WAVELETS DE DAUBECHIES EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

V. Vampa[♭, †], M. T. Martín[♭] y E. Serrano[††]

[♭] *Fac. de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, mtmartin@fisica.unlp.edu.ar, victoria@mate.unlp.edu.ar*
[†] *Fac. de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina*
[††] *Universidad de General San Martín, Argentina, eserrano@unsam.edu.ar*

Resumen: En los últimos años ha despertado gran interés la utilización del análisis wavelet en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. La capacidad del análisis multirresolución wavelet de representar funciones en múltiples escalas dinámicas, constituye una interesante propiedad que provee, a partir de la solución en el dominio wavelet, aproximaciones jerárquicas a la solución exacta. En particular, las wavelets de Daubechies, con sus propiedades de ortogonalidad y mínimo soporte, resultan ser muy eficaces en la resolución de problemas que por sus características requieren funciones interpolatorias con alto grado de localización. Se propone en este trabajo un esquema formulado en el marco del método de Galerkin que permite definir una aproximación a la solución, refinable por escalas mediante la estructura de multirresolución de la funciones de escala de Daubechies. Se presentan dos ejemplos que muestran la aplicabilidad de la propuesta.

Palabras clave: *Wavelet-Galerkin,Daubechies, multiresolution*
2000 AMS Subject Classification: 21A54 - 55P54

1. INTRODUCCIÓN

Métodos numéricos que combinan el método de Galerkin con las bases wavelets han despertado interés en diversas ramas de la ingeniería. En mecánica estructural, se han desarrollado elementos finitos basados en wavelets para problemas de vigas y placas. Algunos autores, como Xiang et al. [6] utilizaron las splines wavelets para resolver problemas elastomecánicos 1D y 2D.

Por otro lado, con funciones de escala de Daubechies, Ma et al. [5] presentaron un elemento de viga para el modelo de Euler-Bernoulli. Existen también formulaciones para placas, como las desarrolladas por Alvarez Díaz et al., [3].

La propuesta en este trabajo es utilizar las funciones de Daubechies como base en el método de Galerkin y obtener en el marco de un Análisis Multirresolución (AMR), una aproximación jerárquica a la solución en el espacio wavelet.

2. MÉTODO DE WAVELET-GALERKIN

La resolución de problemas provenientes de las ciencias aplicadas o la ingeniería conducen en muchos casos a modelos matemáticos del tipo $Lu = f$, donde L es un operador diferencial en un espacio de Hilbert y f es una función definida sobre un intervalo. Ciertas condiciones de contorno deben además ser satisfechas por la función incógnita u. Este tipo de problemas no siempre puede resolverse analíticamente, por lo que muchas veces es necesario recurrir a métodos de aproximación que sean computacionalmente más simples de implementar. En estos casos una aproximación de u puede buscarse en el marco de un esquema refinable, que admita un mejoramiento recursivo de la precisión alcanzada, proporcionando así una aproximación jerárquica a la solución exacta. Esto sugiere trabajar en el marco de una estructura multiescala que combine además soporte pequeño, regularidad y ortogonalidad, como la que proporciona un AMR wavelet [4]. En particular, la propuesta de este artículo es utilizar el AMR de Daubechies [1] como base en el método de Galerkin.

Una formulación variacional del problema diferencial en un espacio de Hilbert V, consiste en determinar una función $u \in V$, tal que $a(v,u) = \langle v, f \rangle$, $\forall v \in V$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno definido en V y $a(v,u) = \langle v, Lu \rangle$.

Si V^h es un subespacio finito dimensional de V, expandido por M funciones linealmente independientes $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_M\}$, el método de aproximación de Galerkin consiste en determinar $u^h \in V^h$ tal que para todo $v^h \in V^h,\ a(v^h, u^h) = \langle v^h, f \rangle$. Reemplazando u^h por su expansión, $u^h = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \Phi_k$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \, a(\Phi_n, \Phi_k) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \ \langle \Phi_n, L\Phi_k \rangle = \langle \Phi_n, f \rangle \qquad n = 1, 2, \ldots, M \tag{1}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas, los coeficientes α_k permitirán obtener u^h.

2.1. Analisis Multirresolución de Daubechies

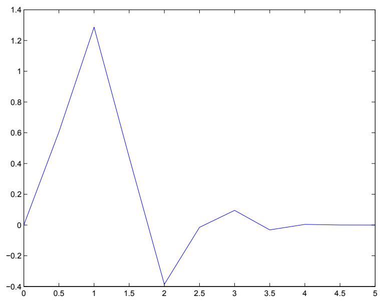

Figura 1: Función de escala de Daubechies, $N = 6$

Las wavelets son funciones generadas a partir de una única función mediante operaciones simples de dilación y traslación. En su trabajo fundamental de 1988, [1], Ingrid Daubechies introduce una familia de wavelets ortogonales y de soporte compacto, que incluye desde funciones altamente localizadas hasta otras muy suaves. Estas wavelets se definen a partir de un conjunto finito de coeficientes no nulos $\{p_k\}_{k=0}^{N-1}$ donde N es el *orden* de la wavelet. Las funciones generadas con estos coeficientes tienen soporte en $[0, N-1]$ y $(N/2 - 1)$ momentos nulos. En la Figura 1 se muestra la función de escala de orden $N = 6$.

Un AMR wavelet [4] se construye a partir de una *f*unción de escala madre φ (o de una *w*avelet madre ψ) que satisface la siguiente *r*elación de dos escalas:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \varphi(2x - k) \tag{2}$$

Para cada j las trasladadas de la función de escala $\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k)$ generan un subespacio de V y al variar j se obtiene una sucesión de subespacios encastrados que constituye un AMR (ver [1]).

La función wavelet está definida en términos de la función de escala φ de la siguiente forma:

$$\psi(x) = \sum_{k=-1}^{N-2} (-1)^k p_{k+1} \varphi(2x + k) \tag{3}$$

Como no existen formas funcionales explícitas para las wavelets ni para las funciones de escala de Daubechies, la evaluación de las mismas debe realizarse numéricamente en base a un algoritmo que utiliza la relación de dos escalas Ec. (2).

Los productos internos que aparecen en la formulación de Galerkin Ec. (1) involucran tanto funciones de escala como sus derivadas y son llamados *coeficientes de conexión*. Estas integrales no son bien aproximadas mediante métodos de integración numérica clásicos, debido a la naturaleza oscilatoria del integrando. Por este motivo, se han desarrollado métodos alternativos que posibilitan el cálculo exacto de este tipo de integrales. Estos algoritmos que se basan en propiedades específicas de las funciones de Daubechies, son simples y fáciles de implementar. Una detallada descripción de los mismos puede encontrarse en Latto et al., [2]. Considerando el intervalo $[0, 1]$ y el caso particular de que f sea una función polinómica, estos coeficientes están dados por

$$\Gamma_{i,j}^{d_1 d_2} = \int_0^1 \varphi^{(d_1)}(\xi - i)\, \varphi^{(d_2)}(\xi - j)\, d\xi \qquad\qquad R_i^{(s)} = \int_0^1 \xi^s\, \varphi(\xi - i)\, d\xi \tag{4}$$

donde d_1 y d_2 son los órdenes de las derivadas y s es exponente de la variable independiente ξ.

3. APLICACIONES

Presentaremos dos aplicaciones del método propuesto para las cuales se obtuvo rápida convergencia al incrementar la escala j. Estos experimentos numéricos constituyen un paso inicial para desarrollar un esquema refinable utilizando las ventajosas propiedades de las wavelets de Daubechies.

3.1. FLEXIÓN DE UNA VIGA

Numerosas estructuras de ingeniería se construyen en base a vigas que se flexionan o distorsionan por su propio peso o la influencia de una fuerza externa. La flexión de una viga delgada de longitud L homogénea, con sección transversal uniforme, empotrada en sus dos extremos y con una carga transversal de intensidad $q(x)$, está asociada al siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{aligned} EI\, \frac{d^4}{dx^4} u = q(x) \quad \text{en } \; I = [0, L] \\ u(0) = u(L) = u'(0) = u'(L) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

donde EI representa la rigidez a la flexión (E: módulo de Young, I momento de inercia).

Al elegir el orden de las funciones de escala de Daubechies, es necesario tener en cuenta que se trata de un problema de cuarto orden y por lo tanto se requiere una base suficientemente suave que permita una buena representación de la solución u. Utilizaremos Daubechies de orden $N = 12$ que garantizan una representación exacta de polinomios de hasta grado $N/2 - 1 = 5$. Considerando la aproximación correspondiente a la escala j, $u_j(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_{j,k}(x)$, la formulación de Galerkin (1), luego de realizar integración por partes se escribe de la forma siguiente:

$$EI \sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_k\, \left\langle {\varphi''}_{j,n}, {\varphi''}_{j,k} \right\rangle + EI(\varphi_{j,n} {u'''}_j - \varphi'_{j,n} {u''}_j)|_0^1 = \langle \varphi_{j,n}, q \rangle \tag{6}$$

donde $\varphi_{j,k}$ es la función de escala de Daubechies correspondiente al nivel de resolución j trasladada en k y $2 - N \leq n \leq 2^j - 1$. Los elementos de la matriz del sistema y del término independiente se calculan a partir de la Ec. 4, mientras que las condiciones de contorno son impuestas utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

Una vez obtenidos los coeficientes α_k, para $2 - N \leq k \leq 2^j - 1$, la aproximación correspondiente a la escala j puede hallarse en forma directa.

3.2. ECUACIÓN DEL CALOR

Las ecuaciones en derivadas parciales se presentan en la forma de modelos que evolucionan y describen la dinámica a lo largo del tiempo de una variable (también llamada *estado*). Pueden representar objetos muy diversos desde la posición de un satélite en el espacio hasta el grado en que una enfermedad afecta a una población. Una de las razones que motivan el interés por su resolución numérica es la dificultad en el cálculo de soluciones analíticas cuando se tienen varias dimensiones espaciales. Por otro lado, como se dijo anteriormente, los modelos discretos resultan ventajosos porque pueden ser manipulados mucho más fácilmente que los continuos.

Dentro de los métodos numéricos para la resolución de la ecuación del calor, está la posibilidad de mantener la variable temporal continua y discretizar la variable espacial, reduciéndose el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos métodos son también conocidos como *métodos de líneas*.

En el caso particular del problema unidimensional:

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{7}$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t > 0 \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in (0,1) \tag{9}$$

la aproximación en la escala j, puede expresarse de la siguiente forma:

$$u_j(x,t) = \sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t)\varphi_{j,k}(x) \tag{10}$$

La formulación variacional en el espacio discreto consiste en hallar para cada t, $u_j(x,t)$ en el subespacio correspondiente a la escala j . Para la aproximación de la condición inicial se considera su proyección ortogonal de u_0 sobre el mismo subespacio.

Reemplazando la Ec.(10) en la formulación variacional discreta y realizando integración por partes, se tiene el sistema de $2^j + N - 2$ ecuaciones diferenciales lineales acopladas en las incógnitas $\alpha_{j,k}(t)$, $t > 0$.

$$\sum_{k=2-N}^{2^j-1} \frac{d}{dt}\alpha_{j,k}(t) \int_0^1 \varphi_{j,n}\varphi_{j,k}dx = -\sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t) \int_0^1 \varphi'_{j,n}\varphi'_{j,k}dx + \varphi_{j,n}(1) \sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t)\varphi'_{j,k}(1) \tag{11}$$

La ecuación diferencial en el extremo $x = 1$ ($k = 2^{j-1}$) es reemplazada por la ecuación algebraica $\sum_{k=2-N}^{2^j-1} \alpha_{j,k}(t)\varphi_{j,k}(1) = 0$ correspondiente a la condición de borde.

El sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas resultante tiene dimensión $2^j + N - 2$ y contiene los coeficientes de conexión $\Gamma^{d_1 d_2}_{i,j}$ presentados en Ec.(4): el lado izquierdo de la Ec. (11) corresponde a Γ^{00} y el primer término del lado derecho a Γ^{11}.

Los coeficientes $\alpha_{j,k}(t)$ correspondientes a la escala j, son obtenidos mediante la rutina *ode15s* de Matlab que realiza la integración en el tiempo de sistemas de ecuaciones diferenciales algebraicas *stiff*.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado las capacidades de las funciones de escala de Daubechies para la resolución de ecuaciones diferenciales. Actualmente se está analizando la incorporación de las wavelets en el esquema de refinamiento para diseñar estrategias adaptativas explotando la autosimilaridad, regularidad y localización de las funciones del análisis multirresolución de Daubechies.

REFERENCIAS

[1] I. DAUBECHIES, *Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF. Regional Conference.*, Series in Applied Mathematic.Departament of Mathematics. University of Lowell. MA SIAM: Philadelphia. PA 1992.

[2] A. LATTO, H.L. RESNIKOFF AND E. TENENBAUM, *The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets*,In Y. Maday (Ed.). Proceedings of the French USA workshop on wavelets and turbulence. Springer 1992.

[3] L. ALVAREZ DÍAZ, M. T. MARTÍN, V. VAMPA, *Daubechies wavelet beam and plate finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design, 45, pp. 200-209, 2009.

[4] C. K. CHUI, *An introduction to wavelets*, Academic Press, New York, 1992.

[5] J. MA, J. XUE, S. YANG, Z. HE,*A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element*, Finite Elements in Analysis and Design, 39, pp. 965-975, 2003.

[6] J. XIANG, X. CHEN, Y. HE AND Z. HE,*The construction of plane elastomechanics and Mindlin plate elements of B-spline wavelet on the interval*, Finite Elements in Analysis and Design, 42, pp. 1269-1280, 2006.

[7] CLAES JOHNSON, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method* , CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge, 1987.

[8] ADITYA BINDAL, JOHANNES G. KHINAST, MARIANTHI G. IERAPETRITOU, *Adaptive multiscale solution of dynamical systems in chemical processes using wavelets* , Computers and Chemical Engineering 27 131-142, 2003.