Grupos cuánticos matriciales

Gastón Andrés García
Universidad Nacional de La Plata, Argentina

VII Jornadas de Álgebra
Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil
30 de julio al 1 de agosto de 2015

Resumen

Estas notas se corresponden a un mini-curso dictado durante las VII Jornadas de Álgebra. En ellas se introducen las nociones básicas de la teoría de grupos cuánticos que están asociadas a los grupos clásicos de matrices, a través del estudio de los grupos $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ y $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Primero se recuerdan algunos resultados preliminares de geometría algebraica, luego se introduce el determinante cuántico usando acciones del grupo cuántico de matrices $\mathbf{M}_q(n)$, y finalmente se estudia la construcción FRT de grupos cuánticos asociados a la ecuación cuántica de Yang-Baxter.

Índice

Introducción

Estas notas se corresponden a un mini-curso dictado durante las *VII Jornadas de Álgebra* que se desarrollaron del 30 de julio al 1 de agosto en Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. El curso ha sido dictado en *portuñol*. Lamentablemente, el conocimiento de portugués del autor no alcanza para escribir las notas en ese idioma. Nos apoyamos en la buena voluntad del lector para intentar comprenderlas.

El objetivo del curso es presentar al lector las nociones básicas de la teoría de grupos cuánticos que están asociadas a los grupos clásicos de matrices. Esto lo haremos a través del estudio de los grupos $\mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ y $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ de tipo A_n. En este sentido, avanzaremos sobre el curso focalizándonos sobre el estudio algebraico de las estructuras. En particular, nos basaremos en algunos resultados de [PW], [K], [Tk], [BG] y [Mj]. Por tal motivo, no hablaremos acerca de los grupos cuánticos $\mathbf{SU}_q(n)$ y $\mathbf{SO}_q(n)$ asociados a los grupos compactos de matrices $\mathbf{SU}_n(\mathbb{R})$ y $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$. Los mismos se estudian usando herramientas analíticas; una aproximación se puede ver en [T] y referencias allí citadas.

Los grupos cuánticos, introducidos en 1986 por Drinfeld en su conferencia [D], forman cierta clase particular de álgebras de Hopf. Se pueden presentar a partir de deformaciones de álgebras universales de álgebras de Lie o de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines. Aparecen naturalmente codificando la simetría de categorías trenzadas. Es de este modo que se los pueden encontrar en diversas áreas relacionadas con la teoría conforme de campos; por ejemplo, en invariantes de variedades topológicas de dimensión baja.

Los grupos clásicos de matrices son grupos algebraicos afines. Como tales, pueden ser estudiados a través de las funciones algebraicas sobre ellos. Un resultado clásico muestra que el álgebra de funciones regulares de un grupo algebraico afín es un álgebra de Hopf conmutativa. Así, los grupos cuánticos de matrices son estudiados a través de álgebras de Hopf no conmutativas.

Comenzamos entonces introduciendo nociones básicas de geometría algebraica que serán utilizadas a lo largo de todo el curso; en particular trabajamos sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado. Luego, mostramos la relación entre grupos algebraicos afines y álgebras de Hopf conmutativas, ver Teorema 1.20. Para ello, recordamos las nociones de coálgebra, biálgebra y álgebra de Hopf en la Subsección 1.3

En la segunda sección introducimos la biálgebra $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ para $q \in \Bbbk^\times$ y damos algunas de sus propiedades básicas. Mostramos que esta biálgebra tiene un elemento central distinguido, *el determinante cuántico*. Así como la función determinante se puede obtener usando la coacción del álgebra de funciones sobre $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$ sobre el álgebra antisimétrica o de Grassman $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, el determinante cuántico se puede obtener usando la coacción de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ sobre la *q-álgebra antisimétrica*. Usando el determinante cuántico, se definen los grupos cuánticos $\mathbf{SL}_q(n)$ y $\mathbf{GL}_q(n)$, y se dan algunas propiedades. En particular, mostramos que si q es una raíz de la unidad, entonces existen morfismos sobreyectivos de grupos cuánticos $\mathbf{SL}_q(n) \to \mathbf{SL}_n(\Bbbk)$ y $\mathbf{GL}_q(n) \to \mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ con núcleo finito – los morfismos de Frobenius. Ambos núcleos resultan ser isomorfos a las álgebras duales de los *núcleos de Frobenius-Lusztig*.

En la última sección se da la construcción FRT introducida por Fadeev, Reshetikhin y Takhtadzhyan. La misma está asociada a soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter. Finalmente, mostramos que los grupos cuánticos $\mathbf{SL}_q(n)$ y $\mathbf{GL}_q(n)$ se pueden obtener utilizando una solución particular de la ecuación.

1. Grupos algebraicos afines

1.1. Nociones básicas de geometría algebraica

En esta seccion recordamos algunos hechos básicos y definiciones de geometría algebraica, como variedades algebraicas, esquemas de grupos afines y funtores representables, así como su relación con el álgebra conmutativa. Para más detalle, ver [Ha], [AM] y [K].

Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $n \in \mathbb{N}$. Se define el *espacio afín* n-dimensional sobre $\Bbbk$ como el conjunto de todas las n-uplas de elementos de $\Bbbk$:

$$\mathbb{A}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \ : \ a_i \in \Bbbk \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Un elemento $p \in \mathbb{A}^n$ se dice *punto*, y si $p = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \Bbbk$, entonces los a_i se denominan las *coordenadas* de p.

Sea $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre $\Bbbk$. Interpretamos a los elementos de este anillo como funciones sobre el espacio afín $\mathbb{A}^n$ en el cuerpo $\Bbbk$ definiendo $f(p) = f(a_1, \ldots, a_n)$ para

$f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y $p \in \mathbb{A}^n$. Así, si f es un polinomio, el conjunto de *ceros* de f es $Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n \ : \ f(p) = 0\}$. Más aún, si T es un subconjunto de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, se define el conjunto de *ceros comunes* de T como

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n \ : \ f(p) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Proposición 1.1. *Sea A un álgebra conmutativa y f una función de un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ a A. Entonces existe un único morfismo de álgebras conmutativas $\overline{f} : \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \to A$ tal que $\overline{f}(x_i) = f(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\{x_1, \ldots, x_n\} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"'] & & \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \arrow[dl, dashed, "\exists f"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

Observación 1.2. La proposición anterior nos dice que dar un morfismo de álgebras entre el álgebra de polinomios $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y un álgebra conmutativa A es lo mismo que dar una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in A$ para todo $1 \leq i \leq n$. Así, tenemos una equivalencia entre los puntos de A^n y los morfismos de $\Bbbk$-álgebras

$$\mathrm{Alg}_{\Bbbk}(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n], A) \simeq A^n.$$

En particular, si tomamos $A = \Bbbk$, tenemos que $\mathrm{Alg}_{\Bbbk}(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n], \Bbbk) \simeq \Bbbk^n$.

Esta equivalencia define un funtor contravariante entre las categorías de $\Bbbk$-álgebras conmutativas y la categoría de conjuntos

$$\mathrm{Spec}_{\Bbbk} : \mathsf{CAlg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Sets}$$

dado por $\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(R) = \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(R, \Bbbk)$ para toda $\Bbbk$-álgebra R, y si $f : R \to S$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras, entonces $\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(f) = \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(S, \Bbbk) \to \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(R, \Bbbk)$ es el morfismo dado por $\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(f)(\alpha) = \alpha \circ f$ para todo $\alpha \in \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(S, \Bbbk)$.

El conjunto $\mathrm{Spec}_{\Bbbk} R$ se denomina el **espectro** de R. Asociado al espectro de R tenemos otro funtor

$$\mathrm{Spec}_{\Bbbk} R : \mathsf{CAlg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Sets}$$

dado por $(\mathrm{Spec}_{\Bbbk} R)(A) = \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(R, A)$ para toda $\Bbbk$-álgebra A, y si $f : A \to B$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras, entonces $(\mathrm{Spec}_{\Bbbk} R)(f) = \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(R, A) \to \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(R, B)$ es el morfismo dado por $(\mathrm{Spec}_{\Bbbk} R)(f)(\alpha) = f \circ \alpha$ para todo $\alpha \in \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(R, A)$. Cualquier funtor isomorfo a un $\mathrm{Spec}_{\Bbbk} R$ para algún R se denomina un **esquema afín**.

Más aún, se puede ver que si I es un ideal de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, entonces

$$\mathrm{Spec}_{\Bbbk}(\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I, \Bbbk) \simeq Z(I). \tag{1}$$

Ejemplo 1.3. Sea A un álgebra y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\mathbf{M}_n(A)$ el álgebra de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en A. Como conjunto, $\mathbf{M}_n(A)$ está en biyección con A^{n^2}. Así, usando el resultado anterior tenemos que

$$(\mathrm{Spec}_{\Bbbk} \mathbf{M}(n))(A) := \mathrm{Alg}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}, A) \simeq \mathbf{M}_n(A),$$

donde $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}$ es el anillo de polinomios sobre $\Bbbk$ en n^2 variables. En general escribimos simplemente $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$ si el cuerpo está determinado por el contexto. Por ejemplo, todo morfismo $f : \mathcal{O}(\mathbf{M}(2))_{\Bbbk} \to A$ se corresponde con la matriz

$$\begin{pmatrix} f(x_{11}) & f(x_{12}) \\ f(x_{21}) & f(x_{22}) \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(A).$$

Definición 1.4. Un subconjunto X de $\mathbb{A}^n$ es un **conjunto algebraico** si existe un subconjunto $T \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $X = Z(T)$.

Es claro que el conjunto vacío y $\mathbb{A}^n$ son conjuntos algebraicos. Más aún, la unión de dos conjuntos algebraicos y la intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico. Usando este hecho, se define la *topología de Zariski* sobre $\mathbb{A}^n$ como la topología definida por los conjuntos abiertos como el complemento de los conjuntos algebraicos.

Definición 1.5. Una **variedad algebraica afín** es un subconjunto cerrado de $\mathbb{A}^n$. Un subconjunto abierto de una variedad afín es una variedad *cuasi-afín.*

Ejemplos 1.6. (a) Consideremos $\mathbb{A}^{2n} = \mathbf{M}_n(\Bbbk)$. Entonces, el subconjunto de matrices de determinante igual a uno es una variedad algebraica afín de $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$:

$$\mathbf{SL}_n(\Bbbk) := \{A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk) \ : \ \det A = 1\},$$

pues la función $\det : \mathbf{M}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ es la función polinómica dada por $\det = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sg}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, donde $\mathbb{S}_n$ es el grupo simétrico en n letras.
(b) Similarmente, el subconjunto de matrices inversibles

$$\mathbf{GL}_n(\Bbbk) := \{A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk) \ : \ \det A \neq 0\},$$

es un abierto afín de $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$, pues es el complemento del subconjunto cerrado dado por $\{A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk) \ : \ \det A = 0\}$. Por lo tanto, $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ es una variedad cuasi-afín de $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$. Sin embargo, $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ es una variedad algebraica afín si se lo ve como un subconjunto cerrado de $\Bbbk^{n\times n} \times \Bbbk$ dado por

$$\{(A, y) \in \Bbbk^{n\times n} \times \Bbbk : \ y \det A = 1\}.$$

Antes de continuar con el estudio de algunas variedades afines y cuasi-afines, debemos introducir un instrumento más para entender la relación entre subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ e ideales de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto, se define el ideal $I(X)$ de X en $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ como

$$I(X) := \{f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \ : \ f(p) = 0 \text{ para todo } p \in X\}.$$

Así, tenemos dos funciones

$$X \subseteq \mathbb{A}^n \leftrightsquigarrow \text{ideales } I \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] \ .$$

$$X \longmapsto I(X)$$

$$Z(I) \longleftarrow\!\shortmid I$$

Teorema 1.7. (Hilbert's Nulllstellensatz) *Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado, I un ideal de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y $f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio tal que $f(p) = 0$ para todo $p \in Z(I)$. Entonces $f^r \in I$ para algún entero positivo r.*

Demostración. Ver [AM, pág. 85].

$\square$

Dado un ideal I de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, se define el radical de I como $\sqrt{I} = \{f \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n] : \ f^r \in I \text{ para algún } r \in \mathbb{N}\}$. Decimos que un ideal es *radical* si $I = \sqrt{I}$. Usando el *Nullstellensatz* se obtienen las siguientes propiedades:

Proposición 1.8. [Ha, Prop. 1.2]

(a) *Si $T_1 \subseteq T_2$ son subconjuntos de $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.*

(b) *Si* $X_1 \subseteq X_2$ *son subconjuntos de* $\mathbb{A}^n$, *entonces* $I(X_1) \supseteq I(X_2)$.

(c) *Para todo par de subconjuntos* X_1, X_2 *de* $\mathbb{A}^n$ *se tiene que* $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$.

(d) *Para todo ideal* I *de* $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, $I(Z(I)) = \sqrt{I}$.

(e) *Para todo subconjunto* $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Z(I(X)) = \overline{X}$, *la clausura de* X.

Corolario 1.9. [Ha, Prop. 1.2] *Existe una correspondencia biunívoca entre subconjuntos algebraicos de* $\mathbb{A}^n$ *e ideales radicales en* $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ *dada por* $X \mapsto I(X)$ *y* $I \mapsto Z(I)$. *Más aún, un conjunto algebraico es irreducible si y sólo si su ideal es un ideal primo.*

Definición 1.10. Si $X \subset \mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico afín, se define el **anillo de coordenadas afines** $\mathcal{O}(X)$ de X como $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Dado un conjunto algebraico afín $X \subset \mathbb{A}^n$, notar que el anillo de coordenadas afines $\mathcal{O}(X)$ es una $\Bbbk$-álgebra. Esto es,

(i) $\mathcal{O}(X)$ es un espacio vectorial sobre $\Bbbk$,

(ii) $\mathcal{O}(X)$ tiene una multiplicación asociativa $m : \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$, dada por $(fg)(p) = f(p)g(p)$, para todo $p \in X$ y $(fg)h = f(gh)$ para todo $f, g, h \in \mathcal{O}(X)$.

(iii) $\mathcal{O}(X)$ tiene una unidad $u : \Bbbk \to \mathcal{O}(X)$, $\quad \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_{\mathcal{O}(X)}$, donde $1_{\mathcal{O}(X)} = u(1_\Bbbk)$ es la unidad del álgebra y la imagen de u está contenida en el centro de $\mathcal{O}(X)$.

Observar que la última condición del último punto se satisface trivialmente ya que $\mathcal{O}(X)$ es conmutativa, esto es, $(fg)(p) = f(p)g(p) = g(p)f(p) = (gf)(p)$ para todo $f, g \in \mathcal{O}(X), p \in X$.
Al ser la multiplicación m una función bilineal, se la puede considerar como una función lineal

$$m : \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X), \quad f \otimes g \mapsto fg, \text{ con } (fg)(p) = f(p)g(p).$$

Así, la propiedad de asociatividad se puede describir a través del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{O}(X).
\end{tikzcd}$$

El diagrama correspondiente a la unidad es el siguiente

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \arrow[dd, "m"'] & \\
\Bbbk \otimes \mathcal{O}(X) \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathcal{O}(X) \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& \mathcal{O}(X) &
\end{tikzcd}$$

Ejemplos 1.11. (a) El anillo de coordenadas afines correspondiente a la variedad algebraica $\mathbf{SL}_n(\Bbbk)$ está dado por la $\Bbbk$-álgebra

$$\mathcal{O}(\mathbf{SL}(n))_\Bbbk := \mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk/(\det -1),$$

donde $(\det -1)$ denota el ideal (bilátero) generado por la función polinómica $\det -1$. Por ejemplo,

$$\mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_\mathbb{C} := \mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\mathbb{C}/(\det -1) = \mathbb{C}[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}]/(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1).$$

En general, cuando $n = 2$ escribimos $x_{11} = a$, $x_{12} = b$, $x_{21} = c$ y $x_{22} = d$.
(b) El anillo de coordenadas de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ se define como un cociente de $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}[t]$ que se identifica como el álgebra de polinomios en $2n + 1$ variables:

$$\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n))_{\Bbbk} := \mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}[t]/(t \det -1).$$

De este modo, se puede ver que $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(n))_{\Bbbk} = \mathcal{O}(\mathbf{GL}(n))_{\Bbbk}/(t - 1)$.

Proposición 1.12. *Para toda $\Bbbk$-álgebra conmutativa R se tienen los siguientes isomorfismos de grupos*

$$(\operatorname{Spec}_{\Bbbk} \mathbf{GL}(n))(R) := \operatorname{Alg}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n))_{\Bbbk}, R) \simeq \mathbf{GL}_n(R) \quad y$$
$$(\operatorname{Spec}_{\Bbbk} \mathbf{SL}(n))(R) := \operatorname{Alg}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(\mathbf{SL}(n))_{\Bbbk}, R) \simeq \mathbf{SL}_n(R),$$

donde ambos isomorfismos están dados por la aplicación que manda todo morfismo de álgebras f a la matriz $(f(x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$.

Demostración. Ejercicio. Ver [K, Prop.1.5.1].

□

De aquí en adelante denotaremos $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)_{\mathbb{C}}$.
Sean X, Y dos variedades afines. Una función $\varphi : X \to Y$ es un **morfismo de variedades afines** si se puede definir por funciones polinomiales en sus coordenadas. En particular, los morfismos son continuos con respecto a la topología de Zariski. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ induce un morfismo de $\Bbbk$-álgebras $\varphi^* : \mathcal{O}(Y)_{\Bbbk} \to \mathcal{O}(X)_{\Bbbk}$ dado por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ para todo $f \in \mathcal{O}(Y)_{\Bbbk}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi^*(f)"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \Bbbk \end{tikzcd}$$

1.2. Grupos algebraicos afines

Introducimos ahora los grupos algebraicos afines. Ejemplos paradigmáticos de grupos algebraicos son los grupos clásicos de matrices.

Definición 1.13. Un **grupo algebraico lineal** G es una variedad algebraica afín munida de una estructura de grupo tal que las operaciones de grupo

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G, & \qquad i : G &\to G, \\ (g, h) &\mapsto gh, & g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

son morfismos de variedades.

Ejemplos 1.14. (a) $\mathbf{SL}_n(\Bbbk)$ y $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ son grupos algebraicos.
(b) Para $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ y $J_{2n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & K_n \\ -K_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. El **grupo simpléctico** en dimensión $2n$ es el subgrupo cerrado de $\mathbf{GL}_{2n}(\Bbbk)$ dado por

$$\mathbf{Sp}_{2n}(\Bbbk) = \{A \in \mathbf{GL}_{2n}(\Bbbk) : A^t J_{2n} A = J_{2n}\}.$$

(c) Supongamos que $\operatorname{car} \Bbbk \neq 2$. El **grupo ortogonal** es el subgrupo cerrado de $\mathbf{GL}_{2n}(\Bbbk)$ dado por

$$\mathbf{O}_n(\Bbbk) := \{A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk) \ : \ A^t K_n A = K_n\}.$$

Sean G_1 y G_2 dos grupos algebraicos afines. Una función $\varphi : G_1 \to G_2$ es un **morfismo de grupos algebraicos lineales** si es un morfismo de grupos y un morfismo de variedades, esto es, la aplicación inducida $\varphi^* : \mathcal{O}(G_2)_{\Bbbk} \to \mathcal{O}(G_1)_{\Bbbk}$ es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras.

El siguiente teorema muestra que todo grupo algebraico afín es un subgrupo cerrado de matrices. Así, a través del estudio de grupos (algebraicos) de matrices se obtienen resultados estructurales de grupos algebraicos más generales.

Teorema 1.15. [Hu, Thm. 8.6] *Sea G un grupo algebraico afín, entonces G es isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

1.3. Álgebras de Hopf conmutativas

Sea G un grupo algebraico afín. Los morfismos de estructura de G

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G, \\ (g,h) &\mapsto gh, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u : \{1\} &\to G, \\ 1 &\mapsto e, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S : G &\to G, \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

definen morfismos de $\Bbbk$-álgebras

$$\begin{aligned} \mu^* = \Delta : \mathcal{O}(G)_{\Bbbk} \to \mathcal{O}(G \times G)_{\Bbbk} &\simeq \mathcal{O}(G)_{\Bbbk} \otimes \mathcal{O}(G)_{\Bbbk} \\ f &\mapsto \Delta(f) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u^* = \varepsilon : \mathcal{O}(G)_{\Bbbk} &\to \Bbbk, \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^* = \mathcal{S} : \mathcal{O}(G)_{\Bbbk} &\to \mathcal{O}(G)_{\Bbbk} \\ f &\mapsto \mathcal{S}(f), \end{aligned}$$

donde $\Delta(f)(g \otimes h) := f(gh)$ y $\mathcal{S}(f)(g) = f(g^{-1})$ para todo $f \in \mathcal{O}(G)_{\Bbbk}, g, h \in G$. En particular, Δ es *coasociativa* pues como $f((gh)k) = f(g(hk))$ para todo $f \in \mathcal{O}(G)_{\Bbbk}, g, h, k \in G$, tenemos que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(f)(g \otimes h \otimes k) = f((gh)k) = f(g(hk)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(f)(g \otimes h \otimes k),$$

lo cual implica que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(f) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(f) \quad \text{para todo } f \in \mathcal{O}(G)_{\Bbbk}.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.16. Una **$\Bbbk$-coálgebra** es una terna (C, Δ, ε), donde C es un $\Bbbk$-espacio vectorial $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\varepsilon : C \to \Bbbk$ son funciones lineales que satisfacen los siguientes diagramas conmutativos

Coasociatividad:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

Counidad:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ \Bbbk \otimes C & & C \otimes \Bbbk \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

El morfismo Δ se denomina *coproducto* o *comultiplicación* y el morfismo ε se denomina *counidad*. Para denotar el coproducto de un elemento $c \in C$ usaremos la notación de Sweedler, $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. En particular, por el diagrama de la counidad se tiene que $c = \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c_{(1)}\varepsilon(c_{(1)})$ para todo $c \in C$.

Sea I un subespacio de C. Decimos que I es un **coideal** si $\varepsilon(I) = 0$ y $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$.

Como es usual, para comprender mejor la estructura de una coálgebra, necesitaremos analizar sus *corepresentaciones*.

Si C es una coálgebra, un C-**comódulo a izquierda** es un par (M, δ) donde M es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\delta : M \to C \otimes M$ es una aplicación lineal que satisface que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] \\ C \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\delta"'] & C \otimes C \otimes M. \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}"'] & C \otimes M \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Usando la notación de Sweedler, escribimos $\delta(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ para todo $m \in M$, entendiendo que los elementos con índice negativo son elementos de la coálgebra C. Así, por el segundo diagrama tenemos que $m = \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}$ para todo $m \in M$. Más aún, el primer diagrama establece la igualdad

$$m_{(-1)_{(1)}} \otimes m_{(-1)_{(2)}} \otimes m_{(0)} = m_{(-1)} \otimes m_{(0)_{(-1)}} \otimes m_{(0)_{(0)}},$$

que denotaremos simplemente por $(\Delta \otimes \mathrm{id})\delta(m) = m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)} = (\mathrm{id} \otimes\delta)\delta(m)$. Si no hay riesgo de confusión, diremos simplemente que C **coactúa** en M a izquierda.

Un C-**subcomódulo** N de M es un $\Bbbk$-subespacio vectorial que es invariante por la coacción, esto es, $\delta(N) \subseteq C \otimes N$. Así, si N es un subcomódulo de un C-comódulo M, el cociente M/N también es un C-comódulo con la coacción $\delta_{M/N} : M/N \to C \otimes M/N$ dada por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\pi"'] & C \otimes M \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi"] \\ M/N \arrow[r, dashed, "\delta_{M/N}"] & C \otimes M/N. \end{tikzcd}$$

Una **bialgebra** es un $\Bbbk$-espacio vectorial B munido de una estructura de álgebra (B, m, u) y una estructura de coálgebra (B, Δ, ε) tal que los morfismos Δ y ε son morfismos de $\Bbbk$-álgebra. Decimos que una biálgebra B es un **álgebra de Hopf** si existe una aplicación lineal $S : B \to B$ (llamada la antípoda) tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[ddd, "u\varepsilon"] & \\ B \otimes B \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{S}"'] & & B \otimes B \arrow[d, "\mathcal{S}\otimes\mathrm{id}"] \\ B \otimes B \arrow[dr, "m"'] & & B \otimes B \arrow[dl, "m"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Decimos que un álgebra de Hopf es *conmutativa* si es conmutativa como álgebra. Así, si G es un grupo algebraico afín, su anillo de coordenadas afines $\mathcal{O}(G)$ es un álgebra de Hopf conmutativa donde la antípoda $\mathcal{S}$ está dada por la transformación traspuesta de tomar el inverso en G.

Esto define un funtor entre las categorías de grupos algebraicos afines sobre $\Bbbk$ y las álgebra de Hopf *conmutativas* finitamente generadas sobre $\Bbbk$:

$$\begin{aligned} \mathsf{AffGr}_\Bbbk &\to \mathsf{CHopf}_\Bbbk, \\ G &\mapsto \mathcal{O}(G)_\Bbbk. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.17. Consideremos $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$ como el espacio de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\Bbbk$. La multiplicación de matrices define una estructura de monoide sobre $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$, que no es una estructura de grupo ya que no todos los elementos son inversibles. Sea $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk = \Bbbk[X_{ij}|\ 1 \leq i, j \leq n]$ su anillo de coordenadas afines. Como álgebra es simplemente el anillo de polinomios sobre $\Bbbk$ en n^2 variables. Más aún, los elementos X_{ij} son las funciones definidas por los coeficientes matriciales

$$X_{ij}(A) = a_{ij} \qquad \text{para todo } A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbf{M}_n(\Bbbk).$$

Si denotamos por E_{ij} a la matriz con un 1 en la entrada (i, j) y cero en todas las demás, el conjunto $\{E_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ es una base lineal de $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$ y el conjunto $\{X_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ es la base dual correspondiente donde

$$X_{ij}(E_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Así, $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ es una biálgebra con la estructura de coálgebra determinada por

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj}, \qquad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij} \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n. \tag{2}$$

En efecto, como $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ está generada como álgebra libre conmutativa por los elementos $\{X_{ij}|\ 1 \leq i, j \leq n\}$, los morfismos de álgebra Δ y ε quedan unívocamente determinados por los valores sobre éstos. En particular, basta verificar los axiomas de coasociatividad y de counidad sobre los generadores. Así, para la coasociatividad tenemos

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(X_{ij}) = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \Delta(X_{ik}) \otimes X_{kj} = \sum_{k,l=1}^{n} X_{il} \otimes X_{lk} \otimes X_{kj} \quad \text{y}$$
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(X_{ij}) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \left(\sum_{l=1}^{n} X_{il} \otimes X_{lj} \right) = \sum_{l=1}^{n} X_{il} \otimes \Delta(X_{lj}) = \sum_{k=1}^{n} X_{il} \otimes X_{lk} \otimes X_{kj},$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Para la counidad tenemos

$$\begin{aligned} m(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(X_{ij}) &= m(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj} \right) = m \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(X_{ik}) \otimes X_{kj} \right) \\ &= m \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \otimes X_{kj} \right) = m(1 \otimes X_{ij}) = X_{ij} \qquad \text{y} \\ m(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(X_{ij}) &= m(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj} \right) = m \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes \varepsilon(X_{kj}) \right) \\ &= m \left(\sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes \delta_{kj} \right) = m(X_{ij} \otimes 1) = X_{ij}, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Ejemplo 1.18. Sea $\mathbf{T}_n^+(\Bbbk)$ el grupo algebraico afín dado por las matrices triangulares superiores de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$. Entonces

$$\mathcal{O}(\mathbf{T}^+(n))_\Bbbk = \Bbbk[X_{ij} :\ 1 \leq i, j \leq n]/(X_{ij} :\ i > j).$$

Ejemplo 1.19. Recordemos que $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_\Bbbk$ es el álgebra commutativa generada por los elementos a, b, c, d que satisfacen la relación $ad - bc = 1$:

$$\mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_\Bbbk = \Bbbk[a, b, c, d|\ ad - bc = 1] = \Bbbk[a, b, c, d]/(ad - bc - 1).$$

La estructura de biálgebra de $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_\Bbbk$ coincide con la que hereda de $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))_\Bbbk$. La comultiplicación Δ y la counidad ε son morfismos bien definidos en el cociente, lo que implica que el ideal bilátero $I = \mathcal{O}(\mathbf{M}(2))_\Bbbk(ad - bc - 1)$ generado por $ad - bc - 1$ es un bi-ideal, esto es

$$\Delta(I) \subseteq I \otimes \mathcal{O}(\mathbf{M}(2))_\Bbbk + \mathcal{O}(\mathbf{M}(2))_\Bbbk \otimes I, \qquad \text{y} \qquad \varepsilon(I) = 0.$$

En particular, vale que $\varepsilon(ad - bc) = \varepsilon(1) = 1$ y $\Delta(ad - bc) = (ad - bc) \otimes (ad - bc)$ en $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))_{\Bbbk}$ ya que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Esto implica que $\det = ad - bc$ es un **elemento de tipo grupo**.

Más aún, $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_{\Bbbk}$ es un álgebra de Hopf algebra con la antípoda determinada por

$$\mathcal{S}(a) = d, \qquad \mathcal{S}(b) = -b, \qquad \mathcal{S}(c) = -c, \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(d) = a.$$

Si escribimos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a + b \otimes c & a \otimes b + b \otimes d \\ c \otimes a + d \otimes c & c \otimes b + d \otimes d \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}(a) & \mathcal{S}(b) \\ \mathcal{S}(c) & \mathcal{S}(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Observar que la **matriz antípoda** está dada por la matriz inversa puesto que el determinante es igual a 1. Más aún, en general $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}$ no es una álgebra de Hopf con la estructura de biálgebra definida anteriormente ya que det es un elemento de tipo grupo que no es inversible. Agregando el inverso $\det^{-1}$ a $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}$ alcanza para dotar de una estructura de álgebra de Hopf a la localización $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{k}[\det^{-1}]$ de $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_{\Bbbk}$ en $\det^{-1}$. Esta álgebra de Hopf coincide con $\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n))_{\Bbbk}$.

En notación matricial, la coasociatividad en los elementos generadores se traduce de la siguiente manera

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right),$$

y la counidad de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La antípoda $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_{\Bbbk}$, es un morfismo de álgebras $\mathcal{S} : \mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_{\Bbbk} \to \mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_{\Bbbk}^{\mathrm{op}}$ que está bien definido sobre los generadors puesto que $\mathcal{S}(1) = 1$ y $\mathcal{S}(ad - bc) = \mathcal{S}(ad) - \mathcal{S}(bc) = \mathcal{S}(d)\mathcal{S}(a) - \mathcal{S}(c)\mathcal{S}(b) = ad - (-c)(-b) = ad - cb = ad - bc$.

Finalizamos esta sección con un teorema de Cartier que nos dice que, bajo ciertas restricciones, toda álgebra de Hopf conmutativa es un anillo de coordenadas de un grupo algebraico afín.

Teorema 1.20. [Cartier] *Sea H un álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada y sin elementos nilpotentes. Entonces H es isomorfa a un anillo de coordenadas afines $\mathcal{O}(G)_{\Bbbk}$ donde $G = \operatorname{Spec}_{\Bbbk}(H)$.*

Demostración. (Idea). El isomorfismo viene dado por la correspondencia descripta en los comentarios anteriores al Nulllstellensatz.

Sea G un grupo algebraico afín de $\mathbb{A}^n$. Entonces, $\mathcal{O}(G)_{\Bbbk}$ es un álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada dada por $\mathcal{O}(G)_{\Bbbk} = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I(G)$. Como $I(G)$ es un ideal radical, tenemos que si $f^m = 0$ en $\mathcal{O}(G)_{\Bbbk}$, entonces $f^n \in I(G)$ y consecuentemente $f \in I(G)$. Así, $\mathcal{O}(G)_{\Bbbk}$ no tiene elementos nilpotentes.

Sea H un álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada y sin nilpotentes. Entonces el espectro $\operatorname{Spec}_{\Bbbk}(H) = \operatorname{Alg}_k(H, \Bbbk)$ dado por los morfismos de $\Bbbk$-álgebras de H en $\Bbbk$ es un grupo algebraico. En efecto, si $H \simeq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$ para algún ideal I, entonces por (1) tenemos que $\operatorname{Spec}_{\Bbbk}(H) = Z(I)$. Más aún, $\operatorname{Spec}_{\Bbbk}(H)$ resulta un grupo por las operaciones inducidas de la estructura de coálgebra de H.

Ambas construcciones son recíprocas. Si G es un grupo algebraico afín y $\mathcal{O}(G)_{\Bbbk} = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I(G)$ es su álgebra de coordenadas, entonces por (1) tenemos que

$$\operatorname{Alg}_{\Bbbk}(\mathcal{O}(G)_{\Bbbk}, \Bbbk) = Z(I(G)) = \overline{G} = G.$$

Por otro lado, si H es un álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada y sin nilpotentes, entonces $H = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$ para un cierto ideal radical I. Si $G = \operatorname{Spec}_{\Bbbk}(H) = Z(I)$, entonces $\mathcal{O}(G) = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I(G)$, pero $I(G) = I(Z(I)) = I$ por el Nullstellensatz. Entonces $\mathcal{O}(G) = H$. □

Observación 1.21. Sea R una $\Bbbk$-álgebra conmutativa. Hemos visto que el funtor $\operatorname{Spec}_k R : \mathsf{CAlg}_\Bbbk \to \mathsf{Sets}$ es un esquema afín. Si además R es un álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada y sin nilpotentes, por el teorema anterior se tiene un funtor

$$\operatorname{Spec}_k R : \mathsf{AffCHopf}_\Bbbk \to \mathsf{AffGr}_\Bbbk,$$

donde $\mathsf{AffCHopf}_\Bbbk$ es la categoría de álgebras de Hopf conmutativas finitamente generadas (afines) y sin elementos nilpotentes. Si un funtor es isomorfo a $\operatorname{Spec}_k H$ para un álgebra de Hopf conmutativa, decimos que el funtor es un **esquema afín de grupos**. Así, se denotamos por $\mathsf{AffGrSch}_\Bbbk$ a la categoría de funtores de grupos afines tenemos una (anti) equivalencia de categorías

$$\mathsf{AffGrSch}_\Bbbk \leftrightsquigarrow \mathsf{AffCHopf}_\Bbbk.$$

1.4. Ejercicios

1. Probar la Proposición 1.1.
2. Probar la Proposición 1.12.
3. Probar que $\mathbf{SL}_n(\Bbbk)$, $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$, $\mathbf{O}_n(\Bbbk)$ y $\mathbf{Sp}_n(\Bbbk)$ son grupos algebraicos.
4. Probar que los siguientes son grupos algebraicos
   (a) El conjunto $\mathbf{T}_n^+(\Bbbk)$ de matrices triangulares superiores de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$.
   (b) El conjunto $\mathbf{D}_n(\Bbbk)$ de matrices diagonales de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$.
   (c) El conjunto $\mathbf{U}_n(\Bbbk)$ de matrices triangulares superiores de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ donde las entradas de la diagonal son todas igual a 1.
5. Probar que $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(n))_\Bbbk = \mathcal{O}(\mathbf{GL}(n))_\Bbbk/(t-1)$.
6. Sea G un grupo algebraico lineal. Probar que $\mathcal{O}(G)_\Bbbk$ es una $\Bbbk$-álgebra de Hopf conmutativa.
7. Probar que las morfismos de estructura de coálgebra sobre $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ definidos en (2) son los morfismos transpuestos de la multiplicación y la unidad del conjunto de matrices $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$.
8. Sea $\mathbf{T}_n^+(\Bbbk)$ el grupo algebraico afín dado por las matrices triangulares superiores de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$. Describir la estructura de coálgebra de $\mathcal{O}(\mathbf{T}^+(n))_\Bbbk$.
9. Describir las álgebras de coordenadas de los grupos algebraicos $\mathbf{Sp}_{2n}(\Bbbk)$ y $\mathbf{O}_n(\Bbbk)$.

2. Grupos cuánticos matriciales

En la sección anterior hemos visto que todo grupo algebraico afín definido sobre $\Bbbk$ se corresponde a una $\Bbbk$-álgebra de Hopf conmutativa finitamente generada y sin nilpotentes.

$$\begin{array}{cccc} \mathsf{AffGr} & G_\Bbbk \rightsquigarrow \mathcal{O}(G)_\Bbbk & & \mathsf{AffCHopf}_\Bbbk \\ \\ & \operatorname{Spec}_\Bbbk(A) \leftsquigarrow A. & & \end{array}$$

Extendiendo la filosofía de Grothendieck, Drinfel'd propuso *cuantizar* anillos de coordenadas clásicos $\mathcal{O}(G)_\Bbbk$ a través de la deformación de la conmutatividad; es decir, transformándolos en álgebras de Hopf no conmutativas. Así, estas álgebras de Hopf se corresponderían al anillo de coordenadas no conmutativo sobre objetos que *a priori* no existen, los *grupos cuánticos*:

$$G_q \quad \leftrightsquigarrow \quad \mathcal{O}_q(G).$$

Por lo tanto, los grupos cuánticos no existen como objetos geométricos, sólo conocemos sus correspondientes álgebras de funciones no conmutativas. Usualmente, estas álgebras de Hopf no conmutativas reciben el nombre de grupos cuánticos.

Hasta el día de hoy, no existe una definición rigurosa y universalmente aceptada de grupo cuántico. Sin embargo, se ha concordado en aceptar que el término grupo cuántico debería incluir ciertas deformaciones de objetos clásicos asociados a grupos algebraicos o álgebras de Lie semisimples. Así, la teoría se basa más en el estudio de ejemplos concretos que en una estructura axiomática.

Algunos autores definen grupos cuánticos como álgebras de Hopf no conmutativas ni coconmutativas. En estas notas seguiremos la convención de Drinfel'd que establece que *la categoría de grupos cuánticos es la categoría opuesta de la categoría de álgebras de Hopf.* Luego, los grupos cuánticos son álgebras de Hopf como objetos, pero los morfismos son los opuestos. Esto se basa en lo siguiente: si Γ es un subgroupo de G, entonces existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{O}(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\Gamma)$ entre las álgebras de funciones

$$\Gamma \hookrightarrow G \leftrightsquigarrow \mathcal{O}(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\Gamma),$$

$$\Gamma_q \hookrightarrow G_q \leftrightsquigarrow \mathcal{O}_q(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q(\Gamma).$$

2.1. Definición de $\mathbf{M}_q(n)$

Comenzaremos el estudio de grupos cuánticos matriciales estudiando una deformación no conmutativa del álgebra de funciones sobre $\mathbf{M}_n(\Bbbk)$.

Definición 2.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $q \in \Bbbk^\times$. Se define $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ como el álgebra asociativa sobre $\Bbbk$ generada por n^2 elementos X_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} X_{ri}X_{rj} &= qX_{rj}X_{ri} \quad \text{si } i < j; \\ X_{is}X_{js} &= qX_{js}X_{is} \quad \text{si } i < j; \\ X_{ri}X_{sj} &= X_{sj}X_{ri} \quad \text{si } r < s \text{ y } i > j; \\ X_{ri}X_{sj} - X_{sj}X_{ri} &= (q - q^{-1})X_{si}X_{rj} \quad \text{si } r < s \text{ y } i < j. \end{aligned}$$

Denotaremos a esta álgebra no conmutativa como $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ si es claro sobre que cuerpo se trabaja. Su objeto geométrico cuántico asociado se denotará $\mathbf{M}_q(n)$.

Claramente, si $q = 1$, entonces $\mathcal{O}_1(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ es conmutativa y vale que $\mathcal{O}_1(\mathbf{M}(n))_\Bbbk = \mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$.

Proposición 2.2. *$\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ es una biálgebra con la estructura de coálgebra dada por*

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj}, \qquad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij} \qquad \textit{para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

En particular, $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))_\Bbbk = \mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ como coálgebras.

Demostración. Ejercicio. □

Al, igual que el anillo de coordenadas $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ sobre el espacio afín $\mathbb{A}^{2n}$, esta álgebra es un dominio íntegro.

Teorema 2.3. [PW, Thm. 3.5.1] *$\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))_\Bbbk$ es un dominio íntegro con una base dada por*

$$\left\{ \prod_{i,j} X_{i,j}^{t_{i,j}} \mid t_{i,j} \in \mathbb{N} \right\},$$

donde el producto está tomado con respecto a un orden fijo de los elementos $X_{i,j}$. □

Ejemplo 2.4. Veamos un ejemplo. Si $n = 2$, entonces $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(2))$ es el álgebra asociativa generada por los elementos a, b, c, d que satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} ab &= qba, & cd &= qdc, & ac &= qca, \\ bd &= qdb, & bc &= cb, & ad - da &= (q - q^{-1})bc, \end{aligned}$$

donde escribimos $X_{11} = a$, $X_{12} = b$, $X_{21} = c$ y $X_{22} = d$, como es usual.

Así como el álgebra de matrices $\mathbf{M}_2(\mathbb{k})$ actúa en el plano afín $\mathbb{A}^2$, el anillo de coordenadas $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))$ **coactúa** en $\mathbb{A}^2$. Si denotamos por e_1 y e_2 la base canónica de $\mathbb{k}^2 = \mathbb{A}^2$ como $\mathbb{k}$-espacio vectorial, la coacción $\delta : \mathbb{A}^2 \to \mathcal{O}(\mathbf{M}(2)) \otimes \mathbb{A}^2$, está definida por

$$\delta(e_1) = a \otimes e_1 + b \otimes e_2; \qquad \delta(e_2) = c \otimes e_1 + d \otimes e_2.$$

En notación matricial tenemos que

$$\delta \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

En este caso, decimos que $\mathbb{A}^2$ es un $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))$-comódulo a izquierda. Más aún, usando la definición sobre esta base, podemos definir una coacción de $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))$ sobre el álgebra tensorial $T(V)$ de $V = \mathbb{A}^2$, estableciendo que δ sea un morfismo de álgebras, esto es, si $v, w \in V$, entonces

$$\delta(vw) = v_{(-1)}w_{(-1)} \otimes v_{(0)}w_{(0)}, \qquad \text{si } \delta(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \text{ y } \delta(w) = w_{(-1)} \otimes w_{(0)}.$$

Si denotamos $x = e_1$ e $y = e_2$, $T(V) = \mathbb{k}\langle x, y\rangle$ es el álgebra asociativa libre en dos variables. En ese caso, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned} \delta(x) &= a \otimes x + b \otimes y, \\ \delta(y) &= c \otimes x + d \otimes y, \\ \delta(xy) &= ac \otimes x^2 + ad \otimes xy + bc \otimes yx + bd \otimes y^2 \qquad \text{y} \\ \delta(yx) &= ac \otimes x^2 + cb \otimes xy + da \otimes yx + bd \otimes y^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \delta(xy - yx) &= (ad - bc) \otimes (xy - yx) \qquad \text{y} \\ \delta(xy + yx) &= 2ac \otimes x^2 + (ad + bc) \otimes (xy + yx) + 2bd \otimes y^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la coacción sobre $T(V)$ induce una coacción sobre el álgebra simétrica y el álgebra antisimétrica o de Grassman

$$SV = T(V)/(v \otimes w - w \otimes v), \qquad \bigwedge V = T(V)/(v \otimes w + w \otimes v),$$

ya que en cada caso, el ideal de relaciones I es un subcomódulo de $T(V)$, i.e. $\delta(I) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{M}(2)) \otimes I$.

En este sentido, si identificamos $SV = \mathbb{k}[x, y]$, tenemos que $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))$ coactúa en el anillo de polinomios en dos variables. Esta es la noción dual que el álgebra de matrices $\mathbf{M}_2(\mathbb{k})$ actúe en el plano.

Por otro lado, como $\dim V = 2$, tenemos para su segunda potencia antisimética la igualdad $\bigwedge^2 V = \mathbb{k}\{x \wedge y\}$; en particular, $\dim \bigwedge^2 V = 1$. Por lo tanto,

$$\bigwedge V = \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}\{x, y\} \oplus \mathbb{k}\{x \wedge y\}.$$

y usando la fórmula anterior para el producto en $T(V)$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta(x \wedge y) &= ac \otimes x \wedge x + ad \otimes x \wedge y + bc \otimes y \wedge x + bd \otimes y \wedge y \\ &= (ad - bc) \otimes x \wedge y = \det \otimes x \wedge y. \end{aligned}$$

Más aún, usando el diagrama conmutativo anterior se tiene que

$$\Delta(\det) \otimes x \wedge y = \det \otimes \det \otimes x \wedge y,$$

lo que implica que $\Delta(\det) = \det \otimes \det$. Así, el determinante es el elemento de tipo grupo que da la coacción de $\mathcal{O}(\mathbf{M}(2))$ sobre $\bigwedge^2 V$.

Análogamente, $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$ coactúa sobre el $\Bbbk$-espacio vectorial $V = \mathbb{A}^n$ y la acción se extiende al álgebra tensorial $T(V)$, el anillo de polinomios en n variables (i.e. álgebra simétrica) $SV = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ y al álgebra exterior o *álgebra de Grassman* $\bigwedge V$. Como $\dim V = n$, tenemos que $\bigwedge^n V = \Bbbk\{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\}$, $\dim \bigwedge^n V = 1$ y vale que

$$\delta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_n, \qquad \text{donde } \det = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-1)^{\operatorname{sg} \sigma} X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)} \in \mathcal{O}(\mathbf{M}(n)).$$

2.2. Determinantes cuánticos

Consideremos ahora el *plano cuántico* dado por

$$\Bbbk_q[x, y] = \Bbbk\langle x, y : \ xy = qyx\rangle.$$

Claramente, si $q = 1$ tenemos que $\Bbbk_q[x, y] = \Bbbk[x, y]$ y si $q \neq 1$, $\Bbbk_q[x, y]$ es un álgebra no conmutativa que es noetheriana, íntegra y tiene una base de monomios dada por $\{x^i y^j\}_{i,j \geq 0}$, ver [K, Prop. IV.1.1].

Al igual que antes, $\mathbf{M}_q(2)$ actúa en el plano cuántico. Esto es, se tiene una aplicación lineal definida por

$$\delta : \ \Bbbk_q[x, y] \to \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(2)) \otimes \Bbbk_q[x, y], \qquad \delta(x) = a \otimes x + b \otimes y; \qquad \delta(y) = c \otimes x + d \otimes y.$$

La coacción preserva la estructura de álgebra de $\Bbbk_q[x, y]$ pues

$$\begin{aligned}
\delta(xy) &= ac \otimes x^2 + ad \otimes xy + bc \otimes yx + bd \otimes y^2 \\
&= qca \otimes x^2 + ad \otimes xy + q^{-1} bc \otimes xy + qdb \otimes y^2 \\
&= qca \otimes x^2 + (ad + q^{-1} bc) \otimes xy + qdb \otimes y^2 \\
&= qca \otimes x^2 + (da + qbc) \otimes xy + qdb \otimes y^2 = \delta(qyx).
\end{aligned}$$

Esta acción, está inducida por la acción sobre una potencia simétrica no conmutativa de un espacio vectorial de dimensión dos; en este caso, $V = \Bbbk\{x, y\}$.

Sea V un k-espacio vectorial con base $\{x_1, \dots, x_n\}$. Se define la ***q-álgebra simétrica*** $S_q V$ como el álgebra asociativa generada por los elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$ que satisfacen la relación $x_i x_j = q x_j x_i$ para todo $i < j$, es decir,

$$S_q V = \Bbbk\langle x_1, \dots, x_n : \ x_i x_j = q x_j x_i, \ i < j\}.$$

Análogamente, se define la ***q-álgebra antisimétrica*** o la ***álgebra cuántica de Grassman*** como el álgebra asociativa generada por los elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$ que satisfacen la relación $x_i x_j = -q x_j x_i$ para todo $i < j$ y $x_i^2 = 0$, es decir,

$$\textstyle\bigwedge_q V = \Bbbk\langle x_1, \dots, x_n : \ x_i x_j = -q x_j x_i, \ i < j, \ x_i^2 = 0, \forall\, i\}.$$

En particular, si $q = 1$, $S_q V = V$ y $\bigwedge_q V = \bigwedge V$. Ambas álgebras son graduadas por el orden en los monomios.

Se puede ver que $\mathbf{M}_q(n)$ actúa tanto en $S_q V$ como en $\bigwedge_q V$ por la misma fórmula de antes, y la coacción es estable en cada componente homogénea. Ver [PW, Thm. 3.8.1].

Por ejemplo, si tomamos $V = \Bbbk\{x, y\}$, entonces $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(2))$ coactúa en la segunda potencia q-antisimétrica de V via

$$\begin{aligned}
\delta(x \wedge y) &= ac \otimes x \wedge x + ad \otimes x \wedge y + bc \otimes y \wedge x + bd \otimes y \wedge y \\
&= ad \otimes x \wedge y - qbc \otimes x \wedge y = (ad - qbc) \otimes x \wedge y = (da - q^{-1} bc) \otimes x \wedge y.
\end{aligned}$$

Así, se define el ***determinante cuántico*** como

$$\det_q = ad - qbc = da - q^{-1} bc.$$

Por la relación de compatibilidad de la coacción con la estructura de álgebra de $\bigwedge_q V$ se tiene que $\det_q$ es un elemento de tipo grupo. En efecto, como $(\Delta \otimes \mathrm{id})\delta(x \wedge y) = (\mathrm{id} \otimes \delta)\delta(x \wedge y)$ tenemos que

$$\Delta(\det_q) \otimes x \wedge y = \det_q \otimes \det_q \otimes x \wedge y.$$

Luego, $\Delta(\det_q) = \det_q \otimes \det_q$. Mas aún, $\det_q$ es un elemento central en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(2))$. Para probarlo, basta ver que conmuta con todos los generadores:

$$\begin{aligned}
\det_q a &= (ad - qbc)a = ada - qbca = a(ad + (q^{-1} - q)bc) - qq^{-2}abc \\
&= a(ad - qbc) + q^{-1}abc - q^{-1}abc = a\det_q, \\
\det_q b &= (ad - qbc)b = adb - qbcb = q^{-1}qbad - qbbc \\
&= b(ad - qbc) = b\det_q, \\
\det_q c &= (ad - qbc)c = adc - qbcc = q^{-1}qcad - qcbc \\
&= c(ad - qbc) = c\det_q, \\
\det_q d &= (da - q^{-1}bc)d = dad - q^{-1}bcd = dad - q^{-1}q^2dbc = \\
&= d(ad - qbc) = d\det_q.
\end{aligned}$$

En general, como $\dim V = n$, tenemos que $\bigwedge_q^n V = \Bbbk\{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\}$. Así,

$$\delta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = D \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_n, \tag{3}$$

donde D es un elemento de tipo grupo. Esto da a lugar a la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea $q \in \Bbbk^\times$. Se define el **determinante cuántico** $\det_q$ como el elemento de tipo grupo D de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ dado por la propiedad (3). De hecho, se puede ver que

$$\det_q = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-q)^{\ell(\sigma)} X_{\sigma(1),1} \cdots X_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-q)^{\ell(\sigma)} X_{1,\sigma(1)} \cdots X_{n,\sigma(n)},$$

donde $\ell(\sigma)$ denota la longitud de la permutación σ como producto de transposiciones.

Observación 2.6. Notar que $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ **es una biálgebra pero no un álgebra de Hopf**. En efecto, en toda álgebra de Hopf, los elementos de tipo grupo son inversibles, y en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ el determinante cuántico $\det_q$ no lo es.

2.2.1. Subdeterminantes cuánticos

En lo que sigue, probaremos que $\det_q$ es un elemento central de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$. Sea $m \leq n$ un entero positivo y supongamos que se tienen los subconjuntos de $\mathbb{I}_n = \{1, \ldots n\}$

$$\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_m\} \quad \text{y} \quad \mathcal{J} = \{j_1, \ldots, j_m\} \quad \text{con} \quad i_1 < \cdots < i_m, \quad j_1 < \cdots < j_m,$$

cada uno de cardinalidad m. Sea $K[\mathcal{I}, \mathcal{J}]$ la subálgebra de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ generada por los elementos X_{i_r,j_r} con $1 \leq r \leq m$. Claramente, los elementos de esta subálgebra satisfacen las relaciones de la Definición 2.1 y por lo tanto se puede definir un determinante cuántico en ellas. Dicho determinante se llama ***subdeterminante*** de $\det_q$ y se denotará por $D(\mathcal{I}, \mathcal{J})$. En particular, $D(i, j) := D(\{i\}, \{j\}) = X_{i,j}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ y $D(\mathbb{I}_n, \mathbb{I}_n) = \det_q$.

Si $\mathcal{I}'$ y $\mathcal{J}'$ son los subconjuntos de $\mathcal{I}_n$ que son complemento de $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ respectivamente, denotaremos $D(\mathcal{I}', \mathcal{J}') = A(\mathcal{I}, \mathcal{J})$. Si $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_m\}$ es un subconjunto de $\mathbb{I}_n$, denotamos $|\mathcal{I}| = i_1 + \cdots + i_m$.

Teorema 2.7. [PW, Thm. 4.4.3] *Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos subconjuntos de $\mathbb{I}_n$ de cardinal m. Entonces*

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathcal{I},\mathcal{K}} \det_q &= \sum_{\mathcal{J}} (-q)^{|\mathcal{J}| - |\mathcal{K}|} D(\mathcal{I}, \mathcal{J}) A(\mathcal{K}, \mathcal{J}) = \sum_{\mathcal{J}} (-q)^{|\mathcal{I}| - |\mathcal{J}|} A(\mathcal{I}, \mathcal{J}) D(\mathcal{K}, \mathcal{J}) \\
&= \sum_{\mathcal{J}} (-q)^{|\mathcal{J}| - |\mathcal{K}|} D(\mathcal{J}, \mathcal{I}) A(\mathcal{J}, \mathcal{K}) = \sum_{\mathcal{J}} (-q)^{|\mathcal{I}| - |\mathcal{J}|} A(\mathcal{J}, \mathcal{I}) D(\mathcal{J}, \mathcal{K}),
\end{aligned}$$

donde la suma es sobre todos los subconjuntos $\mathcal{K}$ de $\mathbb{I}_n$ de m elementos y $\delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ es la delta de Kronecker.

En particular, si $\mathcal{I} = \{i\}$ y $\mathcal{K} = \{k\}$, obtenemos un desarrollo de $\det_q$ por la fila i o por la columna i.

Corolario 2.8. *Sean $1 \le i \le n$ y $1 \le k \le n$ fijos. Entonces*

$$\begin{aligned}\delta_{i,k}\det_q &= \sum_{j=1}^{n}(-q)^{j-k}X_{i,j}A(k,j) = \sum_{j=1}^{n}(-q)^{i-j}A(i,j)X_{k,j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-q)^{j-k}X_{j,i}A(j,k) = \sum_{j=1}^{n}(-q)^{i-j}A(j,i)X_{j,k}.\end{aligned}$$

Finalizamos esta subseción con el siguiente teorema, cuya demostración se debe a M. Takeuchi.

Teorema 2.9. $\det_q$ *es un elemento central en* $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$.

Demostración. Consideremos las matrices de elementos de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ dadas por $X = (X_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ y $\tilde{\mathcal{S}}(X) = ((-q)^{i-j}A(j,i))_{1\le i,j\le n}$. Entonces, por el corolario anterior se tiene que

$$X\tilde{\mathcal{S}}(X) = \tilde{\mathcal{S}}(X)X = \det_q I$$

donde I es la matriz identidad. Por lo tanto, se sique que $X\det_q I = X\tilde{\mathcal{S}}(X)X = \det_q IX$, lo que implica que $\det_q$ conmuta con los generadores $X_{i,j}$, $1 \le i, j \le n$.

□

2.3. $\mathbf{SL}_q(n)$ y $\mathbf{GL}_q(n)$

En esta subsección introducimos las nociones cuánticas del grupo general lineal y del grupo especial lineal. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el álgebra de polinomios en T con coeficientes en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ dada por $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]$. La misma se puede ver como agregarle a $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ un elemento central T.

Usando que $\det_q$ es un elemento central en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ se define

$$\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)) = \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]/(T\det_q - 1),$$

$$\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n)) = \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))/(\det_q - 1),$$

donde $(T\det_q - 1)$ es el ideal bilátero de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]$ generado por el elemento $T\det_q - 1$ y $(\det_q - 1)$ es el ideal bilátero de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ generado por $\det_q - 1$. Así, $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ se puede ver como la *localización* de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ en $\det_q^{-1}$; es decir, la menor álgebra que se obtiene al agregar el elemento inverso de $\det_q$. Denotaremos por $\mathbf{GL}_q(n)$ y $\mathbf{SL}_q(n)$ a los objetos cuánticos geométricos asociados a $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ y $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$, respectivamente.

La particularidad que tienen ambas álgebras es que en ellas, $\det_q$ es inversible; de hecho es igual a 1 en $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$. Esto basta para poder dotar a $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ y $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ de una estructura de álgebra de Hopf. En particular, $\mathbf{GL}_q(n)$ y $\mathbf{SL}_q(n)$ serían *grupos cuánticos*.

Lema 2.10. (a) *La estructura de biálgebra de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ se extiende de manera única a una estructura de biálgebra en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$.*

(b) *Los ideales biláteros de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ y $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ generados por $\det_q - 1$ son también coideales. Por lo tanto, $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ es una biálgebra cociente de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$, que también puede ser vista como una biálgebra cociente de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$.*

Demostración. (a) Si definimos $\Delta(T) = T\otimes T$ y $\varepsilon(T) = 1$ es claro que podemos extender los morfismos de álgebras

$$\Delta : \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \otimes \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon : \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \to \Bbbk$$

a morfismos de álgebras

$$\Delta : \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T] \to \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T] \otimes \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T] \qquad \text{y} \qquad \varepsilon : \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T] \to \Bbbk.$$

Así, $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]$ tiene una estructura de biálgebra. Más aún, usando que $\det_q$ es un elemento de tipo grupo tenemos que

$$\Delta(T\det_q - 1) = T\det_q \otimes T\det_q - 1 \otimes 1 = T\det_q \otimes (T\det_q - 1) + (T\det_q - 1) \otimes 1 \qquad \text{y}$$
$$\varepsilon(T\det_q - 1) = 0.$$

Por lo tanto, el ideal bilátero $(T\det_q - 1)$ de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]$ es también un coideal, i.e. es un bi-ideal, y consecuentemente $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ hereda una estructura de biálgebra de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]$.

(b) Por el mismo cálculo anterior tenemos que $\Delta(\det_q - 1) = \det_q \otimes (\det_q - 1) + (\det_q - 1) \otimes 1$ y $\varepsilon(\det_q - 1) = 0$. Así, el ideal biláterio generado por el elemento $\det_q - 1$ es un coideal tanto en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ como en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ hereda una estructura de biálgebra de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ que coincide con la estructura de biálgebra que hereda de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$.

Ejemplo 2.11. El álgebra $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(2))$ se puede presentar como la $\Bbbk$-álgebra generada por los elementos a, b, c, d que satisfacen las siguientes relaciones

$$ab = qba, \quad bd = qdb, \quad ac = qca, \quad cd = qdc, \quad bc = cb, \quad ad - da = (q - q^{-1})bc, \quad ad - qbc = 1.$$

Claramente, si $q = 1$ tenemos que $\mathcal{O}_1(\mathbf{SL}(2)) = \mathcal{O}(\mathbf{SL}(2))_\Bbbk$ y si $q \neq 1$, $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(2))$ es no conmutativa.

Denotaremos a los generadores de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ y $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ también por $X_{i,j}$ con $1 \leq i, j \leq n$.
Sea I el ideal bilátero de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ generado por los elementos $X_{i,j}$ con $i > j$. Por la fórmula del coproducto en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$, tenemos que I es un coideal en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ y por lo tanto, el cociente $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))/I$ define una biálgebra. Dicha biálgebra recibe el nombre de *subálgebra cuántica positiva de Borel* y coincide con el análogo cuántico de $\mathbf{T}_n^+(\Bbbk)$:

$$\mathcal{O}_q(\mathbf{T}^+(n)) = \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))/I.$$

Al objeto geométrico asociado lo denotamos $\mathbf{T}_q^+(n)$. Así, la proyección canónica de álgebras de Hopf $\pi_+ = \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{T}^+(n))$ define un morfismo inyectivo de grupos cuánticos

$$\mathbf{T}_q^+(n) \hookrightarrow \mathbf{GL}_q(n).$$

Análogamente, se define *subálgebra cuántica negativa de Borel* $\mathcal{O}_q(\mathbf{T}^-(n))$ por el cociente de $\mathbf{GL}_q(n)$ por el bi-ideal generado por los elementos $X_{i,j}$ con $i < j$. Nuevamente, la proyección canónicas $\pi_- = \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{T}^-(n))$ es un epimorfismo de álgebras de Hopf.

Ejemplo 2.12. Análogamente, se puede definir el subgrupo positivo $\tilde{\mathbf{T}}_q^+(2)$ de $\mathbf{SL}_q(2)$. El mismo está dado por el cociente $\mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^+(2)) = \mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(2))/(c)$ y puede ser presentado por la $\Bbbk$-álgebra generada por los elementos a, b, d que satisfacen las siguientes relaciones

$$ab = qba, \quad bd = qdb, \quad ad = da, \quad ad = 1.$$

El subgrupo de Borel negativo $\tilde{\mathbf{T}}_q^-(2)$ de $\mathbf{SL}_q(2)$ está dado por la $\Bbbk$-álgebra generada por los elementos a, c, d que satisfacen las siguientes relaciones

$$ac = qca, \quad cd = qdc, \quad ad = da, \quad ad = 1.$$

En este caso, el ideal de $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(2))$ que la define está generado por el elemento b.
Notar que en $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(2))$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta(a) &= \pi_+(a) \otimes \pi_-(a) + \pi_+(b) \otimes \pi_-(c) = a \otimes a + b \otimes c && \in \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^+(n)) \otimes \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^-(n)),\\
(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta(b) &= \pi_+(a) \otimes \pi_-(b) + \pi_+(b) \otimes \pi_-(d) = b \otimes d && \in \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^+(n)) \otimes \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^-(n)),\\
(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta(c) &= \pi_+(c) \otimes \pi_-(a) + \pi_+(d) \otimes \pi_-(c) = d \otimes c && \in \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^+(n)) \otimes \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^-(n)),\\
(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta(d) &= \pi_+(c) \otimes \pi_-(b) + \pi_+(d) \otimes \pi_-(d) = d \otimes d && \in \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^+(n)) \otimes \mathcal{O}_q(\tilde{\mathbf{T}}^-(n)).
\end{aligned}$$

El siguiente teorema nos dice que los objetos geométricos $\mathbf{GL}_q(n)$ y $\mathbf{SL}_q(n)$ son grupos cuánticos.

Teorema 2.13. *Existe un anti-morfismo $\tilde{\mathcal{S}}$ de álgebras en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ definido en los generadores por $\tilde{\mathcal{S}}(X_{i,j}) = (-q)^{i-j}A(j,i)$ para todo $1 \leq i,j \leq n$. El mismo induce un anti-morfismo $\mathcal{S}$ de álgebras en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ dado por la fórmula*

$$\mathcal{S}(X_{i,j}) = \det_q^{-1}\tilde{\mathcal{S}}(X_{i,j}) = (-q)^{i-j}A(j,i)\det_q^{-1}.$$

Éste define una antípoda en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ y consequentemente, $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ es un álgebra de Hopf. Más aún, el bi-ideal de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ generado por $\det_q - 1$ es estable por $\mathcal{S}$ y por lo tanto, $\mathcal{S}$ induce una antípoda en $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$. Así, $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ es un álgebra de Hopf que es un cociente de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$.

Demostración. Ver [PW, 5.2.2, 5.3.2].

□

Para ver que $\mathcal{S}$ es una antípoda basta recordar la igualdad dada en la demostración del Teorema 2.9

$$X\tilde{\mathcal{S}}(X) = \tilde{\mathcal{S}}(X)X = \det_q I,$$

pues $\tilde{\mathcal{S}}(X) = \det_q\mathcal{S}(X)$. En el caso de $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(2))$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{S}(a) & \mathcal{S}(b) \\ \mathcal{S}(c) & \mathcal{S}(d) \end{pmatrix} = \det_q \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(a) & \varepsilon(b) \\ \varepsilon(c) & \varepsilon(d) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}(a) & \mathcal{S}(b) \\ \mathcal{S}(c) & \mathcal{S}(d) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det_q \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(a) & \varepsilon(b) \\ \varepsilon(c) & \varepsilon(d) \end{pmatrix}.$$

Recordemos que un grupo algebraico afín G es conexo si y sólo si su álgebra de coordenadas $\mathcal{O}(G)$ es un dominio íntegro. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.14. Diremos que un grupo cuántico G_q es **conexo** si $\mathcal{O}_q(G)$ es un dominio íntegro.

El siguiente hecho se sigue del Teorema 2.3, para otra prueba ver [Tk].

Proposición 2.15. $\mathbf{GL}_q(n)$ *y* $\mathbf{SL}_q(n)$ *son conexos.*

Finalizamos esta subsección con una propiedad de la antípoda.

Proposición 2.16. [PW, Cor. 5.4.3] *Sea $G_q = \mathbf{GL}_q(n)$ o $\mathbf{SL}_q(n)$. La antípoda de $\mathcal{O}_q(G)$ tiene orden finito si y sólo si q es una raíz de la unidad. Si q es una raíz ℓ-ésima de la unidad, entonces* $\operatorname{ord}\mathcal{S} = 2\ell$ *si ℓ es impar y* $\operatorname{ord}\mathcal{S} = \ell$ *si ℓ es par.*

2.3.1. Descomposición triangular

Consideremos los subgrupos $\mathbf{T}_n^+(\Bbbk)$ y $\mathbf{T}_n^-(\Bbbk)$ de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ de matrices superiores e inferiores, respectivamente. Claramente, se tiene que $\mathbf{T}_n^+(\Bbbk) \cap \mathbf{T}_n^-(\Bbbk) = \mathbf{D}_n(\Bbbk)$, donde $\mathbf{D}_n(\Bbbk)$ es el grupo de matrices diagonales. Más aún, se tiene que la multiplicación en $\mathbf{GL}(n)$ define un epimorfismo

$$m : \mathbf{T}_n^+(\Bbbk) \times \mathbf{T}_n^-(\Bbbk) \to \mathbf{GL}_n(\Bbbk).$$

Para grupos algebraicos afines más generales, esta propiedad se denomina **propiedad de la gran celda**. En ese caso, los subgrupos de matrices triangulares se reemplazan por *subgrupos de Borel.*

Usualmente, este morfismo se recuerda como el hecho que toda matriz inversible es el producto de una matriz triangular superior por una matriz triangular inferior. En esta subsección extenderemos esta noción al contexto cuántico. Para ello, debemos comprender dicho morfismo sobre las álgebras de funciones.

Si denotamos $\iota_+ : \mathbf{T}_n^+(\Bbbk) \to \mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ e $\iota_- : \mathbf{T}_n^-(\Bbbk) \to \mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ las inclusiones, éstas inducen epimorfismos de álgebras

$$\iota_+^* := \pi_+ : \mathcal{O}(\mathbf{GL}(n)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{T}^+(n)), \qquad \iota_-^* := \pi_- : \mathcal{O}(\mathbf{GL}(n)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{T}^-(n)).$$

Si escribimos el morfismo de multiplicación $m(\iota_+ \times \iota_-) : \mathbf{T}_n^+(\Bbbk) \times \mathbf{T}_n^-(\Bbbk) \to \mathbf{GL}_n(\Bbbk)$ al dualizarlo tenemos un morfismo

$$(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta : \mathcal{O}(\mathbf{GL}(n)) \to \mathcal{O}(\mathbf{T}^+(n)) \otimes \mathcal{O}(\mathbf{T}^-(n)).$$

Esto se desprende inmediatamente de la definición del coproducto en los generadores. En efecto,

$$(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta(X_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \pi_+(X_{i,k}) \otimes \pi_-(X_{k,j}) = \sum_{i\leq k\leq j} X_{i,k} \otimes X_{k,j}.$$

Claramente, el grupo $\mathbf{SL}_n(\Bbbk)$ también posee la propiedad de la gran celda con respecto a los subgrupos $\tilde{\mathbf{T}}_n^+(\Bbbk) = \mathbf{T}_n^+(\Bbbk) \cap \mathbf{SL}_n(\Bbbk)$ y $\tilde{\mathbf{T}}_n^-(\Bbbk) = \mathbf{T}_n^-(\Bbbk) \cap \mathbf{SL}_n(\Bbbk)$.
Como la deformación de $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ no altera la estructura de coálgebra, usando los epimorfismos

$$\pi_+ = \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{T}^+(n)) \qquad \text{y} \qquad \pi_- = \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{T}^-(n)),$$

dados en la definición de $\mathbf{T}_q^+(n)$ y $\mathbf{T}_q^-(n)$ se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.17. *Sea m_q el morfismo cuántico correspondiente a $(\pi_+ \otimes \pi_-)\Delta$. Entonces la aplicación $m_q : \mathbf{T}_q^+(n) \otimes \mathbf{T}_q^-(n) \to \mathbf{GL}_q(n)$ es un morfismo inyectivo de grupos cuánticos.*

Demostración. Ver [Tk].

□

2.3.2. Morfismos de Frobenius

Comencemos primer recordando algunos hechos sobre polinomios de Gauss y q-números.
Sean $q \in \Bbbk^\times$ y $\Bbbk_q[x,y] = \Bbbk\langle x, y;\ xy = qyx\rangle$ el plano cuántico. Se pretende calcular potencias de $x+y$. Como $\Bbbk_q[x,y]$ es un álgebra graduada que tiene una base lineal dada por $\{x^m y^n :\ m,n \in \mathbb{N}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i y^{n-i},$$

donde $\left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}\right] \in \Bbbk$ es un polinomio unívocamente determinado. Así, si $m,n \in \mathbb{N}$ son tales que $m \leq n$, se definen los ***polinomios de Gauss*** en q por $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$. Si $m > n$, el polinomio se define como 0.
Veamos cómo se describen explícitamente usando q-números. Para $n \in \mathbb{N}$ se define el q-número

$$(n)_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Es claro que si $q = 1$ tenemos que $(n)_q = n$ para todo $n \geq 1$. Siguiendo esta línea, se define el **q-factorial** de n como $(0)_q! = 1$ si $n = 0$ y

$$(n)_q! = (n)_q(n-1)_q(n-2)_q \cdots (2)_q(1)_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdots(q^2-1)(q-1)}{(q-1)^n},$$

si $n > 0$. El número q-factorial es un polinomio en q con coeficientes enteros y si $q = 1$ se tiene que $(n)_q! = n!$. Los **q-coeficientes binomiales** se definen para todo $n \geq m \geq 0$ como

$$\binom{n}{m}_q = \frac{(n)_q!}{(n-m)_q!(m)_q!}.$$

Proposición 2.18. *Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$ con $0 \geq m \geq n$.*

(a) $\binom{n}{m}_q$ *es un polinomio en q con coeficientes enteros y* $\binom{n}{m}_1 = \binom{n}{m}$.

(b) $\binom{n}{m}_q = \binom{n}{n-m}_q$.

(c) $\binom{n}{m}_q = \binom{n-1}{m-1}_q + q^m \binom{n-1}{m}_q = \binom{n-1}{m}_q + q^{n-m} \binom{n-1}{m-1}_q$.

Demostración. (b) y (c) se siguen de cálculos simples, y (a) por inducción usando (c).

□

En lo que sigue, mostramos que los polinomios de Gauss están dados por los q-coeficientes binomiales.

Proposición 2.19. *Sean x, y variables tales que $xy = qyx$. Entonces, para todo $n > 0$ se tiene*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_q y^i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_{q^{-1}} x^i y^{n-i}.$$

En particular, $\left[{n \atop m}\right] = \binom{n}{m}_{q^{-1}}$.

Demostración. Ejercicio. Ver [K, Prop. IV.2.2].

□

Para lo que resta del capítulo supondremos que q **es una raíz ℓ-ésima primitiva de la unidad con $\ell > 1$ impar**. En particular, se tiene que

$$\binom{\ell}{m}_q = 0 \qquad \text{para todo } 1 \leq m < \ell. \tag{4}$$

Recordemos que si A es una $\Bbbk$-álgebra, su centro es $\mathcal{Z}(A) = \{a \in A : \ ba = ab, \forall\, b \in A\}$.

Lema 2.20. *El elemento $X_{i,j}^{\ell}$ es central en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.*

Demostración. (Idea). Para ver que es central, basta ver que $X_{i,j}^{\ell}$ conmuta con todos los generadores. Es claro que si $j < t$ o $i < s$ entonces

$$X_{i,j}^{\ell} X_{i,t} = q^{\ell} X_{i,t} X_{i,j}^{\ell} = X_{i,t} X_{i,j}^{\ell} \qquad \text{y} \qquad X_{i,j}^{\ell} X_{s,j} = q^{\ell} X_{s,j} X_{i,j}^{\ell} = X_{s,j} X_{i,j}^{\ell}.$$

Más aún, como $X_{i,j} X_{s,t} = X_{s,t} X_{i,j}$ si $i < s$ y $j > t$, tenemos que $X_{i,j}^{\ell}$ también conmuta con $X_{s,t}$. El caso que merece más atención es cuando $i < s$ y $j < t$ o $i > s$ y $j > t$. Para ver la demostración del mismo referimos directamente a [PW, Lemma 7.2.1].

□

Notar que el lema anterior nos dice que la subálgebra generada por los elementos X_{ij}^{ℓ} con $1 \leq i, j \leq n$ es una subálgebra central en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$. El siguiente lema establece que la misma es una subcoálgebra y consecuentemente una sub-biálgebra.

Lema 2.21. [PW, Lemma 7.2.2] *Vale que*

$$\Delta(X_{i,j}^{\ell}) = \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}^{\ell} \otimes X_{k,j}^{\ell}, \qquad \varepsilon(X_{i,j}^{\ell}) = \delta_{i,j}.$$

Demostración. La segunda igualdad es trivial, pues ε es un morfismo de álgebras. Para la primera, recordemos que Δ es un morfismo de álgebras, por lo tanto

$$\Delta(X_{i,j}^{\ell}) = \Delta(X_{i,j})^{\ell} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_{i,k} \otimes X_{k,j} \right)^{\ell} \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n. \tag{5}$$

Por otro lado, para todo $t \geq 1$ tenemos que

$$\left(\sum_{k<t} X_{i,k} \otimes X_{k,j} \right) (X_{i,t} \otimes X_{t,j}) = q^2 (X_{i,t} \otimes X_{t,j}) \left(\sum_{k<t} X_{i,k} \otimes X_{k,j} \right).$$

Usando la Proposición 2.19 tenemos que

$$\left(\sum_{k\leq t} X_{i,k}\otimes X_{k,j}\right)^m = \sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}_{q^2}(X_{i,t}\otimes X_{t,j})^s\left(\sum_{k<t} X_{i,k}\otimes X_{k,j}\right)^{m-s}.$$

En particular, tomando $m=\ell$ y usando (4) tenemos que

$$\left(\sum_{k\leq t} X_{i,k}\otimes X_{k,j}\right)^\ell = \left(\sum_{k<t} X_{i,k}\otimes X_{k,j}\right)^\ell + (X_{i,t}\otimes X_{t,j})^\ell = \left(\sum_{k<t} X_{i,k}\otimes X_{k,j}\right)^\ell + X_{i,t}^\ell\otimes X_{t,j}^\ell.$$

Luego, el lema se sigue de aplicar esta última igualdad a la ecuación (5).

□

Definición 2.22. Consideremos el álgebra de Hopf conmutativa $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$ y denotemos por $x_{i,j}$ a sus generadores. Se define el ***morfismo de Frobenius*** entre $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$ y $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ como el morfismo de álgebras dado por

$$F_\ell : \mathcal{O}(\mathbf{M}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)), \qquad F(x_{i,j}) = X_{i,j}^\ell \qquad \text{para todo} \quad 1\leq i,j\leq n.$$

Por el lema anterior se tiene que F_ℓ es un morfismo de biálgebras que resulta injectivo. En particular, la imagen de todo elemento de tipo grupo es un elemento de tipo grupo. El siguiente lema nos dice que la imagen del determinante es el determinante cuántico.

Lema 2.23. $F_\ell(\det) = \det_q^\ell$.

Demostración. Por el Teorema 2.13 sabemos que $\tilde{\mathcal{S}}$ define un anti-morfismo de álgebras en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ y que $\tilde{\mathcal{S}}(X_{i,j}) = \det_q \mathcal{S}(X_{i,j})$ para todo $1\leq i,j\leq n$. Como $\delta_{i,j} = m\circ(\mathrm{id}\otimes\mathcal{S})\Delta(X_{i,j})$ en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$, por el lema anterior tenemos que

$$\det_q^\ell = m(\mathrm{id}\otimes\tilde{\mathcal{S}})\Delta(X_{i,i})^\ell = m(\mathrm{id}\otimes\tilde{\mathcal{S}})\Delta(X_{i,i}^\ell) = \sum_{j=1}^{n}(-q)^{\ell(j-i)}X_{i,j}^\ell A(i,j)^\ell = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-i}X_{i,j}^\ell A(i,j)^\ell.$$

Si $n=2$, se obtiene la igualdad que se quería probar. Si $n>2$, se sigue por inducción usando que $A(i,j)^\ell$ es la imagen del subdeterminante en $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$.

□

Usando el morfismo de Frobenius, podemos relacionar los grupos clásicos con los cuánticos.

Corolario 2.24. *El morfismo de Frobenius induce los morfismos injectivos de álgebras de Hopf*

$$\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n)) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)) \qquad y \qquad \mathcal{O}(\mathbf{SL}(n)) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n)).$$

Demostración. Vamos primero el caso para $\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n))$. Como $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \subseteq \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T]/(T\det_q^{-1} - 1) = \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$, tenemos que la imagen de $F_\ell(\det)$ es un elemento inversible en $\mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ con inversa T^ℓ. Así, por la propiedad universal del cociente, tenemos que existe un morfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n))$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathbf{M}(n)) \arrow[r, "F_\ell"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))[T] \arrow[d] \\
\mathcal{O}(\mathbf{GL}(n)) \arrow[rr, dashed, "\exists!\ F_\ell"] & & \mathcal{O}_q(\mathbf{GL}(n)).
\end{tikzcd}$$

Análogamente, como det pertenece al núcleo de la composición dada por el morfismos de Frobenius $\mathcal{F}_\ell$ y el cociente $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{M}(n))/(\det -1) = \mathcal{O}(\mathbf{SL}(n))$ tenemos por la propiedad universal del cociente que existe un morfismo de álgebras de Hopf $\mathcal{O}(\mathbf{SL}(n)) \to \mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\mathbf{M}(n)) \arrow[r, "F_\ell"] \arrow[d] & \mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(\mathbf{SL}(n)) \arrow[r, dashed, "\exists!\ F_\ell"] & \mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n)). \end{tikzcd}$$

Dejamos como ejercicio para el lector mostrar que los morfismos son injectivos.

□

Dicho de otra manera, los morfismos de Frobenius F_ℓ inducen los ***morfismos sobreyectivos de grupos cuánticos***

$$\mathbf{GL}_q(n) \twoheadrightarrow \mathbf{GL}_n(\Bbbk) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{SL}_q(n) \twoheadrightarrow \mathbf{SL}_n(\Bbbk).$$

De hecho, ambos morfismos de grupos cuánticos tienen núcleo finito. Traducido al lenguaje de álgebras de funciones se lee

Teorema 2.25. *Sea $G = \mathbf{SL}_n(\Bbbk)$ o $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$. Entonces $\mathcal{O}_q(G)$ es un módulo libre sobre $\mathcal{O}(G)$ de rango $\ell^{\dim G}$. Más aún, como $\mathcal{O}(G)$ es central en $\mathcal{O}_q(G)$, el cociente $\mathcal{O}_q(G)/\mathcal{O}(G)^+\mathcal{O}_q(G) = \overline{\mathcal{O}_q(G)}$ es un álgebra de Hopf de dimensión $\ell^{\dim G}$ y se tiene la siguiente sucesión exacta*

$$\Bbbk \to \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}_q(G) \to \overline{\mathcal{O}_q(G)} \to \Bbbk.$$

Demostración. Ver [Tk], [PW, 7.3.1].

□

Observaciones 2.26. (a) Se puede ver que las álgebras $\overline{\mathcal{O}_q(G)}$ son isomorfas a las álgebras de Hopf duales a los **núcleos de Frobenius-Lusztig** $\mathbf{u}_q(\mathfrak{g})$, ver [G1].

(b) Si G_q denota un grupo cuántico, un subgrupo cuántico Γ_q de G_q se corresponde a un cociente de álgebras de Hopf $\mathcal{O}_q(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q(\Gamma)$. El problema de determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico fijo fue considerado por primera vez por Podleś [Po] para $\mathbf{SU}_q(2)$ y $\mathbf{SU}_q(3)$ donde $-1 < q < 1$. La caracterización de todos los subgrupos cuánticos finitos de $\mathbf{SL}_q(n)$ fue dada por Müller [Mu], y más tarde en [AG] se dio la clasificación de todos los subgrupos cuánticos de G_q donde G es un grupo algebraico afín simple, simplemente conexo complejo. Este tipo de grupo cuántico está dado por la deformación en un parámetro del álgebra de coordenadas de G. Luego se han estudiado los subgrupos cuánticos del grupo cuántico $\mathbf{GL}_{\alpha,\beta}(n)$, es decir, de la deformación en dos parámetros del álgebra de coordenadas de $\mathbf{GL}_n(\Bbbk)$, y se ha probado que, bajo ciertas restricciones en los parámetros, los subgrupos cuánticos se describen de forma similar a los correspondientes a deformaciones en un parámetro, ver [G2]. Por otro lado, los subgrupos cuánticos de $\mathbf{SO}_{-1}(3)$ fueron clasificados por Banica y Bichon [BB] y más recientemente, Bichon y Yuncken [BY] han determinado los subgrupos cuánticos de $\mathbf{SU}_{-1}(3)$.

2.4. Ejercicios

1. Probar la Proposición 2.2.

2. Probar que $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$ coactúa sobre el $\Bbbk$-espacio vectorial $V = \mathbb{A}^n$ y la acción se extiende al álgebra tensorial $T(V)$, el anillo de polinomios en n variables (i.e. álgebra simétrica) $SV = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ y al álgebra exterior o *álgebra de Grassman* $\bigwedge V$. Mostrar que $\delta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.

3. Probar que $\mathbf{M}_q(n)$ actúa tanto en S_qV como en $\bigwedge_q V$, y la coacción es estable en cada componente homogénea.
4. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial con base $\{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\}$ y consideremos su q-álgebra antisimétrica $\bigwedge_q V$. Mostrar que la componente homogénea de grado n está dada por $\bigwedge_q^n V = \Bbbk\{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\}$ y que la coacción está dada por $\delta(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \det_q \otimes x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$.
5. Probar que $\det_q$ es un elemento central de tipo grupo en $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$.
6. Sean $n \geq 2$, $\mathcal{I} = \{i_1, i_2\}$ y $\{j_1, j_2\}$ dos subconjuntos de $\mathbb{I}_n$. Entonces
$$D(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = X_{i_1,j_1}X_{i_2,j_2} - qX_{i_1,j_2}X_{i_2,j_1}.$$
7. Sea I el ideal bilátero de $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$ generado por los elementos $X_{i,j}$ con $i > j$. Probar que I es un coideal en $\mathcal{O}_q(\mathbf{SL}(n))$.
8. Mostrar que $\mathcal{O}_q(\mathbf{D}(n)) = \mathcal{O}(\mathbf{D}(n)) = \Bbbk[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}]$.
9. Probar la Proposición 2.18.
10. Probar la Proposición 2.19.

3. Construcción FRT

Las relaciones de conmutatividad que definen $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ provienen de un caso particular de una construcción más general de biálgebras no-conmutativas (o casi-conmutativas) inducidas por soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter (QYBE); una tal solución se denomina una R-matriz. Faddeev, Reshetikhin y Takhtadzhyan dieron en [FRT] un método para construir biálgebras casi-conmutativas a partir de R-matrices. En esta sección describiremos brevemente el método. Para mayor detalle ver por ejemplo [FRT], [K, VIII.6], [Mj, Ch. 4].

3.1. Construcción universal

Comenzaremos por la descripción de la biálgebra *universal* $A(c)$ asociada a un cierto endomorfismo $c \in \mathrm{End}(V \otimes V)$, siendo V un espacio vectorial de dimensión finita. En particular, c dará lugar a una solución de QYBE.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión n con $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Para dar la construcción de $A(c)$, primero se construye como una álgebra que es cociente del álgebra libre en n^2 generadores. Notar que si c es un endomorfismo de $V \otimes V$, entonces c queda derminado por su valor en la base $\{v_i \otimes v_j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ de $V \otimes V$. En particular, existen $c_{ij}^{kl} \in \Bbbk$ tales que
$$c(v_i \otimes v_j) = \sum_{1 \leq k,l \leq n} c_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l. \tag{6}$$

Sea $\{T_i^j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ un conjunto de indeterminadas sobre $\Bbbk$. El álgebra asociativa unitaria libre generada sobre estos elementos es el álgebra tensorial $F = T(W)$, donde W es el $\Bbbk$-espacio vectorial generado por $\{T_i^j\}_{1 \leq i,j \leq n}$.

Definición 3.1. El álgebra $A(c)$ es el cociente del álgebra libre F generada por los elementos $\{T_i^j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ por el ideal $I(c)$ generado por los elementos C_{ij}^{kl} donde
$$C_{ij}^{kl} = \sum_{1 \leq r,s \leq n} c_{ij}^{rs} T_r^k T_s^l - \sum_{1 \leq r,s \leq n} T_i^r T_j^s c_{rs}^{kl} \tag{7}$$

Si denotamos $\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}$ a la matriz de n^4 coeficientes dada por
$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1^1\mathbf{T} & \cdots & T_n^n\mathbf{T} \\ \vdots & & \vdots \\ T_n^1\mathbf{T} & \cdots & T_n^n\mathbf{T} \end{pmatrix},$$

y C a la matriz dada por
$$\begin{pmatrix} c_{11}^{11} & c_{11}^{12} & \cdots & c_{11}^{n1} & \cdots & c_{11}^{nn} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_{nn}^{11} & c_{nn}^{12} & \cdots & c_{nn}^{n1} & \cdots & c_{nn}^{nn} \end{pmatrix},$$
las relaciones de $A(c)$ en modo matricial se escriben como
$$C(\mathbf{T}\otimes\mathbf{T}) = (\mathbf{T}\otimes\mathbf{T})C. \tag{8}$$
El siguiente lema muestra como dotar a $A(c)$ de una estructua de coálgebra. Más aún, esta estructura es única.

Lema 3.2. Existe una única estructura de coálgebra en $A(c)$ tal que
$$\Delta(T_i^j) = \sum_{k=1}^{n} T_i^k \otimes T_k^j \qquad \text{y} \qquad \varepsilon(T_i^j) = \delta_{ij}. \tag{9}$$

Demostración. Claramente, las fórmulas en (9) definen morfismos de álgebras
$$\Delta : F \to F\otimes F \qquad \text{y} \qquad \varepsilon : F \to \Bbbk.$$
Para probar que resultan coasociativos y counitarios basta probarlo en los generadores y esta es la misma demostración que se usó para $\mathcal{O}(\mathbf{M}(n))$. Para terminar la demostración, hay que ver que $I(c)$ es un coideal, esto es
$$\Delta(I(c)) \subset I(c)\otimes F + F\otimes I(c) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon(I(c)) = 0,$$
que dejamos como ejercicio para el lector.

□

Observación 3.3. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Con la estructura de biálgebra de $A(c)$ definida más arriba, definimos sobre V una estructura de $A(c)$-comódulo a izquierda $\delta_V : V \to A(c)\otimes V$ dada por
$$\delta_V(v_i) = \sum_{j=1}^{n} T_i^j \otimes v_j \qquad \text{para todo } 1 \le i \le n.$$

Finalizamos esta subsección con el enunciado del teorema que hemos probado en parte.

Teorema 3.4. [K, Thm. VIII.6.1] *Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y c un endomorfismo de $V\otimes V$. Entonces existe una biálgebra $A(c)$ junto con una aplicación lineal $\delta_V : V \to A(c)\otimes V$ tal que*

- *(i) V es un $A(c)$-comódulo a través de la aplicación δ_V,*
- *(ii) c es un morfismo de comódulos con respecto a la estructura dada por δ_V,*
- *(iii) Si A' es otra biálgebra que coactúa en V a través de δ'_V y tal que se satisface la condición (ii), entonces existe un único morfismo de biálgebras $f : A(c) \to A'$ tal que el siguiente diagrama conmuta*
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta_V"] \arrow[dr, "\delta'_V"'] & A(c)\otimes V \arrow[d, dashed, "f\otimes \mathrm{id}"] \\ & A'\otimes V. \end{tikzcd}$$
En particular, la biálgebra $A(c)$ es única salvo isomorfismo.

Observación 3.5. Supongamos que el endomorfismo $c \in \operatorname{End}(V\otimes V)$ es una solución de QYBE, es decir, se tiene que
$$(c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id}\otimes c)(c\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes c) \qquad \text{en } V\otimes V\otimes V.$$
La ecuación anterior también es conocida como ***ecuación de trenzas***. Así (V, c) es un ***espacio vectorial trenzado***. Más aún, la biálgebra $A(c)$ es *cotrenzada* y por lo tanto la categoría de comódulos sobre $A(c)$ es una ***categoría trenzada***, ver [K, Chap. VIII].

3.2. Ejemplos: $\mathbf{M}_q(n)$

En esta sección mostramos que la biálgebra $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$ se puede obtener como una biálgebra $A(c)$ para una trenza $c \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ en un espacio vectorial de dimensión n.

Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sea $q \in \Bbbk^\times$ y consideremos el endomorfismo lineal $c : V \otimes V \to V \otimes V$ dado por

- $c(v_i \otimes v_i) = q^{-1} v_i \otimes v_i$ para todo $1 \le i \le n$,
- $c(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} v_j \otimes v_i & \text{si } i < j, \\ v_j \otimes v_i + (q^{-1} - q) v_i \otimes v_j & \text{si } i > j. \end{cases}$

Por ejemplo, para $n = 2$ tenemos que la matriz de c en la base $\{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2\}$ es

$$C = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Resulta que el endomorfismo c definido más arriba es una solución de la ecuación de trenzas.

Teorema 3.6. *La biálgebra $A(c)$ asociada a la R-matriz anterior es isomorfa a $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$.*

Demostración. Basta probar que la biálgebra dada por el método FRT coincide con la definición de $\mathcal{O}_q(\mathbf{M}(n))$. Sean $T_i^j = X_{i,j}$ para todo $1 \le i, j \le n$ y denotemos por $\mathbf{X}$ la matrix de elementos $(X_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Entonces, si escribimos $\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}$ como en (8), las relaciones de $A(c)$ en modo matricial se escriben como $C(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}) = (\mathbf{X} \otimes \mathbf{X})C$. Por ejemplo, algunas de las n^4 relaciones de $A(c)$ se leen

$$\begin{aligned} C_{ii}^{kl} &= q^{-1} X_{i,k} X_{i,l} - X_{i,l} X_{i,k} & \text{si } k > l, \\ C_{ij}^{kk} &= X_{j,k} X_{i,k} - q^{-1} X_{i,k} X_{j,k} & \text{si } i < j. \end{aligned}$$

Analizando las otras relaciones se puede ver que las mismas son equivalentes con las dadas en la Definición 2.1.

□

Ejemplo 3.7. Si $n = 2$, las relaciones de $A(c)$ en modo matricial se leen de la siguiente manera:

$$C \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} C$$

En forma expandida esto es

$$\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11}^2 & X_{11}X_{12} & X_{12}X_{11} & X_{12}^2 \\ X_{11}X_{21} & X_{11}X_{22} & X_{12}X_{21} & X_{12}X_{22} \\ X_{21}X_{11} & X_{21}X_{12} & X_{22}X_{11} & X_{22}X_{12} \\ X_{21}^2 & X_{21}X_{22} & X_{22}X_{21} & X_{22}^2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} X_{11}^2 & X_{11}X_{12} & X_{12}X_{11} & X_{12}^2 \\ X_{11}X_{21} & X_{11}X_{22} & X_{12}X_{21} & X_{12}X_{22} \\ X_{21}X_{11} & X_{21}X_{12} & X_{22}X_{11} & X_{22}X_{12} \\ X_{21}^2 & X_{21}X_{22} & X_{22}X_{21} & X_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

3.3. Ejercicios

1. Probar que $I(c)$ es un coideal de F, esto es
$$\Delta(I(c)) \subset I(c) \otimes F + F \otimes I(c) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon(I(c)) = 0.$$
2. Probar la afirmación de la Observación 3.3.

3. Probar que el endomorfismo dado en (6) es un morfismo de comódulos con la coacción sobre $V \otimes V$ dada por
$$\delta_{V\otimes V}(v_i \otimes v_j) = \sum_{1\leq k,l\leq n} T_i^k T_j^l \otimes v_k \otimes v_l.$$
4. Probar que el endomorfismo dado en (10) da una solución de la ecaución de trenzas.
5. Finalizar la demostración del Teorema 3.6.
6. Considerar la matriz C dada por
$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$
Mostrar que C es solución de la ecuación de trenzas para un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión 2 si y sólo si vale que
$$\begin{gathered} adb = adc = ad(a-d) = 0, \\ p^2a = pa^2 + abc, \qquad q^2a = qa^2 + abc, \\ p^2d = pd^2 + dbc, \qquad q^2d = qd^2 + dbc. \end{gathered}$$

Agradecimientos

Quisiera agradecer a los organizadores de la VII Jornada de Álgebra por haberme invitado y haberme dado la posibilidad de compartir este curso.

Referencias

[AM] M. F. Atiyah, and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969 ix+128 pp.

[AG] N. Andruskiewitsch and G. A. García. *Quantum subgroups of a simple quantum group at roots of 1*, Compositio Math. **145** (2009), 476–500.

[BB] T. Banica and J. Bichon, *Quantum groups acting on 4 points*, J. Reine Angew. Math. **626** (2009), 75-114.

[BY] J. Bichon and R. Yuncken, *Quantum subgroups of the compact quantum group $SU_{-1}(3)$*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), no. 2, 315–328.

[BG] K. A. Brown and K. R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona. Basel: Birkhäuser.

[CP] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+651 pp.

[D] V. Drinfeld, 'Quantum groups', *Proc. Int. Congr. Math.*, Berkeley 1986, Vol. 1 (1987), 798-820.

[FRT] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhtadzhyan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras.* Algebra i Analiz **1** (1989), no. 1, 178–206; translation in Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 1, 193–225

[G1] G. A. García, *Álgebras de Hopf y grupos cuánticos*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Córdoba (2007). Disponible en `http://www.mate.unlp.edu.ar/ ggarcia/articulos/tesisdoc/tesisdocesq.pdf`

[G2] G. A. García, *Quantum subgroups of $GL_{\alpha,\beta}(n)$*, J. Algebra **324** (2010), 1392–1428.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp.

[Hu] J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. xiv+247 pp.

[J] J.C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Mathematics. **6** (1996). Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

[K] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics. **155** (1995). New York, NY: Springer-Verlag.

[KS] A. Klimyk and K. Schümdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[L3] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, **110** (1993). Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA.

[Mj] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. x+607 pp.

[Mn] Y. Manin, *Quantum groups and noncommutative geometry*, Universit de Montral, Centre de Recherches Mathmatiques, Montreal, QC, 1988. vi+91 pp.

[Mo] S. Montgomery, *Hopf Algebras y their Actions on Rings*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **82** (1993). American Mathematical Society (AMS).

[Mu] E. Müller, *Finite subgroups of the quantum general linear group*, Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), no. 1, 190–210.

[PW] B. Parshall y H-P. Wang *Quantum linear groups*. Mem. Amer. Math. Soc. **89** (1991), no. 439.

[Po] P. Podleś, *Symmetries of quantum spaces. Subgroups and quotient spaces of quantum $SU(2)$ and $SO(3)$ groups*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), 1–20.

[T] T. Timmermann, *An invitation to quantum groups and duality. From Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond.* EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. xx+407 pp. ISBN: 978-3-03719-043-2.

[Tk] M. Takeuchi, *A short course on quantum matrices*, Notes taken by Bernd Strüber, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**, New directions in Hopf algebras, 383–435, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional de La Plata.
C.C. 172
1900 La Plata
República Argentina
e-mail: ggarcia@mate.unlp.edu.ar
http://www.mate.unlp.edu.ar/∼ggarcia/