

APLICAÇÃO DE UM ALGORITMO GENÉTICO PARA O PROBLEMA DAS P-MEDIANAS EM UM CASO REAL DE AVALIAÇÃO DE LOCALIZAÇÃO DE ESCOLAS

Danielle Durski Figueiredo* danidurski@gmail.com
Raimundo Ronilson Leal do Rosário* ronileal@yahoo.com.br
Paula Francis Benevides* paulabenevides@utfpr.edu.br
Luzia Vidal de Souza** luzia@ufpr.br

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Curitiba, PR

** Universidade Federal do Paraná, UFPR, Curitiba, PR

RESUMO

A finalidade do planejamento da rede escolar é o de realizar o atendimento em todas as áreas da cidade, que garanta acesso mais seguro, mais fácil e mais econômico aos alunos. Este trabalho oferece uma avaliação da localização das escolas públicas municipais de Prudentópolis no estado do Paraná, Brasil, baseando-se na situação real e atual apresentada. O estudo oferece a indicação de uma unidade escolar a ser fechada ou remanejada para outros setores, pois atualmente a rede municipal de ensino apresenta excesso de vagas, bem como os custos obtidos com a exclusão da unidade escolar da rede. Resultados da pesquisa mostraram que a localização geográfica atual das escolas municipais está adequada, em relação à soma das distâncias percorridas pelos estudantes até as escolas, pois apresenta pequeno desvio em relação à solução obtida através da metodologia proposta.

Palavras-chave: Localização de facilidades, P -medianas, Evolução Diferencial Discreto.

ABSTRACT

The purpose of planning the school system is to perform the service in all areas of the city, which guarantees access safer, easier and more economical to students. This paper provides an assessment of the location of public schools in the municipality of Prudentópolis in Paraná state, Brazil, based on the actual situation and the current displayed. The study provides a reference to a school to be closed or relocated to other sectors, as currently the municipal school has excess vacancies, as well as the costs obtained with the exclusion of the school unit's network. Survey results showed that the current geographical location of the municipal schools is adequate in relation to the sum of the distances traveled by students to schools, it presents small deviation to the solution obtained by the proposed methodology.

Keywords: Location of facilities, P -median, Discrete Differential Evolution.

1 INTRODUÇÃO

Algoritmos de otimização que abordam Problemas de Localização de Facilidades tratam do problema de identificar a melhor localização, em uma área específica, para a instalação de facilidades de serviços. Segundo Minieka (1978) os problemas de localização dividem-se em dois tipos básicos: localização de centros, que busca minimizar a maior distância a ser percorrida e localização de medianas (p -medianas).

O problema das p -medianas é um problema clássico de otimização combinatória que tem como finalidade definir a melhor localização para p facilidades (medianas) em uma região, minimizando a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda a sua mediana mais próxima.

Hakimi (1964) apresentou as primeiras formulações dos problemas de localização de facilidades. A maioria dos problemas tratados é considerada de difícil solução, alguns pertencentes à classe NP -hard. Vários métodos heurísticos têm sido desenvolvidos para o problema das p -medianas.

Um dos fatores que vem a minimizar as dificuldades relacionadas às distâncias de deslocamento dos alunos às escolas é o planejamento da localização das mesmas na região. Para localizar uma unidade de ensino, de forma a atender as necessidades dos alunos, é preciso estabelecer critérios que possam auxiliar na escolha do melhor local de implantação das escolas.

Fazendo uso de uma situação encontrada em várias cidades as quais não se amparam em um plano diretor para a distribuição de pontos de facilidade nas mesmas, tomou-se como estudo de caso a cidade de Prudentópolis – PR considerando a distribuição de escolas dentro dos perímetros urbano e rural.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo da localização das escolas públicas municipais da cidade de Prudentópolis no estado do Paraná (Brasil) utilizando os Algoritmos Genéticos, para avaliar a atual posição geográfica das unidades escolares e indicar uma unidade escolar a ser fechada ou remaneja a fim de minimizar os gastos dos recursos públicos, gerando economia à prefeitura da cidade.

Este artigo é organizado como segue: a Seção 2 apresenta a formulação matemática do problema das p -medianas; a Seção 3 aborda os Algoritmos Genéticos utilizado neste trabalho; a Seção 4 apresenta o estudo de caso abordado e a metodologia de localização utilizada e na Seção 5 encontram-se os resultados e as considerações finais.

2. PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES

Algoritmos de otimização que abordam Problemas de Localização de Facilidades tratam do problema de identificar a melhor localização, em uma área específica, para a instalação de facilidades de serviços. Modelos de localização de facilidades são frequentemente abordados na literatura por possibilitarem aplicações de métodos científicos a problemas reais.

Lorena (2003) enfatizou o uso de Sistemas de Informações Geográficas como um método para abordar problemas de análise espacial, que usam redes urbanas como suporte. Os problemas abordados envolveram problemas de localização de facilidades e roteamento de veículos.

Pinedo e Abreu (2011) mostraram uma análise, feita no Estado do Tocantins com o propósito de determinar pontos ótimos para implantação de usinas de biodiesel. Para a obtenção dos resultados desenvolveram um modelo matemático, da Programação Linear Inteira Mista, baseado nas teorias de localização e logística. O modelo matemático indicou os municípios com o maior potencial para o recebimento das novas usinas de biodiesel, de forma a minimizar os custos de transporte da matéria-prima priorizando a proximidade das instalações aos centros consumidores do produto final.

Segundo Minieka (1978) os problemas de localização dividem-se em dois tipos básicos: localização de centros, que busca minimizar a maior distância a ser percorrida e localização de medianas (p -medianas).

2.1 Problema das p -medianas

O problema das p -medianas é um problema clássico de otimização combinatória que tem como finalidade definir a melhor localização para p instalações (medianas) em uma região, minimizando a soma de todas as distâncias de cada ponto de demanda a sua mediana mais próxima. Métodos que abordam o problema das p -medianas têm sido apresentados na literatura, podendo-se citar o estudo de Freitas *et al.* (2012) que se utilizou dos resultados da teoria espectral na construção de um algoritmo híbrido baseado no método de Teitz & Bart. O estudo do problema de p -medianas tem grande importância, pois contribui diretamente em problemas da vida em sociedade como, por exemplo, a determinação da localização de pontos de coleta e transmissão de dados do processo eleitoral brasileiro [Correia *et al.*, 2010], viaturas do Batalhão da Patrulha Escolar para atendimento a colégios públicos [Rosa, 2011], instalações de postos de saúde pública para o atendimento de epidemias de dengue na cidade de Salvador – BA [Junior e Santos, 2010].

Segundo Christofides (1975), o problema das p -medianas pode ser formulado como um problema de programação linear inteira binária, da seguinte forma:

$$Z = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{ii} \quad i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j \in N \quad (5)$$

onde:

$[d_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz simétrica de distâncias ponderadas;

$[x_{ij}]_{n \times n}$ é a matriz de alocação, com $x_{ij} = 1$ se o vértice i é alocado ao vértice j e $x_{ij} = 0$, caso contrário; $x_{ii} = 1$ se o vértice i é uma mediana e $x_{ii} = 0$, caso contrário;

p é o número de medianas (facilidades) a serem localizadas;

n é o número de vértices na rede, e $N = \{1, \dots, n\}$.

A função objetivo (1) minimiza a soma das distâncias ponderadas d_{ij} , onde d_{ij} é o produto da distância entre os vértices v_i e v_j ($d(v_i, v_j)$) pelo peso w_j , sendo o peso w_j a demanda de cada vértice v_j . Assim $d_{ij} = w_j \cdot d(v_i, v_j)$.

As restrições (2) e (4) definem que cada vértice j é alocado a somente um vértice i , que deve ser uma mediana. A restrição (3) determina o número p de medianas a ser localizado e a restrição (5) corresponde às condições de integralidade.

A seguir apresenta-se a metaheurística utilizada neste trabalho.

3 ALGORITMOS GENÉTICOS (AG's)

Metaheurísticas são procedimentos destinados a encontrar uma boa solução, eventualmente a ótima, consistindo na aplicação, em cada passo, de uma heurística subordinada, a qual tem que ser modelada para cada problema específico. Conforme Chaves (2003), a principal característica das metaheurísticas é a capacidade que estas possuem de escapar de ótimos locais dando certa flexibilidade às restrições da função objetivo.

Charles Darwin formulou a Teoria da Evolução no final do século XIX, mas somente na década de 60 idealizou-se um modelo matemático do processo evolutivo. Neste mesmo período, John Holland, da Universidade de Michigan, iniciou a definição das bases de algoritmos de otimização inspirados na evolução genética. Seu trabalho originou a publicação do livro *Adaptation in Natural and Artificial Systems* [Holland, 1975].

Os Algoritmos Genéticos (AG's) têm se destacado na solução de uma gama de problemas devido a sua simplicidade e sua facilidade em resolver problemas sem exigir um excessivo conhecimento prévio destes. Os AG's pertencem à classe dos algoritmos probabilísticos de busca e otimização, embora não sejam aleatórios, pois dirigem a busca para o local provável das soluções ótimas. Os Algoritmos Genéticos trabalham com uma população de soluções iniciais, chamadas cromossomos, que através de diversas operações são evoluídas até que se chegue a uma solução que melhor atenda a algum critério específico de avaliação [Mitchell, 1996]. Para que isto ocorra, a cada geração os cromossomos são avaliados segundo uma função que mede o seu nível de aptidão, chamada de função de *fitness*. Os cromossomos que tiverem o melhor *fitness* são selecionados para darem origem à próxima geração, através de operações como cruzamentos e mutações. Os cruzamentos exploram a bagagem genética já existente, ou seja, realiza uma busca local. As mutações

têm a função de repor o material genético perdido em gerações anteriores e também a introdução de material inexistente [Heinen e Osório, 2006].

4 ESTUDO DE CASO: PRUDENTÓPOLIS – PARANÁ, PR

Prudentópolis, município cuja pesquisa foi desenvolvida, faz parte da Região Centro-Sul do Estado do Paraná (Brasil) e está a 203 km do município de Curitiba, capital do estado. Ocupa uma área de aproximadamente 2.308 km², com população estimada em 2011 de 49.016 habitantes. O município é a segunda maior cidade da região centro sul e centro oeste do estado do Paraná.

De acordo com a Secretaria Municipal de Educação de Prudentópolis, o município possui 56 escolas municipais distribuídas nas regiões urbana e rural e atualmente oferta aproximadamente 5200 vagas para alunos do Ensino Fundamental I onde 4500 crianças encontram-se matriculadas. Verifica-se que atualmente a rede municipal de ensino apresenta excesso de vagas, sendo assim o estudo pode sinalizar quais escolas podem ser fechadas ou remanejadas para setores educacionais mais necessitados como, por exemplo, a rede estadual de ensino, tomando como critério a minimização da soma das distâncias percorrida pelos alunos.

De acordo com a Secretaria Municipal de Educação de Prudentópolis, o município possui 56 escolas municipais distribuídas nas regiões urbana e rural. Os dados relativos à população escolar do Ensino Fundamental I, bem como os mapas digitalizados da malha censitária do município, foram obtidos junto ao IBGE, através de um CD contendo os dados do censo de 2010, disponível comercialmente.

4.1 Metodologia de Localização

A metodologia da localização consiste primeiramente na discretização da população segundo setores censitários.

No levantamento censitário de 2010, o município de Prudentópolis foi dividido em 78 setores censitários. A região em estudo foi considerada como um único grafo, cujos vértices foram localizados sobre o ponto central de cada setor censitário. A quantidade de crianças, na faixa etária de 6 a 10 anos, residentes em cada setor foi considerada como o peso do vértice correspondente. Supõe-se que toda a população desta faixa etária deve estar matriculada no Ensino Fundamental I.

Obteve-se do Núcleo Regional de Educação de Irati, responsável pela administração das unidades escolares do município de Prudentópolis-Pr, os endereços das escolas existentes.

As figuras 1 e 2 ilustram a distribuição espacial de todas as escolas municipais de Prudentópolis/PR da área urbana e da área rural respectivamente.



Figura 1 – Setores Censitários e Distribuição das Escolas na área urbana.

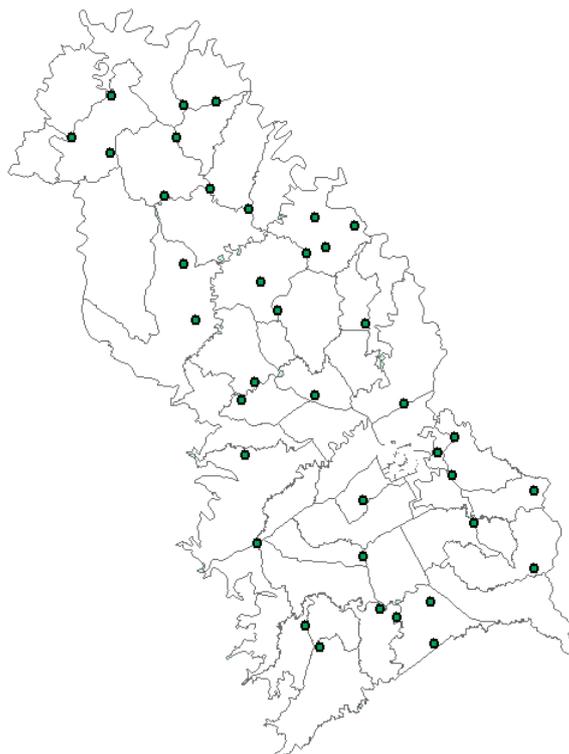


Figura 2 – Setores Censitários e Distribuição das Escolas na área rural.

Considerou-se que o conjunto de escolas localizadas no mesmo setor censitário representará uma única escola. O município em estudo possui 56 escolas, porém com esta adaptação foram consideradas, para a primeira etapa do problema, 40 escolas (medianas), ou seja, atualmente existem 40 setores censitários que contêm unidades escolares.

Parte-se da premissa de que todas as escolas oferecem as mesmas condições de ensino e de estrutura física. Sendo assim o critério de proximidade passa a ser um determinante na escolha da escola por parte dos estudantes.

A distância Euclidiana constitui, na maioria das aplicações reais, uma abstração útil para cálculos, pela simplicidade de representação analítica e pela sua característica de unicidade [Novaes, 1994]. As distâncias euclidianas entre os 78 centróides dos setores censitários foram obtidas através do software Quantum Gis, versão 1.7.4 *Wroclaw*.

Como os percursos são feitos sempre ao longo de uma via de transporte, a distância euclidiana entre dois pontos não é equivalente à distância real entre esses pontos. Utiliza-se então, um coeficiente de correção para estimar, ou seja, $d_r = k \cdot d_e$, onde d_r é a distância real estimada, d_e é a distância euclidiana e k é um coeficiente de correção. Adotou-se o valor do coeficiente de correção igual a 1,35, o mesmo adotado por Novaes (1994).

O modelo proposto supõe que alunos e escolas se localizem nos vértices do grafo. A distância d_r , entre o ponto inicial dos alunos até as escolas que se localizam no mesmo setor censitário, foi estimada através da medida da área do setor censitário pela equação: $d_r = \lambda \cdot \sqrt{A}$, onde A é a área do setor censitário e λ é uma constante de proporcionalidade. Segundo estudos empíricos e métodos experimentais apresentados por Larson e Odoni (1991), definiu-se um valor adequado para a constante de proporcionalidade λ igual a 0,38.

Optou-se em abordar o problema em estudo duas etapas:

Etapa I

Para realizar uma avaliação da localização das escolas públicas municipais, no que se refere à soma total das distâncias percorridas pelos alunos, baseando-se na situação real e atual apresentada, o

problema das p -medianas foi resolvido a fim de se obter as 40 medianas (escolas) entre 78 vértices (setores censitários), obtendo-se um modelo teórico utilizado como parâmetro para a avaliação da real e atual localização das escolas.

Etapa II

Para a indicação da unidade escolar a ser fechada ou remanejada será baseada nos resultados obtidos na Etapa I. Tais resultados podem indicar qual região, urbana ou rural, a escola a ser excluída ou remanejada pertence. Desta forma o problema das p -medianas a ser resolvido aborda somente as escolas pertencentes à região indicada, reduzindo a dimensão do problema.

Para ambas as etapas, o modelo de localização de medianas será abordado com Algoritmos Genéticos (AG's). A metodologia adotada poderá ser generalizada e estendida a outros casos de localização de escolas.

Optou-se pelo Algoritmo Genético para a resolução do problema das p -medianas, pois de acordo com Horner (2009) este algoritmo apresenta bom desempenho para problemas das p -medianas em redes pequenas e médias. Apresenta-se a seguir os parâmetros adotados no algoritmo que apresentaram melhores resultados após testes computacionais.

4.2 Parâmetros utilizados no algoritmo Genético

Para a implementação dos Algoritmos Genéticos utilizou-se o cruzamento com 2-partições, a uma taxa igual a 80%, onde há a escolha aleatória de dois pontos de corte. Todo material genético entre os dois pontos de corte são trocados entre os dois vetores envolvidos, e o restante é mantido inalterado. Para a operação de mutação, a uma taxa igual a 10%, realizou-se a troca de uma mediana por um valor (vértice) pertencente ao conjunto de valores viáveis. Para a origem da próxima geração se os indivíduos gerados tiverem melhor *fitness* que os piores elementos da população, então serão incluídos na população e os piores serão excluídos.

O critério de parada adotado para os dois algoritmos foi o número máximo de iterações ($G_{máx}$). onde $G_{máx} = 3.000$ e para a população inicial 6 (seis) vetores (indivíduos).

Os resultados obtidos pelo algoritmo foram comparados com a localização real atual das escolas.

O algoritmo foi programado em *Visual Basic* e para o desenvolvimento computacional foi utilizado um computador com processador Intel Pentium T3400 com 320 GB de HD e 4 GB de RAM.

5 RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos e as considerações finais, nesta pesquisa, são apresentados para as etapas definidas na metodologia.

Etapa I

Foram determinados 40 setores censitários com melhores localizações para instalação de escolas municipais do município de Prudentópolis do estado do Paraná, de tal forma que a soma das distâncias de cada centróide (vértice) dos 78 setores censitários à escola (facilidade) mais próxima seja mínima.

O objetivo da simulação computacional realizada é de obter soluções próximas da solução ótima. Não se teve a preocupação de realizar dezenas de simulações nem de submeter o algoritmo a um longo tempo de processamento para forçar o surgimento de melhores soluções. Foram efetuadas então 10(dez) simulações. A melhor solução encontrada através do algoritmo foi 7.008.816 metros.

As Figuras 3 e 4 apresentam os setores censitários das regiões urbana e rural do município em estudo. Nelas estão indicados os setores censitários definidos para a instalação de unidades escolares pela metodologia apresentada neste trabalho.

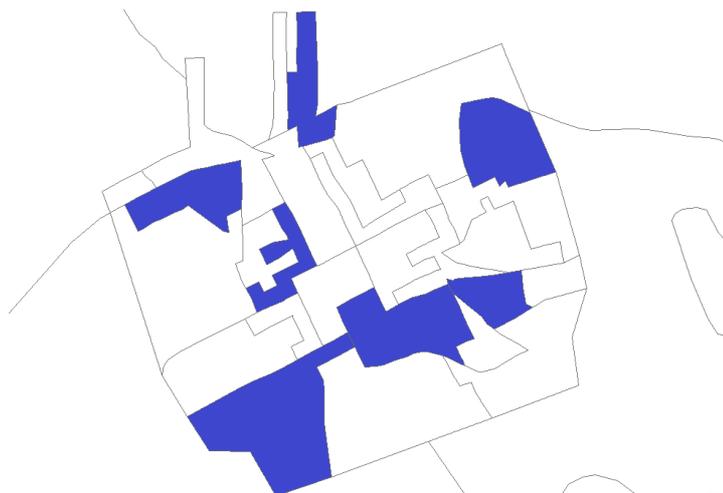


Figura 3 – Setores da área urbana indicados pelo método para a localização de escolas.

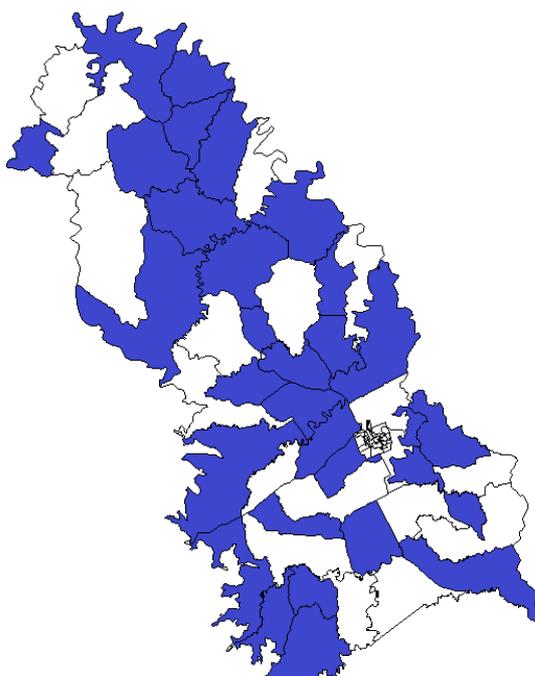


Figura 4 – Setores da área rural indicados pelo método para a localização de escolas.

Com a atual localização das escolas a soma de todas as distâncias de cada centróide dos setores censitários ao centróide do setor censitário mais próximo que possui escolas é aproximadamente igual a 7.769.295 metros, apresentando uma diferença de 760.479 metros.

Tanto a solução apresentada através do método adotado quanto a atual localização das escolas registram a mesma distância máxima percorrida que é de aproximadamente 9.019 metros.

Sendo a soma das distâncias percorridas pelos estudantes até as unidades escolares atuais aproximadamente 10,85% maior que a teórica obtida pela metodologia adotada e a distância máxima percorrida ser a mínima encontrada pelo algoritmo, conclui-se que a localização geográfica das unidades escolares é adequada já que a demanda dos setores censitários se altera como o crescimento ou decrescimento populacional da região.

Observa-se que 23 setores censitários, dos 40 a serem indicados, são coincidentes com a localização de escolas já existentes.

Para a região urbana o método indica a necessidade de que 7 (sete) setores sejam áreas de localização para as escolas, mas atualmente 10 (dez) setores possuem escolas nesta região. Em contra partida, para a região rural o método indica a necessidade de que 33 (trinta e três) setores sejam áreas de localização para as escolas, mas atualmente 30 (trinta) setores possuem escolas nesta região.

Etapa II

A partir dos resultados obtidos na Etapa I, sugere-se que a unidade escolar a ser fechada ou remanejada para outro setor educacional, de maneira a minimizar a soma total das distâncias percorrida pelos estudantes, pertença à região urbana, que possui 27 (vinte e sete) setores censitários, onde 10 (dez) possuem unidades escolares. A figura 5 ilustra o setor censitário onde se localiza a escola indicada para ser fechada ou remanejada.

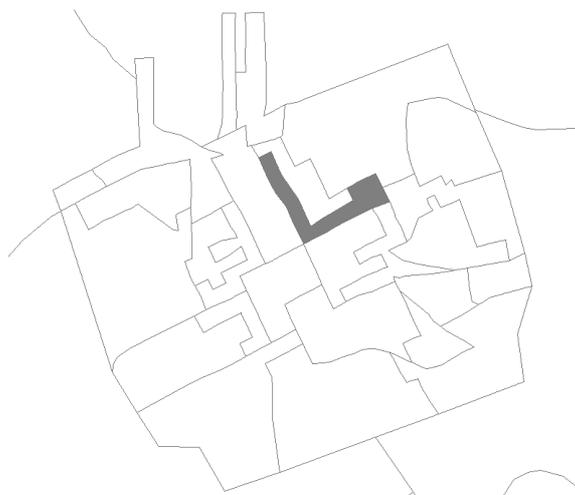


Figura 5 – Setor censitário da escola indicada para ser fechada ou remanejada.

Como o fechamento ou remanejamento da unidade escolar indicada, a soma das distâncias percorridas pelos estudantes até as unidades escolares atuais será igual a 7.801.190 metros, ou seja, aproximadamente 0,4% maior que a praticada atualmente. A máxima distância percorrida continuará aproximadamente igual a 9019 metros. Sendo assim conclui-se que, com o fechamento da unidade escolar indicada, haverá um desvio mínimo em relação às distâncias que ocorrem atualmente.

5.1 Conclusão

O método adotado para se determinar localizações para implantação de escolas no município de Prudentópolis, utilizando-se dos Algoritmos Genéticos, encontrou boas soluções, indicando, desta forma, onde estão as melhores localizações para se implantar as escolas possibilitando uma avaliação da atual situação. O método permitiu ainda a indicação de uma unidade escolar a ser fechada ou remanejada bem como os custos atribuídos a esta ação. A heurística utilizada é considerada de fácil implementação, os tempos computacionais são aceitáveis para a aplicação abordada neste trabalho, isso mostra a adequação do método adotado. Diante dos resultados obtidos a metodologia poderá ser estendida aos demais municípios do país.

REFERÊNCIAS

- CHAVES, A.A.; **Modelagens Exata e Heurística para Resolução do Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Prêmios**. Universidade Federal de Ouro Preto, Departamento de Computação. Ouro Preto, MG. 2003.
- CHRISTOFIDES, N. **Graf theory – An algorithmic approach**. New York: ed. Academic Press, 1975.
- CORREIA, J.H.; SOUSA FILHO, G.F.; NASCIMENTO, I.Q.; FORMIGA, L.A.C.; NASCIMENTO, R.Q. **Otimização e implementação de um sistema de alocação ótima de serviços públicos utilizando a metaheurística Grasp**. XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Bento Gonçalves, Brasil, Setembro de 2010.
- FREITAS, C.R.; MACHADO, C.M.S.; RETAMOSO, M.R. **Um método baseado na substituição de vértices e teoria espectral para problemas de p-medianas**. Claio, Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro RJ, Brasil, setembro de 2012.
- HAKIMI, S.L. **Optimum location of switching centers and the absolute centers and the medians of a graph**. Operations Research, 12: 450-459, 1964.
- HEINEN, M.R.; OSÓRIO, F.S. **Algoritmos Genéticos aplicados ao problema de roteamento de veículos**. Hifen, Uruguaiana, Vol. 30, Num. 58, 2006.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Articial Systems**. Univ. Michigan Press, Ann Arbor, MI.,1975.
- HORNER, D. **Resolução do problema das p-medianas não capacitado: Comparação de algumas técnicas heurísticas**. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 2009.
- JUNIOR, R.R.; SANTOS, L.B.L. **Análise iterativa dos problemas de p-centros e p-medianas para um crescente número de facilidades: estudo de caso na epidemia de dengue, Salvador**. 9th Conference on Dynamics, Control and their Applications, Jun 07-11, 2010.
- LARSON, R, C; ODONI, A, R. **Urban Operations Research**. Englewood Cliffs: PrenticeHall, 1991.
- LORENA, L.A.N. **Análise Espacial de Redes com Aplicações em Sistemas em Informações Geográficas**. Revista Produção Online. Florianópolis, SC, vol. 3, Num. 2, junho/2003.
- MINIEKA, E. **Optimization Algorithms for networks and grafs**. New York: ed. Marcel Dekker, INC. 1978.
- MITCHELL, M.. **An Introduction to Genetic Algorithms**. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- NOVAES, A. G.; ALVARENGA, A. C.. **Logística aplicada – suprimento e distribuição física**. 2. Ed, p. 219-222. Ed. Pioneira, São Paulo, 1994.
- PINEDO, K. S.; ABREU, Y. V.. **Determinação de pontos ótimos para a localização e implantação de usinas de biodiesel no estado do Tocantins**. Revista Produção Online. Florianópolis, SC, v.11, n. 4, p. 1160-1181, out./dez./ 2011.
- ROSA, R.S.; SILVA, A.C.L.; KONOWALENKO,F.; BENEVIDES, P.F. **Aplicação de p-medianas para atendimento aos colégios estaduais por viaturas do Batalhão de Patrulha Escolar**. I Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção, Ponta Grossa –PR, Brasil, Dezembro de 2011.