

PROBLEMA DE MOMENTOS BIDIMENSIONAL

María Beatriz Pintarelli† y Fernando Vericat‡

†Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI), Universidad Nacional de La Plata y Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, mariabea@mate.unlp.edu.ar

‡ Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI), Universidad Nacional de La Plata e Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB) CONICET-La Plata, Argentina.

Resumen: Sea $\{u_{ij}\}_{i,j = 0,1,\dots}$ una secuencia de números reales. El problema de momentos de Hausdorff bidimensional (PMHB) consiste en hallar una función $f(x,y)$ en $L^2(I)$ con $I = (0,1) \times (0,1)$ tal que

$$u_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 x^i y^j f(x,y) dx dy \quad i, j = 0,1,2,\dots$$

Si la secuencia $\{u_{ij}\}_{i,j = 0,1,\dots,N}$ es finita se tiene el PMHB finito.

En este trabajo se plantea el PMHB pero en una región $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ y generalizamos un resultado sobre la estimación de la inexactitud de la solución $f(x,y)$ conociendo: el error en los datos, cierta información a priori de $f(x,y)$, y el número de momentos N . Damos una cota específica para la inexactitud de la estimación $f(x,y)$ en los diferentes casos que se presentan según cómo sea la región $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.

Palabras claves: *problema de momentos, densidad bi-dimensional, estabilidad de la solución, exactitud de la solución*
 2000 AMS Subjects Classification: 44A60 – 49N45

1. INTRODUCCIÓN

El problema de momentos bidimensional consiste en recobrar una función $f(x, y)$ dados sus momentos

$$u_{ij} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} x^i y^j f(x,y) dx dy \quad i, j = 0,1,2,\dots \tag{1}$$

Cuando el intervalo soporte $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ es tal que $a_1, b_1, a_2,$ y b_2 son finitos tenemos el problema de momentos de Hausdorff bidimensional.

El caso donde el intervalo soporte es $I = (0,1) \times (0,1)$ fue estudiado en relación con el fenómeno de conducción del calor por Ang y colaboradores [1]. Además aunque Ang estudia el problema de momentos en una región genérica $I \subset R^n$ sus resultados son muy generales, de manera tal que algún trabajo adicional es necesario para que ellos sean útiles desde un punto de vista computacional.

En este trabajo damos un teorema de estabilidad y un algoritmo para el problema de momentos finito bidimensional que consiste en hallar una función $f(x, y)$ a partir de sus momentos

$$u_{ij} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} x^i y^j f(x,y) dx dy \quad i, j = 0,1,2,\dots,N \tag{2}$$

Son presentadas cotas explícitas para la norma de $f(x, y)$ y un algoritmo para aproximar la solución al correspondiente problema finito con el espíritu del trabajo de Talenti [2]. Los datos $\{u_{ij}\}$ de la ecuación (2) podrían contener algún error.

Consideramos soluciones para este problema que pertenecen a $L^2[(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)]$.

Asumimos que el error en los datos tiene una magnitud estimada y que la solución $f(x, y)$ de interés tiene una derivada estimada.

Específicamente formulamos el problema de la siguiente manera. Dado un conjunto finito $\{\mu_{ij}\}_{i,j=0,1,2,\dots,N}$ de números reales y dados dos números positivos ε y E , encontrar una función absolutamente continua $f(x, y)$ en el intervalo $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ tal que

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left| \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} x^i y^j f(x, y) dy dx - \mu_{ij} \right|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (3)$$

y

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[(b_1 - a_1)^2 f_x^2(x, y) + (b_2 - a_2)^2 f_y^2(x, y) \right] dy dx \leq E^2 \quad (4)$$

Funciones verificando (3) y (4) existen para cierto rango de números N , ε y E . La ecuación (3) es una medida del error en los datos, mientras que la ecuación (4) da información a priori sobre $f(x, y)$.

Deseamos establecer estabilidad para el problema definido por las ecuaciones (3) y (4). Sin pérdida de generalidad podemos tomar $\mu_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, N$.

2. TEOREMA DE ESTABILIDAD

Teorema 1 Supongamos que la función $f(x, y)$ definida en $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ verifica para algún N , ε y E las condiciones dadas por las ecuaciones (3) y (4) (con $\mu_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 0, 1, \dots, N$). Entonces

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(x, y)|^2 dx dy \leq \min \left\{ \varepsilon^2 C(n, a_1, b_1) C(n, a_2, b_2) + \frac{E^2}{4(n+1)^2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \right\}$$

donde

1º) si $a_r \neq 0$; $b_r \neq 0$; $a_r + b_r \neq 0$ (con $r = 1$ o $r = 2$) entonces

$$C(n, a_r, b_r) = \begin{cases} (2n+1) \left(\frac{8}{b_r - a_r} \right)^{2n} 2^8 \frac{\frac{b_r^2}{(1-|b_r|)^2}}{(a_r + b_r)^2 (b_r - a_r) (8^2 - (b_r - a_r)^2)} & \text{si } |b_r| \neq 1 \text{ y } \left(\frac{8}{b_r - a_r} \right)^2 \neq 1 \\ (2n+1)(n+1)^2 2^2 \frac{\frac{b_r^2}{(1-|b_r|)^2}}{(a_r + b_r)^2 (b_r - a_r)} & \text{si } |b_r| \neq 1 \text{ y } \left(\frac{8}{b_r - a_r} \right)^2 = 1 \\ (2n+1)(n+1)^2 \left(\frac{8}{b_r - a_r} \right)^{2n} 2^8 \frac{1}{(a_r + b_r)^2 (b_r - a_r) (8^2 - (b_r - a_r)^2)} & \text{si } |b_r| = 1 \text{ y } \left(\frac{8}{b_r - a_r} \right)^2 \neq 1 \\ (2n+1)(n+1)^3 2^2 \frac{1}{(a_r + b_r)^2 (b_r - a_r)} & \text{si } |b_r| = 1 \text{ y } \left(\frac{8}{b_r - a_r} \right)^2 = 1 \end{cases}$$

2º) si $a_r \neq 0$; $b_r \neq 0$; $a_r + b_r = 0$ (con $r = 1$ o $r = 2$) entonces

$$C(n, a_r, b_r) = \begin{cases} (2n+1)(n+1)^2 2^3 \frac{1}{(1-b_r)^2} \frac{1}{b_r} \left(\frac{4}{b_r} \right)^{2n} \frac{1}{(4^2 - b_r^2)} & \text{si } b_r \neq 1 \text{ y } b_r \neq 4 \\ (2n+1)(n+1)^3 \frac{1}{(1-b_r)^2} \frac{1}{b_r} \frac{1}{2} & \text{si } b_r = 4 \\ (2n+1)(n+1)^4 2^{4n} \frac{2^3}{2^4 - 1} & \text{si } b_r = 1 \end{cases}$$

3º) si $a_r = 0$; $b_r > 0$ (con $r = 1$ o $r = 2$) entonces

$$C(n, a_r, b_r) = \begin{cases} (2n+1) \frac{1}{(1-b_r)^2} \frac{1}{b_r} \left(\frac{8}{b_r}\right)^{2n} \frac{2^8}{(8^2 - b_r^2)} & \text{si } b_r \neq 8 \text{ y } b_r \neq 1 \\ (2n+1)(n+1) \frac{2^2}{(1-b_r)^2} & \text{si } b_r = 8 \\ (2n+1)(n+1)^2 \frac{2^{6n}}{2^6 - 1} & \text{si } b_r = 1 \end{cases}$$

4º) si $a_r < 0$; $b_r = 0$ (con $r = 1$ o $r = 2$) entonces es análogo al anterior caso.

3. ALGORITMO

La solución al problema (3) y (4) puede ser aproximada resolviendo

$$\left. \begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(x, y)|^2 dx dy = \text{minimo} \\ \text{bajo las condiciones} & \\ & u_{ij} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} x^i y^j f(x, y) dx dy \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Considerando las proyecciones ortogonales sobre los subespacios de $L^2[(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)]$: el generado por $\{x^i y^j\}_{i,j=0,1,\dots,N}$ y el conjunto de las funciones de cuadrado integrable cuyos momentos $\{u_{ij}\}_{i,j=0,\dots,N}$ son cero entonces la solución al problema (5) debe ser un polinomio en las variables x y y . Por lo tanto

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \lambda_{ij} P_{ij}(x, y) \quad \text{donde} \quad P_{ij}(x, y) = L_i(x) L_j(y) \quad (6)$$

Siendo $L_i(x)$ el polinomio de Legendre en (a, b)

$$L_i(x) = \frac{\sqrt{2i+1}}{i!(b-a)^i \sqrt{b-a}} \frac{d^i}{dx^i} [(x-a)^i (x-b)^i]$$

y $\lambda_{ij} = \text{traza}(U^T \bar{C}_{ij})$ con $U = \{u_{ij}\}_{i,j=0,1,\dots,N}$ y

$$\bar{C}_{ij} = \begin{pmatrix} c_{i0} \\ c_{i1} \\ \vdots \\ c_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (c_{j0} \quad c_{j1} \quad \dots \quad c_{jj} \quad 0 \quad \dots \quad 0) \quad \bar{C}_{ij} \text{ es de orden } N+1 \quad (7)$$

Además c_{ij} es el coeficiente de x^j en $L_i(x)$ y está dado por

$$c_{ij} = \frac{\sqrt{2i+1}}{(b-a)^i \sqrt{b-a}} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k}^2 \sum_{l=0}^{i-k} \binom{i-k}{l} \binom{k}{j-l} (-a)^{i-k-l} (-b)^{k-(j-l)} \quad (8)$$

Entonces siguiendo una demostración paralela a la dada para el Teorema 1 se llega al siguiente

Teorema 2 Sea $p(x, y)$ dada por (6), (7) y (8) y supongamos que $f(x, y)$ es una solución para el problema (3) y (4), entonces

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |p(x, y)|^2 dx dy \leq (\text{traza}(UU^T)) C(N, a_1, b_1) C(N, a_2, b_2) \quad (9)$$

y

$$\frac{1}{E^2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |f(x, y) - p(x, y)|^2 dx dy \leq \frac{\epsilon^2}{E^2} C(N, a_1, b_1) C(N, a_2, b_2) + \frac{1}{4(N+1)^2} \quad (10)$$

donde E^2 es una cota para $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} [(b_1 - a_1)^2 f_x^2(x, y) + (b_2 - a_2)^2 f_y^2(x, y)] dy dx$

El Teorema 2 da estimadores de la estabilidad y exactitud del algoritmo (6), (7), (8). La desigualdad (9) da una idea sobre la estabilidad de la aproximación $p(x, y)$ con respecto a $\{u_{ij}\}_{i,j=0,\dots,N}$, mientras que la desigualdad (10) da idea sobre la exactitud. Se observa que la estabilidad estimada empeora a medida que N aumenta. En cuanto a la exactitud estimada se observa que manteniendo $\frac{\epsilon^2}{E^2}$ fijo e incrementando N de cero a infinito, primero mejora hasta alcanzar un valor mínimo y luego empeora notablemente. En la siguiente tabla se evalúa la expresión $\sqrt{\frac{\epsilon^2}{E^2} C(N, a_1, b_1) C(N, a_2, b_2) + \frac{1}{4(N+1)^2}}$ para los valores especificados de ϵ/E y N

En esta tabla se consideró un error en los datos del orden de 10^{-5} .

Para chequear el funcionamiento del algoritmo (6), (7), (8) se generaron momentos de la función $f(x, y) = k(\text{sen}x^2 + (1/4)y^2)$, (donde k es la constante de normalización), en $I = (1,5) \times (1,5)$. Se adicionó a los datos un error aleatorio del orden de 10^{-5} , y se calculó $p(x, y)$ mediante el algoritmo (6), (7), (8).

En las figuras 1, 2 y 3 se grafican simultáneamente las funciones $f(x, y)$ y $p(x, y)$ para $N = 2$, $N = 4$, y $N = 8$ donde la exactitud se calcula según (10).

ϵ/E	N	cota
0.0000182316	1	0.25
0.0000364633	2	0.166667
0.0000546949	3	0.125008
0.0000729265	4	0.100472
0.0000911582	5	0.102349
0.00010939	6	0.344568
0.000127621	7	1.81614
0.000145853	8	9.40391
0.000164085	9	47.2953
0.000182316	10	232.328
0.000200548	11	1119.6
0.00021878	12	5310.35
0.000237011	13	24852.4
0.000255243	14	114987.
0.000273475	15	526787.

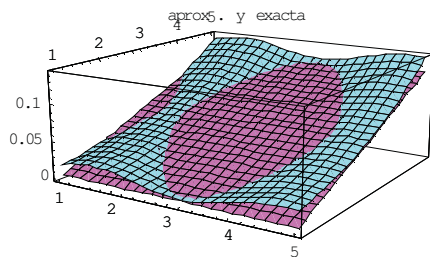


fig. 1: $N = 2$ Exactitud = 0.0367649
■ $p(x, y)$ ■ $f(x, y)$

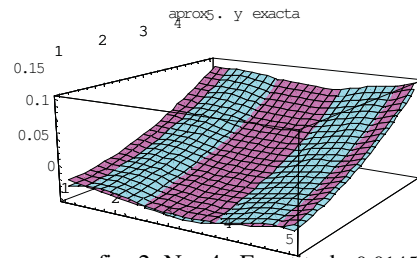


fig. 2: $N = 4$ Exactitud = 0.014518
■ $p(x, y)$ ■ $f(x, y)$

REFERENCIAS

- [1] D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le, D.D. Trong, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [2] G. Talenti, *Recovering a function from a finite number of moments*, Inverse Problems **3** (1987) 501-517.

CONVERGENCIA RADIAL DE REGULARIZACIONES DE TIKHONOV-PHILLIPS CON COMBINACIONES LINEALES DE PENALIZANTES DIFERENCIALES.

Gisela Luciana Mazzieri^{b,*}, Rubén Daniel Spies^{b,◇} y Karina Guadalupe Temperini^{b,*}

^b*Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, IMAL, CONICET-UNL, Santa Fe, Argentina.*

[◇]*Depto. de Matemática, Fac. de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.*

^{*}*Depto. de Matemática, Fac. de Humanidades y Cs., Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.*

^{*}*Depto. de Matemática, Fac. de Bioquímica y Cs. Biológicas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.*

Resumen: En este trabajo se consideran regularizaciones de tipo Tikhonov-Phillips obtenidas utilizando combinaciones lineales de penalizantes diferenciales. Se demuestra la convergencia de estas soluciones regularizadas en el caso de reglas de elección de parámetros vectoriales radiales y se caracteriza la solución de mínimos cuadrados límite. Finalmente se presenta un ejemplo de aplicación a un problema de restauración de imágenes.

Palabras clave: *Problema inverso, mal condicionamiento, inversa generalizada, regularización.*

2000 AMS Subject Classification: 47A52 - 65J20

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo consideraremos métodos de regularización para problemas inversos de la forma

$$Tx = y, \quad (1)$$

donde $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es un operador lineal, acotado y de rango no cerrado entre los espacios de Hilbert \mathcal{X} , \mathcal{Y} e y es un dato supuesto conocido, quizás con algún grado de error. Es bien sabido ([2]) que bajo estas condiciones el problema (1) es mal condicionado en el sentido que T^\dagger , la inversa generalizada de Moore-Penrose de T , no es continua. Por esta razón la inversión en (1) resulta entonces en un proceso inestable y el problema debe ser regularizado antes de cualquier intento por aproximar una solución x de (1). Una de las formas más usuales y conocidas de regularizar un problema mal condicionado es mediante los métodos de regularización de Tikhonov-Phillips. Estos métodos pueden formularse como el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathcal{D}(L)} \|Tx - y\|^2 + \alpha \|Lx\|^2, \quad (2)$$

donde $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ (aquí \mathcal{Z} es también un espacio de Hilbert) es un operador adecuadamente elegido, usualmente un operador diferencial ([3]) y α es el parámetro de regularización ([2]). De aquí en más supondremos que L es cerrado, densamente definido, sobreyectivo y satisface la siguiente “condición de complementación”:

$$\exists \gamma > 0 \text{ tal que } \|Tx\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(L). \quad (3)$$

Observar que (3) es equivalente a la condición de que el operador $T^*T + L^*L$ sea estrictamente positivo. Definimos $\mathcal{X}_L \doteq (\mathcal{D}(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_{T,L})$ donde $\langle x_1, x_2 \rangle_{T,L} \doteq \langle Tx_1, Tx_2 \rangle + \langle Lx_1, Lx_2 \rangle$. Puede probarse que \mathcal{X}_L así definido es un espacio de Hilbert. Sea T_0 la restricción del operador T al núcleo de L y denotemos con T_0^\dagger , T_L^\dagger , L_T^\dagger a las inversas generalizadas de Moore-Penrose de T_0 , T y L , respectivamente, cuando éstos son considerados como operadores en \mathcal{X}_L . Se sabe que bajo estas hipótesis, $x_L^\dagger \doteq T_L^\dagger y$ es la solución de mínimos cuadrados del problema (1) en $\mathcal{D}(L)$ que satisface $\|Lx_L^\dagger\| < \|L\tilde{x}\|$ para cualquier otra solución de mínimos cuadrados de (1) $\tilde{x} \in \mathcal{D}(L)$ (ver [2], Teorema 8.2). Con el objetivo de construir métodos de regularización que permitan hallar de manera estable soluciones aproximadas de la solución exacta x_L^\dagger , consideramos una familia paramétrica de funciones $\{g_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$, $g_\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ para $\alpha \in (0, \alpha_0)$

que satisface las siguientes hipótesis: (H1) para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $g_\alpha(\lambda)$ es continua por tramos para $\lambda \in [0, +\infty)$ y continua por derecha en los puntos de discontinuidad; (H2) existe una constante $C > 0$ (independiente de α) tal que $|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C$ para todo $\lambda \in [0, +\infty)$, para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$; (H3) para todo $\lambda \in (0, +\infty)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Puede probarse que la familia de operadores $\{R_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0)}$ definida por $R_\alpha \doteq T_0^\dagger + L_T^\dagger g_\alpha(B^*B)B^*$, donde $B \doteq TL_T^\dagger$, es una regularización de T_L^\dagger , es decir las soluciones aproximadas (regularizadas) $R_\alpha y$ convergen a la solución exacta x_L^\dagger cuando el parámetro de regularización α tiende a cero (ver [2], Teorema 8.7). Además, se puede probar que para cada parámetro α fijo, la solución regularizada $R_\alpha y$ obtenida con la familia de funciones $g_\alpha(\lambda) \doteq (\lambda + \alpha)^{-1}$, asociada al método clásico de Tikhonov-Phillips, coincide con la solución del problema de optimización (2) (ver [2], Ejemplo 8.11).

2. RESULTADOS PRINCIPALES.

La introducción del término penalizante en (2), por un lado permite inducir estabilidad y por otro, aproximar x_L^\dagger de manera tal que las soluciones aproximadas compartan con la solución exacta ciertas propiedades o características que uno presume, de antemano, que aquella posee. En consecuencia, es razonable suponer que una elección adecuada de dicho penalizante, basada en el conocimiento de cierto tipo de información “*a-priori*” acerca de la solución exacta, resultará en soluciones aproximadas que reflejen apropiadamente tales características.

De igual modo, es razonable suponer que la utilización simultánea de dos o más penalizantes de distinta naturaleza permita, de alguna manera, capturar distintas características de la solución exacta. Este tipo de problemas surge y es de particular interés, por ejemplo, en problemas de restauración de imágenes, en los cuales se sabe “*a-priori*” que la imagen original posee regiones muy regulares y otras muy irregulares, por ejemplo imágenes de tipo “*blocky*”. A continuación introduciremos un andamiaje matemático que nos permitirá abordar este problema y además echar luz sobre las propiedades que poseen las soluciones aproximadas correspondientes. A tal efecto sean \mathcal{X} , $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_N$ espacios de Hilbert, \mathcal{D} un subespacio denso de \mathcal{X} , $L_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, operadores cerrados y sobreyectivos. Supongamos además que existe i_0 , $1 \leq i_0 \leq N$, tal que L_{i_0} satisface la condición de complementación (3). A continuación presentamos dos resultados de convergencia y caracterización de las soluciones regularizadas del problema (1) cuando en (2) se considera un penalizante de la forma $\sum_{i=1}^N \alpha_i \|L_i x\|^2$, es decir queremos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in \mathcal{D}} \|Tx - y\|^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \|L_i x\|^2, \quad (4)$$

donde cada α_i es no negativo. Para ello sean $\vec{\alpha} \doteq \alpha \vec{\eta}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\vec{\eta} \doteq (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^T \in \mathbb{R}^N$ es un vector unitario con $\eta_i \in \mathbb{R}^+ \forall i$. Definamos $L_\eta \doteq (\sqrt{\eta_1}L_1, \sqrt{\eta_2}L_2, \dots, \sqrt{\eta_N}L_N)^T$ y $B_\eta \doteq TL_\eta^\dagger$.

Teorema 1 La familia $\tilde{R}_{\alpha, \vec{\eta}} \doteq T_{0, L_\eta}^\dagger + L_\eta^\dagger g_\alpha(B_\eta^*B_\eta)B_\eta^*$ es una regularización para $T_{L_\eta}^\dagger$; luego para todo $y \in \mathcal{D}(T_{L_\eta}^\dagger)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tilde{R}_{\alpha, \vec{\eta}} y = T_{L_\eta}^\dagger y$.

Prueba. Observar que

$$\|Tx - y\|^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \|L_i x\|^2 = \|Tx - y\|^2 + \sum_{i=1}^N \alpha \eta_i \|L_i x\|^2 = \|Tx - y\|^2 + \alpha \|L_\eta x\|^2.$$

Claramente L_η tiene las mismas propiedades que el operador L , es decir es cerrado y sobreyectivo. Además L_η satisface la condición de complementación. En efecto,

$$\|Tx\|^2 + \|L_\eta x\|^2 \doteq \|Tx\|^2 + \sum_{i=1}^N \eta_i \|L_i x\|^2 \geq \min\{1, \min\{\eta_i\}\} \left(\|Tx\|^2 + \sum_{i=1}^N \|L_i x\|^2 \right) \geq \gamma_\eta \|x\|^2,$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que L satisface la condición de complementación. Así hemos probado que $\tilde{R}_{\alpha, \vec{\eta}} \doteq T_{0, L_\eta}^\dagger + L_\eta^\dagger g_\alpha(B_\eta^*B_\eta)B_\eta^*$ es una regularización para $T_{L_\eta}^\dagger$ y por lo tanto, para todo $y \in \mathcal{D}(T_{L_\eta}^\dagger)$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tilde{R}_{\alpha, \vec{\eta}} y = T_{L_\eta}^\dagger y$. \square

Nota 1 Observar que $x_\eta^\dagger \doteq T_{L_\eta}^\dagger y$ es la mejor solución aproximada de $Tx = y$ para $x \in \mathcal{D}$, es decir, x_η^\dagger es la solución de mínimos cuadrados del problema $Tx = y$ con $x \in \mathcal{D}$ que satisface $\|x_\eta^\dagger\|_{T, L_\eta} \leq \|\tilde{x}\|_{T, L_\eta}$ para cualquier otra solución de mínimos cuadrados \tilde{x} .

A partir del teorema anterior se puede probar el siguiente resultado.

Corolario 1 Eligiendo $\vec{\alpha}$ y $\vec{\eta}$ como en el Teorema 1 ($\vec{\alpha} = \alpha\vec{\eta}$), para cada $\vec{\alpha}$ fijo la solución del problema de optimización: $\min_{x \in \mathcal{D}} J_{\vec{\alpha}}(x)$, donde $J_{\vec{\alpha}}(x) \doteq \|Tx - y\|^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \|L_i x\|^2$ coincide con la solución regularizada obtenida mediante el método de Tikhonov - Phillips generalizado con penalizante $\|L_\eta x\|^2$ y parámetro de regularización α , i.e. $\arg \min_{x \in \mathcal{D}} J_{\vec{\alpha}}(x) = \tilde{R}_{\alpha, \vec{\eta}} y$.

Del Teorema 1 y la Nota 1 vemos que si la regla de elección de parámetro vectorial $\vec{\alpha}$ se elige “radialmente”, i.e. $\vec{\alpha} = \alpha\vec{\eta}$ (con $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^N$ fijo), entonces las soluciones regularizadas $\tilde{R}_{\alpha, \vec{\eta}} y$ convergen, para $\alpha \rightarrow 0^+$ a la solución de mínimos cuadrados del problema (1) que minimiza $\vec{\eta} \cdot (\|L_1 x\|^2, \|L_2 x\|^2, \dots, \|L_N x\|^2)^T$. Observar que definiendo $\vec{\alpha}(\alpha) \doteq \alpha\vec{\eta}$ se tiene que $\frac{d\vec{\alpha}}{d\alpha}(0^+) = \vec{\eta}$. Creemos que el resultado de convergencia del Teorema 1 se puede obtener para reglas de elección de parámetro vectoriales más generales (no necesariamente radiales) derivables por la derecha en 0. Aunque este caso más general requiere redefinir adecuadamente la familia \tilde{R}_α , hay suficientes razones para creer que es la derivada de la regla de elección de parámetro vectorial en 0^+ la que “selecciona” una solución de mínimos cuadrados particular a la cual convergerán las soluciones regularizadas. Más precisamente, conjeturamos que si $\tilde{\alpha}(\alpha)$ es una regla de elección de parámetro y existe $\frac{d\tilde{\alpha}}{d\alpha}(0^+) = \vec{\eta}$, entonces las soluciones regularizadas $R_{\tilde{\alpha}} y$ (adecuadamente definidas) convergen, para $\alpha \rightarrow 0^+$ a $T_{L_\eta}^\dagger y$.

3. APLICACIONES A RESTAURACIÓN DE IMÁGENES.

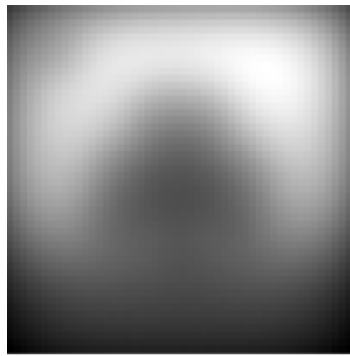
En la Figura 1 se muestran los resultados obtenidos en una aplicación a un problema de restauración de imágenes. Como podemos observar el método clásico de Tikhonov-Phillips de orden cero (TP0) es apropiado para restaurar regiones regulares (Fig. 1(c)) mientras que el uso de penalización por variación acotada (BV) ([1]) es más adecuado para restaurar regiones donde existen discontinuidades y resulta apropiado en problemas de detección de bordes (Fig. 1(d)). Las figuras Fig. 1 (e), (f) y (g) muestran los resultados obtenidos con tres diferentes aproximaciones radiales (ver Fig. 1(b)) del método “híbrido” aquí propuesto. Estas figuras muestran que una adecuada combinación lineal de ambos penalizantes permite retener los beneficios individuales de cada penalizante.

4. CONCLUSIONES.

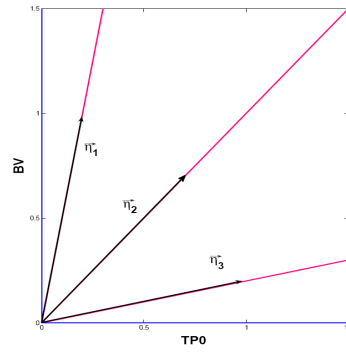
En este trabajo se consideraron regularizaciones del tipo Tikhonov-Phillips obtenidas utilizando combinaciones lineales de penalizantes diferenciales. Se probó la convergencia de estas soluciones regularizadas en el caso de reglas de elección de parámetro “radiales” y se caracterizó la solución de mínimos cuadrados límite. Se presentó un ejemplo de aplicación a un problema de restauración de imágenes.

REFERENCIAS

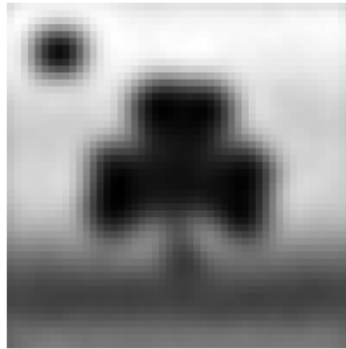
- [1] ACAR, R. AND VOGEL, C. R., *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*, Inverse Problems, 10 (1994), pp.1217-1229.
- [2] ENGL, H. W. AND HANKE, M. AND NEUBAUER, A., *Regularization of inverse problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.
- [3] LOCKER, J. AND PRENTER, P. M., *Regularization with differential operators. I. General theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 74 (1980), pp. 504-529.



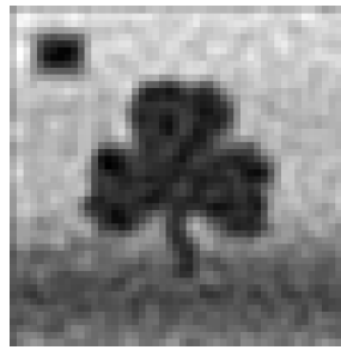
(a) Imagen distorsionada (dato del problema inverso).



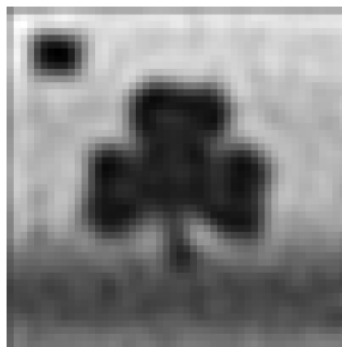
(b) Direcciones radiales.



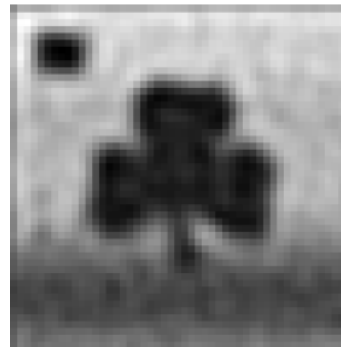
(c) Restauración con el método TP0.



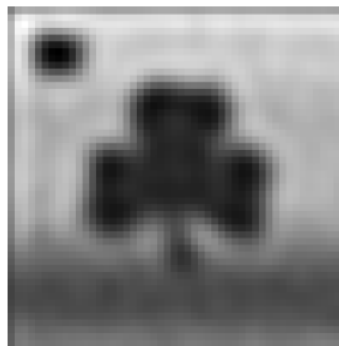
(d) Restauración con el método BV.



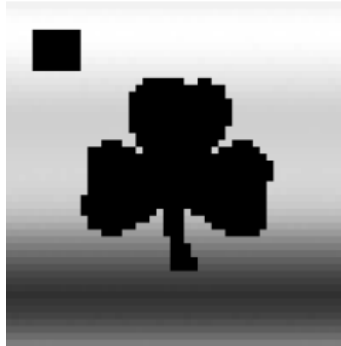
(e) Restauración con el método híbrido TP0-BV con $\vec{\eta}_3 \parallel (5, 1)$.



(f) Restauración con el método híbrido TP0-BV con $\vec{\eta}_1 \parallel (1, 5)$.



(g) Restauración con el método híbrido TP0-BV con $\vec{\eta}_2 \parallel (1, 1)$.



(h) Imagen original.

Figura 1: (a):Imagen distorsionada, dato del problema inverso; (b): direcciones radiales de restauración con el penalizante generalizado híbrido TP0-BV; (c): regularización obtenida con el método de Tikhonov-Phillips de orden cero; (d): regularización por variación acotada; (e), (f), (g): regularizaciones obtenidas con el método híbrido TP0-BV para diferentes direcciones radiales; (h): imagen original.