.

Sea H el conjunto de todas las hojas de T.
$T - H$ es un árbol y por lo tanto es conexo, luego en cualquier modelo loop propio $T - H$ tiene a lo sumo 4 salidas.
$H = RAY(T - H)$ ya que cada hoja tiene sólo un vecino en $T - H$. Además por el Teorema 1 , para cada hoja h de T, I_h contiene una salida de $T - H$ en cualquier modelo loop propio.
Además es claro que si dos segmentos loop contienen una misma salida de un conexo del soporte, su intersección será no vacía y por lo tanto los vértices a los que representan serán adyacentes.
En este caso como todas las hojas forman un conjunto estable, cada una de ellas contiene exclusivamente una salida de $T - H$, luego T tiene a lo sumo 4 hojas.

Reciprocamente si T tiene a lo sumo 4 hojas, T es Grafo Loop [1].
Sea T' el árbol obtenido de T agregando a cada hoja h de T un nuevo vértice h' adyacente a h. Es claro que la cantidad de hojas de T' es la misma que la de T, luego T' es también Grafo Loop.
Si suponemos que T no tiene un modelo loop propio, en cualquier modelo loop existirán dos vértices h, v de $V(T)$ tales que $I_h \subseteq I_v$, y como T es un árbol es claro que h debe ser una hoja. Luego en este modelo loop no hay donde representar a h', ya que siempre resultaría $I_{h'} \cap I_v \neq \emptyset$ pero h' y v no son adyacentes en T'. Luego no hay un modelo loop para T'. Absurdo.

$\square$

REFERENCIAS

[1] LILIANA ALCÓN, MÁRCIA R. CERIOLI, CELINA M.H. DE FIGUEIREDO, MARISA GUTIERREZ, JOÃO MEIDANIS *Tree loop graphs*, Discrete Applied Mathematics, 155 (2007), 686-694.