

## VIBRACIONES DE VIGAS PANDEADAS TÉRMICAMENTE

Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup>, Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup> y Marcelo T. Piovan<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, e-mail: [vcortine@frbb.utn.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utn.edu.ar), [mpiovan@frbb.utn.edu.ar](mailto:mpiovan@frbb.utn.edu.ar)

<sup>b</sup> Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, e-mail: [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)

<sup>c</sup> Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

**Palabras Clave:** Pandeo térmico, vibraciones libres, ecuación integro-diferencial, problema inverso.

**Resumen.** Este trabajo explora la posibilidad de evaluar las amplitudes de pospandeo a partir de la medición de frecuencias naturales. Para ello se formulan las ecuaciones gobernantes de la dinámica de vigas pandeadas sometidas a cambios térmicos. Tales ecuaciones son linealizadas alrededor de una configuración posible de pospandeo. Dicho enfoque conduce a una ecuación gobernante integro-diferencial que se resuelve numéricamente a efectos de obtener las frecuencias fundamentales en función del grado de pospandeo para diferentes condiciones térmicas. Se presentan ejemplos numéricos para ilustrar adecuadamente la problemática.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una gran cantidad de estructuras esbeltas, usadas en distintos contextos tecnológicos, presentan respuestas no lineales en condiciones de operación. Por tal razón, su diseño hace necesaria la comprensión de diferentes aspectos no lineales: vibraciones de gran amplitud, frecuencias naturales dependientes de la amplitud, inestabilidades dinámicas, etc.

En particular, un fenómeno que ha atraído la atención de muchos investigadores ha sido el comportamiento de vigas en el rango de pospandeo (Mettler, 1962; Lacarbonara, 1997; Cortínez et al., 2002, Mohri et al., 2004; Machado y Cortínez, 2006; Moradi y Jamshidi Moghadam, 2014; Suna et al., 2016). La motivación de tal estudio en general tiene que ver con la predicción de las condiciones de falla de las estructuras para poder definir con precisión el grado de seguridad en condiciones de servicio. También existen interesantes aplicaciones de vigas pandeadas en dispositivos de control de vibraciones (Plaut et al., 2008)

En este trabajo, el énfasis está puesto en la detección temprana de pandeo (y pospandeo) en estructuras tipo viga bajo condiciones anómalas de operación. En particular, se pretende explorar la posibilidad de evaluar las amplitudes de pospandeo, si existieran, a partir de la medición de frecuencias naturales de vibración. Tal problema resulta de interés en situaciones en las cuales la estructura se encuentre oculta en zonas inaccesibles, lo cual puede acontecer en problemas tecnológicos relacionados con intercambiadores de calor o reactores nucleares.

En dichos sistemas es común encontrar una configuración de tubos paralelos, ubicados muy cerca uno del otro, en un medio fluido dentro de un tanque (Blevins, 2001; Cortínez et al., 2011). Las condiciones operativas pueden involucrar un aumento del estado térmico con la consecuente acción de dilatación sobre los tubos. Estos últimos son en general diseñados de manera tal que pueden deslizar en los apoyos para evitar cargas de compresión o, en las situaciones donde estas últimas aparezcan, procurando que sean menores que las cargas críticas de pandeo.

Sin embargo, por diferentes motivos podría tener lugar una anomalía en el comportamiento habitual (por ejemplo un tubo que debería deslizar en un apoyo se traba por fricción) dando lugar a cargas compresivas más allá del rango de la carga crítica de pandeo. Si esto llega a ocurrir se genera una situación peligrosa para el sistema por la propia resistencia del tubo o, aún cuando éste lo soporte estructuralmente, podrían generarse fenómenos indeseados tales como el contacto con tubos contiguos.

Tales situaciones deben ser claramente detectadas de manera temprana. Sin embargo, en muchas ocasiones esto debe hacerse de manera indirecta ya que no es posible detener el sistema y efectuar una inspección interna. En tal sentido, resulta de interés estudiar la posibilidad de correlacionar el grado de pospandeo que pudiera acontecer en uno de los tubos por alguna anomalía con una variación de las frecuencias de vibración ya que éstas podrían ser medidas con el sistema en operación.

Con tal problema en mente, en este trabajo se analizan las vibraciones de pequeña amplitud de vigas pandeadas sometidas a cambios térmicos. En primer lugar, se plantean las ecuaciones no lineales de movimiento. Se analizan a continuación en base a las mismas, los problemas de pandeo y pospandeo. Para ello se efectúa una resolución numérica de la carga crítica de pandeo y la correspondiente forma modal, que luego es utilizada como aproximación para determinar la amplitud del desplazamiento de pospandeo mediante el método de Galerkin global.

Para la determinación de las frecuencias de vibración transversal en el estado de pospandeo se modifica la ecuación de movimiento transversal en función de los desplazamientos incrementales respecto a la configuración de pospandeo. Esto conduce a una ecuación gobernante integro-diferencial del problema de vibraciones libres transversales.

Se plantea una resolución numérica de este último problema. Se dan algunos ejemplos numéricos mostrando la variación de las frecuencias naturales en términos del grado de pospandeo debido a diferentes condiciones térmicas. Asimismo, mediante estos ejemplos numéricos se explora, con especial énfasis, la posibilidad de resolver el problema en forma inversa, es decir, obtener las amplitudes de pospandeo, cuando existan, a partir del conocimiento de las frecuencias naturales de vibración del sistema.

## 2 DINÁMICA DE VIGAS PANDEADAS TÉRMICAMENTE: FORMULACIÓN

Se considera una viga tipo Bernoulli-Euler imperfecta sometida a un incremento térmico  $\Delta T(x)$  (Figura 1). Para tal estructura se plantean las ecuaciones dinámicas siguiendo la teoría de arcos rebajados (Lacarbonara, 1997).

De acuerdo a la teoría de Bernoulli-Euler, los desplazamientos para una sección simétrica pueden ser expresados de la siguiente manera:

$$u = U(x) - zw'(x) \quad (1)$$

$$w = w(x) \quad (2)$$

donde  $u$  y  $w$  corresponden a los desplazamientos axial y transversal respectivamente,  $U$  es el desplazamiento del eje centroidal y  $z$  es la coordenada transversal con origen en el centroide de la sección.

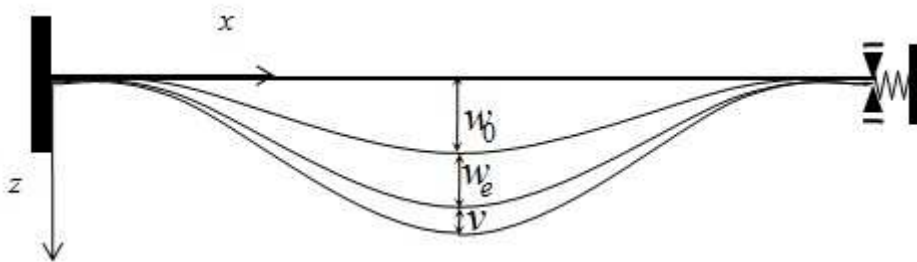


Figura 1: Esquema de la viga analizada

La deformación longitudinal de acuerdo a la teoría de Mettler (1962), puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - zw'' \quad (3)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{ds}{ds_0} - 1 \quad (4)$$

$\varepsilon_0$  corresponde a la deformación específica longitudinal en el plano medio de la viga debida tanto al desplazamiento longitudinal como transversal de la misma. Para expresarla en función de tales desplazamientos, los elementos de arco deben ser escritos de la siguiente forma:

$$ds_0 = \sqrt{1 + w_0'^2} dx \quad (5)$$

$$ds = \sqrt{(1 + U')^2 + (w_0' + w')^2} dx \quad (6)$$

Reemplazando (5) y (6) en (4) y despreciando infinitésimos de orden superior se llega a:

$$\varepsilon_0 \cong U' + w_0' w' + \frac{1}{2} w'^2 \quad (7)$$

El término  $w_0$  corresponde a una imperfección inicial como se muestra en la Figura 1, y  $w$  constituye el desplazamiento transversal medido con respecto a tal configuración imperfecta.

De acuerdo a la ley de Hooke puede determinarse la tensión normal en dicha viga considerando también el efecto de la dilatación térmica de la siguiente manera (siendo  $E$  y  $\alpha$  el módulo de elasticidad y el coeficiente de dilatación térmica, respectivamente):

$$\sigma = E \left( U' + w_0' w' + \frac{1}{2} w'^2 - \alpha \Delta T - z w'' \right) \quad (8)$$

Obteniendo la deformación virtual longitudinal a partir de las expresiones anteriores, sustituyendo en el principio de los trabajos virtuales y operando de acuerdo al cálculo variacional, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} m\ddot{u} - N' = p_x \\ m\ddot{w} + (-M)'' - \left( N(w_0' + w') \right)' + c\dot{w} = q_z \end{cases} \quad (9)$$

donde  $m$  corresponde a la masa por unidad de longitud,  $c$  al coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $p_x$  y  $q_z$  a las cargas por unidad de longitud en las direcciones longitudinal y transversal respectivamente, mientras que  $N$  y  $M$  corresponden a las habituales definiciones de esfuerzo normal y momento flector. Considerando la ley de Hooke dada por (8) conjuntamente con las definiciones de  $N$  y  $M$ , pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} N = EA \left( U' + w_0' w' + \frac{1}{2} w'^2 \right) - EA\alpha\Delta T \\ M = -EIw'' \end{cases} \quad (10)$$

El sistema (9-10) modela la dinámica no lineal de la estructura y debe ser complementada con las correspondientes condiciones de borde e iniciales.

Considerando el hecho de que las frecuencias correspondientes a modos axiales son muchos más altas que las transversales es posible despreciar la inercia axial para el estudio de la dinámica transversal de los modos más bajos. De esta manera, puede obtenerse, a partir de la primera de las ecuaciones (9), el esfuerzo normal que adopta la siguiente expresión:

$$N = \psi(x) + \eta \quad (11)$$

donde:

$$\psi(x) = -\xi + \frac{\int_0^L \frac{\xi}{EA} dx}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} \quad (12)$$

$$\eta = \frac{\int_0^L \left( w_0' w_0' + \frac{1}{2} w_0'^2 \right) dx}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} - \frac{\int_0^L \bar{\alpha} \Delta T dx}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} \quad (13)$$

$$\xi = \int_0^x p_x dx; \quad \bar{\alpha} = \alpha - \frac{u_L}{L \Delta T} \quad (14)$$

siendo  $u_L$  el valor del desplazamiento axial en el  $x=L$ .

Luego, la ecuación gobernante de la dinámica transversal puede ser expresada de acuerdo a (9), (10) y (11) en la forma:

$$m \ddot{w} + c \dot{w} + (EI w'''' - ((\psi + \eta)(w_0' + w_0'))') = q_z \quad (15)$$

## 2.1 Análisis del problema de pandeo y pospandeo

Para formular el problema de pospandeo (con amplitudes moderadas) se considera, en la ecuación (15), la independencia del desplazamiento transversal respecto a la variable temporal, lo que conduce a:

$$(EI w_e'''' - ((\psi + \eta)(w_0' + w_e'))') = 0 \quad (16)$$

La solución de esta ecuación puede ser expresada como:

$$w_e \cong C \bar{w}_e \quad (17)$$

siendo  $\bar{w}_e$  la solución correspondiente al problema de pandeo (lineal) asociado dado por:

$$(EI \bar{w}_e'''' - (\psi \bar{w}_e')) - \eta_{cr} \bar{w}_e'' = 0 \quad (18)$$

La solución de esta ecuación para las condiciones de borde apropiadas permite determinar las formas de pandeo  $\bar{w}_e$  y los valores críticos  $\eta_{cr}$ . La constante  $C$  que define la amplitud de pospandeo puede ser obtenida con suficiente aproximación para el primer modo de pandeo a partir del método global de Galerkin. De esta manera se llega a la siguiente ecuación:

$$C \int_0^L (\eta_{cr} - \eta) \bar{w}_e'^2 dx = \int_0^L (\psi + \eta) w_0' \bar{w}_e' dx \quad (19)$$

Si se introduce (17) en (13), a fin de expresar  $\eta$  en función de  $C$ , y el resultado en (19), se obtiene una ecuación cúbica para determinar la amplitud de pospandeo. Cuando no existe imperfección ( $w_0 = 0$ ) la ecuación aludida se simplifica y puede ser resuelta de manera explícita de la siguiente manera:

$$C = \sqrt{\frac{2 \int_0^L \frac{dx}{EA} \left( \frac{\int_0^L \bar{\alpha} \Delta T dx}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} + \eta_{cr} \right)}{\int_0^L \bar{w}_e'^2 dx}} \quad (20)$$

Debe observarse que la expresión (17) conjuntamente con (20) corresponde a la solución

exacta del problema de pospandeo para la viga sin imperfecciones. Esto puede ser claramente apreciado si se introduce (17) en (16) para  $w_0 = 0$  ya que el resultado conduce al problema de autovalores (18) con  $\eta = \eta_{cr}$ . Utilizando esta última ecuación conjuntamente con la expresión (13) se obtiene también la expresión (20).

## 2.2 Análisis de vibraciones libres alrededor de la configuración de pospandeo

El desplazamiento transversal total puede considerarse como la superposición del valor estático de pospandeo ( $w_e$ ) y de uno dinámico ( $v$ ):

$$w = w_e(x) + v(x, t) \quad (21)$$

Introduciendo esta expresión en (15) y considerando que  $v$  es una función armónica de pequeña amplitud ( $v = V(x)\cos(\omega t)$ ), es posible obtener una ecuación linealizada (despreciando términos no lineales en  $V$ ), que para el caso sin imperfección ( $w_0 = 0$ ) puede escribirse como:

$$\left(EIV''\right)'' - \left((\psi + \eta_{cr})V'\right)' - m\omega^2 V = \Gamma \frac{w_e''}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} \quad (22)$$

donde:

$$\Gamma = \int_0^L w_e' V' dx \quad (23)$$

La ecuación gobernante del problema de vibraciones libres respecto a la configuración pospandeada viene dada por (22), considerando (23). Como se puede apreciar se trata de una ecuación integro-diferencial.

Es fácil ver que su solución puede ser expresada de la siguiente manera:

$$V = \frac{\Gamma C}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} \phi(x) \quad (24)$$

donde  $\phi(x, \omega)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(EI\phi''\right)'' - \left((\psi + \eta_{cr})\phi'\right)' - m\omega^2 \phi = \bar{w}_e'' \quad (25)$$

Sustituyendo (24) en (23) y eliminando  $\Gamma$  se obtiene la siguiente ecuación de frecuencias:

$$F(\omega) = 0 \quad (26)$$

donde:

$$F = \frac{C^2 \int_0^L \bar{w}_e' \phi' dx}{\int_0^L \frac{dx}{EA}} - 1 \quad (27)$$

Luego, si  $C$  es conocido, el problema consiste en resolver la ecuación (25) junto a sus

correspondientes condiciones de borde para un valor de  $\omega$  que satisfaga (26). Este cálculo puede realizarse en forma iterativa. Así mismo, es posible proceder de manera inversa, es decir, si  $\omega$  es conocido, puede ser resuelta la ecuación (25) para obtener  $\phi$ , y finalmente, determinar la amplitud de pospandeo correspondiente utilizando (26) y (27), lo que conduce a la siguiente expresión:

$$C = \sqrt{\frac{\int_0^L \frac{dx}{EA}}{\int_0^L \bar{w}'_e \phi' dx}} \quad (28)$$

Asimismo, si se supone desconocido el desplazamiento del extremo derecho  $u_L$ , e interesa determinarlo a partir de la medición de frecuencias de vibración (en casos en los que no pueda ser medido en forma directa) puede ser estimado a partir de las expresiones (28) y (20).

Estos problemas inversos son de especial interés en algunas aplicaciones relacionadas con ingeniería de intercambiadores de calor o reactores nucleares y serán considerados en la siguiente sección.

### 3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

#### 3.1 Determinación de estados de pandeo y pospandeo de una viga sometida a un incremento térmico

En la Figura 2 se muestra el esquema de un elemento estructural de un reactor nuclear. Se trata de una viga de sección circular anular, sin imperfecciones, de 6 metros de longitud y radios variables entre 2,5 y 6,85 cm de radio externo y entre 1,0 y 4,25 cm de radio interno. Según las diferentes características geométricas y materiales se divide la viga en 12 segmentos. En color gris oscuro se identifican partes construidas en acero, mientras que las partes coloreadas en gris claro corresponden a tubos de zircaloy-4. En la Tabla 1 se indican los límites de las propiedades elásticas de los materiales involucrados en el modelo, las cuales varían con la temperatura. Los valores de módulos de elasticidad, y coeficientes de dilatación térmica para una condición de operación dada se interpolan en forma lineal entre los valores límite. La estructura se encuentra instalada verticalmente (el borde izquierdo corresponde al borde inferior), por tal motivo  $p_x$  corresponde al peso por unidad de longitud.

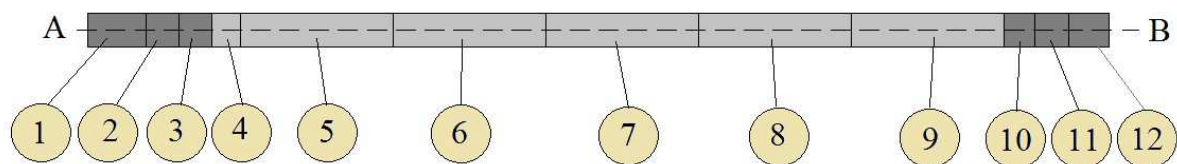


Figura 2: Elemento estructural analizado.

Acero	Módulo de Elasticidad 20° C [GPa]	195,745
	Módulo de Elasticidad 250° C [GPa]	180,194
	Coefficiente de Poisson	0,25
	Densidad [Kg/m <sup>3</sup> ]	7970
	Coefficiente de dilatación térmica [1/°C] a 20°C	16,6E-6
	Coefficiente de dilatación térmica [1/°C] a 600°C	18,9E-6

Zr-4	Módulo de Elasticidad 20°C [GPa]	99,013
	Módulo de Elasticidad 250°C [GPa]	80,137
	Coefficiente de Poisson	0,30
	Densidad [Kg/m <sup>3</sup> ]	6600
	Coefficiente de dilatación térmica [1/°C] a 20°C	5,7E-6
	Coefficiente de dilatación térmica [1/°C] a 250°C	6,2E-6
Agua	Densidad [Agua a 50°C] [Kg/m <sup>3</sup> ]	1102
	Densidad [Agua a 294°C] [Kg/m <sup>3</sup> ]	791

Tabla 1: Propiedades de los materiales correspondientes a los ejemplos numéricos

Tal elemento estructural se encuentra sometido a diferentes condiciones de temperatura de acuerdo a distintas condiciones operativas. El extremo superior (derecho de la Figura 2) se diseña de tal manera de permitir el desplazamiento libre axial relacionado con las dilataciones térmicas para impedir la aparición de esfuerzos de compresión. Tiene interés analizar qué efectos podrían acontecer si se produjera un bloqueo anómalo del borde superior. En particular, resulta de importancia vital analizar el posible pandeo que podría ocurrir y un eventual estado de pospandeo que podría conducir a una situación estructural peligrosa. En relación a lo anterior se obtiene el desplazamiento crítico  $u_{cr}$  del extremo derecho que provoca el pandeo para distintas condiciones térmicas. Luego, es posible constatar la existencia o no de pospandeo para la condición térmica dada, de acuerdo al valor que adopte el desplazamiento del extremo derecho  $u_L$  en relación a  $u_{cr}$  (existe pospandeo si  $u_L < u_{cr}$ ). En caso de darse una situación de pospandeo se obtiene su correspondiente amplitud.

Para esta tarea se determinan en primer lugar  $\eta_{cr}$  y  $\bar{w}_e$  a partir de la solución de la ecuación (18) con las correspondientes condiciones de borde. En particular, en este trabajo se utiliza el Método de Elementos Finitos mediante el software FlexPDE, 2015. Con tales valores, la amplitud de pospandeo se determina a partir de la expresión (20). Tal expresión tiene sentido solo si  $C \geq 0$ , correspondiendo la amplitud nula al caso crítico. Entonces, el desplazamiento  $u_{cr}$  puede obtenerse desde las ecuaciones (14) y (20) con  $C = 0$ .

En particular, se analiza la estructura de la Figura 2 considerando una variación térmica uniforme de 30°C y diversos desplazamientos impuestos posibles del extremo superior (derecho)  $u_L$ . Este último puede ser parametrizado de la siguiente manera:  $u_L = u_{m\acute{a}x} - \beta\Delta$  ( $u_{m\acute{a}x} = 1,232E-03m$ ,  $\Delta = 6,24E-03m$ ). Cuando  $\beta = 0$ , se obtiene el desplazamiento térmico libre, en ausencia de fricción, por lo cual no se genera compresión, adicional a la producida por el peso propio, en el elemento estructural. El efecto de la fricción con respecto al resto de la estructura (apoyo derecho) se indica mediante el parámetro  $\beta$ . A medida que éste aumenta, existe menor posibilidad de deslizamiento, es decir, aumenta el arrastre impuesto por el apoyo y, en consecuencia, aumenta la compresión en la barra.

Se han considerado para el elemento estructural dos tipos de condiciones de borde posibles:

Caso 1.- extremo inferior empotrado y superior simplemente apoyado.

Caso 2.- ambos bordes empotrados.

En la Tabla 2 se muestran, para el Caso 1 y para cada valor de  $\beta$ , los correspondientes desplazamientos del extremo superior y el máximo desplazamiento de pospandeo en las columnas 2 y 3 respectivamente. Como se puede apreciar, para valores de  $\beta$  menores que 0,17 ( $u_L > 1,49E-04m$ ) no existen desplazamientos transversales, es decir, se trata de un régimen de prepandeo. Por otro lado, valores mayores de  $\beta$  implican amplitudes de



pospandeo crecientes. El límite entre ambos regímenes,  $\beta_{cr} = 0,17$ , corresponde al valor crítico del desplazamiento  $u_{cr} = 1,49E-04$ m. Es interesante notar que cuando  $\beta = 0,5$ , las amplitudes de pospandeo son de un valor del orden del radio del tubo. Para las condiciones de borde consideradas, la forma de pandeo (y pospandeo) correspondiente al primer modo se muestra en la Figura 3.

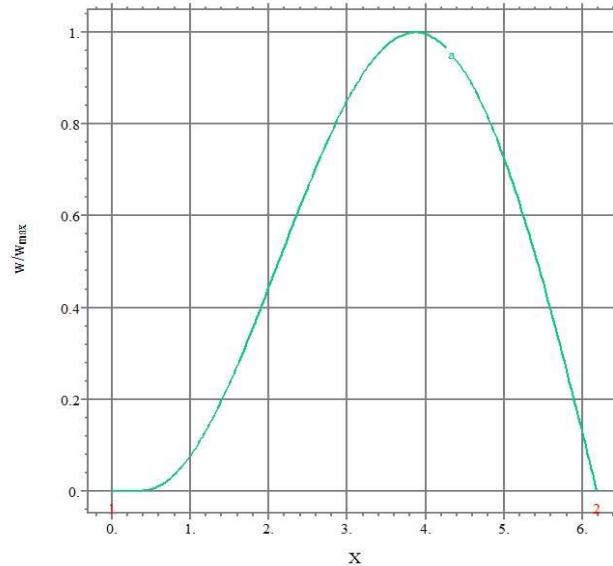


Figura 3: Forma fundamental de pandeo (y pospandeo) para el Caso 1.

$\beta$	$u_L$ (m)	$ w_{m\acute{a}x} $ (m)	$\omega_1$ (rad/s)	$\omega_2$ (rad/s)	$\omega_3$ (rad/s)
0,00	1,23E-03	0,00E+00	20,1	64,9	135,4
0,05	9,20E-04	0,00E+00	16,8	61,4	131,8
0,10	6,08E-04	0,00E+00	13,0	57,9	128,3
0,13	4,21E-04	0,00E+00	10,1	55,8	126,2
0,15	2,96E-04	0,00E+00	7,4	54,3	124,7
<b>0,17</b>	<b>1,49E-04</b>	<b>0,00E+00</b>	<b>0,0</b>	<b>52,3</b>	<b>123,0</b>
0,20	-1,60E-05	1,93E-02	11,1	52,9	123,2
0,30	-6,40E-04	4,22E-02	23,6	54,0	123,3
0,50	-1,89E-03	6,77E-02	35,0	58,0	123,8
0,70	-3,14E-03	8,60E-02	40,1	63,9	124,4
0,90	-4,38E-03	1,01E-01	42,5	70,0	125,1

Tabla 2: Amplitud de pospandeo y frecuencias naturales para el Caso 1.

Para el Caso 2, los resultados correspondientes se muestran en las columnas 1 a 3 de la Tabla 3. Obsérvese que, para el caso aludido,  $\beta_{cr} = 0,36$  y  $u_{cr} = -1,01E-03$ m, y que se alcanza una amplitud del desplazamiento de pospandeo del orden del radio máximo para  $\beta = 0,7$ .

$\beta$	$u_L$ (m)	$ w_{m\acute{a}x} $ (m)	$\omega_1$ (rad/s)	$\omega_2$ (rad/s)	$\omega_3$ (rad/s)
0	1,23E-03	0,00E+00	30,2	83,3	163,4
0,1	6,08E-04	0,00E+00	25,7	77,6	157,3
0,2	-1,63E-05	0,00E+00	20,2	70,3	150,8

0,3	-6,40E-04	0,00E+00	12,3	64,5	144,2
<b>0,36</b>	<b>-1,01E-03</b>	<b>0,00E+00</b>	<b>0,0</b>	<b>60,1</b>	<b>140,0</b>
0,4	-1,26E-03	2,50E-02	15,2	60,1	141,0
0,5	-1,89E-03	4,54E-02	27,1	60,1	142,8
0,6	-2,51E-03	5,92E-02	34,8	60,1	144,7
0,7	-3,14E-03	7,03E-02	40,7	60,1	146,6
0,8	-3,76E-03	7,98E-02	45,6	60,1	148,7
0,9	-4,38E-03	8,84E-02	49,8	60,1	150,7

Tabla 3: Amplitud de pospandeo y frecuencias naturales para el Caso 2.

### 3.2 Determinación de frecuencias naturales para la viga en condiciones de pre y post pandeo

Es de interés determinar las frecuencias de vibración de la estructura analizada para diferentes valores de  $u_L$  parametrizados mediante  $\beta$ . Para valores de  $\beta$  menores que  $\beta_{cr}$  tales autovalores surgen a partir de la correspondiente ecuación gobernante del estado de prepandeo que tiene la forma de la ecuación (22) aunque considerando  $\Gamma = 0$  y sustituyendo  $\eta$  en lugar de  $\eta_{cr}$ . Este último valor se obtiene a partir de la expresión (13) asumiendo  $w' = 0$ .

Por otra parte, para encontrar las frecuencias correspondientes a la condición de pospandeo deben considerarse las ecuaciones (26-27) como se ha explicado en la sección 2.2. La metodología requiere la resolución de la ecuación (25), lo que se ha realizado en forma numérica mediante MEF.

Las tres primeras frecuencias naturales en función de  $\beta$  para el Caso 1 se muestran en las últimas 3 columnas de la Tabla 3. Como es de esperar, en el caso crítico la frecuencia fundamental es nula. Como observación general, puede decirse que existe una apreciable variación de las frecuencias respecto al parámetro  $\beta$ . Los valores correspondientes al Caso 2 se muestran en la Tabla 3.

### 3.3 Posibilidad de estimación de la amplitud de pospandeo a partir de la medición de frecuencias naturales

Este ejemplo muestra el análisis de mayor interés de este trabajo. Se trata de evaluar la factibilidad de estimar la existencia de pospandeo, y eventualmente su amplitud, a partir de la medición de frecuencias naturales, puesto que para la aplicación estudiada existe una imposibilidad de acceder al recinto en el cual se encuentra la barra considerada para la evaluación de sus desplazamientos laterales.

Se comienza con el análisis del Caso 1, para lo cual en las Figuras 4 y 5 se muestra gráficamente la variación de las dos primeras frecuencias en términos de  $\beta$ . Aquí se aprecia claramente que para el régimen de prepandeo ( $\beta < \beta_{cr}$ ) las frecuencias decrecen con el incremento de  $\beta$ , mientras que son funciones crecientes de dicho parámetro en el régimen de pospandeo.

En la Figura 4 puede observarse que para valores de  $\beta$  aproximadamente mayores a 0,28 la frecuencia fundamental es mayor que la correspondiente al caso de la estructura con desplazamiento superior libre. Para las condiciones estudiadas, esto se da únicamente por efecto de la rigidización producida por el pospandeo. En consecuencia, para tales casos, se puede estimar la amplitud de pospandeo, que es del orden del radio del tubo, a partir de la medición de la frecuencia fundamental y de las fórmulas (28) y (17).

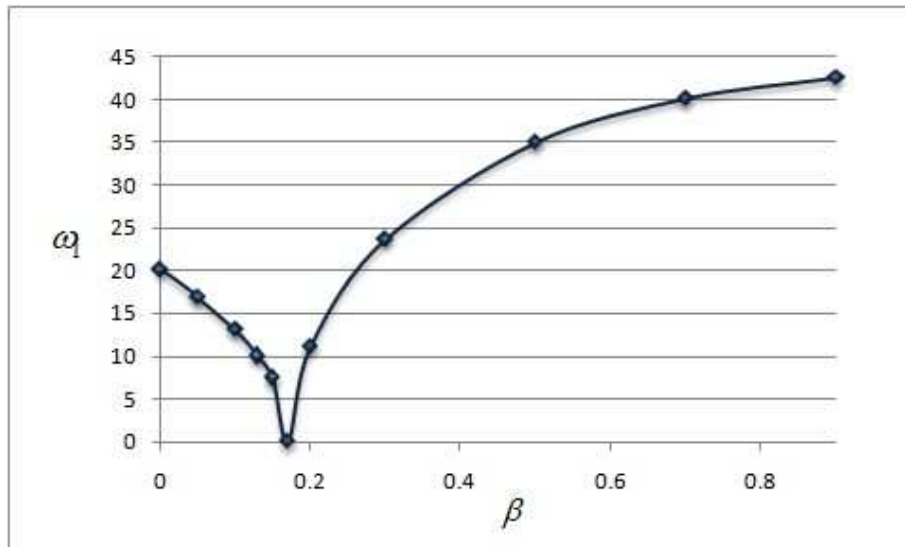


Figura 4: Variación de la frecuencia fundamental (Caso 1) en función del parámetro de desplazamiento en el extremo derecho.

En cambio, para pequeñas amplitudes de pospandeo ( $\beta_{cr} < \beta < 0,28$ ), el solo conocimiento de  $\omega_1$  no alcanza para determinar la existencia o no de pospandeo puesto que a dicha frecuencia le corresponden 2 valores posibles de  $\beta$  (uno para pre y otro para pospandeo). Para estos casos, es necesario medir también la frecuencia  $\omega_2$ . Esto puede comprenderse claramente a partir de las Figuras 6 y 7, que corresponden a sendas ampliaciones de las Figuras 4 y 5.

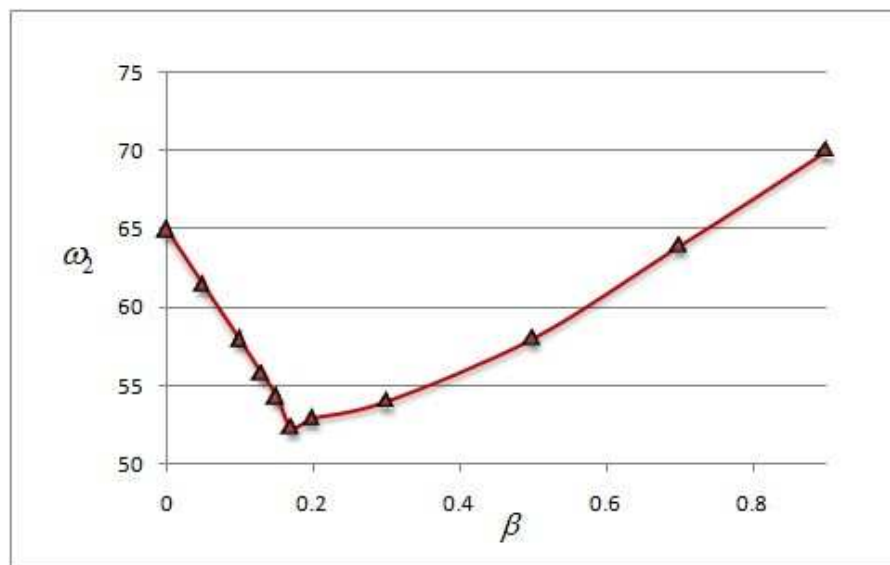


Figura 5: Variación de la segunda frecuencia (Caso 1) en función del parámetro de desplazamiento en el extremo derecho.

En la Figura 6 se supone la existencia de pospandeo, cuyo grado es dado por  $\beta = 0,2$  correspondiéndole un valor de  $\omega_1 = 11,1 \text{ rad/s}$ . A la misma frecuencia le corresponde en la rama de prepandeo el valor de  $\beta$  indicado por el punto A ( $\beta \approx 0,13$ ). Por otra parte, en la Figura 7 puede observarse que al valor  $\beta = 0,2$  le corresponde una frecuencia

$\omega_2 = 52,9 \text{ rad/s}$  y así mismo, a la misma frecuencia le corresponde, en el régimen de prepandeo el valor de  $\beta$  correspondiente al punto  $B$  ( $\beta = 0,16$ ). Por lo tanto, la correspondencia se da solo para el valor “real”  $\beta = 0,2$ . Debe observarse sin embargo, que para evitar una confusión al respecto, la segunda frecuencia debe ser medida con suficiente precisión.

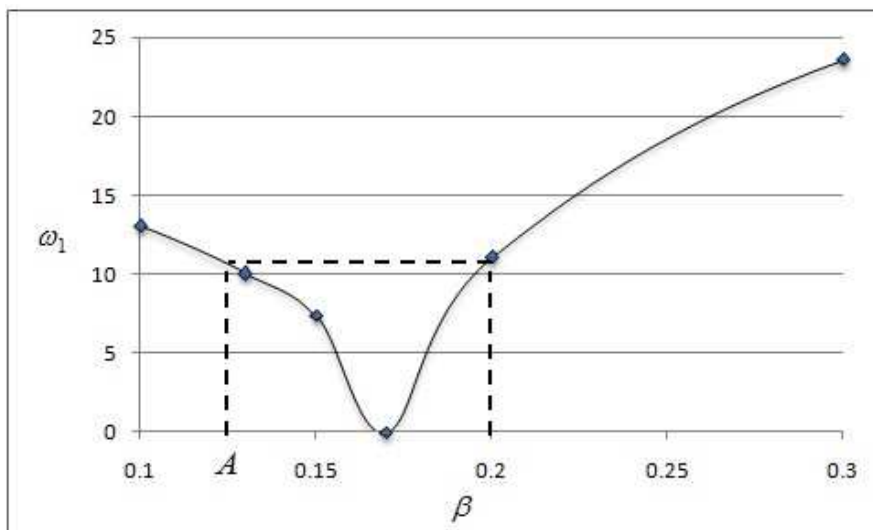


Figura 6: Vista ampliada de la Figura 4.

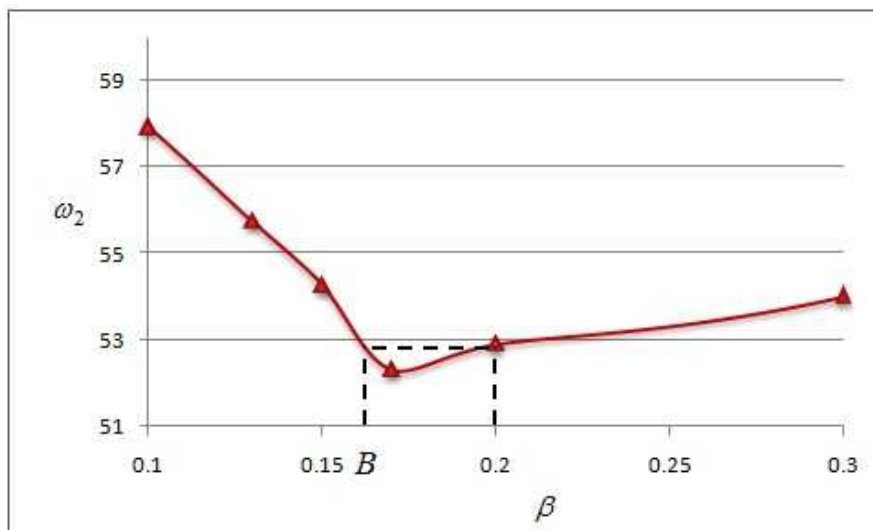


Figura 7: Vista ampliada de la Figura 5.

En la Figura 8, se muestra de otra manera la información brindada en las Figuras 3 y 4. Es decir, aquí se tiene la máxima amplitud de pospandeo en función de la frecuencia de vibración. La rama de la izquierda corresponde al primer modo de vibración y la de la derecha al segundo modo. Las líneas de trazo discontinuo indican valores muy altos de desplazamientos laterales y deberían ser analizados a partir de una teoría no lineal de orden superior.

De lo anterior se infiere que para la determinación de la amplitud de pospandeo, a partir del conocimiento de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , podría procederse de la siguiente manera: para cada una de dichas frecuencias se calcula el coeficiente de amplitud  $C$  a partir de la ecuación (28), si tales

valores son aproximadamente iguales (considerando una tolerancia adecuada), el mismo, conjuntamente con (17), permite determinar la amplitud de pospandeo. De no haber coincidencia entre tales valores de  $C$ , no se ha alcanzado un estado de pandeo.

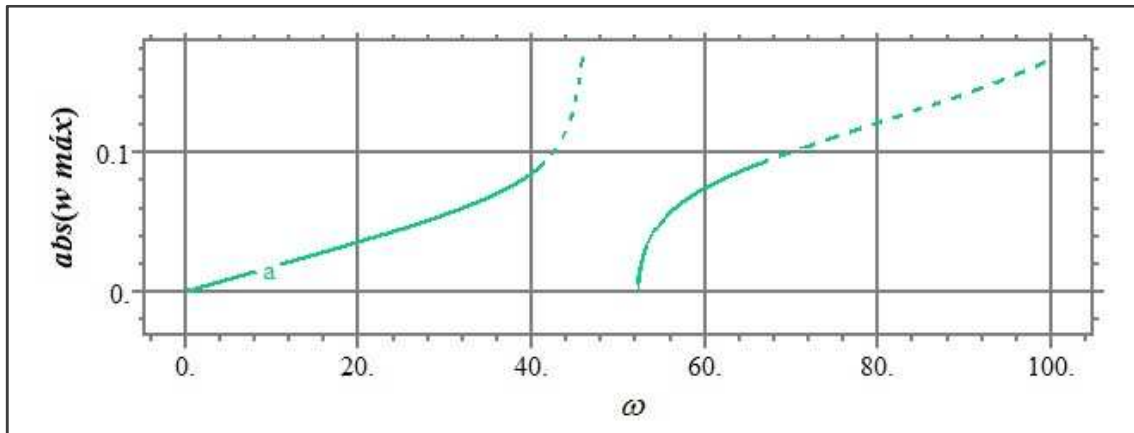


Figura 8: Variación de la máxima amplitud de pospandeo en función de las frecuencias naturales de vibración.

En las Figuras 9 y 10 se muestran gráficamente las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para el Caso 2, en función de  $\beta$ . Como puede apreciarse, la primera frecuencia presenta un comportamiento similar a la del Caso 1. Para valores de  $\beta > 0,5$  la estimación del grado de pospandeo puede realizarse a partir del conocimiento de  $\omega_1$ . Para valores  $\beta_{cr} < \beta < 0,5$  se requiere, además, el conocimiento de la segunda frecuencia para discernir si se trata de un estado de pre o pospandeo. Para este último caso, de ser posible, la medición de  $\omega_3$  sería de utilidad para la estimación de la amplitud de pospandeo, puesto que es suficientemente sensible a  $\beta$  como se observa en la Tabla 3.

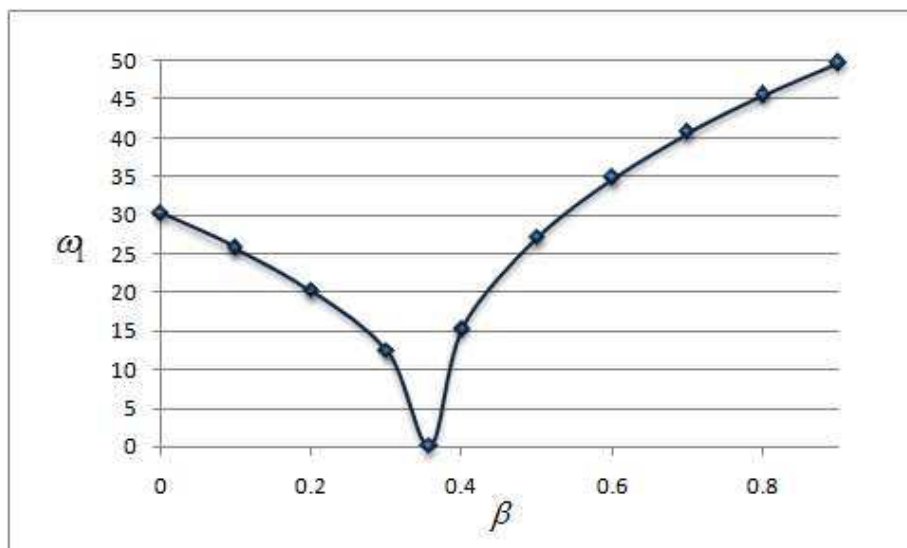


Figura 9: Variación de la frecuencia fundamental (Caso 2) en función del parámetro de desplazamiento en el extremo derecho.

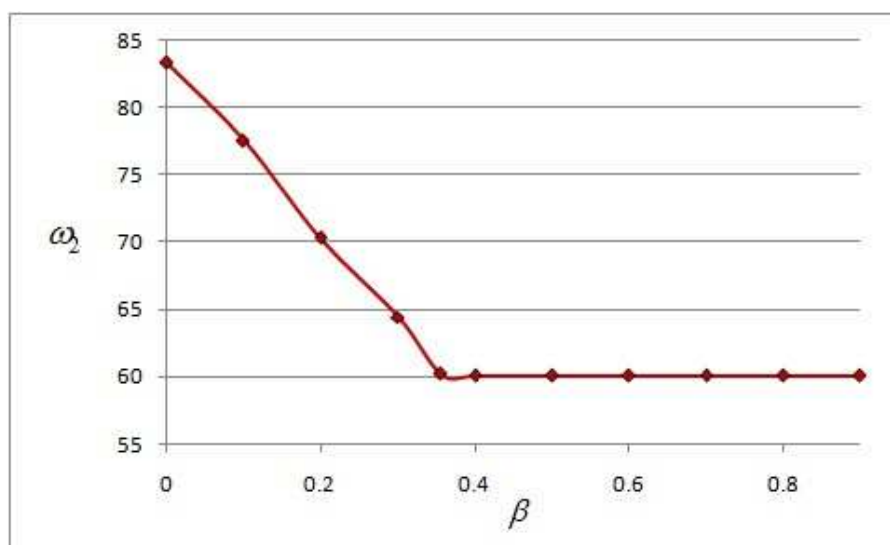


Figura 10: Variación de la segunda frecuencia (Caso 2) en función del parámetro de desplazamiento en el extremo derecho.

#### 4 CONCLUSIONES

Se ha explorado una potencial aplicación práctica de la teoría de vigas pospandeadas para la estimación de posibles estados de pospandeo a partir de la medición de frecuencias naturales de vibración. Tal problema puede ser de interés en tecnología de intercambiadores de calor y/o reactores nucleares. Para ello, en primer lugar, se han presentado las ecuaciones gobernantes del problema de vigas pospandeadas. En particular se planteó una ecuación integro-diferencial que fue resuelta mediante una técnica iterativa a los efectos de determinar las frecuencias y las formas modales. Posteriormente, mediante ejemplos numéricos se estudió la factibilidad de determinación de amplitud de pospandeo a partir de las frecuencias naturales de vibración. Los resultados han mostrado que para amplitudes máximas del orden del radio o mayores, el conocimiento de las primeras dos frecuencias (y eventualmente la primera) podría ser suficiente para la solución propuesta. Para pequeños grados de pospandeo, sin embargo, debe considerarse la segunda frecuencia con una precisión apreciable para no confundir estados de pre y pos pandeo.

El presente trabajo corresponde a una investigación preliminar del problema y está siendo extendido al desarrollo de una metodología numérica inversa que permita determinar simultáneamente la amplitud de pospandeo, considerando grandes desplazamientos, y la rigidez de los vínculos a partir de la medición de las frecuencias naturales de vibración.

#### Agradecimientos

El presente trabajo es parte del proyecto “Mecánica estructural no lineal: diseño óptimo e identificación de fallas estructurales” (Secyt, Universidad Tecnológica Nacional) y del proyecto “Problemas de optimización en Ingeniería Civil” (Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur). Este estudio es, así mismo, parte del proyecto “Estudio de vibraciones libres de vigas pandeadas con aplicaciones al análisis de elementos del reactor nuclear de Atucha II” desarrollado conjuntamente entre el CIMTA y el Grupo de vibraciones de la F.R. Delta, UTN. Los autores agradecen al Ing. Andreas Klempnow de este Grupo por sus explicaciones acerca de los aspectos prácticos de la dinámica de reactores nucleares.

**REFERENCIAS**

- Blevins, R.D. *Flow induced vibration*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 2001
- Cortínez, V.H, Piovan, M.T., Machado, S.P., Dotti, F.E., Saravia, C.M. y Reguera, F. *Análisis de vibraciones de los canales de combustible tipo CNA II de la central Atucha II*. Centro de investigaciones en mecánica teórica y aplicada, informe técnico CIMTA, febrero 2011.
- Cortínez, V.H, Machado, S.P. y Piovan, M.T. *Pos-pandeo de vigas compuestas de pared delgada*. Mecánica Computacional XXI: 1713-1729, 2002.
- FlexPDE®, PDE Solutions Inc. [www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com), (2015).
- Lacarbonara, W. *A theoretical and experimental investigation of nonlinear vibrations of buckled beams*. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in Master of Science in Engineering Mechanics, 1997.
- Machado, S.P. y Cortínez, V.H. *Non-linear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation*. Thin-Walled Structures 43: 1615-1645, 2005.
- Mettler, E. *Dynamic Buckling*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- Mohri, F., Azrar, L y Potier-Ferry, M. *Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections*. *Journal of Sound and Vibration* 275: 434–446, 2004.
- Moradi, S., Jamshidi Moghadam, P. *Vibration analysis of cracked post-buckled beams*. *Applied Mathematical Modelling* 38:3281–3294, 2014.
- Plaut, R.H., Favor, H.M., Jeffers, A.E. y Virgin, L.M. *Vibration isolation using buckled or pre-bent columns-Part I. Two dimensional motions of horizontal rigid bar*. *Journal of Sound and Vibration*, 310: 409-420, 2008.
- Suna, Y., Lia, S-R. y Batrac, R.C. *Thermal buckling and post-buckling of FGM Timoshenko beams on nonlinear elastic foundation*, *Journal of thermal stresses*, 39 (1): 11–26, 2016.