

## MODELADO MATEMÁTICO DEL PROCESO DE DESHIDRATACIÓN OSMÓTICA COMBINADO CON LA APLICACIÓN DE MICROONDAS COMO ETAPA FINAL

J. Ramiro Arballo †‡, Laura A. Campañone †‡ y Rodolfo H. Mascheroni †‡

† CIDCA, Centro de Investigación y Desarrollo en Criotecología de los Alimentos (CCT-La Plata, UNLP), 47 y 119 (1900), La Plata, Buenos Aires, Argentina, [www.cidca.org.ar](http://www.cidca.org.ar)

‡ Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 47 y 1 (1900), La Plata, Buenos Aires, Argentina, [rmmasche@ing.unlp.edu.ar](mailto:rmmasche@ing.unlp.edu.ar), [www.ing.unlp.edu.ar](http://www.ing.unlp.edu.ar)

Resumen: En este trabajo se plantearon los balances microscópicos de energía y materia con el fin de describir los fenómenos puestos en juego durante los procesos de deshidratación osmótica de alimentos frutihortícolas combinado con la aplicación de microondas. Los balances constituyen ecuaciones diferenciales no lineales altamente acopladas que fueron resueltas aplicando métodos numéricos; la solución de las mismas se programó en Matlab 7.2. Los resultados del modelo matemático se contrastaron con datos experimentales de temperatura y humedad obtenidos en nuestro laboratorio durante la deshidratación combinada de peras. El modelo matemático fue validado exitosamente y se puede emplear para predecir perfiles de humedad y de temperatura durante los procesos combinados de deshidratación osmótica y microondas.

Palabras claves: *Modelado matemático, Deshidratación osmótica, Microondas.*

2000 AMS Subjects Classification: 21A54 - 55P54

### 1. INTRODUCCIÓN

Deshidratación osmótica es una técnica ampliamente utilizada para la remoción parcial del agua de frutas y vegetales por inmersión en solución hipertónica (osmótica) de azúcares, polialcoholes y/o sales. El proceso osmótico es un método suave para la remoción de humedad de los tejidos vegetales, la actividad final de agua alcanzada es alta, siendo necesarios procesos adicionales, tales como secado por microondas (1). Las microondas interactúan con las moléculas de agua en el interior del alimento, incrementando la presión de vapor, y aumentando la fuerza impulsora para la deshidratación (2).

Con el fin de modelar matemáticamente el proceso combinado de deshidratación osmótica seguido de la aplicación de microondas es necesario plantear y resolver los balances microscópicos de energía y materia en ambos procesos, los cuales conforman sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales altamente acopladas. En el caso del proceso de la deshidratación con microondas también es necesario describir la interacción de la radiación con el alimento. Con ese propósito se puede emplear la ley de Lambert, la cual considera un decaimiento exponencial de energía dentro del alimento (3). Cuando es formulada correctamente, ésta permite predecir – con adecuada exactitud – la distribución de la radiación en el interior del producto (4). De acuerdo con las consideraciones previas los objetivos de este trabajo son:

- Plantear y resolver los balances microscópicos de materia y energía durante la deshidratación osmótica seguida de la aplicación de microondas, considerando las propiedades térmicas, electromagnéticas y de transporte variables con la temperatura y el estado del producto (húmedo y deshidratado).

- Validar las predicciones del modelo (temperatura y humedad) con datos experimentales obtenidos en nuestro laboratorio empleando peras (variedad Packam's triumph).

### 2. MATERIALES Y MÉTODOS

#### 2.1. MODELO MATEMÁTICO

En el desarrollo del modelo matemático se consideraron dos etapas fundamentales: el proceso de deshidratación osmótica y la aplicación de las microondas como etapa final.

**Deshidratación osmótica:** Para modelar la deshidratación osmótica, primera etapa del proceso, se utiliza el modelo osmótico-difusional de Spiazzi- Mascheroni (6). Para obtener los perfiles de

concentración, el volumen que representa el producto se divide en N elementos concéntricos de igual volumen. En cada volumen puede distinguirse dos fases: la fase del contenido plasmático celular y la correspondiente a los espacios intercelulares. Cada volumen del espacio intercelular está sujeto a un flujo difusivo-convectivo entre los volúmenes adyacentes y un flujo transmembrana difusivo desde el plasma celular.

Los balances de materia y los flujos para el elemento de volumen  $V_i$  se presentan a continuación.

#### Volumen Celular

Balance de materia celular

$$\frac{d(m_{j_c}^i)}{dt} = -n_{j_c}^i A_c^i \quad (1)$$

Flujo Celular

$$n_{j_c}^i = kw_c (c_{j_c}^i - c_{j_o}^i) \quad (2)$$

#### Volumen Intercelular

Balance de materia intercelular

$$\frac{d(m_{j_o}^i)}{dt} = \frac{(n_{j_o}^{i+1} A_o^{i+1} - n_{j_o}^i A_o^i)}{\Delta z^i} + c_{j_c}^i A_c^i \quad (3)$$

Flujo Intercelular

$$n_{j_o}^i = \frac{D_j (c_{j_o}^{i+1} - c_{j_o}^i)}{\Delta z^i} + c_{j_o}^i u^i \quad (4)$$

Donde  $m$ ,  $n$ ,  $c$  son la masa, flujo y concentración de la especie  $j$  respectivamente. Los subíndices  $c$  y  $o$  indican intra o extracelular;  $D$  y  $kw$  son el coeficiente de difusión aparente de la especie  $j$  y el coeficiente de transferencia de masa, respectivamente;  $A_c^i$  y  $A_o^i$  son las áreas de transferencia celular y extracelular y  $z$  representa la distancia entre cada elemento  $V_i$ . En este modelo se tiene en cuenta el encogimiento  $u^i$  que se calcula de la siguiente manera:

$$u^i = (z_t^i - z_{t+dt}^i) / dt \quad (5)$$

Los perfiles de concentración en la solución osmótica se deducen de balances de masa totales:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \frac{d(m_{j_o}^i)}{dt} = - \frac{d(m_{j_{sol}}^{osm})}{dt} \quad (6)$$

Planteando las ecuaciones para el agua ( $j = w$ ) y para el soluto ( $j = s$ ) se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2N ecuaciones para el agua y N ecuaciones para la sacarosa) que se resuelve a través del método de Runge Kutta de 4º orden programado en Matlab 7.2.

**Deshidratación con microondas:** en esta etapa final del proceso combinado se consideran dos sub-etapas: sub-Etapa 1 (calentamiento) y sub-Etapa 2 (vaporización).

- **Calentamiento del alimento:** la misma se considera hasta que el centro alcanza la temperatura de cambio de fase del agua  $T_c$ . En esta etapa se plantea el balance microscópico de energía considerando un término de generación interna debido a la energía suministrada por las microondas (5). El balance microscópico resultante es el siguiente:

$$V\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = V(\nabla k \nabla T) + P \quad (7)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $C_p$  capacidad calorífica específica,  $T$  temperatura,  $t$  tiempo,  $k$  conductividad térmica y donde  $V$  es el volumen de producto y  $P$  es la potencia generada por la absorción de microondas. En este balance, las propiedades físicas corresponden al alimento húmedo. Para completar el modelo, se plantean las condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

La potencia absorbida durante el calentamiento por microondas es representada por el término  $P$ . La generación de calor es una función de la temperatura en cada punto interno del material, a través de la Ley de Lambert (5):

$$P = P_0 e^{(-2\alpha(L-x))} \quad (8)$$

donde  $P_0$  es la potencia en la superficie, y  $\alpha$  es el factor de atenuación, que es función de la constante dieléctrica  $\epsilon'$  y del factor de pérdida  $\epsilon''$ :

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon'[(1 + \tan^2 \delta)^{1/2} - 1]}{2}} \quad \delta = \tan^{-1}(\epsilon''/\epsilon') \quad (9)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la radiación. Para predecir el perfil de humedad durante el calentamiento, se plantea el balance microscópico de materia, en el cual se considera una transferencia de agua por difusión en el interior del alimento. El balance es el siguiente:

$$\frac{\partial C_w}{\partial t} = \nabla(D_w \nabla C_w) \quad (11)$$

El planteo se completa con las condiciones iniciales y de contorno.

- Vaporización: cuando la temperatura del centro alcanza  $T_c$ , comienza la vaporización del agua y es necesario considerar dos zonas con diferentes propiedades: zona húmeda interna y zona deshidratada superficial, ambas separadas por una interfase móvil (7). Eq. (7) se emplea para calcular el perfil de temperaturas para las distintas zonas, utilizando diferentes propiedades correspondientes a cada zona. En el frente de vaporización la temperatura es considerada la misma que la del cambio de fase del alimento  $T_c$ . La ley de Lambert se aplicó a ambas zonas planteando continuidad en la interfase. La evaporación tiene lugar dentro de la zona húmeda, el vapor se transporta al medio ambiente a través de la capa deshidratada con una estructura porosa. La generación de vapor de agua se calcula considerando que toda la potencia generada por las microondas en el interior del alimento se emplea para el cambio de fase:

$$m_v L_{vap} = \int_0^{x_1} Q dV \quad (12)$$

donde  $m_v$  es la velocidad de vaporización del agua (kg/s). Esta pérdida de peso se relaciona con el movimiento del frente de vaporización  $x_1$  mediante:

$$-C_{ave} \frac{dx_1}{dt} = \frac{m_v}{A} \quad (13)$$

donde  $C_{ave}$  es el contenido de agua medio en la zona húmeda (no ligada) y  $A$  es la superficie del alimento.

Los balances de energía y de materia en la Etapa 1 (calentamiento) se encuentran acoplados y dichos balances con sus condiciones de contorno conforman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Por las características del sistema se empleó para la resolución el método de Diferencias Finitas Implícito Crank-Nicolson. En la Etapa 2 (vaporización), se resuelven los balances de energía en ambas zonas con un método de Diferencias Finitas Implícito Crank-Nicolson modificado, empleando un mallado variable que describe la deformación de la malla fija original debido al cambio del frente de vaporización (8). La resolución del sistema de ecuaciones para el cálculo de las temperaturas y humedad se programó en Matlab 7.2.

### 3. RESULTADOS

El modelo matemático se validó contra datos experimentales de temperatura y humedad obtenidos en nuestro laboratorio. En todas las corridas el modelo numérico emplea un incremento temporal de 0.1 s y en cada dirección se dividió el dominio en 15 incrementos espaciales.

En la Figura 1 se observan las predicciones numéricas y los datos experimentales de deshidratación osmótica de peras procesadas con dos tipos de soluciones de sacarosa (40 °Brix y 60 °Brix). Se obtuvo muy buena concordancia entre la solución numérica y los valores experimentales. En la Figura 2a se muestra las predicciones numéricas de temperatura en el centro de las placas de pera previamente deshidratadas durante la aplicación de microondas, mientras que en la Figura 2 se observan los valores

predichos y experimentales de humedad para dichas peras. A partir de los resultados obtenidos se puede observar un buen ajuste de las predicciones para temperatura y humedad, realizadas por el modelo matemático desarrollado. El mismo puede ser empleado para la predicción de pérdida de peso en diferentes condiciones de operación.

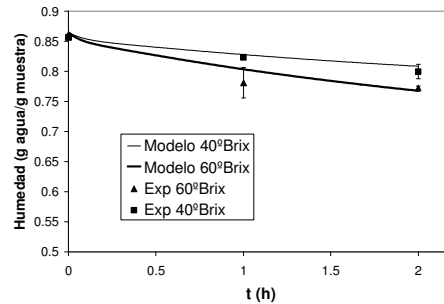


Figura 1: Evolución experimental y calculada de la humedad en el tiempo durante la deshidratación osmótica de peras en soluciones de sacarosa.

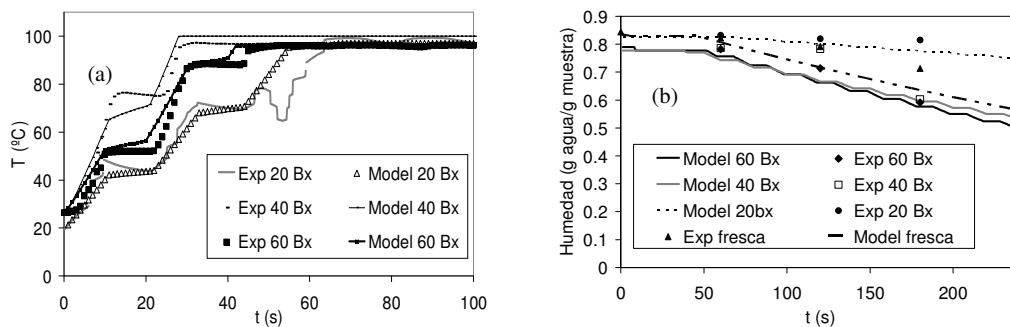


Figura 2. a) Temperaturas predichas (líneas) y experimentales (símbolos) de peras osmo-deshidratadas con soluciones de 20, 40 y 60 °Brix en función del tiempo; b) Humedad de las peras en función del tiempo de deshidratación.

#### 4. REFERENCIAS

- [1] A.K. DATTA AND J. ZHANG, *Porous media approach to heat and mass transfer in solid foods*. ASAE Meeting Presentation, paper N° 99-3068 (1999), pp. 1-33.
- [2] C.H. TONG AND D.B. LUND, *Microwave heating of baked dough products with simultaneous heat and moisture transfer*. Journal of Food Engineering, 19 (1993), pp. 319-339.
- [3] C.M. LIU, Q.Z WANG AND N. SAKAI, *Power and temperature distribution during microwave thawing, simulated by using Maxwell's equations and Lambert's law*. International Journal of Food Science and Technology, 40 (2005), pp. 9-21.
- [4] E.A. SPIAZZI & R.H. MASCHERONI, *Mass transfer model for osmotic dehydration of fruits and vegetables. I. Development of the simulation model*. Journal of Food Engineering, 34(4) (1997), pp. 387-410.
- [5] L.A. CAMPAÑONE, V.O. SALVADORI AND R.H. MASCHERONI, *Weight loss during freezing and storage of unpackaged foods*. Journal of Food Engineering, 47 (2001), pp. 69-79.
- [6] M. FARID, *The moving boundary problems from melting and freezing to drying and frying of foods*. Chemical Engineering Process, 41 (2002), pp. 1-10.
- [7] U. ERLE, H. SCHUBERT, *Combined Osmotic and Microwave-Vacuum Dehydration of Apples and Strawberries*. Journal of Food Engineering, 49 (2001), pp 193-199.
- [8] Y.E. LIN, R.C. ANANTHESWARAN AND V.M. PURI, *Finite element analysis of microwave heating of solid foods*. Journal of Food Engineering, 25 (1995), pp. 85-112.

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CAMPO DE TEMPERATURAS EN UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN FLUIDO CON MODELO PHAN-THIEN TANNER EN UN MICROCANAL

J. P. Escandón†, O. Bautista †, F. Méndez‡ y E. Bautista†

†Grupo de Termofluidos, SEPI-ESIME Unidad Azcapotzalco del IPN, México D. F. 02550, México  
jescandon@ipn.mx, www.ipn.mx

‡Facultad de Ingeniería, UNAM, México D. F. 04510, México,  
fmendez@servidor.unam.mx, www.unam.mx

Resumen: En el presente trabajo se resuelve numéricamente la ecuación adimensional de la energía de un fluido no Newtoniano para describir los perfiles de temperatura dentro de un microcanal de placas planas paralelas bajo la influencia de fuerzas electrocinéticas y de presión. El campo de velocidad del flujo toma en cuenta la relación constitutiva basada en el modelo reológico viscoelástico de Phan-Thien Tanner simplificado. Se muestra la influencia del parámetro viscoelástico  $\varepsilon De_x^2$  y la relación de esbeltez  $\beta$  sobre el campo de temperatura.

Palabras claves: viscoelástico, flujo electro-osmótico, Phan-Thien Tanner

## 1. INTRODUCCIÓN

Con el surgimiento de la electrocinética para el transporte de fluidos biológicos a través de microsistemas basados en biochips, es necesario caracterizar matemáticamente los mecanismos de transporte asociados al proceso para un diseño eficiente de los sistemas microfluídicos. Las estrategias para caracterización se han basado en el transporte electro-osmótico de fluidos Newtonianos, sin embargo, esta consideración puede ser inadecuada para dichas aplicaciones. Es claro que un modelo como la ley de Newton de viscosidad puede ser insuficiente para describir completamente el comportamiento constitutivo de fluidos biológicos complejos. Aunque en la literatura existen varios modelos propuestos para analizar el comportamiento de fluidos no Newtonianos, en la actualidad, todavía aparecen implicaciones pertinentes sobre el transporte de flujos electrocinéticos que no han sido resueltos completamente por la comunidad científica [1]. Al respecto, Zhao, Berli y Tang [2, 3, 4] consideran un fluido no Newtoniano con la Ley de potencias y resuelven solamente la hidrodinámica de flujo electro-osmótico; por otra parte, Das [1] utiliza la ley de potencias para resolver analíticamente la distribución de la velocidad, temperatura y concentración en flujos electro-osmóticos de fluidos biológicos no Newtonianos. Park [5] presenta una investigación de la hidrodinámica para flujos electro-osmóticos viscoelásticos como la sangre y ADN a través de microcanales, en donde el concepto de la velocidad de Helmholtz-Smoluchowski se adapta para fluidos viscoelásticos. Una solución analítica para el campo de velocidad ha sido desarrollada por Alfonso [6] para el flujo de fluidos viscoelásticos con el modelo de Phan-Thien Tanner simplificado, en estado estable y flujo completamente desarrollado en microcanales de placas paralelas y tuberías, considera la influencia de fuerzas electrocinéticas y de presión empleando la aproximación de Debye-Hückel, y es una estimación para estudios con fluidos como la sangre, saliva, sinoviales y otros biofluidos.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 2.1. MODELO FÍSICO

En la Figura 1 se muestra el esquema del modelo físico de estudio. Se considera el transporte de un fluido no Newtoniano con características viscoelásticas con el modelo de Phan-Thien Tanner simplificado, a través de un microcanal de placas planas paralelas de altura  $2H$ , longitud  $L$ , profundidad  $w$ , con  $w \gg 2H$ . El flujo de fluido es accionado por un campo eléctrico axial  $E_x$  generado por un potencial eléctrico. El sistema coordenado se muestra en la Figura 1. El microcanal presenta relaciones de aspectos grandes, es decir  $L/H \gg 1$  y  $w/H \gg 1$ . Para el análisis se consideran propiedades constantes respecto

a la temperatura, flujo hidrodinámicamente desarrollado y estado estacionario. El fluido entra al microcanal en  $x=0$  con temperatura  $T_e$ , y en  $x=L$  sale a una temperatura impuesta de diseño  $T_d$ , la pared se mantiene a temperatura uniforme  $T_w$  para  $0 \leq x \leq L$ .

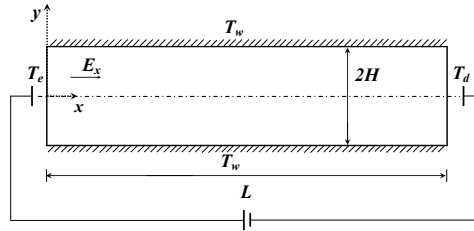


Figura 1: Diagrama esquemático de flujo electro-osmótico entre dos placas planas paralelas.

## 2.2. ECUACIÓN DE LA ENERGÍA

La ecuación de la energía en el fluido está dada por

$$\rho C_{pf} u \frac{\partial T}{\partial x} = k_f \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_f \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \sigma E_x^2, \quad (1)$$

donde  $\rho$ ,  $C_{pf}$ ,  $T$ ,  $k_f$ ,  $\sigma$  y  $u$  son la densidad, el calor específico, la temperatura, la conductividad térmica, la conductividad eléctrica y la componente de la velocidad axial del fluido respectivamente;  $y$ ,  $x$  son, la coordenada transversal y axial. Las condiciones de frontera asociadas a la ecuación (1) son

$$x=0: T=T_e, \quad x=L: T=T_d, \quad y=0: \partial T/\partial y=0, \quad y=H: T=T_w, \quad (2)$$

definiendo las siguientes variables adimensionales

$$\eta = y/H, \quad \chi = x/L, \quad \bar{u} = u/u_{HS}, \quad \theta = T - T_w / (T_e - T_w), \quad \beta = H/L, \quad \Lambda = \sigma E_x^2 H^2 / (k_f (T_e - T_w)), \quad (3)$$

donde  $u_{HS} = -\epsilon \zeta E_x / \eta_0$  [7] es la velocidad de referencia electro-osmótica Helmholtz-Smoluchowski;  $\epsilon$ ,  $\zeta$ ,  $\eta_0$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\Lambda$  son la permisividad del medio, el potencial  $Z$  en el plano de corte de la capa eléctrica doble, la viscosidad aparente del fluido, la relación de esbeltez del microcanal, la temperatura adimensional en el fluido y el término normalizado de generación de energía (incluye el efecto Joule) respectivamente.

Al sustituir las variables adimensionales de la ecuación (3) en las ecuaciones (1) y (2) se tiene la ecuación adimensionalizada de la energía en el fluido dentro del microcanal

$$\beta Pe \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \Lambda, \quad (4)$$

y sus respectivas condiciones de frontera

$$\chi=0: \theta=1, \quad \chi=1: \theta=\theta_d, \quad \eta=0: \partial \theta / \partial \eta=0, \quad \eta=1: \theta=\theta_w \quad (5)$$

donde  $Pe$  es el número de Peclet,  $\theta_d$  y  $\theta_w$  son la temperatura adimensional de diseño a la salida del fluido y de la pared de microcanal respectivamente. La ecuación (4) implica las características viscoelásticas del fluido en el modelo adimensional de la velocidad del modelo reológico de Phan-Thien Tanner simplificado con la inclusión de las fuerzas electrocinéticas y de presión en el flujo del fluido [6].

$$\bar{u} = (1 - 2De_\kappa De_\kappa^2)(1 - F) + \frac{2}{3}\varepsilon De_\kappa^2(1 - F^3) - \frac{1}{2}\Gamma(1 - \eta^2) \left[ 1 + \frac{\varepsilon De_\kappa^2}{\bar{\kappa}^2}\Gamma^2(1 + \eta^2) \right] + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon De_\kappa^2}{\bar{\kappa}^2}\Gamma \left[ 1 - F^2 + (\bar{\kappa}^2 - (\bar{\kappa}\eta)^2)D + 2\bar{\kappa}M(\eta FR - 1) \right] - \frac{12\varepsilon De_\kappa^2}{\bar{\kappa}^4}\Gamma^2 \left[ \bar{\kappa}M(1 - \eta R) + \left(1 + \frac{1}{2}(\bar{\kappa}\eta)^2\right)F - \left(1 + \frac{1}{2}\bar{\kappa}^2\right) \right], \quad (6)$$

donde

$$\Gamma = -H^2 p_x / \varepsilon \zeta E_x, \quad De_\kappa = \lambda_1 \kappa u_{HS}, \quad \bar{\kappa} = \kappa H, \quad D = 1 / \cosh^2(\bar{\kappa})$$

$$F = \cosh(\bar{\kappa}\eta) / \cosh(\bar{\kappa}) \quad R = \sinh(\bar{\kappa}\eta) / \sinh(\bar{\kappa}), \quad M = \tanh(\bar{\kappa}) \quad (7)$$

$\Gamma$ ,  $p_x$ ,  $De_\kappa$ ,  $\varepsilon$ ,  $\kappa^{-1}$ ,  $\lambda_1$  son la relación de las fuerzas de presión a las fuerzas electro-osmóticas, el gradiente de presión en dirección axial, el número de Deborah, el coeficiente de viscosidad elongacional del fluido, la longitud Debye [7] y el tiempo de relajación, respectivamente;  $\bar{\kappa} = H/\kappa^{-1}$ ;  $D$ ,  $F$ ,  $R$  y  $M$  son parámetros de simplificación.

La ecuación (4) se resolvió numéricamente por el método iterativo llamado “Successive-over-relaxation” (SOR, por sus siglas en ingles) utilizando la versión discretizada en diferencias finitas siguiente

$$\left[ \beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \theta_{i+1,j} + \Omega^2 \theta_{i,j+1} + \left[ \beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \theta_{i-1,j} + \Omega^2 \theta_{i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \theta_{i,j} + \Delta\chi^2 \Lambda = 0, \quad (8)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\theta(i, j) = 1, \quad \text{para } i = 0, j = 0, \dots, jmax - 1; \quad (9)$$

$$\theta(i, j) = \theta_d = 0.5, \quad \text{para } i = imax, j = 0, \dots, jmax - 1; \quad (10)$$

la ecuación que resuelve la condición de frontera en el centro del microcanal en  $\eta = 0$  es

$$\left[ \beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \theta_{i+1,j} + 2\Omega^2 \theta_{i,j+1} + \left[ \beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \theta_{i-1,j} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \theta_{i,j} + \Delta\chi^2 \Lambda - 2\Omega^2 \Delta\eta F_{y1} = 0, \quad (11)$$

$$\theta(i, j) = 0, \quad \text{para } j = jmax, i = 0, \dots, imax; \quad (12)$$

donde  $\Omega = \Delta\chi/\Delta\eta$ ,  $F_{y1} = \partial\theta/\partial\eta|_{\eta=0} = 0$ , y en la ecuación (6)  $\eta$  se sustituye por  $\eta_j = j^* \Delta\eta$ .

### 3. GRAFICAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La Figura 2 muestra los perfiles de temperatura transversal en el microcanal para diferentes valores del parámetro viscoelástico  $\varepsilon De_\kappa^2 = 0, 1, 4$ , con tres relaciones de esbeltez  $\beta = 0.01, 0.05, 0.1$ , con un valor del parámetro normalizado de la energía  $\Lambda = 1$ , un valor de la relación de fuerzas de presión a las fuerzas electro-osmóticas de  $\Gamma = -1$ ,  $\kappa = 100$ ,  $Pe = 1$ , en una posición axial de  $\chi = 0.002$ . Se nota que para  $\chi = 0.002$  y cualquier valor de  $\beta$  la influencia de  $\varepsilon De_\kappa^2$  es importante, puesto que para valores crecientes de éste parámetro la temperatura aumenta, dejando sub-estimado el valor de la temperatura de un fluido Newtoniano con  $\varepsilon De_\kappa^2 = 0$ . La influencia de  $\beta$  es notoria también para valores grandes de éste parámetro, en  $\beta = 0.1$ , la temperatura transversal tiende a conservar la temperatura de entrada del fluido al

microcanal, mientras que para valores pequeños  $\beta = 0.01$ , hay una disipación de energía más relevante en la dirección axial y transversal a las condiciones impuestas de temperatura.

La Figura 3 muestra los perfiles de temperatura transversal en el microcanal para diferentes valores del parámetro viscoelástico  $\varepsilon De_{\kappa}^2 = 0, 1, 4$ , en tres posiciones axiales  $\chi = 0.002, 0.01, 0.1$ , una relación de esbeltez  $\beta = 0.01$ ,  $\kappa = 100$ ,  $Pe = 1$ , un valor de la relación de fuerzas de presión a las fuerzas electroosmóticas de  $\Gamma = -1$  y un valor del parámetro normalizado de generación de energía  $\Lambda = 1$ . Se nota que para el crecimiento de  $\varepsilon De_{\kappa}^2$  en cualquier valor de  $\chi$  refleja un aumento de temperatura debido a que los niveles de deformación también se incrementaron, dejando sub-estimado el valor de la temperatura de un fluido Newtoniano con  $\varepsilon De_{\kappa}^2 = 0$ . Se observa también que aproximadamente en el valor de  $\chi = 0.1$ , se alcanza la condiciones de flujo térmicamente desarrollado.

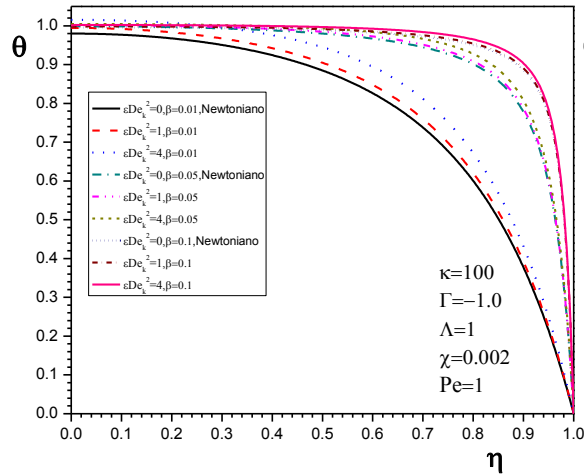


Figura 2: Perfiles de temperatura transversal en el microcanal para diferentes valores de  $\varepsilon De_{\kappa}^2$ ,  $\beta = 0.01, 0.05, 0.1$ ;  $\Gamma = -1$ ,  $\kappa = 100$ ,  $Pe = 1$ ,  $\Lambda = 1$  y  $\chi = 0.002$

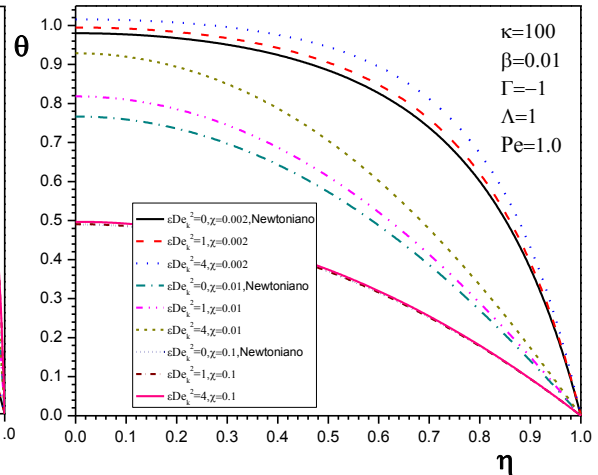


Figura 3: Perfiles de temperatura transversal en el microcanal para diferentes valores de  $\varepsilon De_{\kappa}^2$ ,  $\chi = 0.002, 0.01, 0.1$ ;  $\kappa = 100$ ,  $Pe = 1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\Gamma = -1$  y  $\Lambda = 1$

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue patrocinado por el proyecto 58817 SEP-CONACYT y 20090025 SIP-IPN.

#### REFERENCIAS

- [1] S. DAS, S. CHAKRABORTY. *Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid*. Analytica Chimica Acta 559 (2006), pp. 15-24.
- [2] CUNLU ZHAO, AMILJK ZHOLKOVSKIJ, ET AL. *Analysis of electroosmotic flow of power – law fluids in a slit microchannel*. Journal of Colloid and Interface Science 326 (2008), pp. 503-510.
- [3] CLAUDIO L. A. BERLI, MARPIA L. OLIVARES. *Electrokinetic flow of non-Newtonian fluids in microchannels*. Journal of Colloid and Interface Science 320 (2008), pp. 582-589.
- [4] G. H. TANG, X. F. LI, Y. L. HE, W. Q. TAO. *Electroosmotic flow of non-Newtonian fluid in microchannels*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 157 (2009), pp. 133-137.
- [5] H. M. PARK AND W. M. LEE. *Helmholtz – Smulochowski for viscoelastic electroosmotic flows*. Journal of Colloid and Interface Science 317 (2008), pp. 631-636.
- [6] A. M. ALFONSO, M. A. ALVES. F.T. PINHO. *Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 159 (2009), pp. 50-63.
- [7] J. H. MASLIYAH, S. BHATTACHARJEE. *Electrokinetic and Colloid Transport Phenomena*. Wiley Interscience, 2006. pp. 114, 236-237.



# RESULTADOS DE MONOTONÍA PARA PROBLEMAS DE TIPO STEFAN A DOS FASES CON RESPECTO A COEFICIENTES TÉRMICOS

Mariela C. Olguin\*, María C.Sanziel\*<sup>^</sup> y Domingo A. Tarzia#

\* *Dpto.de Matemática - Fac. de Cs.Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Univ. Nac. de Rosario, Av. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina. mcolguin@fceia.unr.edu.ar , sanzziel@fceia.unr.edu.ar*

<sup>^</sup> *Consejo de Investigaciones, Universidad Nacional de Rosario, Argentina.*

# *CONICET - Dpto. de Matemática, FCE, Univ. Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina. DTarzia@austral.edu.ar*

Resumen: Se estudian diversos problemas de tipo Stefan unidimensionales a 2 fases en un dominio acotado, con diferentes datos sobre los bordes fijos del dominio. Para este tipo de problemas no se cuenta con la solución en forma explícita. Se determina la monotonía de las temperaturas de las fases líquida y sólida y de la frontera libre de cambio de fase respecto de la mayoría de los coeficientes térmicos. Para los casos en los que no es posible establecer analíticamente la monotonía, se propone un método numérico para aproximar los valores de las soluciones y de esta manera, a través del análisis de casos particulares, se demuestra la no-monotonía correspondiente.

Palabras claves: *Materiales de cambio de fase, problema de Stefan, fusión, monotonía respecto de coeficientes térmicos*

2000 AMS Subjects Classification: 35R35 - 80A22 - 35B30

## 1. INTRODUCCIÓN

Basado en una aplicación tecnológica [4] (la utilización de sustancias de cambio de fase para el transporte de sustancias biológicas), en [5] se consideró un problema de Stefan unidimensional a una fase para el caso de la fusión de un material semi-infinito y se demostró que tanto la temperatura de la sustancia como la frontera libre presentan un comportamiento monótono respecto del calor latente, el calor específico y la densidad de masa, no así respecto de la conductividad térmica del material considerado. El objetivo del presente trabajo es continuar esta línea de investigación estudiando diversos problemas unidimensionales de Stefan a dos fases para un cuerpo finito. Se establece la monotonía de la solución del problema con respecto a coeficientes térmicos.

## 2. FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS

Se considera un material finito, representado por el intervalo  $[0, 1]$  cuya temperatura de cambio de fase es  $0^\circ\text{C}$ . Inicialmente, una parte de él se encuentra en estado sólido y otra en estado líquido. Si se designa con  $x = s(t)$  a la posición del frente de cambio de fase en cada instante de tiempo, y con  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  la temperatura de las fases líquida y sólida respectivamente, el problema ( $P$ ) consiste en determinar estas funciones y además el tiempo maximal  $T$  de existencia de solución, de manera que se satisfagan las condiciones siguientes:

$$\alpha_l u_{xx} = u_t \quad 0 < x < s(t) \quad 0 < t < T \quad (1.1)$$

$$\alpha_s v_{xx} = v_t \quad s(t) < x < 1 \quad 0 < t < T \quad (1.2)$$

$$A u(0, t) + B u_x(0, t) = f(t) \quad 0 < t < T \quad (1.3)$$

$$C u(1, t) + D u_x(1, t) = g(t) \quad 0 < t < T \quad (1.4)$$

$$u(s(t), t) = v(s(t), t) = 0 \quad 0 < t < T \quad (1.5)$$

$$k_s v_x(s(t), t) - k_l u_x(s(t), t) = \rho \ell s'(t) \quad 0 < t < T \quad (1.6)$$

$$s(0) = b \quad 0 < b < 1 \quad (1.7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 < x < b \quad (1.8)$$

$$v(x, 0) = \psi(x) \quad b < x < 1 \quad (1.9)$$

donde  $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho c_i}$  es el coeficiente de difusividad,  $k_i$  es la conductividad térmica,  $c_i$  es el calor específico con el subíndice  $i = l, s$  indicando la fase líquida y sólida respectivamente,  $\rho$  es la densidad de masa común a ambas fases y  $\ell$  es el calor latente de fusión por unidad de masa.

Según sean los valores de las constantes  $A, B, C, D$  en las condiciones (1.3) y (1.4) se tendrá:

- un problema con dato de temperatura en ambos bordes,
- un problema con dato de flujo en ambos bordes
- un problema con dato de temperatura en un borde y flujo en el otro.

Bajo adecuadas hipótesis sobre los datos iniciales y de borde, que se asumen en el presente trabajo, en [2, 3, 7] se muestra que existe solución del problema (P) para todo tiempo  $T > 0$ .

### 3. RESULTADOS ANALÍTICOS DE MONOTONÍA

**Teorema 1** *La solución del problema (P) a dos fases, bajo ciertas hipótesis sobre los datos  $f, g, \varphi$  y  $\psi$ , es monótona respecto del calor latente, la densidad de masa, el calor específico de cada fase y la conductividad térmica de la fase líquida.*

*Prueba.* Se considera variable al calor latente. Sean  $\ell_1 < \ell_2$ ; se designa con  $\{u_1, v_1, s_1\}$  y  $\{u_2, v_2, s_2\}$  a las soluciones del problema (P) correspondientes a  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . Si se supone que la solución no es monótona, es decir que las fronteras  $s_1$  y  $s_2$  se cruzan en un instante  $t_0 > 0$ , se llega, aplicando el principio de máximo y el Lema de Hopf [6], a un absurdo, a partir del cual se deduce que, para todo tiempo,  $u_1 \geq u_2$ ,  $v_1 \geq v_2$  y  $s_1 \geq s_2$ .

De manera análoga se demuestra la monotonía para los restantes coeficientes  $c_l, c_s, \rho$  y  $k_l$ .  $\square$

**Observación 2** *Con los recursos utilizados en la demostración del Teorema 1, no fue posible establecer la monotonía de la solución del problema (P) respecto de la conductividad térmica  $k_s$ .*

### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para aproximar la solución del problema se utiliza un esquema en diferencias finitas. Por la naturaleza del problema, el dominio de definición para la solución es variable en el tiempo. Es necesario entonces establecer un esquema en el que la grilla vaya ajustándose para cada instante de tiempo. Se propone para ello un paso temporal fijo y, manteniendo constante la cantidad de pasos espaciales, va adaptándose su longitud de manera que la frontera libre se ubique siempre sobre nodos del mallado [8].

A fin de investigar el comportamiento de la solución del problema (P) cuando varía la conductividad térmica  $k_s$ , se analizaron las soluciones numéricas en los siguientes casos:

#### **i) datos de temperatura en el borde $x = 0$ y de flujo en el borde $x = 1$**

Se consideraron las ecuaciones del problema (P) con los siguientes valores para los datos [1]:

$$A = 1, B = 0, C = 0 \text{ y } D = k_s = 2.24 W/mK$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \ell = 334000 \text{ J/kg}, k_l = 0.58 \text{ W/mK}, k_s = 2.24 \text{ W/mK}$$

$$c_l = 4185.5 \text{ J/kg}^\circ C, c_s = 2090 \text{ J/kg}^\circ C$$

$$f(t) = 70^\circ C, g(t) = -4, \varphi(x) = -140x + 70, \psi(x) = -8x + 4, s(0) = 0.5 \text{ m}$$

En la Figura 1 se observa el comportamiento de las fronteras libres. En la Figura 2 se observa las distribuciones de temperatura, para un tiempo  $t = 266.7 \text{ hs}$ . Se aprecia la no-monotonía con respecto a  $k_s$ .

**ii) datos de flujo en ambos bordes fijos**

Se consideraron las ecuaciones del problema (P) con los siguientes valores para los datos [1]:

$$A = 0, B = k_l = 0.58 \text{ W/mK}, C = 0 \text{ y } D = k_s = 2.24 \text{ W/mK}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \ell = 334000 \text{ J/kg}, k_l = 0.58 \text{ W/mK}, k_s = 2.24 \text{ W/mK}$$

$$c_l = 4185.5 \text{ J/kg}^\circ\text{C}, c_s = 2090 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$$

$$f(t) = -10, g(t) = -8, \varphi(x) = -76x + 38, \psi(x) = -8x + 4, s(0) = 0.5 \text{ m}$$

En la Figura 3 puede verse el comportamiento de las fronteras libres. En la Figura 4 se observa las distribuciones de temperatura, para un tiempo  $t = 600 \text{ hs}$ . Se aprecia la no-monotonía con respecto a  $k_s$ .

**iii) datos de temperatura en ambos bordes fijos**

Para este caso se consideraron diferentes juegos de datos, pero no fue posible establecer la no-monotonía de la solución.

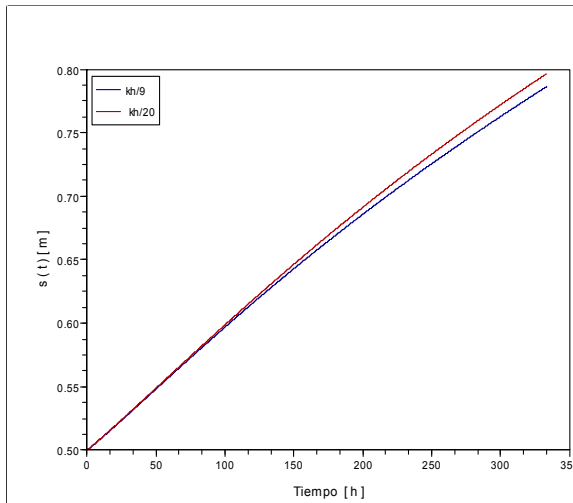


Figura 1: Fronteras libres para el caso temperatura-flujo

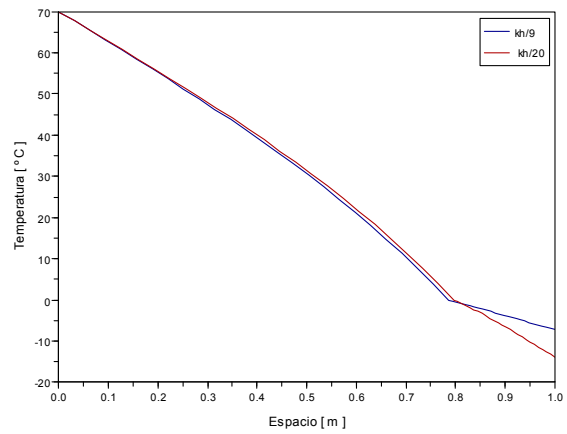


Figura 2: Distribución de temperatura para el caso temperatura-flujo en un tiempo  $t = 266.7 \text{ hs}$

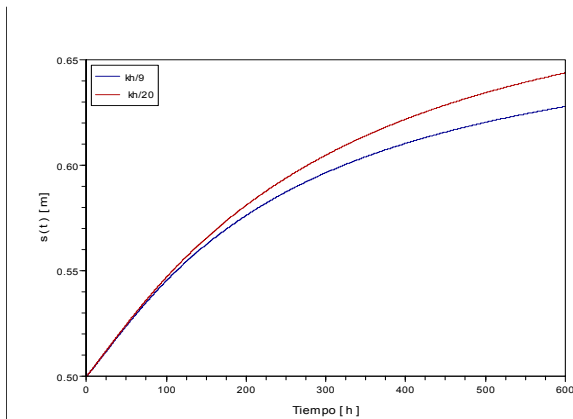


Figura 3: Fronteras libres para el caso flujo-flujo

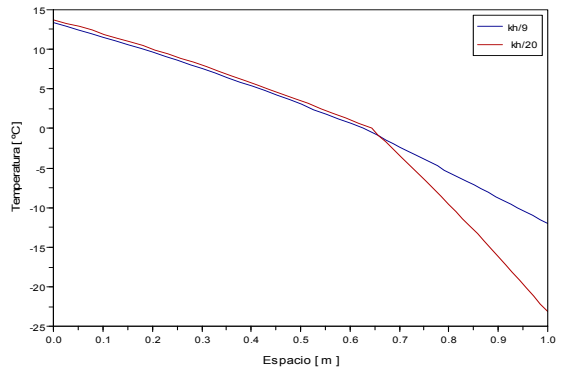


Figura 4: Distribución de temperatura para el caso flujo-flujo en un tiempo  $t = 600 \text{ hs}$

## 5. CONCLUSIONES

Se demostró que las soluciones de problemas de Stefan unidimensionales a dos fases, planteados en dominios finitos, son monótonas respecto de la variación del calor latente de fusión, la densidad de masa, el calor específico de cada una de las fases y la conductividad térmica de la fase líquida, tanto en el caso de: datos de temperatura en ambos bordes fijos, datos de flujo en ambos bordes fijos como para datos de temperatura en un borde y flujo en el otro.

Respecto de la conductividad térmica de la fase sólida, se comprobó a través de resultados numéricos, que la distribución de temperaturas no es monótona, para el caso de: datos de temperatura en un borde y flujo en el otro, y datos de flujo en ambos bordes fijos. En tanto que, para el caso de dato de temperatura en ambos bordes, hasta el momento, no fue posible establecer si la solución es o no monótona.

## AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido parcialmente subsidiado por proyectos PIP N° 0460 de CONICET-UA y N° 19/I218 de UNR, Rosario, Argentina.

## REFERENCIAS

- [1] V. ALEXAIDES, AND A.D. SOLOMON, *Mathematical modeling of melting and freezing processes*, Hemisphere-Taylor & Francis, Washington, 1996.
- [2] J.R. CANNON, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1984.
- [3] J.R. CANNON, AND M. PRIMICERIO, *A two-phase Stefan problem with temperature boundary conditions*, *Annali Mat. Pura Appl.*, 88 (1971), pp. 177-191.
- [4] M. MEDINA, A. BOUCIGUEZ, AND M. LARA, *Diseño de un embalaje para productos biológicos con absorción del calor de respiración a través de un material con cambio de fase*, *ERMA-Energías Renovables y Medio Ambiente*, 14 (2004), pp. 39-44.
- [5] M.C. OLGUIN, M.A. MEDINA, M.C. SANZIEL, AND D.A. TARZIA, *Behavior of the solution of the Stefan problem by changing thermal coefficients of the substance*, *Appl. Math. Comput.*, 190 (2007), pp. 765-780.
- [6] M.H. PROTTER, AND H.F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [7] D.A. TARZIA, *Estudios teóricos básicos en el Problema de Stefan unidimensional a dos fases*, *Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi*, 14 (1987), pp. 45-75.
- [8] M. ZERROUKAT, AND C.R. CHATWIN, *Computational moving boundary problems*, John Wiley & Sons, New York, 1994.