MÉTODO DEL RESIDUO ESPECTRAL PARA RESOLVER SISTEMAS NO LINEALES INDETERMINADOS SIN DERIVADAS.

Raúl Vignau[♭], Nélida Echebest[♭] y M. Laura Schuverdt[♭, †]

[♭]*Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. UNLP, La Plata, Argentina, vignau@mate.unlp.edu.ar, opti@mate.unlp.edu.ar,schuverd@mate.unlp.edu.ar*
[†]*CONICET, Argentina, www.conicet.gov.ar*

Resumen: En este trabajo se extiende el método introducido por La Cruz, Martínez y Raydan, para resolver sistemas no lineales sin derivadas, al caso indeterminado. El algoritmo genera una sucesión no monótona basada en la técnica de globalización de Grippo, Lampariello y Lucidi, combinando con la estrategia de búsqueda de Li-Fukushima. Se presenta la teoría básica y las experiencias numéricas que comparan la eficiencia con un método de Quasi-Newton, basadas en problemas de la literatura.

Palabras clave: *sistemas indeterminados, sin derivadas, residuo espectral*
2000 AMS Subject Classification: 65H10

1. INTRODUCCIÓN

En muchos problemas de optimización no lineal el cálculo de los valores funcionales de la función objetivo y restricciones es costoso y las derivadas no están disponibles. Es conocido que problemas con esas características, por ejemplo provenientes de la Ing. Química o Economía, también se caracterizan porque tanto la función objetivo como las restricciones son suficientemente suaves.

El conjunto factible de muchos problemas de programación no lineal es usualmente representado por un conjunto de ecuaciones no lineales, $F(x) = 0$ donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Eventualmente también las variables pueden estar sujetas a restricciones de cotas. Algunos métodos actuales [10] en el contexto de optimización no lineal con derivadas, prácticos y eficientes, explotan esa estructura y requieren procedimientos algorítmicos para mejorar la factibilidad en cada iteración.

El objetivo principal del trabajo, en el marco de optimización no lineal sin derivadas, y de las posibles metodologías de resolución como el método SQP(Programación Cuadrática Secuencial) o el de método de Restauración Inexacta(IR)[10], es resolver eficientemente en cada iterado $x^k \in \mathbb{R}^n$ el siguiente problema:

$$\min_{\|x-x^k\|\leq\Delta_k} \sum_{i=1}^{m}(F_i(x))^2$$

siendo $F_i(x) = 0, \;\; i = 1, ..., m$, las restricciones del problema original.

Nuestro trabajo está dirigido a extender y generalizar el método DF-SANE, desarrollado por La Cruz, Martínez y Raydan [7], al caso de sistemas indeterminados ($m < n$). DF-SANE es un método para resolver sistemas no lineales cuadrados ($m = n$) que usa sistemáticamente en cada iteración la dirección n-dimensional $d_k = \pm\sigma_k\, F(x^k)$, donde σ_k es un coeficiente espectral [1]. Introducen una técnica de búsqueda lineal no monótona, asociada a la dirección d_k, la cual no requiere derivadas direccionales.

En este trabajo se introduce en cada iteración x^k, una secuencia de pasos, sobre un número p_m de subespacios afines, S_j, de dimensión m, definidos por matrices $B_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$ establecidas al inicio del procedimiento. Estas direcciones se calculan haciendo uso de la idea teórica del Jacobiano Aumentado utilizado en [12] y del coeficiente espectral mencionado anteriormente. Una vez realizados estos p_m pasos, se calcula un paso en una dirección que combina las direcciones anteriormente definidas. Las búsquedas lineales siguen la línea descripta por DF-SANE, adaptando las estrategias al caso especial en estudio. Se combinan las estrategias de búsqueda lineal no monótona de Grippo, Lampariello y Lucidi [4], con la estrategia de Li-Fukusima [8]. Considerando como función de mérito $f(x) = \|F(x)\|^2$, la condición de descenso resulta ser

$$f(x^k + \alpha_k d_k) \leq \max_{0\leq j\leq L-1} f(x^{k-j}) + \eta_k - \gamma\alpha_k^2 f(x^k), \tag{1}$$

siendo L un número entero positivo, $0 < \gamma < 1$, $\eta_k > 0$ una sucesión tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$ es convergente. Tal condición no requiere el cálculo de derivadas. Esta combinación toma en cuenta la ventaja de cada esquema utilizado lo que produce una estrategia robusta de búsqueda lineal no monótona sin derivadas.

A continuación se da el esquema básico del nuevo algoritmo:

Esquema Básico (IDF-SANE)

Paso Iterativo k: *Dados x^k, $F(x^k)$, $k \geq 1$, $\overline{\sigma}_k > 0$*

Define $z_0 = x^k$, $\sigma_0 = \overline{\sigma}_k$;

For $j = 0 : p_m - 1$

- $d_j = -(\bar{B}_j)^{-1} \begin{bmatrix} F(z_j) \\ 0 \end{bmatrix}$, *siendo* $\bar{B}_j = \begin{bmatrix} B_j \\ V_j \end{bmatrix}$ *donde* $B_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *y* $V_j \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$, $V_j \in R(B_j^t)^{\perp}$
- $\lambda_j = \frac{1}{\sigma_j}$
- *Búsqueda lineal: Determina α_j tal que $z^+ = z_j + \lambda_j \alpha_j d_j$ satisface la condición (1)*
- *Define $z_{j+1} = z_j + \lambda_j \alpha_j d_j$*
- *Define $s = z_{j+1} - z_j$, $y = F(z_{j+1}) - F(z_j)$*
- $\sigma_{j+1} = \min \left\{ \beta, \max \left\{ 0, \frac{\langle y, B_j s \rangle}{\langle B_j s, B_j s \rangle} \right\} \right\}$

End

Define $x^{k+1} = z_{p_m} + \lambda_k \alpha_k d^k$ siendo $d^k = z_{p_m} - z_0$, $\lambda_k = \frac{1}{\sigma_{pm}}$ y α_k el coeficiente que satisface la condición (1)

Define: $s = x^{k+1} - z_{p_m}$, $y = F(x^{k+1}) - F(z_{p_m})$

$\overline{\sigma}_{k+1} = \min \left\{ \beta, \max \left\{ 0, \frac{\langle y, B_0 s \rangle}{\langle B_0 s, B_0 s \rangle} \right\} \right\}$

End

En este trabajo se analizarán dos versiones particulares del esquema previo, se justificarán los pasos del mismo y su buena definición. Se presentará la teoría fundamental de la metodología propuesta y las experiencias numéricas realizadas.

Los problemas utilizados para realizar los experimentos numéricos están descriptos en [5] y ya han sido utilizados para resolver sistemas de ecuaciones no lineales indeterminados con derivadas en [3].

Para analizar el desempeño del método propuesto se comparará el algoritmo con un método del tipo Quasi-Newton de Broyden que utiliza la misma estrategia de búsqueda lineal no monótona.

El trabajo estará organizado de la siguiente manera: en la primera parte se describen los pasos principales del método: el cálculo de la dirección de búsqueda y la estrategia de búsqueda lineal sin derivadas utilizada; en la segunda parte se analizarán las propiedades de convergencia y finalmente en la última parte se presentarán los resultados numéricos obtenidos y conclusiones.

REFERENCIAS

[1] J. BARZILAI, J.M BORWEIN, *Two -point step size gradient methods*. IMA Journal of Numerical Analysis,8 (1988), pp. 141-148.

[2] N. ECHEBEST, R. VIGNAU, *Una extensión del método NEWUOA de optimización sin derivadas para la resolución de problemas no lineales con restricciones*. Memorias de la Reunión de la UMA (2008).

[3] J.B. FRANCISCO, N. KREJIĆ, J.M. MARTÍNEZ, *An interior point method for solving box-constarined underdetermined nonlinear systems*. Journal of Computational and Applied Mathematics 177 (2005), pp. 67 - 88.

[4] L. GRIPPO, F. LAMPARIELLO, S. LUCIDI, *A nonmonotone line search technique for Newton's method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23(1986), pp.707-716.

[5] W. HOCK, K. SCHITTKOWSKI, *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*. Springer Series Lectures Notes in Economics Mathematical Systems (1981).

[6] W. LA CRUZ, M. RAYDAN, *Nonmonotone Spectral Methods for Large Scale Nonlinear Systems*. Optimization Methods and Software, 18(2003), pp. 583-599.

[7] W. LA CRUZ, J.M. MARTÍNEZ, M. RAYDAN M, *Spectral residual method without gradients for solving large-scale nonlinear systems of equations. Theory and experiments*. Technical Report(2004).

[8] D.H. LI, M. FUKUSHIMA, *A derivative-free line search and global convergence of Broyden -like method for nonlinear equations*. Optimization Methods and Software,13(2000), pp. 181-201.

[9] J.M. MARTÍNEZ, *Quasi-Inexact Newton methods with global convergence for solving constrained nonlinear systems*. Nonlinear Analysis 30(1997), pp. 1-7.

[10] J.M. MARTÍNEZ, E.A. PILOTTA, *Inexact Restoration algorithms for constrained optimization*. Journal of Optimization Theory and Applications 104(2000), pp. 135-163.

[11] POWELL, *The NEWOUA software for unconstrained optimization without derivatives*. Technical Report, 2004.

[12] H.F. WALKER, L.T. WATSON, *Least-Change secant update methods for underdetermined systems* . SIAM Journal on Numerical Analysis 27, 5(1990), pp. 1227-1262.