

VALIDACIÓN DE MODELOS DE FISURAS EN PLACAS DE MATERIALES COMPUESTOS POR ANÁLISIS DE VIBRACIONES

Juan F. Mayorga^a, Viviana Meruane^a y Virginia Quintana^{b,c}

^a*Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile, Av. Beauchef 851, Santiago, Chile, vmeruane@ing.uchile.cl*

^b*INIQUI-CONICET, Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, vquintan@unsa.edu.ar*

^c*Facultad de Ingeniería e Informática, Universidad Católica de Salta, Campo Castañares, 4400 Salta, Argentina.*

Palabras Clave: Placas, Materiales Compuestos, Fisuras, Modos de vibración

Resumen. Las estructuras construidas con materiales compuestos reforzados con fibras se utilizan con frecuencia en diferentes áreas de la ingeniería dado que exhiben excelentes propiedades mecánicas relacionadas a su elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso y además tienen la posibilidad de ser diseñados de acuerdo con requerimientos específicos. Entre las diferentes tipologías estructurales, las placas laminadas son utilizadas comúnmente, ya sea solas o formando parte de estructuras más complejas. Sin embargo, estos materiales están expuestos a distintos tipos de daños como delaminación, fractura de las fibras o fisuras en la matriz. Estos daños disminuyen las propiedades mecánicas de las placas pudiendo terminar en una falla catastrófica de la estructura. Por lo tanto, es de interés estudiar el comportamiento de las placas con daño, para poder desarrollar luego metodologías eficientes de identificación de daño. La presencia de una fisura en una placa, en general, genera una disminución de la rigidez y por consiguiente una disminución de las frecuencias naturales y un cambio local en la forma de los modos de vibración. En vista de lo anterior, el objetivo de este trabajo es validar experimentalmente un modelo de placa con fisura mediante el estudio de las propiedades modales. Para ello, se obtienen resultados experimentales de placas de plástico reforzado con fibra de vidrio (PRFV) en estado íntegro (sin daño) y con dos configuraciones de daño distintas. Los modos de vibración y frecuencias naturales experimentales se comparan con valores numéricos obtenidos a partir de una formulación variacional de un modelo de placa debilitada, con la presencia de una línea con rótulas elásticas intermedia. El análisis se lleva a cabo utilizando la teoría clásica de placas laminadas (CLPT).

1 INTRODUCCIÓN

Las placas anisótropas, en particular las constituidas de material compuesto reforzado con fibras, son extensamente utilizados en diversas industrias, como la aeroespacial, automotriz, etc. El rápido aumento del uso industrial de estas estructuras ha traído aparejada la necesidad de desarrollar técnicas analíticas y numéricas que sean apropiadas para el análisis del comportamiento mecánico de las mismas.

Por otro lado, las técnicas dinámicas son consideradas como los métodos de prueba no destructivos más relevante para determinar la presencia de daños en elementos estructurales (Sinha y col., 2002; Patil y Maiti, 2005). Las pruebas de identificación de daños pueden exigirse en los procedimientos de control de calidad o de producción o bien cuando la estructura puede estar dañada por cargas accidentales y su integridad debe ser verificada. En particular, las técnicas dedicadas a identificar la presencia de daños de placas compuestas de varias capas reforzadas con fibra son estudiadas en el dominio de la frecuencia (Ewins, 2000).

El efecto de un daño interno que provoca la ruptura de una o varias capas de fibras se puede modelar con la presencia de una línea de rótula plástica o elástica, que suele ser recta, en el caso de los materiales compuestos de varias capas con fibras unidireccionales. En general, la posición y la longitud de la fisura se desconocen y deben ser identificadas. Este problema inverso requiere la minimización de una función de costo que evalúe la diferencia entre la repuesta dinámica de la estructura dañada con respecto a la estructura íntegra o no dañada, la que se obtiene mediante la aplicación de expresiones analíticas o numéricas relacionadas con el modelo estructural teórico. Por otra parte, los resortes rotacionales ubicados en la línea de rótula, pueden ser usados para modelar un plano de fractura con una profundidad arbitraria (Yuan y Dickinson, 1992; Li y col., 2004).

Dado que la presencia de un daño en un elemento estructural introduce una flexibilidad local que modifica su comportamiento dinámico, el objetivo de este trabajo es aplicar técnicas de modelación inversa para detectar, a partir de las características dinámicas del sistema, la presencia de una zona debilitada en placas. La posición, la longitud y la flexibilidad de la línea de rótulas son variables desconocidas y se pretende identificarlas. En general, en los métodos de identificación, las características dinámicas del sistema en cada etapa de la simulación se obtienen mediante la aplicación del método de los elementos finitos (MEF). Una alternativa, es sustituir la aplicación del MEF por un algoritmo variacional directo (Quintana, 2014). Este algoritmo, en comparación al MEF, tiene la ventaja de modelar a la placa como un macro elemento lo que permite reducir los tiempos de cálculos. Por otra parte el proceso de minimización en sí mismo se lleva a cabo mediante diferentes métodos de optimización que permiten la estimación de los parámetros desconocidos (Tang y col., 2006; Yang y col., 2007). Quintana (2014) aplicó una técnica de Evolución Diferencial (ED), obteniendo resultados alentadores cuando se analiza el caso de una placa con una fisura de borde a borde. Otro camino, es recurrir a la estrategia de búsqueda a través de un algoritmo genético paralelo, el que ha demostrado ser un algoritmo robusto de identificación de daño (Meruane y Heylen, 2011).

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, el objetivo de este trabajo es identificar la presencia de una zona debilitada (posición, longitud, severidad de la grieta, etc.) en placas construidas con materiales compuestos reforzados con fibra a partir de las características dinámicas del sistema mediante la aplicación de un algoritmo de identificación de daños basado en algoritmos genéticos paralelos en combinación con una formulación variacional.

2 FORMULACION DEL PROBLEMA

La idea básica en las metodologías para identificar zonas dañadas en elementos estructurales es comparar la respuesta del sistema en su estado íntegro con las respuestas obtenidas cuando algún daño está presente. Resultados numéricos previos confirman que los procedimientos basados en las variaciones de las frecuencias y de los desplazamientos modales son más fiables que aquellos procedimientos clásicos basados solamente en las frecuencias de vibración (Savoia y Vincenzi, 2008; Friswell y col., 1994; Maia y col., 1997).

Para simular y obtener las características dinámicas de la placa laminada bajo análisis, se utiliza un algoritmo variacional directo (Quintana y Grossi, 2012 y 2014, Raffo y Quintana, 2017). En esta formulación, la placa se modela mediante un macro elemento y su cinemática es la correspondiente a la teoría clásica de placas laminadas (CLPT por sus siglas en inglés). Se asume que la zona debilitada por el efecto del daño es una línea recta con rótulas elásticas (ver Figura 1). La posición, la longitud y la rigidez de los resortes elásticos son parámetros desconocidos que caracterizan la zona debilitada del elemento y por lo tanto deben ser identificados para poder cuantificar el daño.

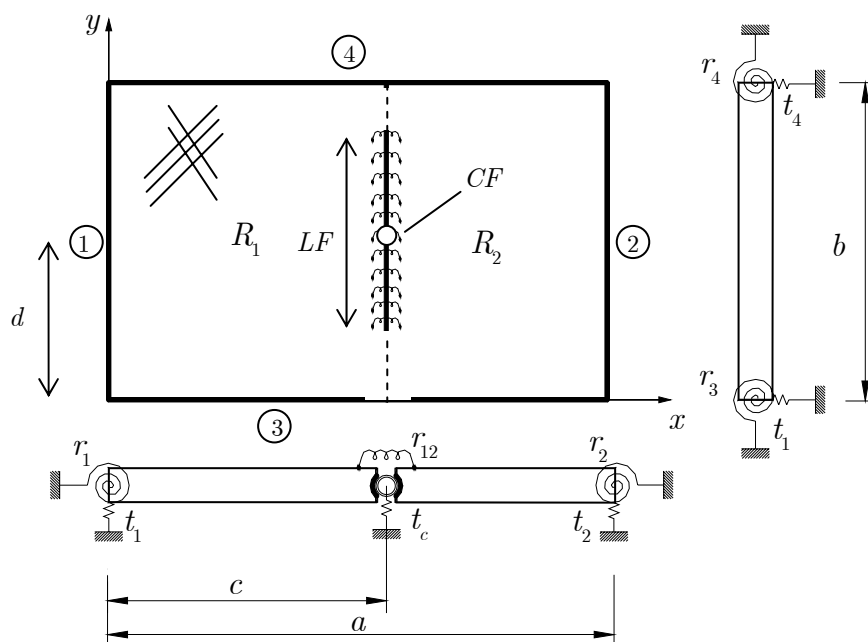


Figura 1. Descripción general del modelo – Parámetros

Los datos de entrada son los valores de las frecuencias de vibración y de los desplazamientos modales en posiciones arbitrarias de la placa dañada. Luego mediante un algoritmo genético paralelo se realiza la identificación dinámica de las variables desconocidas. En este trabajo, se sustituye la aplicación del MEF por el algoritmo variacional mencionado, el cual está basado en el método de Ritz. Este algoritmo, en comparación al MEF, tiene la ventaja de modelar a la placa como un macro elemento lo que permite reducir los tiempos de cálculos.

En los problemas de identificación dinámica, los parámetros desconocidos del modelo numérico se ajustan, mediante una función objetivo, con el fin de obtener las predicciones numéricas de los valores modales lo más cercanos posible a los valores medidos experimentalmente. La función propuesta depende de la diferencia entre los valores de las frecuencias y de las deformaciones modales obtenidos del modelo con los datos exactos impuestos y aquellos obtenidos con los valores provisionales de los parámetros desconocidos en cada simulación.

El error en frecuencia se representa como la razón entre los valores propios numéricos y experimentales,

$$\varepsilon_{\lambda,i}(\{\beta\}) = \frac{\lambda_{A,i}(\{\beta\})}{\lambda_{E,i}} - \frac{\lambda_{A0,i}(\{\beta\})}{\lambda_{E0,i}} = \frac{\omega_{A,i}^2(\{\beta\})}{\omega_{E,i}^2} - \frac{\omega_{A0,i}^2(\{\beta\})}{\omega_{E0,i}^2} \quad (1)$$

Los subíndices A y E se refieren a analítico y experimental respectivamente y el subíndice 0 se refiere al estado inicial sin daño. λ_i es el i -ésimo valor propio y ω_i la i -ésima frecuencia natural. β es un vector de parámetros asociados a la ubicación y profundidad de la fisura. La diferencia entre los modos se representa por medio del Modal Assurance Criterion (MAC). El MAC se define como,

$$MAC_i = \frac{(\phi_{A,i}^T \phi_{E,i})^2}{(\phi_{A,i}^T \phi_{A,i})(\phi_{E,i}^T \phi_{E,i})} \quad (2)$$

donde ϕ_i es la i -ésima forma modal. MAC es un factor que expresa la correlación entre los modos. Un valor de 0 indica que no hay correlación, mientras que un valor igual a 1 indica dos modos perfectamente correlacionados. Una ventaja de ocupar el MAC, es que no es necesario normalizar los modos, por lo tanto se pueden utilizar modos operacionales. El error se define por,

$$\varepsilon_{MAC,i}(\{\beta\}) = MAC_i(\{\beta\}) - MAC_{0,i}(\{\beta\}) \quad (3)$$

En las ecuaciones (1) y (2), la meta no es obtener un ajuste perfecto entre los modos numéricos y experimentales, pero si llegar a la misma correlación que en el caso sin daño. Esto toma en cuenta que el modelo numérico no coincide de forma perfecta con el modelo experimental.

La función objetivo es la suma normalizada de la sumatoria cuadrática de los errores más un término de penalización,

$$J(\{\beta\}) = \frac{F_{\lambda}(\{\beta\})}{F_{\lambda,0}} + \frac{F_{MAC}(\{\beta\})}{F_{MAC,0}} + \gamma \sum (\beta_i - \beta_{i,0}) \quad (4a)$$

$$F_{\lambda}(\{\beta\}) = \sum_i \varepsilon_{\lambda,i}^2(\{\beta\}) \quad (4b)$$

$$F_{MAC}(\{\beta\}) = \sum_i \varepsilon_{MAC,i}^2(\{\beta\}) \quad (4c)$$

donde $F_{\lambda,0}$, $F_{mac,0}$ se refieren a los valores iniciales de las sumatorias ($\beta=\beta_0$). La función de penalización hace que la búsqueda no se aleje mucho del valor inicial β_0 . Finalmente la optimización se realiza por medio de un algoritmo genético paralelo (Meruane y Heylen, 2011).

3 MONTAJE EXPERIMENTAL

En la Figura 2 se muestra el montaje experimental, donde se simula una fijación empotrada-libre (Raffo y Cardozo, 2013) para cada placa. Se deja una distancia de 1,5cm en la parte superior para el empotramiento tal como se aprecia en la Figura 3.



Figura 2. Montaje experimental.

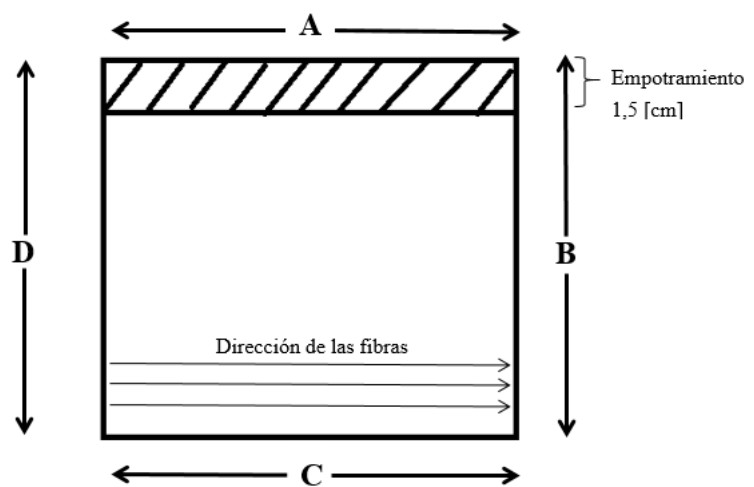


Figura 3. Disposición de las placas

Para obtener la respuesta en frecuencia se define una grilla de 25 puntos (ver Figura 4). El ensayo se realiza por medio un martillo modal, para esto se fija un acelerómetro de miniatura PCB Piezotronics 352B10 de sensibilidad 10,42 mV/g en el punto 1, y se golpean los 25 puntos con un martillo modal de sensibilidad 11,2 mV/g. Cada punto es excitado al menos 5 veces para obtener una función de respuesta en frecuencia promedio. Los datos se registran por medio un sistema de adquisición de marca ECON AVANT de 24 bits y la frecuencia de muestreo se define en 3000 Hz.

Las funciones de respuesta en frecuencia son importadas en el software FEMTools en donde se realiza un análisis modal experimental para obtener los modos de vibración y frecuencias naturales de las placas.

Se analizan tres placas distintas de resina epóxica reforzada con fibra de vidrio, denotadas cada una por U000, U051 y U052. En la Tabla 1 se muestran las dimensiones de cada uno de los lados de las placas, de acuerdo a la descripción que se ve en la Figura 3. Se tienen distintos tamaños ya que al ser manufacturadas manualmente las dimensiones de cada uno de los lados resultan diferentes, por lo que luego se trabaja con los valores promedio.

Las grietas son simuladas mediante sacados realizados con un router CNC, y en la Tabla 2 se muestran tanto la profundidad como la ubicación de estos cortes con respecto al lado superior (lado A).

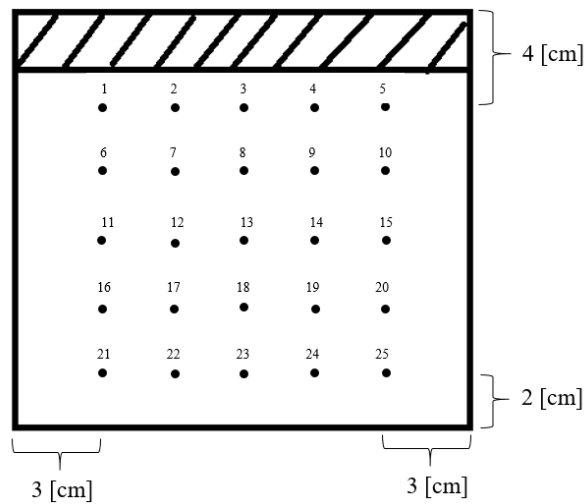


Figura 4. Grilla de puntos medios

Placa	A [cm]	B [cm]	C [cm]	D [cm]
U000	18,4	18,0	18,6	17,7
U051	18,6	17,9	18,6	18,2
U052	18,3	17,9	18,3	17,9

Tabla 1. Dimensiones reales de cada placa.

Placa	Profundidad del corte [mm]	Ubicación desde A [cm]
U000	-	-
U051	0,8	4,5
U052	0,8	11,7

Tabla 2. Ubicación y profundidad del corte para cada placa.

También, dentro de los parámetros necesarios para el cálculo teórico de las frecuencias de vibración es necesario definir la relación de lados de la placa dada por $r = a/b$ y su espesor h . En este caso de estudio, a es el valor promedio del lado perpendicular a las fibras y b el valor promedio del lado paralelo a las fibras. En la [Tabla 3](#) se muestra el valor de estos parámetros para cada una de las placas analizadas.

Placa	$r = a/b$	h [mm]
U000	0,884	2,58
U051	0,890	2,45
U052	0,896	2,45

Tabla 3. Valores de parámetro de forma y espesor para cada placa.

4 RESULTADOS OBTENIDOS

4.1 Placa en estado íntegro

En primer lugar, se lleva a cabo un análisis de la placa en estado íntegro o sin daño con el objeto de determinar y luego actualizar, las propiedades mecánicas del compuesto reforzado en el modelo numérico (constantes de elasticidad y densidad). En la [Figura 5](#) se muestran los primeros cuatro modos de vibrar que se obtuvieron experimentalmente. Luego, en la [Tabla 4](#) se presenta la correlación entre el modelo ajustado y los modos experimentales.

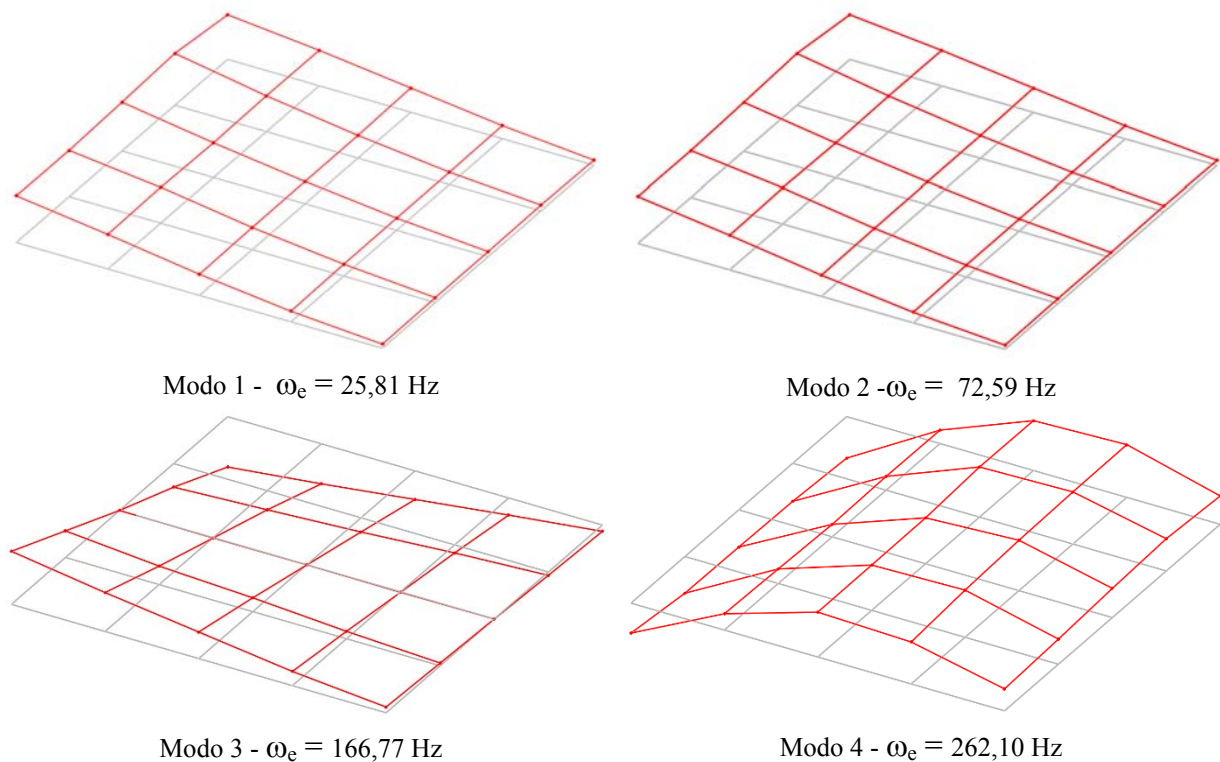


Figura 5. Primeras cuatro frecuencias y modos de vibrar experimentales.

Modo	ω_n (Hz)	ω_e (Hz)	$\Delta\omega$ (%)	MAC
1	26,64	25,81	-3,22	0,99
2	71,55	72,59	1,42	1,00
3	166,85	166,77	-0,05	0,94
4	254,34	262,10	2,96	0,98

Tabla 4. Correlación numérico-experimental para la placa sin daño.

4.2 Placa con una línea de fisura de borde a borde

En la [Tabla 5](#) se muestran las frecuencias naturales experimentales para las tres placas analizadas. Como es de esperar se observa una reducción en las frecuencias naturales con la presencia del daño experimental.

Frecuencia	U000 [Hz]	U051 [Hz]	U052 [Hz]
1	25,88	22,67	22,57
2	72,59	66,22	66,40
3	166,98	147,11	143,79
4	262,16	241,30	244,66

Tabla 5: Resultados para las primeras cuatro frecuencias naturales experimentales de cada placa.

El daño experimental se modeló numéricamente como una línea con rótulas de borde a borde, tal como se muestra en la Figura 6.

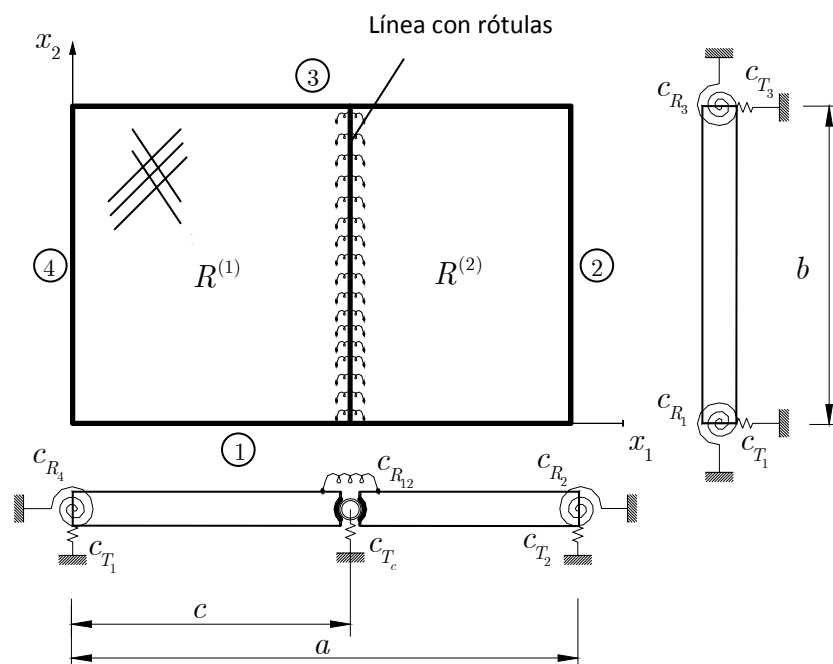


Figura 6. Placa rectangular con una línea intermedia con rótulas restringidas elásticamente.

En este caso, el problema de identificación tiene dos variables, la posición de la línea $\bar{c} = c/a$ y la rigidez del resorte rotacional R_{12} . Por conveniencia numérica, el valor del parámetro R_{12} se normaliza de la siguiente manera:

$$R_{12} = \frac{R_D}{1-R_D}, \text{ entonces } R_D \in (0,1) \quad (5)$$

Por lo tanto la variable R_{12} es remplazada por R_D . En vista de lo anterior, el espacio de búsqueda de los parámetros de optimización se limita a: $R_D \in (0,1)$ y $\bar{c} \in (0,1)$. En la Tabla 6 se entregan los resultados obtenidos para la identificación de daño en cada placa. El parámetro R_D es similar para ambas placas, lo que era esperado pues tienen una grieta con la misma profundidad. Por otro lado, el valor del parámetro \bar{c} que define la posición del daño se parece bastante al valor esperado en cada placa.

Placa	R_D	\bar{c} obtenido	\bar{c} esperado
U051	0,83	0,21	0,18
U052	0,78	0,60	0,62

Tabla 6: Identificación de daño para cada placa.

En la [Tabla 7](#) y [Tabla 8](#) se muestra la correlación entre los valores obtenidos con el modelo numérico con daño y los medidos experimentalmente para cada placa. Para el caso de las placas con daño hay una menor correlación con el modelo numérico, el MAC mínimo es 0,87 y la diferencia máxima en frecuencia es de 10,8 %. Esta diferencia se puede deber a la simulación de las condiciones de borde experimental, ya que es muy difícil lograr físicamente un empotramiento perfecto.

Modo	ω_n (Hz)	ω_e (Hz)	$\Delta\omega$ (%)	MAC
1	22,80	22,67	-0,56	0,99
2	66,17	66,22	0,07	0,99
3	154,64	147,11	-5,12	0,92
4	236,38	241,30	2,04	0,98

Tabla 7. Correlación numérico-experimental para la placa U051.

Modo	ω_n (Hz)	ω_e (Hz)	$\Delta\omega$ (%)	MAC
1	25,01	22,57	-10,80	0,99
2	68,47	66,40	-3,12	0,99
3	143,79	143,79	0,00	0,87
4	236,76	244,66	3,23	0,94

Tabla 8. Correlación numérico-experimental para la placa U052.

5 CONCLUSIONES

Se demostró que el uso de un algoritmo genético paralelo en combinación con el algoritmo variacional directo, resulta efectivo para analizar placas de plástico reforzado con fibra de vidrio (PRFV) con una fisura experimental de borde a borde. El modelo reproduce con precisión los modos experimentales, para el caso sin daño, el MAC mínimo es 0,94 y la diferencia en frecuencia máxima es de 3,22%. De los resultados de la identificación de daño se puede concluir que el modelo propuesto representa de forma correcta una fisura experimental.

No obstante, del análisis de los resultados obtenidos, se propone realizar nuevamente este estudio usando placas con condiciones de borde libre-libre con el objeto de evitar o disminuir los errores asociados a las condiciones de borde dado que es sumamente complejo simular experimentalmente un empotramiento perfecto.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa N°2153) y por el Consejo de Investigación de la Universidad Católica de Salta (Proy. Res. 1734/116).

REFERENCIAS

- Ewins, D.J., 2000. *Modal Testing: Theory and Practice*. New York: John Wiley & Sons.
- Friswell, M. I., Penny, J.E.T., Wilson, D.A.L., 1994. Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures, *Modal Analysis. The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 9 (4), 239–254.
- Grossi, R.O., 2012. Boundary value problems for anisotropic plates with internal line hinges.

- Acta Mechanica, 223:125–144.
- Li, T.Y., Liu J.X., Zhang T., 2004. Vibrational power flow characteristics of circular plate structures with peripheral surface crack. *Journal of Sound and Vibration* 276:1081–1091.
- Maia N.M.M., Silva J.M.M., He J. 1997. Theoretical and experimental modal analysis.
- Meruane V., Heylen W. 2011. Structural damage assessment with antiresonances versus mode shapes using parallel genetic algorithms. *Structural Control and Health Monitoring*, 18(8), pp. 825-839, 2011.
- Patil D.P., Maiti S.K., 2005. Experimental verification of a method of detection of multiple cracks in beams based on frequency measurements. *Journal of Sound and Vibration* 281, 439-451.
- Quintana, M.V., 2014. Aplicación de técnicas de evolución diferencial para identificar líneas de rótulas en placas. *Cuadernos de la Facultad de Ingeniería e Informática (UCASAL)* 8, 53-65.
- Quintana, M.V., Grossi, R.O., 2014. Free vibrations of a Trapezoidal Plate with an Internal Line Hinge. *The Scientific World Journal*, 10 pages, doi:10.1155/2014/252084.
- Quintana, M.V., Grossi, R.O., 2012. Free vibrations of a generally restrained rectangular plate with an internal line hinge. *Applied Acoustic*, 73:356–365, 2012.
- Raffo J., Quintana M.V., 2017. Natural vibrations of anisotropic plates with an internal curved line. *International Journal of Mechanical Sciences*. 120 301-310.
- Reddy J.N. 2004. *Mechanics of Composite Laminated Plates and Shell: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, Florida. Research Studies Press, Somerset, England.
- Savoia M., Vincenzi L., 2008. *Differential Evolution Algorithm for Dynamic Structural*
- Sinha J.K., Friswell M.I., Edwards S., 2002. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. *Journal of Sound and Vibration*, 251, 13-38.
- Yuan J. y Dickinson S.M., 1992. The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh–Ritz method, *Journal of Sound and Vibration* 159 (1): 39–55.