

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Trabajo de Iniciación a la Investigación

Grafos dualmente cordales
y sus relaciones con otras clases

Autor: Pablo De Caria.
Directora: Marisa Gutierrez

Octubre de 2008

En memoria de Peter y de Monono

Agradecimientos

A mis padres Francisco y Norma y mis hermanas Laura y Mariana. Por ser quienes más me conocen y por el apoyo de todo tipo que recibo de ellos que no deja de aportar día a día placidez a mi espíritu.

A Marisa. Por estar siempre lista para ayudarme en el momento oportuno y por la libertad que me dio para desarrollar el trabajo sin mermar en modo alguno su empeño para que éste alcanzara su mejor forma.

A todos mis profesores en general y a todos aquellos que me hayan enseñado algo. Lo único que puedo decir es que hallé en ellos una buena disposición que excedió con holgura las expectativas que yo tenía antes de comenzar la carrera.

A mis amigos y a los buenos compañeros que encontré en las aulas y trabajando.

A todo aquel que a lo largo de mi vida me haya hecho un favor.

Índice

Introducción	2
Definiciones	4
1. Nociones previas	6
1.1. Grafos de Intervalos	6
1.2. Grafos Cordales	8
1.3. Grafos Helly	12
1.4. Hipergrafos	13
2. Grafos dualmente cordales	18
2.1. Introducción	18
2.2. Más caracterizaciones de grafos dualmente cordales	21
2.2.1. Caracterizaciones métricas	22
2.2.2. Los grafos dualmente cordales y el operador clique	24
3. Los grafos dualmente cordales y sus relaciones con otras clases	28
3.1. Cordales versus dualmente cordales	28
3.1.1. La dualidad entre los grafos cordales y dualmente cordales	29
3.2. Grafos fuertemente cordales	30
3.3. Potencias de grafos	33
3.3.1. Grafos de potencias cordales	34
3.3.2. Potencias de grafos dualmente cordales	37
3.4. Grafos doblemente cordales	38
3.5. Grafos UV, DV, RDV	40
3.5.1. Sus duales	43
Conclusiones	48
Referencias	49

Introducción

Desde fines de los años ochenta varias investigaciones independientes estudiaron ciertas características especiales de grafos que sirvieron para definir nuevas clases.

Así surgieron los grafos con órdenes de máximas vecindades, o *grafos HT* [4], los grafos árbol-clique ¹ [7, 9] y los *árboles expandidos* [1].

Un examen más detallado arrojó la conclusión de que estas clases definen al mismo tipo de grafos, lo cual hizo necesario el desarrollo de un enfoque unificado.

Esto a su vez implicaba la conveniencia de una denominación universal para referirse a los grafos arriba mencionados. Fue así que comenzó a ganar terreno el concepto de *grafos dualmente cordales*.

La clase de los *grafos cordales* ha sido ampliamente investigada y resulta muy útil desde un punto de vista algorítmico. La definición más básica y conocida dice que un grafo es cordal si no posee ciclos de longitud mayor o igual que cuatro como subgrafos inducidos. Sin embargo, se conocen más caracterizaciones, muchas de ellas con su correlato para grafos dualmente cordales. Este último hecho hará más comprensible la elección del nombre.

En este trabajo se incluirán varias caracterizaciones de los grafos dualmente cordales. Se tratará la dualidad existente entre grafos cordales y dualmente cordales, siendo propicio para ello, entre otras cosas, trabajar con hipergrafos.

A su vez, una comparación más profunda entre grafos cordales y dualmente cordales, así como ciertas preguntas concernientes a estos últimos harán surgir de modo natural subclases de grafos que también serán aquí descritas.

Entre los objetivos de este trabajo se encuentra también simplificar demostraciones de propiedades ya conocidas hace varios años. Y entre los aportes pueden hallarse propiedades métricas de los grafos dualmente cordales y características de las potencias de grafos.

Sobre la estructura del trabajo: Una vez que hayamos introducido todas las definiciones necesarias para un desarrollo fluido de los temas, la primera sección del trabajo estudiará las propiedades básicas de los grafos de intervalos, clique Helly y cordales, así como también de los hipergrafos, debido a que estos son imprescindibles para poder demostrar las principales propiedades tratadas luego.

En la segunda sección definiremos a los grafos dualmente cordales y veremos que estos poseen un gran número de caracterizaciones. Muchas de ellas serán en términos de lo que llamaremos árboles compatibles (aquellos en los cuales un clique del grafo induce un subárbol) y también podremos demostrar que la imagen por el operador clique de la clase de grafos cordales es precisamente la clase de los grafos dualmente cordales.

En la tercera sección se tratarán las estrechas relaciones que los grafos dualmente cordales poseen con otras clases de grafos, las cuales aparecerán de modo bastante natural en el desarrollo del texto. De hecho, quedará establecido que los grafos dualmente cordales hereditarios son lo mismo que los grafos fuertemente cordales y que la clase de grafos doblemente cordales consiste en todos los grafos que son tanto cordales como dualmente cordales. Y por supuesto, también se explicará en qué consiste la dualidad entre grafos cordales y dualmente cordales. Resultará que los grafos cordales pueden ser caracterizados en términos de

¹ Tree-clique graphs.

ciertos hipergrafos, mientras que los duales de estos caracterizarán a los grafos dualmente cordales.

Luego ahondaremos en las características de los órdenes de vecindades máximas en grafos dualmente cordales para obtener propiedades de sus potencias y caracterizaciones de sus cuadrados.

En último lugar, estando ya bastante familiarizados con el vínculo entre grafos cordales y dualmente cordales intentaremos llevar la teoría a un plano más general, donde los grafos cordales podrán ser reemplazados por clases afines. Es un hecho bastante conocido que un grafo es cordal si y sólo si puede ser representado por una familia de subárboles de un árbol. Nos abocaremos a ver qué ocurre si imponemos que la representación sea a través de caminos de un árbol. Es así que surgen los grafos UV , DV , RDV y sus duales, que resultarán tener propiedades análogas a las que se verán para grafos cordales y dualmente cordales. En particular, el operador clique seguirá desempeñando un rol muy importante.

Al sucederse los temas, uno de los principales objetivos será enlazarlos de un modo coherente y sin pérdida de continuidad, no siendo de extrañar que se combinen hechos expuestos en otros trabajos con algunos de elaboración propia. Para distinguirlos, se rematarán con un cuadrado (\square) todos aquellos resultados cuyos enunciados y demostraciones aparecen en otras publicaciones, estando disponibles en varios de esos casos las referencias bibliográficas. Con un rombo (\diamond) se indicarán los resultados ya existentes cuyas demostraciones no fueron copiadas de ninguna otra fuente. Y, finalmente, una estrella (\star) rematará a los resultados no basados en publicaciones ajenas, no descartándose que sean ya conocidos.

Definiciones

Un *grafo simple* G es un par $(V(G), E(G))$, siendo $V(G)$ un conjunto finito no vacío, cuyos elementos llamamos *vértices* de G y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados (conjuntos de dos elementos) de $V(G)$. Los elementos de $E(G)$ reciben el nombre de *aristas* de G . Si $e = \{u, v\}$ es una arista, usaremos generalmente la notación uv para denotarla. u y v son los *extremos* de la arista y también suele decirse que ésta incide en u y en v . Dos vértices que forman una arista serán llamados *adyacentes*. Un vértice es *universal* cuando resulta adyacente a todos los demás. Será *aislado* cuando no tenga vecinos, es decir, cuando no sea adyacente a ningún otro vértice. El *grado* de un vértice v , que se simboliza por $d_G(v)$ o simplemente $d(v)$, es el número de vértices en G adyacentes a v .

Un *subgrafo* de G es un grafo cuyos conjuntos de vértices y aristas están contenidos en los de G . Dado un conjunto $B \subseteq V(G)$, el *subgrafo inducido* por B , o $G(B)$, tiene a B como conjunto de vértices y dos elementos de B son adyacentes en $G(B)$ si y sólo si lo son en G .

Llamaremos *completo* de G a un conjunto de vértices adyacentes de a pares. Por otra parte, si en un conjunto de vértices no hay dos que sean adyacentes se dirá que forman un *conjunto independiente*. Si un completo es maximal con respecto a la inclusión recibe el nombre de *clique*. Y un grafo en el cual todos sus vértices constituyen un clique es llamado *grafo completo*, lo cual suele denotarse por K_n , indicando n el número de vértices que posee. La familia de cliques de un grafo G se simboliza con $C(G)$ y, dado $v \in V(G)$, llamamos C_v o $C(v)$ al conjunto $\{C \in C(G), v \in C\}$.

Un *recorrido* de G es una sucesión de vértices $v_0v_1v_2\dots v_k$ tal que los elementos consecutivos son adyacentes; k es su *longitud*. Un recorrido es un *camino* si no se repiten vértices. Es un *ciclo* si el primer elemento y el último coinciden, sin haber más repeticiones.

Un grafo se dice *conexo* cuando, dados dos vértices cualesquiera u y v , existe un camino en él que comienza en u y termina en v . Llamaremos *distancia* entre u y v a la longitud de un camino entre ellos con mínima cantidad de vértices. Se simboliza por $d_G(u, v)$, pero será usual que usemos la notación $d(u, v)$ cuando sea claro con respecto a qué grafo la estemos calculando. A su vez, definamos $I(x, y) = \{v \in V(G) : d_G(x, v) + d_G(v, y) = d_G(x, y)\}$ al *intervalo* entre x e y .

Dado un grafo, todo subgrafo conexo maximal recibe el nombre de *componente conexa*. Así, resulta que un grafo es conexo si y sólo si posee una componente conexa única.

Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos. Dado un grafo conexo G , se dice que T es un *árbol generador de G* si T es subgrafo de G y $V(T)=V(G)$. Dados dos vértices $u, v \in E(T)$, denotamos por $T[u, v]$ al (único) camino en T entre u y v . Una *hoja* de un árbol es un vértice de grado uno.

Dos grafos G_1 y G_2 son *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $uv \in E(G_1)$ si y sólo si $f(u)f(v) \in E(G_2)$. Básicamente, esto quiere decir que los dos grafos difieren a lo sumo en el nombre de sus vértices.

Dada una familia finita de conjuntos $F = (F_i)_{i \in I}$ ², se llama *grafo de intersección de F* al grafo con I como conjunto de vértices y tal que i y j , $i \neq j$, son adyacentes si y sólo si $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Si un grafo G es isomorfo al grafo de intersección de F , se dice que esta familia es una *representación* de G o, alternativamente, que G es *representado* por F .

²A cada conjunto F_i se lo suele llamar miembro de F .

El *grafo clique* de un grafo G , simbolizado por $K(G)$, es el grafo de intersección de la familia de cliques de G .

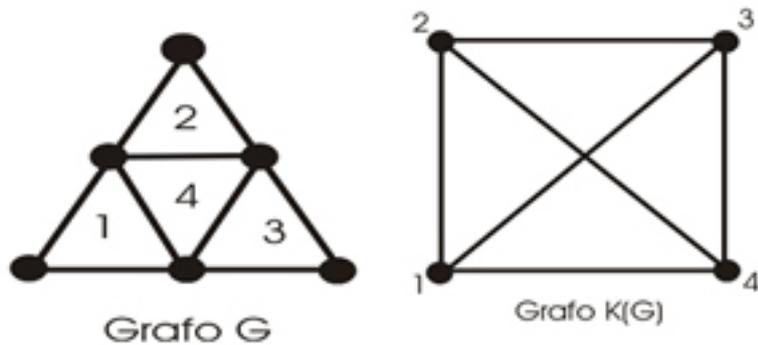


Figura 1: Un ejemplo de un grafo y su grafo clique.

En un principio, hemos definido a las aristas como subconjuntos de dos elementos de $V(G)$. Sin embargo, es posible darle una orientación a las aristas transformándolas en pares ordenados. Cuando se hace esto se obtiene lo que se llama un *grafo orientado o dirigido*.

Muchos de los conceptos que hemos definido para grafos son aplicables a grafos dirigidos, aunque suelen aparecer variaciones. Por ejemplo, los caminos (dirigidos) de un grafo orientado son aquellos en los que la sucesión de sus vértices respeta el orden asignado a las aristas.

Cuando se trabaja con árboles, existe un caso más específico. Se trata de los *árboles dirigidos enraizados*. Son aquellos en los que existe un vértice v , llamado *raíz*, tal que, para cualquier otro vértice w existe un camino dirigido entre v y w .

1. Nociones previas

1.1. Grafos de Intervalos

Definición: Un grafo G es de *intervalos* si puede ser representado como grafo de intersección de una familia de intervalos de la recta real. Si es posible obtener una representación en la cual ningún intervalo contenga a otro entonces el grafo es de *intervalos propios*.

Los grafos de intervalos constituyen una clase muy conocida y poseen aplicaciones muy importantes en arqueología (elaboración de cronologías) y en genética (secuenciación de genes). A su vez, los grafos de intervalos propios son también aplicables en problemas de taxonomía y sociología. En esta sección veremos algunas de sus principales propiedades, las cuales nos serán muy útiles posteriormente.



Figura 2: Un grafo de intervalos con una de sus posibles representaciones.

Definición: Un grafo G y un orden total \leq en $V(G)$ son *compatibles* el uno con el otro si, para todo $x, y, z \in V(G)$, $x < y < z$ y $xz \in E(G)$ implica que $xy, yz \in E(G)$.

Teorema 1.1.1: Para un grafo G , las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) G es un grafo de intervalos propios.
- (b) G es compatible con un orden total.
- (c) Cada clique de G es un intervalo con respecto a un orden total de $V(G)$.

Demostración:

(a) \implies (b): Para mayor simplicidad, supongamos que los vértices de G son intervalos de la recta real. Ordenemos a estos de menor a mayor teniendo en cuenta sus extremos iniciales y el orden usual de los números reales. Notar que el hecho de que ningún intervalo esté contenido en otro implica que sus extremos iniciales difieren (lo mismo se podría decir de los extremos finales). De este modo, resulta un orden bien definido y total, al que llamaremos \leq .

Supongamos ahora que existen tres intervalos $[a_1, b_1] < [a_2, b_2] < [a_3, b_3]$, con $[a_1, b_1] \cap [a_3, b_3] \neq \emptyset$. Esto último implica que $a_1 < a_3 \leq b_1 < b_2 < b_3$. Como $a_1 < a_2 < a_3$, se puede deducir que $a_1 < a_2 < b_1$ y $a_3 < b_2 < b_3$, por lo que $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$ y $[a_2, b_2] \cap [a_3, b_3] \neq \emptyset$.

(b) \implies (c): Sea C un clique y, usando a partir de ahora un orden \leq que cumpla con la hipótesis, sean $v_1 = \inf C$, $v_2 = \sup C$. Si $v_1 = v_2$ la conclusión es inmediata. Si no, sean $v_1 \leq w_1 < w_2 \leq v_2$. Veamos que w_1 y w_2 son adyacentes. Consideremos las siguientes posibilidades:

- (1) Si $v_1 = w_1$ o $v_2 = w_2$ se puede aplicar directamente la hipótesis para concluir que $w_1 w_2 \in E(G)$.

(2) Si no, podemos aplicar la hipótesis para concluir que $v_1 w_1, w_1 v_2 \in E(G)$. Usando la hipótesis una vez más con $w_1 < w_2 < v_2$, se deduce que $w_1 w_2 \in E(G)$.

Por lo tanto, C es un intervalo con respecto al orden considerado.

(c) \implies (a): Probémoslo por inducción sobre $n = |V(G)|$. Si $n = 1$, es obvio.

Supongamos ahora que todo grafo con k vértices y un orden como el mencionado es de intervalos propios, con los extremos de los intervalos no coincidentes (que ni siquiera coincidan extremos finales con extremos iniciales) y ordenados según el orden de los vértices.

Sea ahora G de $k + 1$ vértices con un orden $v_1 < \dots < v_{k+1}$ tal que (c) es válida. Si G es completo, la demostración es trivial. Si no es completo procederemos de la siguiente manera. Por hipótesis inductiva $G[v_1, \dots, v_k]$ es de intervalos propios y existe una representación como la que fuera arriba descrita. Supongamos que $[v_i, v_{k+1}]$ es el clique que contiene a v_{k+1} y que en el paso anterior a v_{i-1} , v_i y v_k les fueron asignados los intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_3, b_3]$ respectivamente. Podemos entonces asignarle a v_{k+1} el intervalo $[\frac{\max\{b_1, a_3\} + b_2}{2}, b_3 + 1]$ para obtener así la representación deseada de G. \diamond

Veremos ahora que las descripciones obtenidas hasta el momento tienen una versión en términos métricos.

Definición: Una *disimilaridad* α en un conjunto X es una aplicación de $X \times X$ en los reales no negativos tal que, para cada $x, y \in X$,

(a) $\alpha(x, y) = 0$ si y sólo si $x=y$.

(b) $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$.

Una disimilaridad α en X es *piramidal* si existe un orden total \leq en X tal que si $x \leq y \leq z$ entonces

$$\alpha(x, z) \geq \max\{\alpha(x, y), \alpha(y, z)\}$$

Una vez adquirida esta terminología, se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.1.2 [9]: Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo conexo G:

(a) G es un grafo de intervalos propios.

(b) Los vértices de G pueden ser numerados de tal manera que los números asignados a cada camino de mínima longitud desde un vértice s a un vértice t forman una secuencia creciente o decreciente.

(c) Existe un camino hamiltoniano P^3 de G tal que, para cada par de vértices s y t de G, $d_G(s, t)$ es el mínimo número de cliques de G que cubren las aristas de $P[s, t]$.

(d) La distancia en G es una disimilaridad piramidal.

Demostración:

(a) \implies (b): Para mayor simplicidad, podemos suponer que $V(G) = \{1, \dots, n\}$ y que G es compatible con el orden $1 < 2 < \dots < n$.

Sean s, t vértices de G y $s = i_0 i_1 \dots i_k = t$ un camino de mínima longitud que los une, llamémoslo L.

Supongamos que $i_0 < i_1$. Si $i_2 < i_0 < i_1$, podemos concluir que $i_0 i_2 \in E(G)$ debido a que $i_2 i_1 \in E(G)$ y a que \leq es un orden compatible con G. Similarmente, si $i_0 < i_2 < i_1$ podemos obtener idéntica conclusión. Así, en ambos casos se contradice que L sea un camino de mínima longitud. Por lo tanto $i_0 < i_1 < i_2$.

El mismo razonamiento demuestra que $i_j < i_{j+1}$, $j = 2, \dots, k - 1$.

³Se dice que un camino o ciclo es hamiltoniano cuando abarca a todos los vértices del grafo.

Por argumentos similares, si $i_1 < i_0$ entonces L resulta una sucesión decreciente.

(b) \implies (c): Numeremos los vértices de G de 1 a n de manera que se verifique (b).

Si i e $i + 1$ no son adyacentes, un camino de mínima longitud desde i hasta $i + 1$ debe tener al menos un vértice j , $j \neq i$ y $j \neq i + 1$, no resultando así una sucesión creciente. Concluimos así que $1, \dots, n$ es un camino hamiltoniano P de G.

Sean s, t vértices de G y $s = i_0 i_1 \dots i_k = t$ un camino L de mínima longitud que los une. Por (b) podemos suponer que se trata de una sucesión creciente.

Si i_r no es adyacente a algún vértice del intervalo $[i_r, i_{r+1}]$, sea z el último vértice que cumple con tal condición. Se tendría así que $i_r, z + 1, z$ es un camino de mínima longitud ni ascendente ni descendente, lo cual es una contradicción.

Si $y < z$ son vértices no adyacentes de $[i_r, i_{r+1}]$ entonces $y i_r z$ es un camino de mínima longitud ni creciente ni decreciente. Luego, el subgrafo de G inducido por $[i_r, i_{r+1}]$ es completo.

Si para cada valor de r , $r = 0, \dots, k-1$, tomamos un clique que contenga a $[i_r, i_{r+1}]$ obtenemos $k = d_G(s, t)$ cliques que cubren las aristas de $P[s, t]$.

Si existe un cubrimiento de $P[s, t]$ con m cliques, podemos construir un camino de s a t de la siguiente manera: en primer lugar tomemos un clique C_1 que contenga a la arista $s s + 1$ y llamamos j_1 al último elemento de C_1 . Luego tomamos un clique C_2 que contenga a la arista $j_1 j_1 + 1$ y así sucesivamente. Esto demuestra que $d_G(x, y) \leq m$, de lo cual se desprende (c).

(c) \implies (d): Sea P un camino hamiltoniano de G que satisfaga (c) y llamemos \leq al orden de los vértices de P. Sean $i \leq j \leq k$ vértices de G. Como P es hamiltoniano, $P[i, j]$ está contenido en $P[i, k]$. Entonces todo conjunto de cliques de G que cubra las aristas de $P[i, k]$ también cubre las aristas de $P[i, j]$. Así, por (c), $d_G(i, j) \leq d_G(i, k)$. Similarmente, $d_G(j, k) \leq d_G(i, k)$.

(d) \implies (a): Sea $v_1 \leq \dots \leq v_n$ un orden de los vértices de G tal que d_G resulta una disimilaridad piramidal.

Sean $v_i < v_j < v_k$ tres vértices de G. Si v_i y v_k son adyacentes, entonces $d_G(v_i, v_j) = d_G(v_j, v_k) = 1$, ya que ninguna de las dos magnitudes supera a $d_G(v_i, v_k) = 1$. Resulta entonces que $v_i v_j, v_j v_k \in E(G)$, y así \leq y G son compatibles. \square

De la demostración del resultado anterior se desprende inmediatamente lo siguiente:

Corolario 1.1.3: Si G es un grafo conexo y $v_1 \leq \dots \leq v_n$ es un orden total de $V(G)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) G es compatible con \leq .
- (b) Todo camino más corto entre vértices es creciente o decreciente en dicho orden.
- (c) v_1, \dots, v_n es un camino hamiltoniano que satisface (c) del teorema anterior.
- (d) Para cada i, j, k , si $v_i \leq v_j \leq v_k$ entonces $d_G(v_i, v_k) \geq \max\{d_G(v_i, v_j), d_G(v_j, v_k)\}$.

1.2. Grafos Cordales

Definición: Dado un ciclo en un grafo G, se llama *cuerda* a una arista que une a dos vértices no consecutivos del ciclo. Un grafo se dice *cordal* si todo ciclo de longitud mayor o igual que cuatro posee una cuerda.

Los grafos cordales poseen características que resultan muy útiles en ciertos campos. Un ejemplo de aplicación es el de los árboles filogenéticos. Muchos problemas son difíciles de resolver en un grafo cualquiera,

pero son muy tratables cuando se trabaja con grafos cordales. En esta sección desarrollaremos nociones básicas acerca de estos.

Definición: $S \subset V(G)$ es un *separador* de G si dos vértices en la misma componente conexa de G están en dos componentes conexas distintas de $G(V(G) - S)$. En particular, dados dos vértices a y b no adyacentes y en la misma componente conexa de G , llamamos *separador de a y b* o *ab-separador* a un separador S tal que a y b están en distintas componentes conexas de $G(V(G) - S)$.

Teorema 1.2.1: G es cordal si y sólo si todo separador minimal de dos vértices no adyacentes induce un subgrafo completo.

Demostración: Supongamos que todo separador minimal induce un subgrafo completo y sea $C:axy_1\dots y_k a$ un ciclo de G , con $k \geq 1$. Si $ab \in E(G)$ esta arista resulta ser un cuerda de C . Si no, todo conjunto separador de a y b debe contener a x y a algún y_i . En particular esto sucederá para un separador que sea minimal. Luego, por hipótesis, $xy_i \in E(G)$, es decir, todo ciclo posee una cuerda.

Recíprocamente, supongamos que G es cordal y que S es separador minimal de dos vértices no adyacentes a y b , siendo G_A y G_B las componentes conexas de $G(V - S)$ que los contienen.

Como S es minimal, todo vértice $x \in S$ es adyacente a un vértice de A y a uno de B .

Sean $x, y \in S$, luego existe $a_1 \in A$ tal que $xa_1 \in E(G)$ y $a_2 \in A$ tal que $ya_2 \in E(G)$. Como G_A es conexo, consideremos un camino P de longitud mínima entre a_1 y a_2 en G_A . Elijamos a_1, a_2 tales que la longitud de P sea mínima entre todos los pares de vértices de A en esta situación.

Análogamente, existen b_1 y $b_2 \in B$ y un camino de longitud mínima Q . Luego, $xPyQx$ es un ciclo de G y en consecuencia posee una cuerda. Veamos a qué vértices esta cuerda conecta.

Entre vértices de A y de B no hay aristas, pues si las hubiera se contradice que S es un separador de x y de y .

La cuerda tampoco puede contener a vértices de P porque éste es de longitud mínima. Conclusión análoga se obtiene para Q .

Tampoco hay aristas entre vértices de P y x (o y) porque nuevamente se contradeciría que P es de longitud mínima. Lo mismo se puede decir si reemplazamos a P por Q .

Por ende, la única alternativa restante es que la cuerda sea la arista xy . Luego, todos los vértices de S son adyacentes entre sí, induciendo así un subgrafo completo. \square

Definición: Dado un grafo G y un vértice $v \in V(G)$, se define al *entorno* de v , que se representa por $N(v)$, al conjunto de vértices adyacentes a v . El entorno cerrado de v es el conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Diremos que $v \in V(G)$ es *simplicial* si $G(N[v])$ es un subgrafo completo.

A continuación veremos que el concepto de vértice simplicial está íntimamente vinculado a los grafos cordales.

Lema 1.2.2: *Todo grafo cordal posee un vértice simplicial. Es más, si G no es completo, existen dos vértices simpliciales no adyacentes.*

Demostración: El lema es trivial si G es completo. Para el caso en que G no lo sea, procedamos por inducción sobre el número n de vértices. Sea G un grafo cordal con $n \geq 2$ vértices, incluyendo dos vértices a y b no adyacentes. Si $n = 2$, ambos vértices son simpliciales al ser aislados.

Supongamos que $n > 2$ y que el lema vale para grafos cordales con menos de n vértices. Sea S un separador minimal de a y de b en G , y sean $G(A)$ y $G(B)$ las componentes conexas de $G - S$ ⁴ que contienen a

⁴Es una forma abreviada de representar a $G(V-S)$, que utilizaremos muy a menudo.

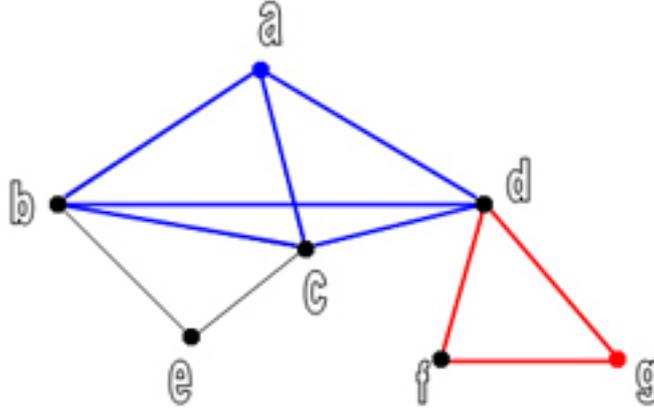


Figura 3: En este grafo cordal se han marcado dos vértices simpliciales a y g y sus vecindades.

a y b respectivamente. El subgrafo $G(A \cup S)$ es cordal y con menos de n vértices. Entonces, por hipótesis inductiva, debe ocurrir alguna de las siguientes alternativas: o $G(A \cup S)$ es completo y cada vértice de A es simplicial en $G(A \cup S)$, o $G(A \cup S)$ posee dos vértices simpliciales no adyacentes, debiendo estar al menos uno de ellos en A al ser S completo. Como cualquier vértice de A sólo es adyacente a vértices de $A \cup S$ en G , los vértices de A simpliciales en $G(A \cup S)$ también son simpliciales en G . Por el mismo argumento, B posee un vértice simplicial de G , obteniéndose así lo que buscábamos. \square

Definición: Dado un grafo G , una secuencia de sus vértices v_n, \dots, v_1 es un *orden de eliminación perfecto* (o *simplicial*), si v_i es simplicial en $G(\{v_1, \dots, v_i\})$.

Proposición 1.2.3: G es cordal si y sólo si tiene un orden de eliminación perfecto.

Demostración: Si G es cordal, sabemos que posee un vértice simplicial, llamémoslo v_n . Además $G - v_n$ también es cordal, así que posee un vértice simplicial y repetimos el procedimiento anterior hasta obtener el orden deseado.

Recíprocamente, sea $\{v_n, \dots, v_1\}$ un orden de eliminación perfecto de G y sea C un ciclo con vértices x_1, \dots, x_r, x_1 . Sea x_{j_0} el vértice del ciclo de mayor subíndice, es decir, el primero en aparecer en el orden de eliminación perfecto. Luego, sus vecinos son adyacentes, es decir, se encuentra una cuerda en C . \square

Esta caracterización constituye una herramienta muy poderosa. Existe un algoritmo lineal para determinar si un grafo posee un orden de eliminación perfecto [14]. Y son muchas las demostraciones que involucran a grafos cordales donde la clave es considerar un vértice simplicial.

Otra caracterización de los grafos cordales viene dada como clase de grafos de intersección de cierto tipo de familias que detallaremos más adelante. Antes veremos la siguiente propiedad:

Definición: Una familia finita de conjuntos verifica la propiedad Helly si, dada cualquier subfamilia cuyos miembros tienen intersección dos a dos no vacía, entonces la intersección de todos es no vacía.

Teorema 1.2.4: Toda familia formada por los conjuntos de vértices de cierto número de subárboles de un árbol T satisface la propiedad Helly.

Demostración: Sea $\{T_i\}_{i=1,\dots,k}$ una familia de subárboles de un árbol T , y supongamos que la familia $\{V(T_i)\}_{i=1,\dots,k}$ es tal que sus miembros tienen intersección dos a dos no vacía pero que $\bigcap_i V(T_i) = \emptyset$. Entonces, para cada $v \in V(T)$, existe T_j , $1 \leq j \leq k$ para el cual $v \notin V(T_j)$. Como existe un único camino entre dos vértices en T , sea e la arista incidente en v que pertenece a el camino entre v y el vértice más cercano de T_j a v . Si por cada vértice elegimos una arista de ese modo y, como T tiene n vértices y $n - 1$ aristas, hay por lo menos una arista que ha sido seleccionada más de una vez, sea ésta uv . Esto implica que los dos subárboles a partir de los cuales se obtiene uv están en componentes distintas de $T - \{u, v\}$, contradiciendo el hecho de que la intersección de sus respectivos conjuntos de vértices debe ser no vacía. Por lo tanto, concluimos que la intersección de todos los $V(T_i)$ no puede ser vacía. \square

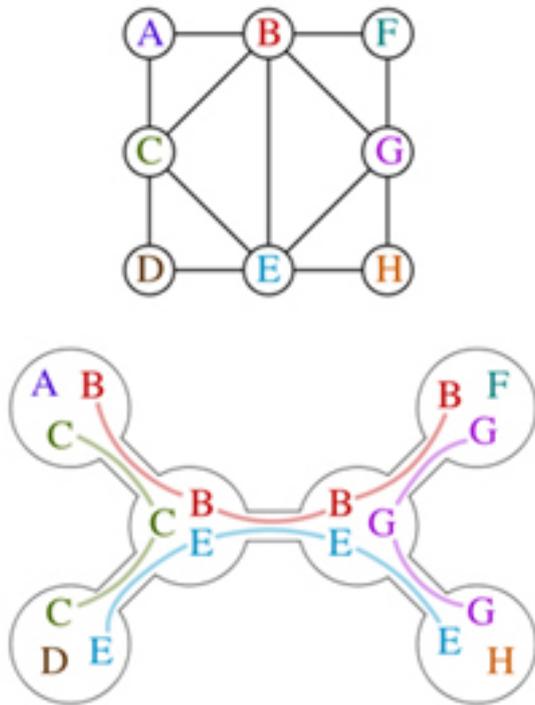


Figura 4: Un grafo cordal con una representación de subárboles de un árbol.

Teorema 1.2.5: *Un grafo G tiene un orden de eliminación perfecto si y sólo si puede representarse como el grafo de intersección de una familia de subárboles de un árbol.*

Demostración: Supongamos que G posee un orden de eliminación perfecto. Procedamos por inducción sobre el número n de vértices. Que K_1 verifica la propiedad es trivial.

Sea G con un orden de eliminación perfecto v_n, \dots, v_1 . Luego v_{n-1}, \dots, v_1 es un orden de eliminación perfecto de $G - v_n$ y tenemos entonces por hipótesis inductiva un árbol T y una familia de subárboles que representa a $G - v_n$.

Como v_n es simplicial de G , el conjunto de vértices adyacentes a él induce un completo en $G - v_n$ y, en consecuencia, los subárboles que los representan tienen al menos un vértice en común por el Teorema 1.2.4. Llamemos x a un vértice de la intersección de todos ellos. Agreguemos a T un nuevo vértice y y hagámoslo adyacente a x . A cada subárbol correspondiente a los vértices adyacentes a v_n le agregamos la arista xy , y a v_n le asignamos el subárbol que consiste solamente en el vértice y . Obtenemos así una representación

de G del tipo que se buscaba.

Recíprocamente, consideremos ahora un árbol T y una familia de subárboles $(T_v)_{v \in V(G)}$ que constituya una representación de un grafo G . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que se trata de una representación en T con mínima cantidad de vértices, es decir, si $xy \in E(T)$, existe $u \in V(G)$ tal que T_u contiene a x pero no a y . Esto es posible porque si todo subárbol que contiene a x también contiene a y podemos obtener una nueva representación con menor cantidad de vértices contrayendo la arista xy al vértice y .

Sea x una hoja de T , siendo y su único vecino. Sea $u \in V(G)$ tal que $x \in V(T_u)$ pero $y \notin V(T_u)$. De este modo, T_u consta solamente del vértice x , es decir, todos los subárboles de los vecinos de u en G deben tener a x . Luego los vecinos de u inducen un completo, o sea, u es simplicial. Notemos ahora que $(T_v - x)_{v \in V(G-u)}$ es una representación de $G - u$. Por lo tanto podremos repetir los argumentos anteriores y, de continuar así, podremos obtener de manera sucesiva un orden de eliminación perfecto de G . \square

El siguiente corolario nos provee un enfoque alternativo de los grafos cordales:

Corolario 1.2.6: *Un grafo es cordal si y sólo si puede representarse como el grafo de intersección de una familia de subárboles de un árbol.*

Esta característica es tan importante que no habría inconveniente alguno en usarla como definición de los grafos cordales, lo cual se evidenciará en varios teoremas posteriores.

1.3. Grafos Helly

El objetivo de esta sección será enunciar y demostrar dos teoremas que necesitaremos luego.

Definición: Un grafo G es *Helly* (o *clique-Helly*) si sus cliques satisfacen la propiedad Helly.

Teorema 1.3.1: *Sea G un grafo Helly con n vértices v_1, v_2, \dots, v_n , y sea G' el grafo que se obtiene agregando n vértices u_1, u_2, \dots, u_n haciendo, para cada valor de i , u_i adyacente a v_i . Entonces G' es Helly y $C(K(G')) = \{C_v : v \in V(G)\}$ ($C_v = \{C \in C(G'), v \in C\}$).*

Demostración: Se verifica que $C(G') = C(G) \cup \bigcup_{i=1}^n \{u_i, v_i\}$. Tomemos ahora un conjunto de cliques de G' con intersección dos a dos no vacía. Tendremos dos posibilidades:

- 1) Si son elementos de $C(G)$, poseerán un vértice en común por ser G Helly.
- 2) Si $\{u_i, v_i\}$, para algún i , es uno de ellos, la única opción posible es que v_i sea un vértice común a todos.

Así, G' resulta ser Helly.

Los conjuntos C_{v_i} , para $v_i \in V(G)$, son completos de $K(G')$. A su vez, cada C_{v_i} es maximal porque posee a $\{u_i, v_i\}$ y este clique sólo es adyacente a todo aquel que tenga a v_i entre sus vértices.

Recíprocamente, si $D \in C(K(G'))$, como G' es Helly, todos sus elementos poseen un vértice común y, entre los vértices comunes, siempre se puede tomar un v_i ; de hecho, si $u_i \in \bigcap_{C \in D} C$, lo mismo se puede decir de v_i . Así, $D = C_{v_i}$ y esto concluye con la demostración. \diamond

La razón de haber introducido al grafo G' se hará clara luego, permitiéndonos la construcción hecha realizar varias demostraciones.

Dada una clase de grafos, es interesante preguntarse en qué consistirá su imagen por el operador clique. En el caso de que resulte ser la misma clase se dice que ésta es *clique-cerrada*. Veamos que éste es el caso para los grafos Helly:

Teorema 1.3.2: $K(\text{Helly}) = \text{Helly}$.

Demostración: Sea H Helly y $G=K(H)$. Sea $D = \{D_1, \dots, D_k\}$ un conjunto de cliques de G con intersección dos a dos no vacía. Los elementos de cada D_i son cliques de H y, como este último es Helly, podremos seleccionar un vértice $v_i \in V(H)$ común a todos los cliques de D_i . Vale que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, de lo contrario se estaría contradiciendo la maximalidad de los elementos de D .

Veamos ahora que $\{v_1, \dots, v_k\}$ induce un completo de H . Para ello seleccionemos a v_i y a v_j distintos, $1 \leq i, j \leq k$. Sabíamos que v_i está en la intersección de todos los elementos de D_i , v_j está en la intersección de todos los elementos de D_j y que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, por lo que existe un clique de H que contiene tanto a v_i como a v_j , es decir, $v_i v_j \in E(H)$.

Consideremos entonces un clique C de H que contenga a $\{v_1, \dots, v_k\}$. Como, para todo i , $v_i \in C$, C es adyacente a todos los elementos de D_i , por lo que $C \in D_i$. En consecuencia, $\bigcap_{i=1}^k D_i \neq \emptyset$.

Recíprocamente, sea G un grafo Helly. Construyamos a H de manera tal que $V(H) = C(G) \cup V(G)$.

Si $C, C' \in C(G)$, $C \neq C'$, entonces $CC' \in E(H)$ si y sólo si $C \cap C' \neq \emptyset$. Si $v \in V(G)$ y $C \in C(G)$ entonces $vC \in E(H)$ si y sólo si $v \in C$.

Se ve claramente que $C(H) = (C(v) \cup \{v\})_{v \in V(G)}$. Además H es Helly; de hecho, si $(C(v_i) \cup \{v_i\})$, $i = 1, \dots, k$, es un conjunto de cliques de H con intersección dos a dos no vacía se ve como antes que $\{v_1, \dots, v_k\}$ induce un completo en G , lo cual nos conduce a un elemento presente en todos los cliques. A su vez,

$$\{C(v_i) \cup \{v_i\}\} \cap \{C(v_j) \cup \{v_j\}\} \neq \emptyset \iff C(v_i) \cap C(v_j) \neq \emptyset \iff v_i v_j \in E(G)$$

Por lo tanto $K(H) \approx G$. \diamond

1.4. Hipergrafos

En esta sección generalizaremos el concepto de grafo. Abandonaremos la restricción de que una arista tenga dos extremos y permitiremos que interconecte a una cantidad arbitraria de vértices. El panorama se verá así modificado y será posible describir nuevas propiedades.

Definiciones: Un *hipergrafo* finito \mathcal{E} es una familia de subconjuntos no vacíos (las aristas de \mathcal{E}) de un conjunto V (los vértices de \mathcal{E}).

El *hipergrafo dual* $\delta(\mathcal{E})$ tiene como conjunto de vértices a las aristas de \mathcal{E} y a los conjuntos $\{e \in \mathcal{E}: v \in e\}$ ($v \in V$) como sus aristas.

La *dos sección* $S(\mathcal{E})$ de un hipergrafo tiene a V como conjunto de vértices, y dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si existe una arista de \mathcal{E} que contenga a ambos.

El *grafo de líneas* $L(\mathcal{E})$ es el grafo de intersección de las aristas de \mathcal{E} .

Un hipergrafo es *conforme* si todo clique de su dos sección está contenido en una de sus aristas. Es más, como cada arista de un hipergrafo es un completo de su dos sección la definición equivale a que todo clique de su dos sección es una de sus aristas.

Un hipergrafo es *Helly* cuando sus aristas satisfacen la propiedad Helly.

Dos hipergrafos $\mathcal{E}_1 = (V_1, E_1)$ y $\mathcal{E}_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos, $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_2$, si existen dos biyecciones $f: V_1 \rightarrow V_2$ y $g: E_1 \rightarrow E_2$ tales que $u, v \in e$ si y sólo si $f(u), f(v) \in g(e)$.

Teorema 1.4.1: $\delta(\delta(\mathcal{E})) \sim \mathcal{E}$.

Demostración: Recordemos que $\delta(\mathcal{E})$ tiene a las aristas de \mathcal{E} como vértices y a $E_v = \{e \in \mathcal{E} : v \in e\}$ ($v \in V$) como aristas.

Entonces los vértices de $\delta(\delta(\mathcal{E}))$ serán los E_v y las aristas serán de la forma $E_e = \{E_v : e \in E_v\} = \{E_v : v \in e\}$. El isomorfismo es ahora claro. \diamond

Teorema 1.4.2: $L(\mathcal{E}) = S(\delta(\mathcal{E}))$.

Demostración:

$$e_1 e_2 \in E(L(\mathcal{E})) \iff \exists v \in e_1 \cap e_2 \iff \exists v, e_1, e_2 \in E_v \iff e_1 e_2 \in E(S(\delta(\mathcal{E}))) \diamond$$

Muchas propiedades de un hipergrafo tienen su versión dual, veamos un ejemplo:

Teorema 1.4.3: \mathcal{E} es conforme si y sólo si $\delta(\mathcal{E})$ tiene la propiedad Helly.

Demostración: \implies) Todo conjunto A de aristas de $\delta(\mathcal{E})$ con intersección dos a dos no vacía se corresponde con un completo de $L(\delta(\mathcal{E}))$ que a su vez, por Teorema 1.4.2, se corresponde con un completo de $S(\mathcal{E})$ que, por ser \mathcal{E} conforme, está contenido en una arista e' . Se puede ver que e' está en todos los elementos de A .

\impliedby) Sea C un clique de $S(\mathcal{E})$. Esto implica que $\{E_v\}_{v \in C}$ es un conjunto de aristas de $\delta(\mathcal{E})$ con intersección dos a dos no vacía. Como $\delta(\mathcal{E})$ es Helly, existe e tal que $e \in E_v$ para todo $v \in C$. Por lo tanto, $C \subseteq e$ y así \mathcal{E} resulta conforme. \diamond

Definición: Un hipergrafo \mathcal{E} es un *hiperárbol* si existe un árbol T con conjunto de vértices igual a V tal que toda arista induce un subárbol de T . Es un *hiperárbol dual* si existe un árbol T cuyos vértices son las aristas de \mathcal{E} tal que para todo $v \in V$ el conjunto $\{e \in \mathcal{E} : v \in e\}$ induce un subárbol de T .

A continuación, veremos que existe una descripción simple de los hiperárboles en términos de los conceptos previos:

Teorema 1.4.4:

(a) \mathcal{E} es un hiperárbol si y sólo si \mathcal{E} es un hipergrafo Helly y su grafo de líneas es cordal.

(b) \mathcal{E} es un hiperárbol dual si y sólo si \mathcal{E} es conforme y $S(\mathcal{E})$ es cordal.

Demostración: (a) Si \mathcal{E} es un hiperárbol podemos pensar directamente que está definido como hipergrafo de subárboles de un árbol. Entonces sabemos que estos subárboles satisfacen la propiedad Helly (Teorema 1.2.4) y que $L(\mathcal{E})$ coincide con el grafo de intersección de ellos, por lo que es cordal (Teorema 1.2.5).

Recíprocamente, supongamos que \mathcal{E} es un hipergrafo Helly y que $L(\mathcal{E})$ es cordal. Procedamos por inducción sobre la suma de vértices y aristas de \mathcal{E} (k). Si $k = 2$ o hay una sola arista, la propiedad es trivial.

Como $L(\mathcal{E})$ es cordal, tomemos a e simplicial en $L(\mathcal{E})$. Así, e y sus vecinos inducen un clique de $L(\mathcal{E})$ y, como \mathcal{E} es Helly, todos poseen un vértice v en común. Consideremos dos posibilidades:

En primer lugar, si $e = \{v\}$, removamos a e y, por hipótesis inductiva, $\mathcal{E} - e$ es un hiperárbol. Así que consideremos un árbol T tal que toda arista de $\mathcal{E} - e$ induce un subárbol. Obviamente, e también induce un subárbol en T .

Si no, sea w otro elemento de e . Consideremos al hipergrafo \mathcal{E}' obtenido a partir de \mathcal{E} removiendo a w de cada arista donde esté presente.

Veamos primero que $L(\mathcal{E}) \sim L(\mathcal{E}')$. Si $e_1 - w \cap e_2 - w \neq \emptyset$, con mayor razón $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$. Recíprocamente, si $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ y las dos aristas comparten un vértice distinto de w , automáticamente $e_1 - w \cap e_2 - w \neq \emptyset$. Y esto siempre ocurre porque, de hecho, si compartieran a w , entonces $e \cap e_1 \neq \emptyset$, $e \cap e_2 \neq \emptyset$ y por lo tanto $v \in e_1 \cap e_2$.

Con razonamientos similares se demuestra que \mathcal{E}' es Helly.

Por hipótesis inductiva, \mathcal{E}' es un hiperárbol, por lo que podemos considerar un árbol T tal que toda arista de \mathcal{E}' induzca un subárbol. Agreguémosle a T el vértice w y hagámoslo adyacente a v . Con este nuevo árbol obtenemos una representación de \mathcal{E} como hiperárbol.

(b) El hecho de que \mathcal{E} sea un hiperárbol dual implica que $\delta(\mathcal{E})$ es un hiperárbol. Por el inciso anterior, esto equivale a que $\delta(\mathcal{E})$ sea Helly y que $L(\delta(\mathcal{E}))$ sea cordal. Esto a su vez equivale, combinando los Teoremas 1.4.2 y 1.4.3, a que \mathcal{E} sea conforme y $S(\mathcal{E})$ sea cordal. \diamond

Definición: Sea \mathcal{E} un hipergrafo. Una sucesión $C : e_1 e_2 \dots e_k e_{k+1} = e_1$ de aristas es un *hiperciclo* si $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$, para $1 \leq i \leq k$. La longitud de C es k . Una cuerda del hiperciclo C es una arista e tal que $e_i \cap e_{i+1} \subseteq e$ para al menos tres índices i , $1 \leq i \leq k$.

Definición: Un hipergrafo \mathcal{E} es α -*acíclico* si es conforme y no contiene ningún hiperciclo de longitud mayor o igual que tres sin cuerdas.

Ahora nos propondremos hallar una caracterización gracias a lo que ya conocemos:

Teorema 1.4.5: *Son equivalentes:*

- (1) \mathcal{E} es α -acíclico.
- (2) \mathcal{E} es un hiperárbol dual.
- (3) Existe una sucesión de eliminaciones a partir de \mathcal{E} que consiste en ir removiendo aristas que estén contenidas en otras o vértices contenidos solamente en una arista hasta que no quede nada.

Demostración:

(1) \implies (2): Mediante el Teorema 1.4.4 (parte (b)) se deduce que basta demostrar que $S(\mathcal{E})$ es cordal, pues ya sabemos que \mathcal{E} es conforme.

Sea $v_1 v_2 \dots v_k v_{k+1} = v_1$ un ciclo de $S(\mathcal{E})$. Para cada valor de i , $1 \leq i \leq k$, podemos tomar una arista e_i de \mathcal{E} tal que $v_i, v_{i+1} \in e_i$. Tenemos dos posibilidades:

Si dos de esas aristas coinciden se podrá obtener automáticamente una cuerda.

Si no, $e_1 \dots e_k e_{k+1} = e_1$ es un hiperciclo de \mathcal{E} . Por hipótesis, existe una arista e tal que $e_i \cap e_{i+1} \subseteq e$ para al menos tres índices i . Para esos índices, sabemos que $v_{i+1} \in e_i \cap e_{i+1}$, lo cual implica que $v_{i+1} \in e$. Al haber al menos tres índices que cumplen con esta condición, dos de ellos serán no consecutivos, los cuales nos proporcionarán la cuerda buscada en $S(\mathcal{E})$.

(2) \implies (3): Por lo dicho antes, la hipótesis nos asegura que \mathcal{E} es conforme y $S(\mathcal{E})$ es cordal. Supongamos que v es un vértice simplicial de $S(\mathcal{E})$. Entonces v y sus vecinos inducen un completo que, por ser \mathcal{E} conforme, está contenido en una arista e de \mathcal{E} . Tenemos dos posibilidades:

Si e es la única arista que contiene a v , podríamos comenzar con el esquema removiendo a v y obteniendo así un nuevo hipergrafo \mathcal{E}' . No es difícil verificar que \mathcal{E}' es conforme y $S(\mathcal{E}')$ es cordal.

Si existe otra arista e' que contiene a v , resultará que $e' \subset e$, pues e' sólo puede tener vecinos de v en $S(\mathcal{E})$. En este caso podríamos comenzar el esquema removiendo la arista e' . Es inmediato que $\mathcal{E}-e'$ es conforme y $S(\mathcal{E}-e')$ es cordal.

Continuando de esta manera se podrá obtener el esquema deseado.

(3) \implies (1): Supongamos que \mathcal{E} es α -acíclico.

Sea \mathcal{E}' un hipergrafo obtenido de \mathcal{E} agregando un nuevo vértice v solamente en una arista e . Entonces \mathcal{E}' también es α -acíclico pues, en cualquier hiperciclo suyo, v no está presente en la intersección de ninguna de las aristas.

Sea ahora \mathcal{E}'' otro hipergrafo obtenido de \mathcal{E} agregando una arista e' contenida en otra arista e de \mathcal{E} . Nuevamente, resulta que \mathcal{E}'' es también α -acíclico. Para demostrarlo, tomemos un hiperciclo C de \mathcal{E}'' y consideremos las siguientes posibilidades:

En primer lugar, si $e' \notin C$, C resulta ser un hiperciclo de \mathcal{E} , por lo que será posible encontrarle una cuerda.

En segundo lugar, si $e, e' \in C$, resulta que e es una cuerda de C .

En tercer lugar, si $e' \in C$, $e \notin C$, es posible reemplazar a e' por e para obtener un nuevo hiperciclo que posee al menos una cuerda ya que \mathcal{E} es α -acíclico. Es inmediato que así obtenemos también una cuerda de C .

Esto nos asegura que la actual implicación puede ser demostrada de modo inductivo teniendo en cuenta que un hipergrafo que posee solamente un vértice o solamente una arista es trivialmente α -acíclico. \diamond

Observación: Son muy numerosas las fuentes donde (3) es usado para definir el concepto de hipergrafo α -acíclico.

Definiciones: Sea G un grafo y $v \in V(G)$. El *disco* centrado en v con radio k es el conjunto de todos los vértices a distancia menor o igual que k de v . Lo simbolizaremos por $N^k[v]$.

Llamaremos $C(G)$ al *hipergrafo de cliques* de G , $N(G) = \{N[v] : v \in V\}$ al *hipergrafo de vecindades cerradas* y $D(G) = \{N^k[v] : v \in V, k \text{ entero positivo}\}$ al *hipergrafo de discos* de G .

Llamamos *ciclo inducido maximal* de G a un ciclo inducido de G con máximo número de aristas. Denotemos por $h(G)$ al número de aristas de un ciclo inducido maximal de G .

Muchas veces será útil saber si los grafos de líneas de los hipergrafos anteriormente mencionados son cordales. Para dilucidarlo tendremos a disposición el siguiente resultado:

Teorema 1.4.6 [2]: *Sea G un grafo arbitrario.*

- (i) $h(L(D(G))) = h(L(N(G)))$. En particular, $L(D(G))$ es cordal si y sólo si $L(N(G))$ también lo es.
- (ii) $h(L(N(G))) \leq h(L(C(G)))$. En particular, si $L(C(G))$ es cordal, también lo es $L(N(G))$.
- (iii) Si $N(G)$ es conforme, también lo es $\delta(C(G))$.

Demostración: (i) Entre todos los ciclos inducidos maximales del grafo $L(D(G))$ elijamos un ciclo

$$C = N^{r_1}[v_1] \dots N^{r_k}[v_k] N^{r_1}[v_1]$$

con suma mínima $s = r_1 + \dots + r_k$. Veamos que $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$. Supongamos por lo contrario que $r_1 \geq 2$.

Elijamos dos vértices cualesquiera $a \in N^{r_1}[v_1] \cap N^{r_2}[v_2]$ y $b \in N^{r_k}[v_k] \cap N^{r_1}[v_1]$. Ahora consideremos dos vecinos $v'_1 \in I(a, v_1)$ y $v''_1 \in I(b, v_1)$ del vértice v_1 . Si $N^{r_1-1}[v'_1] \cap N^{r_k}[v_k] = \emptyset$, $N^{r_1-1}[v''_1] \cap N^{r_2}[v_2] = \emptyset$, los discos

$$N^{r_1-1}[v'_1]N^{r_2}[v_2] \dots N^{r_k}[v_k]N^{r_1-1}[v''_1]$$

Forman un ciclo inducido con $k + 1$ aristas, contradiciendo la maximalidad de C .

Así que supongamos, por ejemplo, que $N^{r_1-1}[v'_1] \cap N^{r_k}[v_k] \neq \emptyset$. Entonces, al reemplazar el disco $N^{r_1}[v_1]$ por $N^{r_1-1}[v'_1]$ en C obtenemos un ciclo inducido con k aristas y suma total $s - 1$, lo cual contradice la elección que hicimos de s . Así, C consiste de discos unitarios, es decir, es un ciclo inducido del grafo $L(N(G))$.

(ii) Consideremos vértices $v_1 \dots v_k$ cuyas vecindades generan un ciclo inducido maximal C en el grafo $L(N(G))$. Sea

$$B_2 = N[v_1] \cap N[v_2] \dots B_k = N[v_{k-1}] \cap N[v_k], B_1 = N[v_k] \cap N[v_1]$$

En cada conjunto B_i elijamos un vértice b_i tal que la suma $s = d(b_1, b_2) + \dots + d(b_{k-1}, b_k) + d(b_k, b_1)$ sea mínima. Definamos ahora un ciclo C' de $L(C(G))$ a través de las siguientes reglas: si los vértices b_i, b_{i+1} son adyacentes entonces agreguemos un clique K_i a C' que contenga a v_i y a ellos; en caso contrario, agreguemos dos cliques K'_i y K''_i (en este orden) a C' que contengan a las aristas $v_i b_i$ y $v_i b_{i+1}$ respectivamente.

El ciclo C' tiene al menos k aristas. Supongamos que C' no es inducido, es decir, dos cliques no consecutivos K' y K'' de C' tienen intersección no vacía. Por definición de C' cualquier clique suyo contiene el centro de alguna vecindad de C . Como éste es un ciclo inducido los cliques K' y K'' contienen centros de dos vecindades consecutivas de C . Supongamos que $v_1 \in K'$ y $v_2 \in K''$. Por simetría, basta considerar los siguientes casos: $K' = K_1$ y $K'' = K_2$ o $K' = K'_1$ y $K'' = K'_2$ o $K' = K'_1$ y $K'' = K''_2$.

En cualquiera de estos casos vale la desigualdad $d(b_1, b_2) + d(b_2, b_3) \geq 3$. Sea $b_2^* \in K' \cap K'' \subset B_2$. Como $d(b_1, b_2^*) + d(b_2^*, b_3) = 2$, esto contradice la elección de $b_1 \dots b_k$. Entonces C' es un ciclo inducido de $L(C(G))$ y su longitud es al menos $k = h(L(N(G)))$.

(iii) Debido al Teorema 1.4.3, basta probar que $C(G)$ es un hipergrafo Helly. Sea $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ una familia de cliques de G con intersección dos a dos no vacía. Para cada vértice $v \in \bigcup_{i=1}^m C_i$ consideremos la vecindad cerrada $N[v]$. Evidentemente, dos vecindades cualesquiera de esas tienen intersección no vacía. Por lo tanto, los vértices de $\bigcup_{i=1}^m C_i$ inducen un clique en $S(N(G))$. Por la conformalidad de $N(G)$ existe un vértice w tal que $N[w]$ contiene la unión $\bigcup_{i=1}^m C_i$. Debido a la maximalidad de los cliques C_1, \dots, C_m , w pertenece a todos ellos. \square

2. Grafos dualmente cordales

Ya estamos en condiciones de empezar con la parte principal de nuestro estudio.

2.1. Introducción

Un vértice $u \in N[v]$ es un *máximo vecino* de v si para todo $w \in N[v]$, $N[w] \subseteq N[u]$, no excluyéndose la posibilidad de que $u = v$. Esto equivale a que $N^2[v] = N[u]$. Un orden lineal (v_1, v_2, \dots, v_n) de V es un *orden de vecindades máximas* de G si, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i posee un máximo vecino en $G_i = G(\{v_i, \dots, v_n\})$.

Además, para cada $v \in V(G_i)$ se denotará por $N_i[v]$ al conjunto $N[v] \cap V(G_i)$. Las secuencias G_i y $N_i[v]$ son decrecientes. Más precisamente, G_{i+1} es un subgrafo inducido de G_i y $N_{i+1}[v] \subseteq N_i[v]$.

Definición: Se dice que un grafo G es *dualmente cordal* si admite un orden de vecindades máximas.

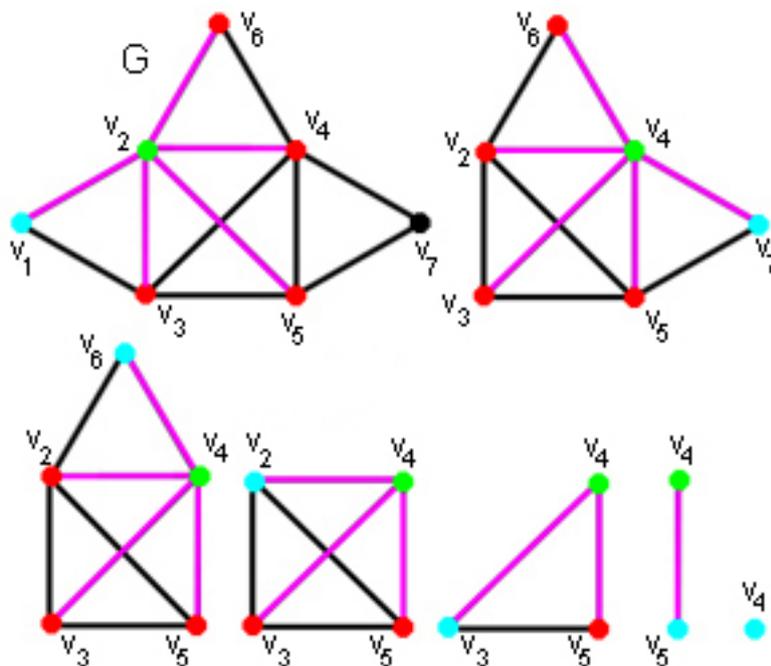


Figura 5: G es dualmente cordal, siendo $(v_1 v_7 v_6 v_2 v_3 v_5 v_4)$ un orden de máximas vecindades. En cada paso se han coloreado los vértices del disco de radio dos centrado en el vértice correspondiente del orden (en celeste). En verde se indica un máximo vecino.

Ejemplo 2.1: Cualquier grafo G con un vértice universal v resultará ser dualmente cordal. De hecho, cualquier ordenamiento de $V(G) - v$ al cual se le agrega v al final es un orden de máximas vecindades, resultando ser v siempre un máximo vecino.

Ejemplo 2.2: Los ciclos con longitud mayor o igual que cuatro constituyen un ejemplo de grafos que no son dualmente cordales. De hecho, no es difícil verificar que ningún vértice posee un máximo vecino.

A partir de ahora, nuestro primer paso será avanzar con algunas caracterizaciones de los grafos dualmente cordales que constituirán nuestras herramientas básicas a la hora de proceder.

Teorema 2.1.1 [2]: Para un grafo G (conexo) las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) G posee un orden de vecindades máximas.
- (ii) Existe un árbol generador T de G tal que todo clique de G induce un subárbol de T .
- (iii) Existe un árbol generador T de G tal que cualquier disco de G induce un subárbol en T .
- (iv) $N(G)$ es un hiperárbol (dual).

Demostración:

(i) \implies (ii): Lo haremos por inducción sobre el número de vértices del grafo G . Sea x el primer vértice en un orden de vecindades máximas de G . Sea y un máximo vecino de x , es decir, $N^2[x] = N[y]$. Si $x = y$, de la igualdad anterior se deduce que x es adyacente a todos los otros vértices de G y entonces un árbol con las características de (ii) resulta ser la estrella con centro en x . Por lo tanto, supondremos a partir de ahora que $x \neq y$. Como $G - x$ posee un orden de vecindades máximas, por hipótesis inductiva existe un árbol generador de $G - x$ que satisface la condición (ii). Entre todos los árboles posibles, tomemos un árbol T en el cual y sea adyacente al mayor número posible de vértices de $N(x)$. Veamos entonces que bajo esas condiciones y es adyacente en T a todos los vértices de $N(x) \setminus \{y\}$.

Supongamos lo contrario y sea z un vértice de $N(x)$ no adyacente a y en T . Consideremos el camino $y\dots vz$ que conecte a los vértices y y z . Llamemos T_v , con $v \in T_v$ y T_z , con $z \in T_z$, a las componentes conexas de T obtenidas al eliminar la arista vz . Agreguemos a estos subárboles la arista yz , obteniéndose así un nuevo árbol T' , que resulta ser generador de $G - x$. Veamos que T' también satisface la condición (ii). Sea C un clique de $G - x$. Si $z \notin C$ entonces C está completamente contenido en T_v o en T_z , que son subárboles tanto de T como de T' , lo cual nos permite concluir que induce un subárbol en ambos al estar seguros que esto ocurre para T . Supongamos ahora que $z \in C$. Entonces, al ser y máximo vecino tenemos que $C \subseteq N[z] \subseteq N[y] = N^2[x]$. Es decir, y es adyacente a todos los vértices en C , por lo que necesariamente $y \in C$. Sean u_1 y u_2 vértices cualesquiera de C . Si u_1 y u_2 están ambos en T_v o en T_z , entonces sabemos que estos vértices están conectados en T y T' , por lo que esta situación no nos plantea ningún problema. Así que supongamos a partir de ahora que $u_1 \in T_v$ y $u_2 \in T_z$. Por lo anterior, u_1 e y están conectados por un camino en T_v consistente en vértices de C , llamémoslo l_1 . De manera similar u_2 y z están unidos en T_z por un camino $l_2 \subseteq C$. De manera que al combinar los caminos l_1 y l_2 y la arista yz obtenemos un camino que conecta a u_1 y a u_2 en T' . Consecuentemente, T' también satisface la condición (ii), lo cual entra en contradicción con la elección que habíamos hecho de T . Entonces podemos concluir que y es adyacente en T a todos los vértices de $N(x) \setminus \{y\}$.

Consideremos ahora el árbol generador T^* de G obtenido a partir de T agregando la arista xy . No es difícil verificar que T^* satisface la propiedad (ii), por lo que es el árbol requerido.

(ii) \implies (iii): Sea T un árbol generador de G tal que todo clique de G induce un subárbol de T . Veamos que cualquier disco $N^r[z]$ también induce un subárbol. Sea $v = v_1v_2\dots v_kv_{k+1} = z$ un camino de mínima longitud en G entre dos vértices z y $v \in N^r[z]$. Denotemos por C_i a un clique que contenga a v_iv_{i+1} , $i \in \{1, \dots, k\}$. Dada la elección que hicimos de C , deducimos que es posible conectar a v_i y a v_{i+1} en T a través de un camino $l_i \subseteq C_i$. Así, el conjunto de vértices $L = \bigcup_{i=1}^k l_i$ induce un subárbol $T(L)$ en T . Por lo tanto los vértices v y z están conectados en $T(L)$ por un camino l . Vale además que $d(z, w) \leq d(z, v_i) \leq r$ para cada vértice $w \in C_i$, pues si no se contradeciría nuestra elección de un camino de mínima longitud. Así obtenemos que

$$l \subseteq L \subseteq \bigcup_{i=1}^k C_i \subseteq N^r[z]$$

Es decir, cualquier vértice de $N^r[z]$ está conectado a z a través de un camino tanto en T como en $N^r[z]$. Esto resulta suficiente para la demostración.

(iii) \implies (iv): Se verifica inmediatamente por definición.

(iv) \implies (i): Supongamos que T es un árbol con los mismos vértices que G , tal que $N_G[v]$ induce un subárbol T_v de T para todo vértice v de G . Consideremos a T como a un árbol enraizado en cierto vértice r . Cada $N_G[v]$ tiene un único vértice v^* tal que

$$d_T(r, v^*) < d_T(r, u) \text{ para todos los vértices } u \in N_G[v] \setminus \{v^*\}$$

que puede ser considerado como la raíz del subárbol T_v de T . De hecho, no es difícil verificar que v^* es el vértice de T_v más cercano a r en el camino de v a r en T .

Ordenemos ahora los vértices en una sucesión v_1, v_2, \dots, v_n de manera que

$$d_T(r, v_1^*) \geq d_T(r, v_2^*) \geq \dots \geq d_T(r, v_n^*)$$

Veamos que de esta manera se obtiene un orden de vecindades máximas de G . Notemos que $v_i^* \in N_i[v_i]$, ya que obviamente $d_T(r, v_i^*) \geq d_T(r, v_i^{**})$. Para cada $v_j \in N_i[v_i]$ y $v_k \in N_i[v_j]$, v_j está tanto en T_{v_i} como en T_{v_k} . Por lo tanto, v_i^* como v_k^* son ambos ancestros⁵ de v_j . También $d_T(r, v_k^*) \leq d_T(r, v_i^*)$, de lo contrario v_k aparecería antes en el ordenamiento. Así v_i^* está en el camino en T desde v_j a v_k^* (para convencerse de ello sólo basta considerar el único camino en T de v_j a r). Como v_j y v_k^* pertenecen a $N_G[v_k]$, es decir, pertenecen al subárbol T_{v_k} de T , el hecho de que este último sea conexo implica que v_i^* pertenece a T_{v_k} y por ende también está en $N_G[v_k]$, lo cual es equivalente a decir que $v_k \in N_i[v_i^*]$. Esto es suficiente para afirmar que v_i^* es un máximo vecino de v_i para $1 \leq i \leq n$. Esto demuestra que v_1, v_2, \dots, v_n constituye un orden de vecindades máximas de G . \square

Ejemplo 2.3: Volviendo al ejemplo 2.1, el Teorema 2.1.1 nos ofrece otras alternativas para demostrar que un grafo G con vértice universal es dualmente cordal. De hecho, la estrella centrada en v es un árbol en las condiciones de (ii) y (iii). A su vez, también podemos afirmar que $C(G)$ es un hiperárbol al ser Helly (todos los cliques poseen a v) y al valer que $L(C(G))$ es cordal (es más, se trata de un completo).

Con la ayuda de la demostración del Teorema 2.1.1 podemos lograr probar el siguiente resultado:

Teorema 2.1.2: *Sea T un árbol generador de un grafo G . Entonces son equivalentes:*

- (a) *Todo clique de G induce un subárbol de T .*
- (b) *Todo disco de G induce un subárbol de T .*
- (c) *Toda vecindad cerrada de G induce un subárbol de T .*

Demostración: Dado lo que ya sabemos gracias al Teorema 2.1.1 sólo basta demostrar que (c) implica (a). Supongamos entonces que toda vecindad cerrada de G induce un subárbol. Sea C un clique de G , $v, w \in C$ y $z \in T[v, w]$. Si r es otro vértice en C , vr y wr son elementos de $E(G)$, es decir, $v \in N[r]$ y $w \in N[r]$. Como T es generador, $z \in T[v, r]$ o $z \in T[w, r]$ y, como $N[r]$ induce un subárbol, en cualquiera de los dos casos se puede concluir que $z \in N[r]$. Entonces z es adyacente a cada vértice de C , por lo que $z \in C$. De esta manera $T[v, w]$ es un camino en C y por ende éste induce un subgrafo conexo en T . \diamond

⁵Un vértice u es ancestro de v si está presente en el camino de v a la raíz del árbol. Recíprocamente v es descendiente de u .

2.2. Más caracterizaciones de grafos dualmente cordales

El Teorema 2.1.1 nos da muchas posibilidades para lograr más caracterizaciones de los grafos dualmente cordales. A continuación expondremos algunas de ellas. El lector podrá encontrar más detalles en [7].

Definición: Sea G un grafo conexo y T un árbol generador de G . Diremos que T es compatible con G si $vw \in E(G)$ y $z \in T[v, w] - \{v, w\}$ implica que $vz \in E(G)$ y $zw \in E(G)$.

Usando otras palabras, un árbol es compatible cuando sus caminos entre vértices adyacentes inducen un completo.

Teorema 2.2.1: G es un grafo dualmente cordal y conexo si y sólo si existe un árbol T compatible con G .

Demostración: Si G es dualmente cordal, existe un árbol generador T de G tal que cada clique de G induce un subgrafo conexo de T . Sea $vw \in E(G)$ y $z \in T[v, w] - \{v, w\}$. Existe un clique C de G que contiene a v y a w y, como C induce un subgrafo conexo de T , $z \in C$, de modo que $vz, zw \in E(G)$.

Recíprocamente, si T es un árbol compatible con G , sea C un clique de G , $v, w \in C$ y $z \in T[v, w]$. Si r es otro vértice en C , vr y wr son elementos de $E(G)$. Como T es generador, $z \in T[v, r]$ o $z \in T[w, r]$. Sea cual sea el caso, $zr \in E(G)$. Entonces z es adyacente a cada vértice de C , por lo que $z \in C$. De esta manera $T[v, w]$ es un camino en C y por ende éste induce un subgrafo conexo en T . \square

Definición: Sea G un grafo conexo. Diremos que $\delta(C(G)) = (C(v))_{v \in V(G)}$ es un árbol Helly si existe un árbol generador T de G tal que para todo $v, w \in V(G)$ si $z \in T[v, w]$ entonces $C(v) \cap C(w) \subseteq C(z)$.

Teorema 2.2.2: Un grafo conexo G es dualmente cordal si y sólo si $\delta(C(G))$ es un árbol Helly.

Demostración: Si G es dualmente cordal existe un árbol generador T tal que cada clique de G induce un subárbol de T . Veamos que $\delta(C(G))$ es un árbol Helly y que T es un árbol adecuado.

Sean $v, w \in V(G)$. Si $C \in C(v) \cap C(w)$ entonces $v, w \in C$. Como C induce un subárbol de T , para cada $z \in T[v, w]$ tenemos que $z \in C$, de modo que $C \in C(z)$.

Recíprocamente, supongamos que $\delta(C(G))$ es un árbol Helly y sea T un árbol acorde con la definición. Si C es un clique de G , $v, w \in C$ y $z \in T[v, w]$ entonces $C(v) \cap C(w) \subseteq C(z)$ por hipótesis. Así $C \in C(z)$ y $z \in C$. Se puede concluir entonces que C induce un subgrafo conexo de T . \square

Definición: Una familia $(F_i)_{i \in I}$ (I finito y no vacío) es una familia árbol Helly si existe un árbol T con $V(T)=I$ que satisfice:

- (1) Si $i, j \in I$, $ij \in E(T) \rightarrow F_i \cap F_j \neq \emptyset$
- (2) Para todo $i, j \in I$ si k es un vértice perteneciente al camino en T desde i a j , entonces $F_i \cap F_j \subseteq F_k$

Teorema 2.2.3: G es un grafo dualmente cordal y conexo si y sólo si es el grafo de intersección de una familia árbol Helly.

Demostración: Si G es dualmente cordal y conexo, el resultado es inmediato porque G es el grafo de líneas de $\delta(C(G))$.

Recíprocamente, sea $(F_v)_{v \in V(G)}$ una familia árbol Helly tal que G es su grafo de intersección. No es difícil ver que, por (1), T es un árbol generador de G , por lo que este último es conexo. Si $vw \in E(G)$ y $z \in T[v, w] - \{v, w\}$, (2) implica que $F_v \cap F_w \subseteq F_z$ y además, por (1), $F_v \cap F_w \neq \emptyset$. Por lo tanto, $F_v \cap F_w \subseteq F_z$.

y $F_z \cap F_w \neq \emptyset$. Esto equivale a que $vz \in E(G)$ y $zw \in E(G)$, es decir, T es un árbol compatible con G . \square

Lo que ya conocemos de grafos de intervalos propios nos permite descubrir un vínculo con los grafos dualmente cordales:

Teorema 2.2.4: *Un grafo conexo es dualmente cordal si y sólo si existe un árbol generador T de G tal que, para cada camino P en T , $G(P)$ es un grafo de intervalos propios y la sucesión de vértices en P forma un orden compatible.*

Demostración: Si G es dualmente cordal, sea $x = x_0x_1\dots x_s = y$ un camino P en T árbol compatible con G . Si x_i, x_j y x_k son tres vértices en P tales que $i < j < k$ y $x_ix_k \in E(G)$ también sucede que $x_ix_j, x_jx_k \in E(G)$, al ser T un árbol compatible. Esto demuestra que $G(P)$ es compatible con un orden total, por lo que es un grafo de intervalos propios.

Recíprocamente, sea T un árbol que cumple con la hipótesis y C un clique de G . Sea T' el subárbol minimal de T que contiene a C . Si $T'(C)$ no es conexo entonces existe un vértice $t \in T'$ que no pertenece a C . Además vale también que el grado de t en T' no es menor que dos (si así lo fuera, removiendo a t se obtiene un subárbol menor que T' que contiene a C) y que, como $t \notin C$, existe un vértice $x \in C$ que no es adyacente a t .

Debido a que T' es minimal, C interseca a cada una de las dos componentes de $T' - \{t\}$. Gracias a esto podemos encontrar un vértice $y \in C$ tal que t está en $T[x, y]$.

Como $G(T[x, y])$ es un grafo de intervalos propios, $xy \in E(G)$ y t está entre x e y en un orden compatible, obtenemos que $xt \in E(G)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto los vértices de T' coinciden con los de C y así éste induce un subárbol de T . \square

2.2.1. Caracterizaciones métricas

Ya hemos visto varias caracterizaciones asociadas a árboles compatibles. Veamos que esta estrategia tiene implicaciones métricas.

Teorema 2.2.1.1: *Sea G dualmente cordal, T un árbol compatible con G y $u, v \in V(G)$. Entonces $d_{G(T[u,v])}(u, v) = d_G(u, v)$.*

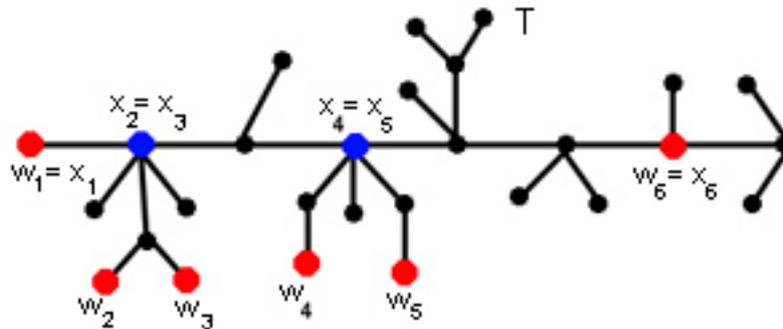


Figura 6: Ejemplo de cómo puede implementarse el procedimiento sugerido en la demostración del teorema 2.2.1.1.

Demostración: Sea $A = T[u, v]$ y $u = w_1\dots w_k = v$ un uv -camino en G . Para cada $w_i, 1 \leq i \leq k$, sea

x_i el vértice en A más cercano, respecto a la distancia en T , a w_i , como se puede apreciar en la figura 6. En particular $w_1 = x_1$ y $w_k = x_k$. Consideremos a $T[w_i, w_{i+1}]$. Si ese camino no interseca a A , entonces $x_i = x_{i+1}$. Si en cambio sí interseca a A , obligatoriamente contendrá a x_i y a x_{i+1} . Dado que T es compatible con G y que $w_i w_{i+1} \in E(G)$ se concluye que x_i es adyacente a x_{i+1} o que $x_i = x_{i+1}$. Así, a cada uv -camino en G le podemos asociar un recorrido en A de u a v de longitud menor o igual que k . Esto es suficiente para demostrar el teorema. \diamond

Definición: Dado un conjunto X , una función α cuyo dominio es $X \times X$ es llamada una *disimilaridad arbórea* o *arba* si existe un árbol T cuyos vértices son los elementos de X tal que, para todo $x, y, z \in X$, si y es un vértice en $T[x, z]$ entonces $\alpha(x, y) \leq \alpha(x, z)$.

Teorema 2.2.1.2 [9]: *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo conexo G .*

- (a) G es dualmente cordal.
- (b) Existe un árbol generador T de G tal que, si x, y son vértices en un camino P de T entonces $d_G(x, y) = d_{G(P)}(x, y)$ y todo camino de mínima longitud de x a y en $G(P)$ es una sucesión creciente o decreciente con respecto al orden de los vértices de P .
- (c) Existe un árbol generador T de G tal que, para cada par x, y de vértices de G , $d_G(x, y)$ es el mínimo número de cliques de G que cubren las aristas de $T[x, y]$.
- (d) La distancia en G es una disimilaridad arbórea.

Demostración:

(a) \implies (b): Sea T un árbol compatible con G . La primera afirmación se desprende del teorema anterior. Además, por Teorema 2.2.4, $G(P)$ es un grafo de intervalos propios y la sucesión de vértices con el orden de P forma un orden compatible. De esto se deduce la segunda afirmación.

(b) \implies (c): Sea T un árbol generador con las condiciones de (b) y $P = T[x, y]$. Entonces, $G(P)$ es un grafo de intervalos propios y $d_{G(P)}(x, y)$ es el mínimo número m de cliques C_1, \dots, C_m de $G(P)$ que cubren las aristas de P .

Como cada C_i está contenido en un clique de G , el mínimo número M de cliques de G que cubren a las aristas de P es menor o igual que m .

Por otro lado, a partir de M cliques de G que cubren los vértices de P podemos construir un camino de x a y de longitud no mayor que M , así que $M = m = d_{G(P)}(x, y) = d_G(x, y)$.

(c) \implies (d): Sea T un árbol generador en las condiciones de (c). Si x, y, z son vértices de G tales que $y \in T[x, z]$, entonces todo conjunto de cliques de G que cubre a las aristas de $T[x, z]$ cubrirá a las aristas de $T[x, y]$. Luego, por hipótesis, $d_G(x, y) \leq d_G(x, z)$.

(d) \implies (a): Sea T un árbol generador de G tal que, para todo x, y, z en $V(G)$, $y \in T[x, z]$ implica $d_G(x, y) \leq d_G(x, z)$.

Sea P un camino en T y x, y, z tres vértices de P en el orden inducido por este camino. Si x y z son adyacentes entonces $d_G(x, z) = 1$ lo cual implica, debido a las desigualdades anteriores, que $d_G(x, y) = 1$ y $d_G(y, z) = 1$, es decir, $xy, yz \in E(G)$. Por lo tanto, T es un árbol compatible y G es dualmente cordal. \square

Las propiedades anteriores poseen un interesante ejemplo de aplicación. Antes de enunciarlo, requerimos el siguiente lema:

Lema 2.2.1.3: Sea G un grafo conexo con vértice simplicial u . Entonces, dados dos vértices v_1 y v_2 distintos de u , vale que $d_{G-u}(v_1, v_2) = d_G(v_1, v_2)$.

Demostración: Sea P un camino en G de v_1 a v_2 de longitud mínima. Afirmamos entonces que $u \notin P$, pues de lo contrario, al ser u simplicial, el vértice que precede a u y el vértice que sucede a u en P serían adyacentes, contradiciendo que P es de longitud mínima. Luego, P también es un camino en $G - u$. ★

Proposición 2.2.1.4: Sea G un grafo conexo, cordal o dualmente cordal. Sea $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ un completo de G y w un vértice tal que el valor de $d(v_i, w)$ es el mismo para cualquier i . Entonces existe $v \in V(G)$ tal que $vv_i \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Demostración: Si G es cordal, demostrémoslo por inducción sobre $|V(G)|$. Si $|V(G)| = k + 1$, sea v el vértice restante. La única opción posible es que $d(v_i, v) = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Supongamos ahora que la propiedad vale si $|V(G)| = n \geq k + 1$. Sea G cordal con $|V(G)| = n + 1$.

Si G es completo no hay nada más que demostrar. Si G no es completo poseerá dos vértices simpliciales no adyacentes.

Supongamos que uno de ellos, llamémoslo u , es un elemento de A . Sea v un vértice en $N[u]$ tal que $d(v, w) = d(u, w) - 1$. Entonces, $v \notin A$ y v es adyacente a todos los vértices de A al ser u simplicial.

En caso contrario, los dos vértices simpliciales no están en A . Sea u cualquiera de los dos que sea distinto de w . El resultado se obtiene aplicando la hipótesis inductiva a $G - u$ ya que, al ser u simplicial, $d_{G-u}(v_i, w) = d_G(v_i, w)$ para cualquier valor de i .

Si G es dualmente cordal, descartemos el caso en que $d(v_i, w) = 1$ para todo i por ser éste trivial.

Sea T un árbol compatible con G . Veamos a T como árbol enraizado en w . Supongamos que no existe un vértice v con las características mencionadas. Entonces A es un clique de G e induce un subárbol en T , llamémoslo T' . Sea y el primer ancestro de T' , es decir, el vértice de T' más cercano (respecto a la distancia en T) a w y sea y' el ancestro inmediato de y en T .

Si $w = y'$ concluimos que $A \cup \{y'\}$ induce un completo, lo cual contradice la maximalidad de A .

Sea $v_j \in A$ y z un vértice adyacente a v_j en un camino de mínima longitud entre v_j y w . z no puede ser descendiente de ningún elemento de T' al ser d una disimilaridad arbórea. De esto se puede deducir que $y' \in T[z, v_j]$ y, como T es compatible con G , $v_j y' \in E(G)$. Por lo tanto $A \cup \{y'\}$ es un completo, contradiciendo nuevamente la maximalidad de A .

Luego, necesariamente, todos los vértices de A son adyacentes a otro vértice. ★

2.2.2. Los grafos dualmente cordales y el operador clique

El estudio del operador clique nos dará nuevas caracterizaciones de los grafos dualmente cordales y pondrá de manifiesto algunos hechos interesantes más.

Teorema 2.2.2.1: G es dualmente cordal si y sólo si G es Helly y $K(G)$ es cordal.

Demostración: La afirmación puede ser probada de modo bastante directo si aplicamos el Teorema 1.4.4 a $C(G)$. Ofrecemos de todos modos una demostración alternativa:

Podemos suponer que G es conexo pues, si no lo fuera, se puede trabajar de modo separado sobre cada componente conexa.

Si G es dualmente cordal, sea T un árbol compatible. Sabemos que los cliques de G inducen subárboles en T , es decir, $K(G)$ puede ser expresado como el grafo de intersección de subárboles de T , por lo que

$K(G)$ es cordal. A su vez, del Teorema 1.2.4 se deduce que G es Helly.

Recíprocamente, supongamos que G es Helly y que $K(G)$ es cordal. Sea G' como en el Teorema 1.3.1. Entonces G' también es Helly y satisface que $K(G')$ es cordal. Para probar esta última observación podemos tomar un ciclo C de longitud al menos cuatro en $K(G')$ y considerar dos posibilidades: si todos los vértices de C son cliques de G , entonces podrá encontrarse una cuerda al ser $K(G)$ cordal; si algunos de los vértices no son cliques de G tomemos uno con esa característica y los dos vértices adyacentes a él en el ciclo inducirán una cuerda. Consideremos un árbol T tal que $K(G')$ pueda representarse como grafo de intersección de subárboles de T . Es más, entre todos los posibles árboles que se podrían elegir, tomemos T de manera que su número de vértices sea el mínimo posible. Veamos entonces que existe una correspondencia entre $V(T)$ y los cliques de $K(G')$.

Sea $v \in V(T)$ y consideremos a todos los subárboles de T en la representación que tienen a v como vértice. La intersección de todos ellos da como resultado un subárbol T' . Si éste posee un vértice distinto de v , podemos tomar uno en particular, llamémoslo w , que sea adyacente a v . Se puede ver que fusionando a v con w en T se obtiene una nueva representación de $K(G')$, lo cual contradice la condición impuesta a T . Por lo tanto, la intersección de los conjuntos de vértices de los subárboles considerados coincide con $\{v\}$ y así, debido a la propiedad Helly, todos los subárboles que poseen a v como vértice representan un clique de $K(G')$, llamémoslo K_v . Recíprocamente, dado C clique de $K(G')$, como los subárboles que representan sus vértices satisfacen la propiedad Helly, la intersección de ellos posee un vértice $x \in V(T)$. O sea, $C \subseteq K_x$ y por ende $C = K_x$.

A su vez, sabemos por el Teorema 1.3.1 que existe una correspondencia entre los cliques de $K(G')$ y los vértices de G . Por consiguiente, existe una correspondencia entre $V(T)$ y $V(G)$. Más concretamente, a $v \in V(G)$ podemos hacerle corresponder $w \in V(T)$, de manera que $C_v = \{C \in K(G') : v \in C\} = K_w$.

Supongamos ahora que x e y son dos vértices adyacentes en T , con $C_u = K_x$ y $C_v = K_y$. Si G es conexo, $K(G')$ también lo será y, dada la construcción, se puede inferir que debe existir un subárbol de T en la representación de $K(G')$ que contenga entre sus vértices a x y a y . Esto es equivalente a que $K_x \cap K_y \neq \emptyset$ o, lo que es lo mismo, $C_u \cap C_v \neq \emptyset$. Así, existe un clique de G que contiene a u y a v entre sus vértices, o sea, u y v son adyacentes.

Gracias a esto, T induce un árbol generador en G , llamémoslo T' .

Supongamos que $u, v \in V(G)$ son adyacentes en G y sea $w \in T'[u, v]$. Si $C_u = K_x$ y $C_v = K_y$, existirá $z \in T[x, y]$ tal que $C_w = K_z$. Por consiguiente, $uv \in E(G)$ implica que $K_x \cap K_y \neq \emptyset$, lo cual nos permite encontrar un subárbol en la representación de $K(G')$ que contiene a x y a y . Este último también deberá tener a z . Así, $K_x \cap K_z \neq \emptyset$, $K_y \cap K_z \neq \emptyset$, desprendiéndose que $uw, vw \in E(G)$. T' cumple entonces con las condiciones para ser un árbol compatible con G y éste resulta así dualmente cordal. \diamond

Teorema 2.2.2.2: $K(\text{Cordales}) = \text{Dualmente cordales}$.

Demostración: Sea G un grafo cordal. Veamos que $K(G)$ es dualmente cordal. Para ello, elijamos una representación de G como grafo de intersección de subárboles de un árbol T en la que éste tenga el mínimo número de vértices posible, de modo que cada vértice de T se corresponderá con un clique de G . Entonces, para mayor comodidad, supondremos que los vértices de $K(G)$ son los de T y que estos son adyacentes si existe un subárbol de la representación que contenga a ambos. Veamos que T es un árbol compatible con $K(G)$.

Sean x e y adyacentes en $K(G)$ y $z \in T[x, y]$. Entonces existe un subárbol de la representación que contiene a x y a y , por lo que también contiene a z y así este vértice resulta ser adyacente a x y a y .

Recíprocamente, sea G dualmente cordal y T un árbol compatible. Definamos la familia de subárboles $\{T[u, v] : uv \in E(G)\} \cup V(G)$. Llamemos G' al grafo de intersección de esta familia. G' resulta obviamente cordal. Veamos que $K(G') = G$.

Se ve fácilmente que los cliques de G' se corresponden con los vértices de $V(G)$ (son los subárboles de la representación que poseen a un vértice determinado). Llamemos K_v al conjunto de subárboles de la

representación que cuentan con v como vértice. Veamos que $K_u \cap K_v \neq \emptyset \iff uv \in E(G)$.

Si $uv \in E(G)$, $T[u, v] \in K_u \cap K_v$. Recíprocamente, sea $T[w_1, w_2] \in K_u \cap K_v$. Como T es compatible los vértices de $T[w_1, w_2]$ inducen un completo en G . Como $u, v \in T[w_1, w_2]$, resulta que ambos son adyacentes. Luego $K(G') \approx G$. \diamond

Observación: Dada la construcción anterior, no sólo estamos demostrando que $K(\text{Cordales}) = \text{Dualmente cordales}$, sino que la misma identidad vale si los grafos cordales son reemplazados por una subclase más específica. Volveremos a tratar esta cuestión luego.

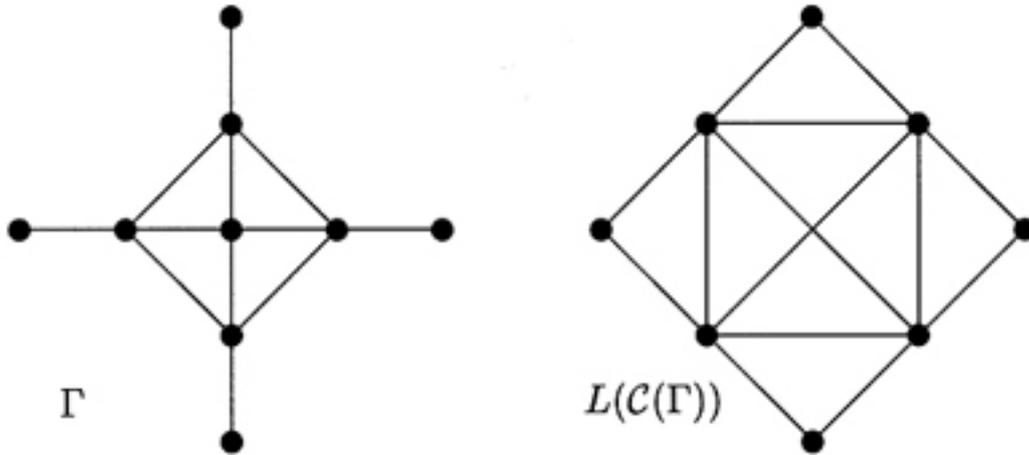


Figura 7: Todo grafo que no sea dualmente cordal no es un grafo clique o es el grafo clique de un grafo no cordal.

El anterior teorema sigue aún valiendo si reemplazamos a los grafos cordales por otra subclase de ellos:

Teorema 2.2.2.3 [7]: $K(\text{Helly} \cap \text{Cordales}) = \text{Dualmente cordales}$.

Demostración: Es suficiente demostrar que todo grafo dualmente cordal es el grafo clique de algún grafo H Helly cordal.

Definamos a H de manera que $V(H) = C(G) \cup V(G)$. Si $C, C' \in C(G)$, $C \neq C'$, entonces $CC' \in E(H)$ si y sólo si $C \cap C' \neq \emptyset$. Y si $v \in V(G)$ y $C \in C(G)$ entonces $vC \in E(H)$ si y sólo si $v \in C$.

Se verifica que $C(H) = (C(v) \cup \{v\})_{v \in V(G)}$ y H es un grafo Helly.

Veamos ahora que H es cordal. Sea $h_1 h_2 \dots h_r$ un ciclo de H con $r \geq 4$. Tenemos dos casos:

Caso 1: Cada h_i , $i = 1, \dots, r$, es un clique de G . Como G es dualmente cordal, $K(G)$ es cordal, por lo que será posible encontrar una cuerda.

Caso 2: Si algún h_i es un vértice de G , supongamos que $i > 1$ (si esto no es así simplemente cambiemos el orden del ciclo). Debido a la construcción de H sabemos que h_{i-1} y h_{i+1} resultan ser cliques de G y $h_i \in h_{i-1} \cap h_{i+1}$. Entonces $h_{i-1} h_{i+1}$ es una cuerda. \square

Podríamos quizás sospechar que vale la identidad $K(\text{Dualmente cordales}) = \text{Cordales}$. Sin embargo esto no es así. En su lugar tenemos:

Teorema 2.2.2.4 [7]: $K(\text{Dualmente cordales}) = \text{Helly} \cap \text{Cordales}$.

Demostración: Si G es dualmente cordal, entonces G es Helly, lo cual implica que $K(G)$ es Helly, y $K(G)$ es cordal.

Recíprocamente, si G es Helly y cordal, existe un grafo Helly H tal que $K(H)=G$. Además, como $K(H)$ es cordal, concluimos que H es dualmente cordal. \square

Vemos de todos modos que el operador clique alterna entre grafos cordales y dualmente cordales. Esto puede ser tomado como el primer indicio de la dualidad existente entre ambos tipos de grafos.

3. Los grafos dualmente cordales y sus relaciones con otras clases

3.1. Cordales versus dualmente cordales

En esta sección veremos qué condición necesita un grafo dualmente cordal para ser cordal. Sabemos que los grafos cordales admiten una caracterización por grafos prohibidos, es decir, un grafo es cordal si y sólo si no posee ciclos de longitud mayor o igual que cuatro como subgrafos inducidos.

Como ya vimos, los ciclos de longitud mayor o igual que cuatro no son cordales. Pero veremos que son subgrafos inducidos de ciertos grafos dualmente cordales que harán posible una caracterización por grafos prohibidos de aquellos grafos dualmente cordales que son también cordales.

Sea R_n un grafo que tiene un vértice central adyacente a cada vértice de un ciclo de longitud n . Por su forma, especialmente si n es grande, recuerda a una *rueda* por lo que ése es el nombre que suele dársele.

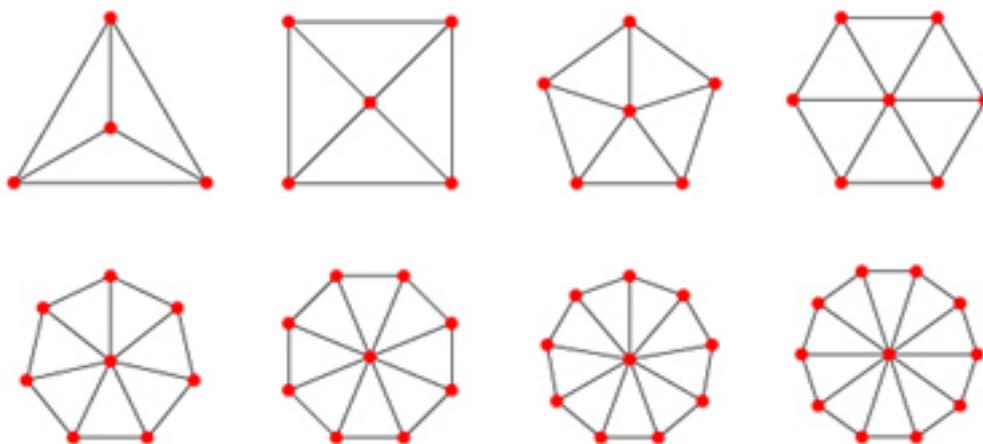


Figura 8: Las primeras ruedas.

Teorema 3.1.1 [7]: *Sea G un grafo. Si $K(G)$ es cordal entonces G es cordal si y sólo si ninguno de los R_n , $n \geq 4$, es un subgrafo inducido.*

Demostración: Como ninguno de los R_n , $n \geq 4$, es un grafo cordal, la condición es necesaria. Veamos que también es suficiente.

Podemos suponer que G no es un grafo cordal, por lo que poseerá un ciclo sin cuerdas C , con al menos cuatro vértices, como subgrafo inducido. Realicemos la demostración por inducción sobre el número de vértices de C .

Si $|C| = 4$, sea $C : x_1x_2x_3x_4x_1$. Como C no posee cuerdas, existen cuatro cliques distintos C_1, C_2 y C_3 tales que $x_i x_{i+1} \in C_i$; y C_4 tal que $x_4 x_1 \in C_4$.

Como $K(G)$ es cordal y $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ induce un ciclo en $K(G)$, entonces $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$ o $C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$.

Si $C_2 \cap C_4 \neq \emptyset$, Sea $z \in C_2 \cap C_4$. Como $x_2, x_3 \in C_2$, $zx_2, zx_3 \in E(G)$. De modo análogo se puede deducir que $zx_1, zx_4 \in E(G)$. Así, R_4 resulta ser un subgrafo inducido de G .

Supongamos ahora que cada ciclo C de G con $|C| < n$ posee una cuerda (hipótesis inductiva).

Si G tiene un ciclo sin cuerdas de n vértices, llamémoslo $x_1 \dots x_n x_1$, sean C_i , $i = 1, \dots, n$, cliques con características similares a las del caso $|C| = 4$. Como $K(G)$ es cordal, existe $z \in C_i \cap C_j$, con C_i y C_j no consecutivos. Tenemos dos casos posibles:

Caso 1: Si para cada k , $k = 1, \dots, n$, $zx_k \in E(G)$ entonces R_n es un subgrafo inducido de G .

Caso 2: Si existe k , $1 \leq k \leq n$, tal que $zx_k \notin E(G)$ existen al menos cuatro vértices de C adyacentes a z porque $z \in C_i \cap C_j$. Sean x_l y x_m los más cercanos a x_k . Por lo tanto $\{z, x_l, x_{l+1}, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m\}$ induce un ciclo sin cuerdas en G con un número de vértices menor que n , lo cual contradice la hipótesis inductiva. Por lo tanto, R_n es un subgrafo inducido de G . \square

Corolario 3.1.2: *Sea G un grafo dualmente cordal. Entonces G es cordal si y sólo si ninguno de los R_n , $n \geq 4$, es un subgrafo inducido.*

Demostración: Al ser G dualmente cordal se deduce que $K(G)$ es cordal, de modo que se puede aplicar el Teorema 3.1.1. \square

3.1.1. La dualidad entre los grafos cordales y dualmente cordales

Cuando definimos a los grafos dualmente cordales como aquellos que poseen un orden de máximas vecindades, esta idea parecía no corresponderse con el nombre. En esta sección, nuestro objetivo será lograr un acercamiento entre ambos que no dé más lugar a dudas. Antes de comenzar, necesitamos conocer lo que sigue acerca de los grafos cordales:

Teorema 3.1.1.1: *Un grafo G es cordal si y sólo si $C(G)$ es un hiperárbol dual.*

Demostración: Supongamos que G es cordal. Representemos a G como grafo de intersección de subárboles de un árbol T , de manera que T tenga el mínimo número de vértices posible. Como ya es sabido, cada vértice de T representa a un clique de G . De este modo, para cualquier $v \in V(G)$, $C(v)$ coincide con el subárbol que representa a v en T . Concluimos entonces que $C(G)$ es un hiperárbol dual.

Recíprocamente, si $C(G)$ es un hiperárbol dual, tomemos un árbol T con $C(G)$ como conjunto de vértices tales que, para todo $v \in V(G)$, $C(v)$ induce un subárbol de T . Como también vale que $uv \in E(G)$ si y sólo si $C(u) \cap C(v) \neq \emptyset$, la misma estructura que nos permite afirmar que $C(G)$ es hiperárbol dual nos permite representar a G como grafo de intersección de subárboles de un árbol, por lo que resulta ser cordal. \diamond

Usaremos los resultados anteriores para vislumbrar el significado de la dualidad existente entre grafos cordales y dualmente cordales.

En primer lugar, un grafo es cordal si y sólo si su hipergrafo de cliques es un hiperárbol dual, mientras que un grafo es dualmente cordal si y sólo si $C(G)$ es un hiperárbol. Esto nos da la primera señal clara de dualidad entre ambos tipos de grafos vía el operador clique. El siguiente resultado es aun más esclarecedor:

Teorema 3.1.1.2: *Sea G un grafo.*

- (i) *G es cordal si y sólo si es el grafo de líneas de algún hiperárbol si y sólo si es la dos sección de algún hipergrafo α -acíclico.*
- (ii) *G es dualmente cordal si y sólo si es el grafo de líneas de algún hipergrafo α -acíclico si y sólo si es la dos sección de algún hiperárbol si y sólo si es la dos sección de caminos de un árbol.*

Demostración:

(i) Combinando varios de los teoremas vistos en la sección de hipergrafos, se deduce que un grafo es el grafo de líneas de algún hiperárbol si y sólo si es la dos sección de algún hipergrafo α -acíclico. Veamos que cualquiera de estas dos condiciones es equivalente a que un grafo sea cordal.

Si G es cordal, es isomorfo al grafo de líneas de $\delta(C(G))$. Como este último es un hiperárbol, esto completa la demostración en un sentido.

Por otro lado, es sabido también que el grafo de líneas de un hiperárbol es cordal.

(ii) De modo similar a en (i), se puede deducir que el hecho de que G sea el grafo de líneas de algún hipergrafo α -acíclico es equivalente a ser la dos sección de algún hiperárbol. Supongamos ahora que un grafo es la dos sección de subárboles de un árbol T . Podemos reemplazar a cada subárbol por todos los caminos en él, manteniéndose la dos sección igual. Por lo tanto, un grafo G es la dos sección de algún hiperárbol si y sólo si es la dos sección de caminos de un árbol.

Por lo tanto, resta ver que cualquiera de las tres condiciones mencionadas equivale a que G sea dualmente cordal.

Si G es dualmente cordal, es isomorfo a la dos sección de $C(G)$, que es un hiperárbol.

Ahora supongamos que G es la dos sección de algún hiperárbol \mathcal{E} con un árbol T que lo representa. Consideremos una vecindad $N[v]$ en G . Como $N[v]$ es la unión de subárboles que contienen a v , $N[v]$ es un subárbol de T , es decir, $N(G)$ es un hiperárbol. Por lo tanto G es dualmente cordal. \diamond

Para reforzar las ideas del teorema anterior, basta notar que las caracterizaciones de grafos cordales y dualmente cordales son casi idénticas en ciertos pasajes, siendo la diferencia que en unas aparece un tipo determinado de hipergrafo y en las otras aparece exactamente su versión dual.

3.2. Grafos fuertemente cordales

La clase de grafos dualmente cordales resulta ser no hereditaria. De hecho, cualquier grafo que no sea dualmente cordal puede llegar a serlo agregando un nuevo vértice y haciendo a éste universal.

Estudiaremos ahora qué características distinguen a los grafos dualmente cordales que sean hereditarios.

Para empezar, podremos decir que un grafo así deberá ser cordal ya que los ciclos de tamaño mayor o igual que cuatro no son dualmente cordales.

Veremos que no sólo son cordales en el sentido común, sino en un sentido más fuerte, lo cual hará aparecer en esta discusión el concepto de grafos *fuertemente cordales*.

Sea E_n , $n \geq 3$, un grafo con $2n$ vértices que pueden ser separados en dos conjuntos $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que U induce un completo, W es un conjunto independiente y u_i es adyacente a w_j si y sólo si $i = j$ o $i \equiv j + 1 \pmod{n}$.

Dada la forma en que estos grafos pueden ser graficados, suelen llamarse n -soles.

Veamos ahora el rol que estos desempeñan:

Lema 3.2.1 [7]: *Si G es cordal y E_3 no es un subgrafo inducido entonces G es un grafo Helly.*

Demostración: Sea C_1, C_2, \dots, C_n una familia de cliques de G tal que para todo par i, j , $1 \leq i, j \leq n$, $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Usaremos inducción para verificar que $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$.

Si $n = 2$, no hay nada que demostrar. Supongamos ahora que la propiedad es válida cuando se considera un conjunto de $n - 1$ cliques (hipótesis inductiva).

Supongamos ahora, por el contrario, que $\bigcap_{i=1}^n C_i = \emptyset$. Por hipótesis inductiva existen tres vértices diferentes x_1, x_2, x_3 tales que $x_1 \in C_2 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$, $x_2 \in C_1 \cap C_3 \cap \dots \cap C_n$ y $x_3 \in C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap \dots \cap C_n$ (si algunos de ellos coincidieran la intersección de todos los C_i sería no vacía).

Como $x_1, x_2 \in C_3$, $x_2, x_3 \in C_1$ y $x_1, x_3 \in C_2$ se deduce que $\{x_1, x_2, x_3\}$ es un completo de G . Además, $x_i \notin C_i$, $i = 1, 2, 3$, por lo que existe $z_i \in C_i$ tal que $z_i x_i \notin E(G)$.

Vale también que para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$, $z_i z_j \notin E(G)$, o de lo contrario $\{z_i, z_j, x_i, x_j\}$ induciría un ciclo sin cuerdas en G , contradiciendo el hecho de que G sea cordal.

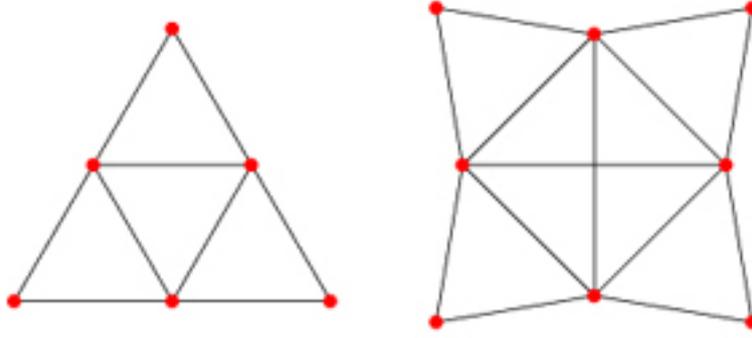


Figura 9: E_3 y E_4 .

Por consiguiente, el conjunto $\{z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3\}$ induce a E_3 , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$. \square

Lema 3.2.2 [7]: Si G es cordal y C y K son dos cliques diferentes de G , entonces existe un vértice $z \in C$ tal que, para todo $k \in K - C$, $kz \notin E(G)$.

Demostración: Sea $K - C = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Procederemos por inducción sobre n .

El caso $n = 1$ es trivial, pues $K \not\subseteq C$ y entonces existe $z \in C$ tal que $zk_1 \notin E(G)$.

Supongamos ahora que la propiedad es verdadera para $n - 1$ vértices de $K - C$.

Así, la hipótesis inductiva implica que existe $z \in C$ tal que $zk_i \notin E(G)$ para todo i entre 1 y $n - 1$.

Si $zk_n \in E(G)$, como $k_n \notin C$, existe entonces $z' \in C$ tal que $z'k_n \notin E(G)$. Si z' es adyacente a k_i , $i < n$, entonces $\{z', z, k_n, k_i\}$ induce un ciclo sin cuerdas en G , lo cual contradice el hecho de que G sea cordal.

Tenemos así dos posibilidades: $zk_n \notin E(G)$ y z es el elemento buscado o, para cada $1 \leq i \leq n$, $z'k_i \notin E(G)$ y z' es el elemento buscado. \square

Lema 3.2.3 [7]: Si G es cordal y ninguno de los E_n , $n \geq 3$, es un subgrafo inducido de G entonces $K(G)$ es cordal.

Demostración: Sea $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ un conjunto de cliques de G que induce un ciclo L en $K(G)$. Entonces existen vértices x_1, x_2, \dots, x_n tales que $x_1 \in C_1 \cap C_2$, $x_2 \in C_2 \cap C_3, \dots$, y $x_n \in C_n \cap C_1$.

Supongamos que L no tiene cuerdas. Por lo tanto x_i está solamente en C_i y C_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$, y x_n está solamente en los cliques C_1 y C_n . Se puede deducir consecuentemente que los x_i inducen un ciclo de G . Como G es cordal, existirá una cuerda y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1x_3 \in E(G)$. Sea C un clique tal que $x_1, x_3 \in C$. Como supusimos que L no tiene cuerdas, C debe ser diferente de los C_i . Además, es adyacente a C_1, C_2, C_3 y C_4 en $K(G)$.

A partir de ahora procedamos de modo inductivo.

Si $n = 4$, el grafo cuyos vértices son C_1, C_2, C_3, C_4 y C , induciendo los cuatro primeros un ciclo sin cuerdas y siendo C universal es un subgrafo inducido de $K(G)$. Sabemos por el Lema 3.2.1 que $C(G)$ posee la propiedad Helly, por lo que existen vértices $h_1, h_2, h_3, h_4 \in V(G)$ tales que $h_1 \in C_1 \cap C_2 \cap C$, $h_2 \in C_2 \cap C_3 \cap C$, $h_3 \in C_3 \cap C_4 \cap C$ y $h_4 \in C_4 \cap C_1 \cap C$. Al estar todos ellos en C , $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ induce un subgrafo completo.

Como L no tiene cuerdas, $h_2, h_3 \in C - C_1$, por lo que el lema anterior implica que existe $z_1 \in C_1$ tal que $z_1 h_2 \notin E(G)$ y $z_1 h_3 \notin E(G)$. Análogamente, podemos encontrar vértices z_2, z_3 y z_4 con similares características. Si $z_i z_j \in E(G)$ con $1 \leq i, j \leq 4$ entonces $\{z_i, z_j, h_i, h_j\}$ induce un ciclo sin cuerdas en G , lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\{h_1, h_2, h_3, h_4, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ induce a E_4 , lo cual es una contradicción. Luego todo ciclo en $K(G)$ con cuatro vértices posee una cuerda.

Supongamos ahora que todo ciclo en $K(G)$ con menos de n vértices tiene una cuerda. Veamos ahora que lo mismo se puede decir para ciclos con n vértices.

Como antes, si L es un ciclo sin cuerdas en $K(G)$ existe un clique C de G adyacente a C_1, C_2, C_3 y C_4 en $K(G)$. Entonces $\{C, C_4, C_5, \dots, C_{n-1}, C_n, C_1\}$ induce un ciclo en $K(G)$ con menos de n vértices y por hipótesis inductiva posee una cuerda. Como supusimos que no hay ninguna cuerda en L , debe ocurrir necesariamente que $C \cap C_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$. Como $C(G)$ tiene la propiedad Helly existen n vértices h_1, h_2, \dots, h_n tales que, para todo i entre 1 y $n - 1$, $h_i \in C_i \cap C_{i-1} \cap C$ y además $h_n \in C_1 \cap C_n \cap C$.

Entonces $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ está contenido en C e induce un grafo completo.

Sea $1 \leq i \leq n - 1$. Como $C \neq C_i$ y $\{h_j : j \neq i, j \neq i - 1\} \subseteq C - C_i$, por el Lema 3.2.2 es posible encontrar $z_i \in C_i$ tal que $z_i h_j \notin E(G)$ para todo $j \neq i$ y $j \neq i - 1$. Análogamente podemos encontrar $z_n \in C_n$ satisfaciendo condiciones similares.

Como en el caso $n = 4$ es posible verificar que $z_i z_j \notin E(G)$ para todo $i \neq j$.

Por lo tanto $\{h_1, \dots, h_n, z_1, \dots, z_n\}$ induce al subgrafo E_n en G , lo cual es absurdo. Concluimos así que L debe tener una cuerda y que $K(G)$ es cordal. \square

Corolario 3.2.4: *Si un grafo G es cordal y sin soles como subgrafos inducidos entonces es dualmente cordal.*

Definición: Un grafo G se dice *fuertemente cordal* si es cordal y, dado cualquier ciclo en G de tamaño mayor o igual que seis, existe una cuerda entre vértices a distancia impar en el ciclo.

Una cuerda como la mencionada en la definición es llamada *cuerda fuerte* del ciclo.

A partir de todo lo visto, estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 3.2.5: *Para un grafo G , son equivalentes:*

- (1) G es fuertemente cordal.
- (2) G es cordal y libre de soles.
- (3) G es un grafo dualmente cordal hereditario, es decir, cualquier subgrafo inducido de G es dualmente cordal.

Demostración:

(1) \implies (2): Es evidente.

(2) \implies (3): Sabemos que todo grafo cordal libre de soles es dualmente cordal. Como todo subgrafo inducido será también cordal y libre de soles, se concluye que G es dualmente cordal hereditario.

(3) \implies (1): Sea C un ciclo de longitud mayor o igual que 6. Entonces sus vértices inducen un grafo dualmente cordal y podemos tomar un vértice v con máximo vecino w . Tenemos varias posibilidades:

- * Si $w = v$, w es adyacente en G a todos los vértices de C y, en particular, a uno a distancia tres.
- * Si w es adyacente a v en C resultará adyacente en G a el vértice a distancia dos de v (con respecto al ciclo) no adyacente a w en C .

- * Si w está a distancia dos de v (en C) será adyacente en G al vértice que es adyacente a v pero no a w en C .
- * Si la distancia es mayor o igual que tres e impar, vw es una cuerda con la característica buscada.
- * Si la distancia es mayor o igual que tres y par consideremos el camino $vv_1\dots w$ de mínima longitud en el ciclo y v_1w es la cuerda buscada.

En cualquiera de los casos pudimos obtener cuerdas entre vértices a distancia impar en el ciclo. \diamond

Las caracterizaciones de grafos fuertemente cordales que hemos visto no son las únicas.

Un vértice v de un grafo G es *simple* si el conjunto $\{N[u] : u \in N[v]\}$ está totalmente ordenado por la inclusión. Un orden lineal $(v_1\dots v_n)$ de V es un *orden de eliminación simple* si, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i es simple en G_i .

Es posible demostrar que un grafo es fuertemente cordal si y sólo si admite un orden de eliminación simple [6, 11].

3.3. Potencias de grafos

Definición: La k -ésima potencia G^k ($k \geq 1$) de un grafo G tiene los mismos vértices que este último, siendo dos vértices adyacentes en G^k cuando la distancia que los separa en G es a lo sumo k .

Observación 1: Es muy importante notar que, para todo valor natural de k , $G^{2k} \approx L(N^k(G))$. De hecho, si los discos de radio k centrados en dos vértices distintos se intersecan no es difícil deducir que estos últimos están a distancia menor o igual que $2k$, valiendo también la recíproca.

Comenzaremos esta sección con una propiedad simple acerca del cuadrado de un grafo:

Teorema 3.3.1: *Sea T un árbol tal que $n = |V(T)| \geq 3$. Entonces T^2 tiene al menos $2n - 3$ aristas. Esta propiedad valdrá también para cualquier grafo conexo.*

Demostración: Realicemos la demostración por inducción sobre n .

Es trivial si $n = 3$ pues en ese caso $T^2 = K_3$, que tiene $2 \cdot 3 - 3 = 3$ aristas.

Supongamos ahora que la propiedad vale para $n = k$ y consideremos a T con $k + 1$ vértices.

Sea v una hoja de T . Entonces $T - v$ es un grafo conexo de k vértices y, por hipótesis inductiva, $(T - v)^2$ posee al menos $2k - 3$ aristas. Ahora, v está a distancia menor o igual que dos en T de al menos dos vértices por lo que

$$|E(T^2)| \geq 2k - 3 + 2 = 2(k + 1) - 3$$

Para cualquier otro grafo conexo bastará considerar un árbol generador. \star

Observación 2: El mínimo de $2n - 3$ aristas siempre es alcanzado y corresponde al cuadrado de un camino de longitud n . De hecho, si $n = 3$, el cuadrado será igual a K_3 . Si $n = 4$, al calcular el cuadrado resultará que dos vértices tendrán grado dos y dos vértices tendrán grado tres. Por lo tanto, el número de aristas es cinco.

Finalmente, si $n \geq 5$, habrá dos vértices de grado dos, dos vértices de grado tres y $n - 4$ vértices de grado cuatro, arrojando el número de

$$\frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot (n - 4)}{2} = 2 + 3 + 2 \cdot (n - 4) = 2n - 3$$

aristas.

Observación 3: Es corolario inmediato que, para $n \geq 3$, ningún árbol es el cuadrado de un grafo. De hecho $2n - 3 > n - 1$ para todo n mayor o igual que 3.

También contamos con los siguientes resultados, estrechamente vinculados a los grafos cordales:

Lema 3.3.2: *Si v es un vértice simplicial de un grafo G , entonces $(G - v)^2 = G^2 - v$.*

Demostración: Es obvio que $(G - v)^2$ es un subgrafo de $G^2 - v$. Consideremos ahora dos vértices x e y adyacentes en $G^2 - v$. Entonces la distancia entre x e y es a lo sumo dos en G . Si hay un camino de longitud a lo sumo dos que una a x e y sin pasar por v se tendrá automáticamente que x e y también son adyacentes en $(G - v)^2$. Y lo anterior siempre es posible, pues aun si xvy es un camino en el grafo, x e y son adyacentes en G al ser v simplicial. De esto resulta la igualdad. \diamond

Teorema 3.3.3: *Si G es el cuadrado de un grafo y v es un vértice simplicial de G entonces $G - v$ también es el cuadrado de un grafo.*

Demostración: Supongamos que $G = H^2$. Consideremos al grafo $H - v$. Si $(H - v)^2 = G - v$, no hay nada más que demostrar.

Si no, observemos que las aristas de $(H - v)^2$ son aristas de $G - v$ y modifiquemos a $H - v$ agregándole toda arista presente en $G - v$ pero no en $(H - v)^2$. Llamemos H' al grafo así obtenido. Veamos que $H'^2 = G - v$. Debido a los cambios que hemos hecho sabemos que $E(G - v) \subseteq E(H'^2)$.

Supongamos que la inclusión recíproca no se verifica y sea $xy \in E(H'^2) - E(G - v)$. xy no puede ser una arista de H' , pues toda arista de H' también lo es de $G - v$.

Así, $d_{H'}(x, y) = 2$ y sea xzy un camino de mínima longitud que conecta a x y y en H' .

Si tanto xz como zy estuvieran en $H - v$, xy sería un elemento de $E((H - v)^2) \subset E(G - v)$, lo cual es una contradicción. Se deduce así que xz o zy es un elemento de $E(H') - E(H - v)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que lo anterior vale para xz . Esto significa que xz es una arista de $G - v$ pero no de $(H - v)^2$. Como sabemos que $d_H(x, z) \leq 2$, de lo anterior se deduce que la distancia es precisamente dos y que un camino de mínima longitud entre x y z en H es xvz .

Por un lado, si $zy \notin E(H)$, como antes se puede concluir que zvy es un camino en H , de modo que xvy es un camino en H , es decir, $xy \in E(H^2 - v)$, o sea, $xy \in G - v$, lo cual es absurdo.

Por otro lado, si $zy \in E(H)$, $d_H(v, y) \leq 2$. Pero también $d_H(v, x) \leq 2$. Como v es vértice simplicial de $G = H^2$, vale que $d_H(x, y) \leq 2$. Por lo tanto, nuevamente se obtiene que $xy \in E(G - v)$, otro absurdo.

En ambos casos, el absurdo provino de de suponer que $xy \in E(H'^2) - E(G - v)$, así que vale que $xy \in E(G - v)$ y por ende $G - v = H'^2$. \star

3.3.1. Grafos de potencias cordales

Definición: Un grafo G es de *potencias cordales* ⁶ si, como lo indica el nombre, todas sus potencias son cordales.

Antes de dar una caracterización de este tipo de grafos, veamos los siguientes lemas:

Lema 3.3.1.1 [2]: *Para un grafo cordal G las siguientes condiciones son equivalentes:*

⁶ En inglés se los llama *power chordal*.

(1) G^2 es cordal.

(2) $L(C(G))$ es cordal.

Demostración:

(2) \implies (1): Consecuencia del Teorema 1.4.6.

(1) \implies (2): Supongamos que existe un ciclo inducido $L : C_1 \dots C_m C_1$, $m \geq 4$, del grafo $L(C(G))$. Sea $C = \bigcup_{i=1}^m C_i$. $G^2(C)$, como subgrafo inducido de G^2 , posee un vértice simplicial x . Supongamos que $x \in C_1$. Esto significa que $C_2, C_m \subseteq N^2[x]$. Debido al hecho de que x es simplicial en G^2 , para vértices arbitrarios $u \in C_2$ y $v \in C_m$ tenemos que $d(u, v) \leq 2$. Sea $C_2 = \{x_1, \dots, x_s\}$ y $C_m = \{y_1, \dots, y_t\}$. Veamos que cualquier vértice de C_2 tiene en G un vecino en C_m y viceversa. Supongamos, por el contrario, que esto no es cierto para x_1 . Entonces

$$d(x_1, y_1) = d(x_1, y_2) = \dots = d(x_1, y_t) = 2$$

Como G es cordal existe un vecino común de los vértices y_1, \dots, y_t por la Proposición 2.2.1.4. Sin embargo, esto contradice el hecho de que C_m sea un clique de G . Por lo tanto, la afirmación previa es válida.

En el clique C_2 elijamos un vértice x_i que sea adyacente a un número máximo de vértices de C_m . Supongamos que x_i es adyacente a y_1, \dots, y_{l-1} . Notemos que $l \leq t$, de lo contrario se concluiría que $x_i \in C_m$ pero $C_2 \cap C_m \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por la afirmación del párrafo anterior concluimos que y_l es adyacente a algún vértice x_j en C_2 . La única cuerda posible del ciclo $x_i y_k y_l x_j x_i$, $k \in \{1, \dots, l-1\}$, es $x_j y_k$. Por lo tanto x_j es adyacente a y_1, \dots, y_{l-1}, y_l , lo cual no concuerda con la descripción de x_i . De esta manera la suposición inicial de que L es un ciclo inducido de $L(C(G))$ conduce a una contradicción. \square

Ejemplo: Combinar los Lemas 3.2.3 y 3.3.1.1 nos sugiere a un k -sol, $k \geq 4$, como contraejemplo de que si un grafo es cordal entonces su cuadrado también lo es. De hecho, no es difícil verificar que los vértices de grado dos inducen un ciclo en el cuadrado.

Lema 3.3.1.2 [2]: Sea G un grafo no completo. Si tanto G como G^2 son cordales, entonces existen dos vértices no adyacentes de G que son simpliciales en G y G^2 .

Demostración: La afirmación anterior es obviamente cierta cuando G^2 es completo, ya que cualquiera de sus vértices es simplicial y sólo basta encontrar dos vértices simpliciales no adyacentes de G . Por lo tanto, supongamos que G^2 es no completo y que la afirmación resulta ser cierta para todos los grafos menores que él. Como G^2 es cordal existen dos vértices simpliciales no adyacentes en G^2 . Si estos vértices también son simpliciales en G ya no habría nada que probar. Para cubrir el caso negativo, supongamos que el vértice x simplicial de G^2 tiene dos vecinos u y v no adyacentes en G . Consideremos un separador minimal F de u y v en G . Como G es cordal, F induce un subgrafo completo. Evidentemente x es un elemento de F (debido a la existencia del camino uxv). Sean $G(A)$ y $G(B)$ las componentes conexas de $G(V(G) \setminus F)$ que contienen a u y a v respectivamente.

Llamemos G_1 a $G(A \cup F)$. Entonces G_1 es cordal al ser subgrafo inducido de un cordal y, bajo las condiciones actuales, se puede verificar que $G_1^2 = G^2(A \cup F)$, por lo que podemos concluir por motivos similares que G_1^2 es también cordal. Podemos entonces aplicar la hipótesis inductiva para afirmar que G_1 es completo o que si no contiene un par de vértices simpliciales en G_1 y G_1^2 no adyacentes. En el último caso uno de los vértices debe estar en A (no pueden estar ambos en F , al inducir este conjunto un completo). En el primer caso cualquier vértice de A es simplicial en $G_1 = G_1^2$.

Concluimos así que A contiene un vértice y que es simplicial en G_1 y G_1^2 . Dada la construcción, y también es un vértice simplicial de G , ya que sólo puede ser adyacente a vértices de $A \cup F$. Veamos que y es también simplicial en G^2 . Es suficiente considerar el caso en el cual y es adyacente en G con un vértice de F (si no fuera así, y sólo puede estar a una distancia menor o igual que dos en G de elementos de $A \cup F$). Para

cualquier vértice $w \notin A \cup F$ tenemos que $d(w, x) \leq 2$ si $d(w, y) \leq 2$, pues esto último implica que w es adyacente a un elemento de F y a su vez cualquier vértice de F es adyacente a x . Ahora, si $u \in A \cup F$ y $d(u, y) \leq 2$, como también $d(x, y) \leq 2$ e y es simplicial en G^2 , podemos concluir que $d(u, x) \leq 2$. Entonces, si dos vértices u y v cualesquiera están a distancia menor o igual que 2 de y , también ocurrirá lo mismo reemplazando a y por x . Además, como x es simplicial en G^2 , esto implica que $d(u, v) \leq 2$, de manera que y también es simplicial en G^2 .

De modo análogo, podríamos obtener un vértice $z \in B$ simplicial en G y G^2 , el cual es lógicamente no adyacente a y . \square

Lema 3.3.1.3: *Si G es cordal, G^3 también es cordal.*

Demostración: Tomemos un árbol T tal que G pueda ser representado como grafo de intersección de una familia de subárboles de T . Sean u y v dos vértices de G , y sean T_u y T_v los subárboles que se obtienen al unir todos los subárboles correspondientes a los vértices de $N_G[u]$ y $N_G[v]$ respectivamente. No es difícil verificar que u es adyacente a v en G^3 si y sólo si $T_u \cap T_v \neq \emptyset$. Por lo tanto, G^3 también puede ser expresado como un grafo de intersección de una familia de subárboles de T y es por ende cordal. \diamond

Observación: Usando las mismas técnicas que en el lema previo se puede demostrar que si G es cordal también lo será cualquier potencia impar suya.

Lema 3.3.1.4: *Si G^2 es cordal, entonces todas las potencias pares de G también son cordales.*

Demostración: G^2 es isomorfo a $L(N(G))$, así que este último es cordal. Por ende, $L(D(G))$ es cordal (Teorema 1.4.6) y también lo será cualquier subgrafo inducido suyo. En particular resultará cordal el subgrafo inducido por las vecindades de radio r fijo, con $r \geq 1$. Pero éste es isomorfo a G^{2r} de modo que podemos concluir que cualquier potencia par de un grafo con cuadrado cordal es cordal. \diamond

Teorema 3.3.1.5 [2]: *Para un grafo G las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) G es de potencias cordales.
- (ii) G y G^2 son cordales.
- (iii) Existe un orden de eliminación perfecto común para G y G^2 .

Demostración:

(i) \implies (ii): Evidente por definición.

(ii) \implies (i): Lemas 3.3.1.3 y 3.3.1.4.

(iii) \implies (ii): Es evidente.

(ii) \implies (iii): Demostrémoslo por inducción sobre el número de vértices. Por Lema 3.3.1.2 sabemos que existe un vértice v que es simplicial en G y G^2 . Como $(G - v)^2 = G^2 - v$, esta igualdad nos permite concluir que tanto $G - v$ como $(G - v)^2$ son cordales. Aplicando la hipótesis inductiva podremos completar un orden de eliminación perfecto común a G y G^2 . \square

El hecho de que tanto G como G^2 sean cordales en principio nos permite encontrar un orden de eliminación perfecto por separado para cada uno de esos grafos. Lo interesante de este teorema es que se puede obtener uno que sirva simultáneamente para ambos. También es notable que el hecho de que las dos primeras potencias de un grafo sean cordales implique que también lo serán las restantes.

3.3.2. Potencias de grafos dualmente cordales

A continuación se estudiarán propiedades de las potencias de grafos dualmente cordales.

Teorema 3.3.2.1: *Cualquier potencia de un grafo dualmente cordal es dualmente cordal.*

Demostración: Sea G un grafo dualmente cordal, y sea G^k alguna potencia suya. Tomemos un árbol T generador de G tal que cualquier disco de G induzca un subárbol. Un disco unitario de G^k con centro en v coincide con el disco $N^k[v]$ de G , el cual induce un subárbol en T . \diamond

Teorema 3.3.2.2: *Si G es dualmente cordal entonces G^2 es cordal.*

Demostración: Sea (v_1, v_2, \dots, v_n) un orden de máximas vecindades de G . Entonces, el hecho de que v_1 tenga un máximo vecino en G implica que v_1 es simplicial en G^2 . Repitiendo estos pasos, se verifica que (v_1, v_2, \dots, v_n) es un orden de eliminación perfecto de G^2 . \diamond

Observación: La propiedad anterior no implica que cualquier grafo cordal que es un cuadrado pueda expresarse como cuadrado de un grafo dualmente cordal. Un ejemplo de ello es el grafo de la figura 10, que se puede expresar de manera única como cuadrado de un grafo que no es dualmente cordal. Para verificarlo es útil tener en cuenta, en un contexto general, que si $J^2 = G$, $u, v, w \in V(G)$, $uv, vw \in E(G)$ y $uw \notin E(G)$ entonces $uv \notin E(J)$ o $vw \notin E(J)$.

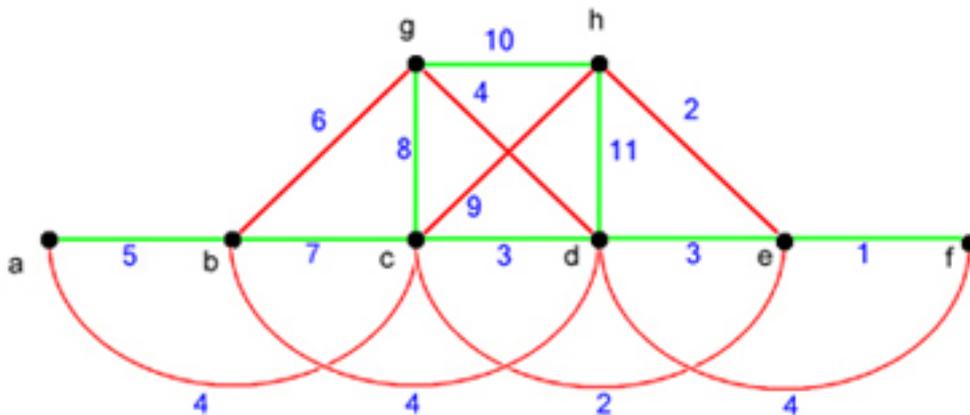


Figura 10: Un grafo G cordal que es un cuadrado pero no de un grafo dualmente cordal. Para verificarlo, supongamos que existe J tal que $J^2 = G$. Veremos qué aristas de G debemos remover (rojo) y cuáles debemos dejar (verde) para poner a J de manifiesto. ef debe ser una arista de J . Pues si no $df \in E(J)$ y esto implicaría que $cd, bd, dg, dh \notin E(J)$, eliminando todo camino entre d y g de longitud menor o igual que dos (1). $ec, eh \notin E(J)$, de lo contrario $cf, fh \in E(G)$ (2). $cd, de \in E(J)$ para asegurar un camino de longitud menor o igual que dos entre c y e , que son adyacentes en G (3). $ac, bd, df, dg \notin E(J)$, de lo contrario $ad, be, cf, eg \in E(G)$ (4). $ab \in E(J)$, pues a no puede ser vértice aislado (5). $bg \notin E(J)$, de lo contrario $ag \in E(G)$ (6). $bc \in E(J)$ para asegurar un camino de longitud dos entre a y c (7). $cg \in E(J)$ para asegurar un camino de longitud dos entre b y g (8). $ch \notin E(J)$, de lo contrario $bh \in E(G)$ (9). $gh \in E(J)$ para asegurar un camino de longitud menor o igual que dos entre g y h (10). $dh \in E(J)$ para asegurar un camino de longitud menor o igual que dos entre d y h (11).

Todo grafo dualmente cordal posee un orden de máximas vecindades. Esto dará lugar a una forma equivalente de decir que un grafo es cuadrado de otro que es dualmente cordal:

Teorema 3.3.2.3: *Sea G un grafo conexo y cordal con más de un vértice. Entonces G es el cuadrado de un grafo dualmente cordal si y sólo si existen dos vértices v y w satisfaciendo que v es simplicial de G , $G - v = G'^2$, con G' dualmente cordal, y $(G' + vw)^2 = G$.*

Demostración: Supongamos que $G = H^2$, con H dualmente cordal. Sea (v_1, \dots, v_n) un orden de máximas vecindades de H . Sabemos que v_1 es simplicial en $H^2 = G$.

Sea v_i el máximo vecino de v_1 . Si $v_i = v_1$, v_1 es un vértice universal de H , por lo que G es completo. Así, $G - v_1$ es también completo y $G - v_1 = (G - v_1)^2$. Haciendo a v_1 adyacente a cualquier vértice de $G - v_1$ obtenemos un grafo cuyo cuadrado es G .

Si $v_1 \neq v_i$, $H - v_1$ es dualmente cordal. Veamos que $(H - v_1)^2 = H^2 - v_1$.

Es evidente que $E((H - v_1)^2) \subseteq E(H^2 - v_1)$.

Sea $uv \in E(H^2 - v_1)$. Consideremos un camino de distancia menor o igual que dos en H entre u y v .

Si v_1 no aparece en ese camino, uv también es una arista de $(H - v_1)^2$. Y si el camino es uv_1v , tanto u como v son adyacentes (o iguales) a v_i , por lo que $uv \in E(H - v_1)^2$.

A su vez, si a $H - v_1$ le agregamos el vértice v_1 y lo hacemos adyacente a v_i obtenemos un grafo H' , cuyo cuadrado no es difícil verificar que equivale a G .

Recíprocamente, si G' es dualmente cordal, con orden de máximas vecindades (v_1, \dots, v_n) , y le agregamos un vértice v el cual hacemos adyacente a $w \in V(G')$, resulta un grafo con orden de máximas vecindades (vv_1, \dots, v_n) . Así el grafo $G' + vw$ mencionado en la hipótesis es dualmente cordal. ★

Observación: Aplicando este teorema de manera reiterada se concluye que G es el cuadrado de un grafo dualmente cordal si y sólo si existe un orden de eliminación perfecto de G (v_1, \dots, v_n) tal que $G_i = H_i^2$, con H_i dualmente cordal, y existe un vértice v_j , $i \leq j \leq n$ tal que $(H_i + v_{i-1}v_j)^2 = G_{i-1}$, $2 \leq i \leq n$.

Generalmente, si un grafo G puede ser expresado como un cuadrado, suele haber más de una manera de hacerlo. Por ejemplo, sea H dualmente cordal tal que $G = H^2$. Podemos intentar obtener un grafo con menor número de aristas que las de H cuyo cuadrado siga siendo G de la siguiente manera:

Tomemos (v_1, \dots, v_n) orden de máximas vecindades de H . Sea w_1 un máximo vecino de v_1 . Procedamos a remover de H todas las aristas entre v_1 y cualquier otro vértice distinto de w_1 . Luego repetimos el mismo procedimiento en H_2 , pero haciendo la salvedad de que no se podrán remover las aristas que incidan en w_1 .

Si seguimos así, cada paso se haría de la siguiente forma: Sea w_i un máximo vecino de v_i . Remover de H_i todas las aristas entre v_i y cualquier otro vértice distinto de w_i a excepción de aquellas que incidan sobre algún elemento de $\{w_1, w_2, \dots, w_{i-1}\}$.

Una vez terminado el proceso, se puede verificar que se obtiene un grafo dualmente cordal, siendo (v_1, \dots, v_n) aún un orden de máximas vecindades.

3.4. Grafos doblemente cordales

En esta sección intentaremos ver qué rasgos distinguen a un grafo que es tanto cordal como dualmente cordal. Sabemos que en ese caso podremos encontrar un orden de eliminación perfecto y un orden de máximas vecindades, no necesariamente coincidentes. Sin embargo, resulta interesante que siempre se puede hallar la manera para que los órdenes mencionados resulten ser iguales. Demostrarlo será uno de los objetivos.

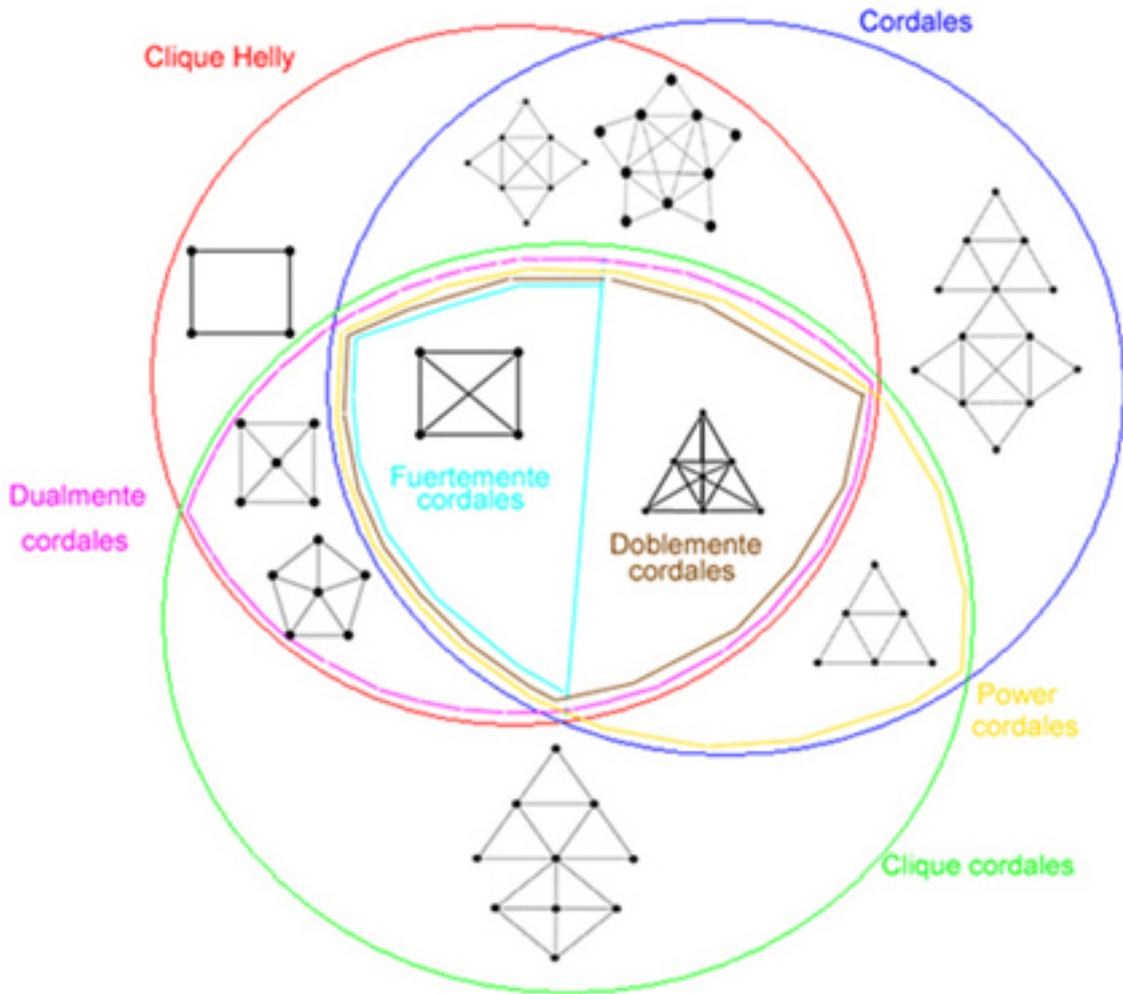


Figura 11: Este esquema muestra las relaciones entre clases de grafos hasta ahora vistas.

Entre otras cosas, nos beneficiaremos de las relaciones entre cordalidad y potencias de grafos que ya nos son conocidas.

Definiciones: Un vértice v de un grafo G es *doblemente simplicial* si v es simplicial y tiene un máximo vecino. Un orden lineal $(v_1 \dots v_n)$ de los vértices de G es *doblemente perfecto* si, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i es doblemente simplicial en G_i . Un grafo G es *doblemente cordal* si admite un orden doblemente perfecto.

Teorema 3.4.1 [2]: Para un grafo G las siguientes condiciones son equivalentes.

- (i) G es doblemente cordal.
- (ii) G es cordal y dualmente cordal.
- (iii) Tanto $C(G)$ como $\delta(C(G))$ son hiperárboles.

Demostración:

(i) \implies (ii): Evidente.

(ii) \implies (i): Como G y G^2 son cordales (Teorema 3.3.2.2), existe un vértice v simplicial en G y G^2 . Para cualquier par de vértices $x, y \in N^2[v]$ vale la desigualdad $d(x, y) \leq 2$, al ser v simplicial en G^2 , de modo que $N[x] \cap N[y] \neq \emptyset$. Como $N(G)$ es un hiperárbol la familia de discos (con intersección dos a dos no vacía) $\{N[x] : x \in N^2[v]\}$ tiene intersección no vacía (Teorema 1.4.4). Sea w un vértice perteneciente a esa intersección. Entonces w es un máximo vecino de v , ya que se halla en la vecindad de todo vértice de $N^2[v]$. Como antes, $(G - v)^2 = G^2 - v$, de manera que, para continuar aplicando los argumentos anteriores, debemos verificar que $N(G - v)$ satisface la propiedad Helly. El problema podría ser ocasionado por las vecindades de G que poseían al vértice v , pero notemos que eso no es obstáculo porque allí está también w .

(ii) \iff (iii): G es cordal si y sólo si $\delta(C(G))$ es un hiperárbol. G es dualmente cordal si y sólo si $C(G)$ es un hiperárbol. \square

Observación: En la demostración anterior hemos realizado una mención implícita del hecho de que los grafos doblemente cordales son de potencias cordales.

Sabiendo desde ahora que, para todo grafo doblemente cordal, $C(G)$ es un hiperárbol (dual) y, utilizando las técnicas del Teorema 3.1.1.2, podemos obtener también la siguiente caracterización:

Teorema 3.4.2: G es doblemente cordal si y sólo si es el grafo de líneas de algún hiperárbol α -acíclico si y sólo si es la dos sección de algún hiperárbol α -acíclico.

3.5. Grafos UV, DV, RDV

El hecho de que un grafo pueda representarse como grafo de intersección de una familia de subárboles de un árbol resulta ser algo muy deseable en muchas circunstancias. En esta sección iremos más lejos y pediremos condiciones aun más específicas, quedando así determinadas nuevas clases de grafos. Y muy interesante será verificar, así como es posible para grafos cordales, si se les puede asignar una clase dual.

Definición: Un grafo G es UV (DV) si puede representarse como el grafo de intersección de caminos (dirigidos) de un árbol (dirigido). Un grafo DV con un árbol enraizado en su representación recibe el nombre de *grafo RDV*.

Sería conveniente disponer de otra caracterización para estos grafos. Así como se demostró que un grafo es cordal si y sólo si $C(G)$ es un hiperárbol dual se puede arribar a las siguientes conclusiones.

Teorema 3.5.1 [10]:

- (a) Un grafo G es UV si y sólo si existe un árbol T con $V(T) = C(G)$ tal que, para cada $v \in V(G)$, $T(C_v)$ es un camino en T .
- (b) Un grafo G es DV si y sólo si existe un árbol dirigido T con $V(T) = C(G)$ tal que, para cada $v \in V(G)$, $T(C_v)$ es un camino dirigido en T .
- (c) Un grafo G es RDV si y sólo si existe un árbol enraizado T con $V(T) = C(G)$ tal que, para cada $v \in V(G)$, $T(C_v)$ es un camino dirigido en T .

El Teorema 3.5.1 nos provee de una herramienta útil para demostrar que no todo grafo cordal es UV . De hecho, tomemos una garra C con centro v y hojas v_1, v_2, v_3 . Consideremos a los subárboles determinados

por las hojas, aquellos determinados por las aristas de T y a este mismo y utilicémoslos para representar a un grafo G. G es obviamente cordal, pero veamos que no es UV.



Figura 12: Grafo obtenido por el método arriba descrito.

En primer lugar, como es usual, los vértices de C representan cliques $K_v, K_{v_1}, K_{v_2}, K_{v_3}$, y estos son todos los que hay. Entonces, al buscar un árbol con las características del Teorema 3.5.1 sabemos que éste, si existe, debe tener cuatro vértices. Consideremos, por ejemplo, a la arista vv_1 de C, que induce un subárbol de la representación. El conjunto de cliques de G que poseen a este subárbol consta solamente de K_v y K_{v_1} , por lo que debemos aspirar a que K_v, K_{v_1} induzcan un camino en T, es decir, que ambos cliques sean adyacentes. Procediendo de la misma manera para los casos restantes se llega a la conclusión de que C debe ser isomorfo a T, pero el problema radica en que el conjunto de cliques que contiene al vértice de la representación determinado por T no induce entonces un camino.

Veamos ahora qué podemos decir al comparar los grafos UV con los DV y los RDV. Para esto, los soles serán de gran ayuda.

Empecemos notando que cualquier sol es un grafo UV. La representación posible consiste de una estrella. En la figura 13 se puede apreciar el caso particular de un 4-sol, pero la forma de verificar que cualquier otro sol es UV es prácticamente la misma. Sin embargo, al considerar las otras clases comienzan a surgir las diferencias.

Se puede comprobar a mano que la representación de los k -soles, con k par, sigue siendo útil para demostrar que estos grafos son DV. Pero esta estrategia comienza a fallar si k es impar:

Teorema 3.5.2: *Ningún k -sol es DV para k impar.*

Demostración: Sea G un k -sol con vértices v_1, \dots, v_k que inducen un completo y vértices u_1, \dots, u_k de manera tal que, para $1 \leq i \leq k$, u_i es adyacente a v_i y a v_{i+1} ($v_{k+1} = v_1$).

Supongamos que G es DV. Por lo tanto existe un árbol T cuyo conjunto de vértices es $C(G)$ y tal que para todo $v \in V(G)$, $T(C_v)$ es un camino dirigido en T. Llamemos $C = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $C_i = \{u_i, v_i, v_{i+1}\}$, $1 \leq i \leq k$. Veamos que C es adyacente en T a cualquier otro clique de G.

Supongamos, por el contrario, que C no es adyacente a un cierto C_j . Sea entonces C_m un clique en el

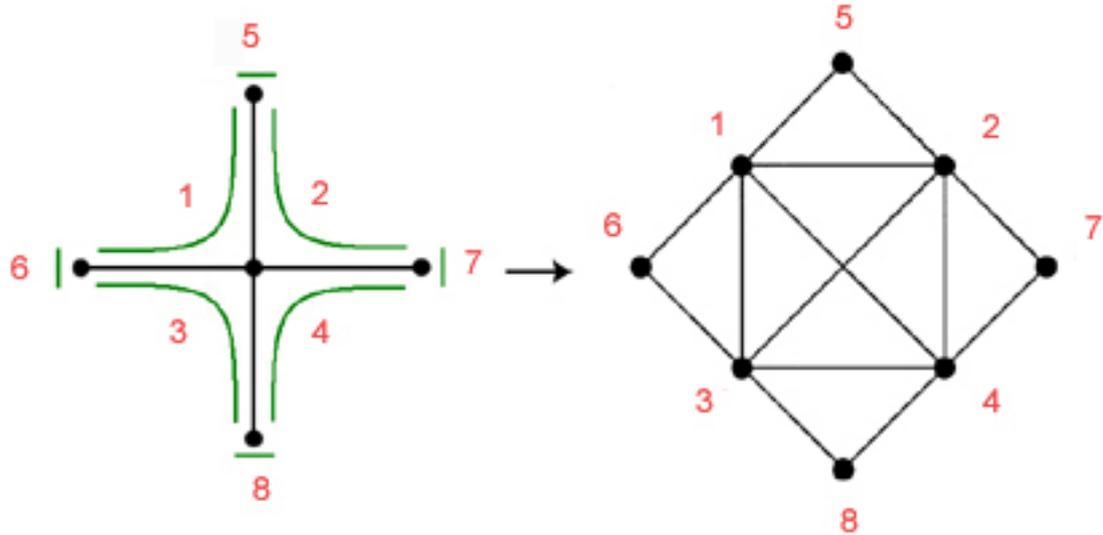


Figura 13: E_4 es UV .

camino en T entre C y C_j . Como C_{v_j} y $C_{v_{j+1}}$ inducen caminos en T , se concluye que $v_j, v_{j+1} \in C_m$, lo cual es absurdo al ser C_j y C los únicos cliques que cumplen con ese requisito.

Así, resulta que T es una estrella centrada en C . Ya conocida la estructura de T , se puede verificar directamente que no se pueden direccionar sus aristas para que $T(C_v)$ induzca un camino dirigido para cualquier v . ★

Corolario 3.5.3: Si G es DV , entonces G es *Helly*.

Demostración: G es cordal y sin 3-soles. ★

Teorema 3.5.4: Si G es RDV , entonces G es dualmente cordal.

Demostración: Como los grafos RDV constituyen una clase hereditaria, basta demostrar que G posee un vértice con máximo vecino.

Sea T un árbol enraizado dirigido con mínima cantidad de vértices tal que G es grafo de intersección de caminos de T . Sea v una hoja de T .

Como T posee raíz, todo camino de la representación que posea a v entre sus vértices es un subcamino de $T[u, v]$, siendo u la raíz de T . Entonces el menor de esos subcaminos corresponde a un vértice de G con máximo vecino, estando asociado este último al más grande de los caminos considerados. ★

Como RDV es una clase hereditaria, sus elementos son dualmente cordales y hereditarios, es decir, son fuertemente cordales. Como tales, no poseen soles como grafos inducidos, y mucho menos estos serán grafos RDV . Concluimos así que UV , DV y RDV son todas clases distintas. De hecho, todos los soles son UV , sólo los pares son DV y ninguno de ellos es RDV .

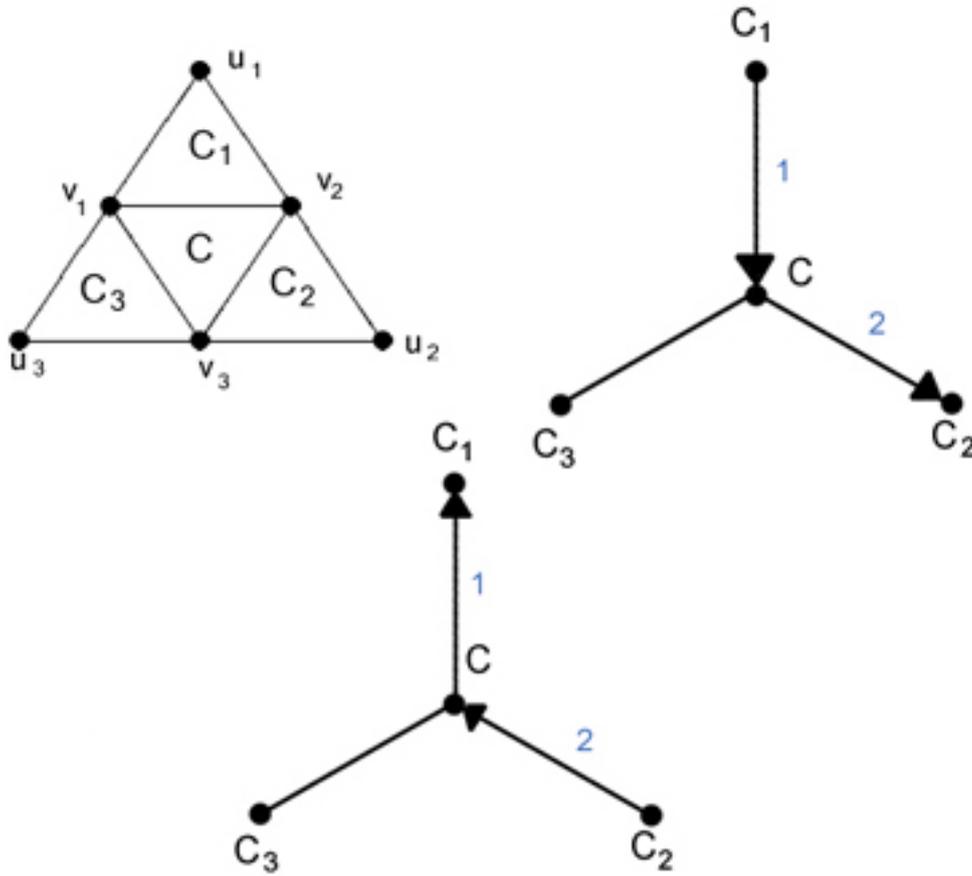


Figura 14: Imposibilidad de representar a E_3 como grafo DV. Una vez asignada una orientación para la arista con extremos C y C_1 (1), el hecho de que C_{v_2} debe inducir un camino determina la orientación que tiene que tener CC_2 (2). Pero luego, ninguna orientación asignada a CC_3 hace posible que tanto C_{v_1} como C_{v_3} induzcan caminos dirigidos.

3.5.1. Sus duales

Definición: Un grafo G es *dualmente DV (RDV)* si admite un árbol dirigido (con raíz) T , que también es generador, tal que para cada $vw \in E(G)$ T contiene un camino dirigido de v a w o viceversa, cuyos vértices inducen un completo en G . Un árbol dirigido con esas características recibirá el nombre de *árbol dirigido (con raíz) compatible con G o árbol canónico (con raíz) de G* .

Para los grafos dualmente cordales había más de una manera para describir a los árboles compatibles. Afortunadamente, ése sigue siendo el caso para los grafos dualmente DV.

Teorema 3.5.1.1: *Son equivalentes:*

- (1) G es dualmente DV.
- (2) Existe un árbol dirigido T (generador de G) tal que todo clique de G induce un camino dirigido en T .

Demostración:

(2) \implies (1): Obvio.

(1) \implies (2): Consideremos un árbol T que satisfaga las condiciones descritas en (2). Supongamos que existe un clique C de G que no induce un camino en T , sino simplemente un subárbol T' . Tomemos una garra de éste, siendo v_1 su vértice central y v_2, v_3, v_4 sus vértices periféricos.

Sabemos que $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ y $\{v_1, v_2, v_4\}$ inducen caminos dirigidos en T . Sin embargo se puede comprobar de manera directa que esto es imposible.

Por lo tanto, todo clique induce un camino dirigido. \star

Como los grafos dualmente RDV son un caso particular de los grafos dualmente DV , no extraña el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1.2: *Son equivalentes:*

- (1) G es dualmente RDV .
- (2) Existe un árbol dirigido enraizado T (generador de G) tal que todo clique de G induce un camino dirigido en T .

Dado lo que conocemos sobre el operador clique en relación con los grafos cordales y dualmente cordales, es ineludible volver sobre esa cuestión. Resultará que las cosas no cambian mucho y que de hecho nos aguardan algunas sorpresas. Con pasos muy similares a los del Teorema 2.2.2.2 se obtiene:

Teorema 3.5.1.3: $K(DV) = \text{Dualmente } DV$. También vale que $K(RDV) = \text{Dualmente } RDV$.

Ahora, recíprocamente, ya sabemos que $K(\text{Dualmente cordales}) = \text{Cordales} \cap \text{Helly}$. Si algo parecido siguiera ocurriendo para las clases ahora consideradas y, teniendo en cuenta que los grafos DV y RDV son Helly, sería de esperar que $K(\text{Dualmente } DV) = DV$ y que $K(\text{Dualmente } RDV) = RDV$. Y afirmativamente esto es así.

Lema 3.5.1.4: Si G es DV (RDV), entonces G' (definido como en el Teorema 1.3.1) es DV (RDV).

Demostración: Si G es DV , consideremos una representación de G como grafo de intersección de caminos dirigidos de un árbol T . Para cada $v \in V(G)$, sea x un extremo del camino que representa a v en T . Agreguemos un vértice x' a T y hagámoslo adyacente a x . Extendamos el camino a x' dándole a la arista xx' la orientación que corresponda. Además, agreguemos a G un nuevo vértice y hagámosle corresponder en la representación el camino constituido solamente por el vértice x' .

Luego de este proceso, obtenemos una representación de G' como grafo DV .

Si G es RDV , el procedimiento es el mismo, pero siempre se debe elegir el extremo más lejano a la raíz de T . \star

Teorema 3.5.1.5: $K(\text{Dualmente } DV) = DV$. $K(\text{Dualmente } RDV) = RDV$.

Demostración: La demostración de que la imagen por el operador clique de un grafo dualmente DV (RDV) es un grafo DV (RDV) es muy similar a la de que la imagen por el operador clique de un grafo dualmente cordal es cordal, así que la omitimos.

Recíprocamente, si tomamos un grafo G que es DV (RDV), sabemos que G es Helly. Con la ayuda del Teorema 1.3.1 se puede concluir que $K^2(G') = G$. Ahora, G' también es DV (RDV), así que $K(G')$ es dualmente DV (RDV), con lo cual obtenemos el resultado deseado. \diamond

Podría parecer extraño en un primer instante que en ningún momento hayamos mencionado a los grafos dualmente UV . Pero basta notar que si seguimos la definición al principio de esta sección, ser dualmente

UV equivaldría a ser dualmente cordal. Y teniendo en cuenta la observación que sigue a la demostración del Teorema 2.2.2.2, la igualdad $K(UV) = \text{Dualmente cordales}$ refuerza lo anteriormente dicho.

Ya disponemos de suficiente información para obtener una caracterización de los grafos dualmente DV (RDV). Ya sabemos que un grafo es dualmente cordal si y sólo si G es Helly y $K(G)$ es cordal. Podríamos aspirar a algo similar y, de hecho, necesitamos apenas una pequeña modificación para que esto siga valiendo para grafos dualmente DV (RDV).

Teorema 3.5.1.6 [12]: *G es dualmente DV si y sólo si G es Helly y $K(G')$ es un grafo DV .*

Demostración: Supongamos que G es dualmente DV . Como los grafos dualmente cordales son Helly, G es Helly. Sea T un árbol canónico de G . Para cada $v \in V(T)$ se puede agregar a T un nuevo vértice v' y una arista vv' dirigida de modo arbitrario. El árbol dirigido resultante será un árbol canónico de G' . Por lo tanto G' también es dualmente DV y así $K(G')$ es DV .

Recíprocamente, supongamos que G es Helly y $K(G')$ es DV . Supongamos que G tiene al menos dos vértices, de lo contrario el teorema es trivial.

Si G es Helly, también lo será G' . Además se verifica que $K^2(G') = G$. Por lo tanto, G es el grafo clique de un grafo DV , por lo que G es dualmente DV . \square

Lema 3.5.1.7: *Si G es dualmente RDV , entonces G es fuertemente cordal.*

Demostración: Veremos que cualquier subgrafo inducido de G es dualmente cordal. Para ello basta demostrar que si a G le removemos un vértice v cualquier componente conexa de $G - v$ es dualmente RDV .

Sea T un árbol generador de G dirigido y con raíz w tal que todo clique de G induce un camino dirigido. Consideremos las siguientes posibilidades:

Si $v = w$, $T - w$ consiste de uno o más subárboles de T , correspondientes cada uno de ellos a una componente conexa de $G - w$. Cada uno de esos árboles dirigidos es compatible con cada componente conexa, al ser los cliques los mismos o conjuntos reducidos. Las raíces serían los descendientes de w .

En cualquier otro caso, se puede obtener un nuevo árbol T' a partir de T fusionando a v con su antecesor inmediato. Se puede verificar que cada clique de $G - v$ induce un camino dirigido en T' y que cada componente conexa induce su propio árbol canónico (y enraizado) en T' . \diamond

Teorema 3.5.1.8 [12]: *Las siguientes condiciones son equivalentes para un grafo G :*

- (1) G es dualmente RDV .
- (2) G es Helly y $K(G')$ es RDV .
- (3) G es fuertemente cordal y $K(G')$ es RDV .

Demostración:

(1) \implies (3): Ya sabemos que grafos dualmente RDV son fuertemente cordales. Para verificar la segunda condición, sea T un árbol canónico con raíz de G . De una manera similar a la del Teorema 3.5.1.6, sea T' el árbol obtenido de T agregando, para cada $v \in V(T)$, un nuevo vértice v' y una arista vv' , en esta ocasión dirigida desde v a v' . Así T' resulta un árbol canónico con raíz de G' . Por consiguiente, G' es dualmente RDV y entonces $K(G')$ es RDV .

(3) \implies (2): Es obvia.

(2) \implies (1): Nuevamente, como en el Teorema 3.5.1.6, G' es Helly y $K^2(G') = G$. De la hipótesis se deduce entonces que G es dualmente RDV . \square

En [10] se pueden encontrar descripciones detalladas de los grafos UV , DV y RDV , y asimismo se aborda de modo satisfactorio el problema de verificar si un grafo pertenece a alguna de esas clases.

Esto y las caracterizaciones anteriores nos proveen de algoritmos eficientes para determinar si un grafo es dualmente DV o dualmente RDV . Basta testear que G sea Helly y que $K(G')$ sea DV o RDV . Ahora, para trabajar con $K(G')$, debemos notar que el problema de hallar los cliques de un grafo puede insumir un tiempo exponencial para muchos grafos. La clave de la estrategia propuesta es que los grafos dualmente DV (RDV) poseen un número acotado de cliques.

Por ejemplo, para un grafo dualmente DV el número de cliques nunca supera al de aristas. De hecho, basta tomar un árbol canónico T . Cada clique es un camino de T y sus extremos inducen una arista, lo cual nos da una correspondencia entre $C(G)$ y un subconjunto de $E(G)$.

Y para los grafos dualmente RDV el número de cliques tampoco supera al de vértices. De hecho, todo grafo dualmente RDV es cordal al ser la imagen por el operador clique de un grafo dualmente cordal y el número de cliques de un grafo cordal nunca supera su número de vértices. Esto se puede demostrar de modo inductivo recurriendo a un orden de eliminación perfecto de G y teniendo en cuenta que si v es simplicial el número de cliques de $G - v$, comparado con el de G , es el mismo o uno menos.

Finalmente también podremos a partir de ahora ver algunos ejemplos que confirmarán que los grafos dualmente cordales, DV y RDV son todas clases distintas. Para ello recurriremos a las ruedas.

Ya sabemos que todas ellas son dualmente cordales al poseer un vértice universal. Notemos ahora que $K((R'_n))$ posee un n -sol como grafo inducido. Esto demuestra que ninguna rueda es dualmente RDV , lo cual no era difícil de anticipar porque los grafos dualmente RDV son cordales, y que, para n impar, ninguna rueda es dualmente DV , aunque no es difícil ver que la respuesta cambia si n es par.

Consideraciones métricas sobre grafos dualmente RDV

Por lo visto, si G es un grafo dualmente RDV con árbol canónico T enraizado en w , para todo par u y v de vértices adyacentes el camino que los conecta en T es dirigido, es decir, $T[u, v] \subseteq T[u, w]$ o $T[u, v] \subseteq T[v, w]$. Como d es una disimilaridad arbórea, se puede concluir que la función $f_{uv} : T[u, v] \rightarrow \mathbb{N}_0$ con $f_{uv}(x) = d(x, w)$ es monótona con respecto al orden natural $T[u, v]$ para todo $uv \in E(G)$. Llamemos a este hecho *condición de w -monotonía*.

Sería interesante determinar si la existencia un árbol T compatible con un grafo G (solamente en el sentido de grafos dualmente cordales) con un vértice w tal que se satisfaga la condición de w -monotonía es suficiente para afirmar que el grafo es dualmente RDV .

Anticipamos que la respuesta es negativa. De hecho, la rueda R_4 con vértice universal x no es dualmente RDV . Pero podemos tomar como árbol compatible con R_4 a la estrella centrada en x y no es difícil verificar que, para todo $v \in V(R_4) - \{x\}$, se satisface la condición de v -monotonía.

De todos modos, veremos que la monotonía con respecto a un vértice equivale a una condición más débil.

Dado un clique C de un grafo dualmente cordal (y conexo) G tal que $d(C, w) = k$, sabemos por la Proposición 2.2.1.4 que podemos particionar a los vértices de C en dos conjuntos no vacíos C_A y C_B tales que $d(v, w) = k$ si y sólo si $v \in C_A$ y $d(v, w) = k + 1$ si y sólo si $v \in C_B$.

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.5.1.9: *Sea T un árbol compatible con G y $w \in V(G)$. Entonces T satisface la condición de w -monotonía si y sólo si, para todo $C \in C(G)$, C_A y C_B inducen subárboles en T .*

Demostración: Supongamos que T satisface la condición de w -monotonía. Si $u, v \in C_A$, sabemos porque T es compatible con G que $T[u, v] \subseteq C$. Si existiera $x \in C_B$ tal que $x \in T[u, v]$ entonces $x \in T[w, u]$ o $x \in T[w, v]$. Se concluye así, al ser d disimilaridad arbórea, que $d(w, x) \leq d(w, u)$ o $d(w, x) \leq d(w, v)$, lo cual es absurdo. Así $T[u, v] \subseteq C_A$ y se puede concluir que $T(C_A)$ es un subárbol.

Si $u, v \in C_B$, sea $x \in T[u, v]$. Por condición de w -monotonía, $d(w, u) \leq d(w, x) \leq d(w, v)$ o $d(w, u) \geq d(w, x) \geq d(w, v)$. Como $d(w, u) = d(w, v)$, en cualquiera de los dos casos se puede deducir que $x \in C_B$. Así $T[u, v] \subseteq C_B$ y se puede concluir que $T(C_B)$ es un subárbol.

Recíprocamente, supongamos que para todo $C \in \mathcal{C}(G)$ C_A y C_B inducen subárboles en T . Sean u y v dos vértices adyacentes en G y tomemos un clique C que los contenga. Si $u, v \in C_A$, por hipótesis $T[u, v] \subseteq C_A$ y por lo tanto f_{uv} es constante. La misma conclusión se obtiene si $u, v \in C_B$. Por otra parte, supongamos ahora que $u \in C_A$ y $v \in C_B$. De todos los vértices en $T[u, v] \cap C_A$, sea x el que esté a distancia mínima de v en $T[u, v]$. Entonces, por hipótesis, $T[u, x] \subseteq C_A$ y $T[u, v] - T[u, x] \subseteq C_B$, por lo que f_{uv} es creciente con respecto al orden natural de $T[u, v]$. Similarmente, si $u \in C_B$ y $v \in C_A$, f_{uv} es decreciente. Luego, T cumple con la condición de w -monotonía. \star

Conclusiones

Quedan aquí establecidas varias caracterizaciones posibles de los grafos dualmente cordales. Además de lo que ya habíamos anticipado en la introducción, se pudo ver que los grafos dualmente cordales se corresponden con la imagen por el operador clique de los grafos cordales. Un mayor análisis del operador clique nos permitió convencernos de que juega un rol importante en la comprensión de la dualidad estudiada.

También surgieron interesantes caracterizaciones métricas con la ayuda de los grafos de intervalos.

A través de los hipergrafos se pudo avanzar en un mayor entendimiento del vínculo entre grafos cordales y dualmente cordales.

Las caracterizaciones de todas las clases que aparecieron resultaron ser bastante simples y también útiles, a tal punto que conducen a muchos algoritmos eficientes, no vistos aquí, que en su momento representaron grandes avances.

Finalmente, todas las ideas desarrolladas pudieron ser usadas para establecer relaciones entre clases con respecto a inclusiones confirmando que, como la intuición parecía indicar, muchas de ellas eran estrictas, como en el caso de grafos UV , DV , RDV y sus duales.

Referencias

- [1] C.F. Bornstein and J.L. Szwarcfiter. *A characterization of clique graphs of rooted path graphs*. Proceedings of the Eighth Quadriennial International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, Kalamazoo, MI, 1996, in press.
- [2] A. Brandstädt, F. Dragan, V. Chepoi and V. Voloshin. *Dually chordal graphs*. Proceedings of the 19th International Workshop on Graph Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, 790:237-251, 1994.
- [3] E. Dahlhaus, P.D. Manuel, M. Miller. *A characterization of strongly chordal graphs*. Discrete Mathematics, Volume 187, Number 1, 1998, 269-271(3).
- [4] F. Dragan. *Centers of graphs and the Helly property*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics and Cybernetics, Moldova State University, Moldova, 1989.
- [5] R. Fagin. *Degrees of acyclicity for hypergraphs and relational database schemes*. Journal of the ACM, 32(4):841-860, 1985.
- [6] M. Farber, *Characterizations of strongly chordal graphs*, Discrete Math., 43 (1983), pp. 173-189.
- [7] M. Gutierrez. *Tree-Clique Graphs*. Estudos e comunicações do Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 63 (1996) 7-26.
- [8] M. Gutierrez, J. Meidanis. *Recognizing clique graphs of directed edge path graphs*. Discrete Applied Mathematics 126 (2003) 297-304.
- [9] M. Gutierrez and L. Oubiña. *Metric Characterizations of Proper Interval Graphs and Tree-Clique Graphs*. Journal of Graph Theory, 21:199-205, 1996.
- [10] C.L. Monma and V.K. Wei. *Intersection Graphs of Paths in a Tree*. Journal of Combinatorial Theory B, 41:141-181, 1986.
- [11] M.J. Pelsmajer, J. Tokaz, D. West. *New proofs for strongly chordal graphs and chordal bipartite graphs* (2004) Preprint.
- [12] E. Prisner and J.L. Szwarcfiter. *Recognizing clique graphs of directed and rooted path graphs*. Discrete Applied Math. 94:321-328, 1999.
- [13] J.L. Szwarcfiter and C.F. Bornstein. *Clique graphs of chordal graphs and path graphs*. SIAM J. Discrete Math., 7:331-336, 1994.
- [14] R.E. Tarjan, M. Yannakakis. *Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs*. SIAM J. Comput. 13, 566-579 (1984).