

## VALIDACIÓN NUMÉRICA DE UN MÉTODO DE ELEMENTOS DE BORDE PARA FLUJO DE STOKES OSCILATORIO ALREDEDOR DE CUERPOS RÍGIDOS

Sofía Sarraf <sup>a,b</sup>, Ezequiel López <sup>a,b</sup>, Laura Battaglia <sup>b,c</sup>, Gustavo Ríos Rodríguez <sup>b</sup> y Jorge D'Elía <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Instituto de Investigación en Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería (IITCI (UNCo-CONICET)),  
Universidad Nacional del Comahue (UNCo), Buenos Aires 1400, Neuquén (Q8300IBX), Argentina  
e-mail: (sofia.sarraf, ezequiel.jose.lopez)@fain.uncoma.edu.ar  
web page: <http://www.patagonianorte.conicet.gob.ar/iitci>

<sup>b</sup> Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC (UNL-CONICET))  
Universidad Nacional del Litoral (UNL),  
Predio CONICET-Santa Fe, Colectora RN 168, Paraje El Pozo, Santa Fe (3000), Argentina  
e-mail: gusadrr@santafe-conicet.gov.ar, jdelia@cimec.unl.edu.ar  
web page: <http://www.cimec.org.ar>

<sup>c</sup> Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI)  
Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe (FRSF)  
Lavaysse 610, Santa Fe (3000), Argentina  
e-mail: lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar

**Palabras Clave:** Método de Elementos de Borde, Ponderación de Galerkin, Transformación de Duffy, Transformación asinh, Flujo de Stokes oscilatorio, Flujo tridimensional.

**Resumen.** En un trabajo previo (D'Elía et al., "A boundary element method for oscillating Stokes flow at low frequencies around a rigid body", Mecánica Computacional, vol. XXIX, 2010) se presentaron las primeras etapas para una modelización numérica mediante el método de elementos de borde (*Boundary Element Method* (BEM)) del flujo reptante oscilatorio de un fluido viscoso newtoniano alrededor de cuerpos cerrados e inmersos en dominios tridimensionales no acotados. En el problema del continuo se eliminaban los modos rígidos de la ecuación integral de borde (BIE (*Boundary Integral Equation*)) clásica recurriendo a una extensión de las propuestas de Power-Miranda/Hebeker, mientras que en el problema discreto las integrales de interacción eran evaluadas mediante una extensión de una propuesta de Taylor, con un uso sistemático de la transformación de Duffy. Como una alternativa a la transformación de Duffy se puede recurrir a la transformación asinh. En este trabajo se presenta una validación numérica preliminar de la transformación asinh recurriendo a una primera serie de análisis de convergencia en malla en el caso de ponderación de Galerkin en BEM (GBEM (*Galerkin Boundary Element Method*)). En particular se utiliza el test clásico de la esfera unitaria y aislada que permanece en reposo en el seno de un fluido viscoso e incompresible que oscila armónicamente en el modo de traslación.

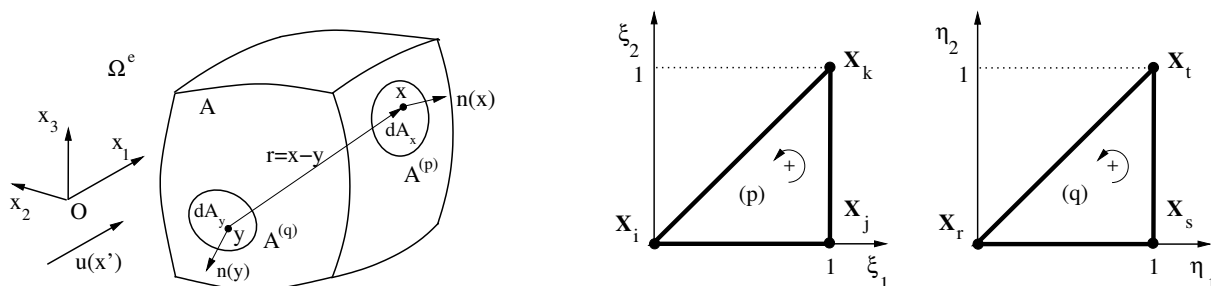


Figura 1: Izq.: un cuerpo rígido cerrado, suave por partes  $A$  en un dominio exterior  $\Omega^e$ : punto de observación  $x$ , punto fuente  $y$ , posición relativa  $r = x - y$ , versores normales  $n(x)$ ,  $n(y)$ , y diferenciales de área  $dA_x$ ,  $dA_y$ . Der.: triángulos unitarios  $p$  y  $q$  para las coordenadas símplices.

## 1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Stokes no estacionaria expresada en el dominio de la frecuencia resulta de utilidad para modelar flujos oscilatorios en micro-hidrodinámica (Pozrikidis, 1996), como los que pueden presentarse en flujos alrededor de dispositivos micro-electromecánicos (MEMS, por *Micro-Electro-Mechanical Systems*) (Wang, 2002; Xiao y Ye, 2011), flujos de coloides, etc. La ecuación de gobierno para un flujo reptante oscilatorio (o flujo de Stokes oscilatorio) (Klotsa, 2009; Pozrikidis, 1996) alrededor de un cuerpo rígido puede expresarse como una Ecuación Integral de Borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*), siendo la base para la formulación del Método de Elementos de Borde (BEM, por *Boundary Element Method*). Este método propone discretizar las ecuaciones integrales de borde mediante alguna técnica, siendo dos procedimientos estándar las técnicas de colocación y de ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM). En GBEM la ecuación integral de borde es ponderada por las funciones de la base del espacio discreto en el dominio de integración dando lugar, en el caso tridimensional (3D), a una doble integral de superficie.

En D'Elía et al. (2010) se utilizó una BIE sin modos rígidos, eliminados mediante una extensión de la propuesta de Power-Miranda/Hebeker (Power y Miranda, 1987; Pozrikidis, 1996), para resolver flujos de Stokes oscilatorios alrededor de cuerpos rígidos inmersos en un dominio 3D no acotado. Las integrales dobles de superficie con una singularidad débil requeridas en GBEM son resueltas en dicho trabajo mediante una extensión del esquema propuesto por Taylor (2003), el cual es aplicable a elementos triangulares. La estrategia se basa en un reordenamiento conveniente de las cuatro integrales de modo tal de llevar la singularidad débil al origen de coordenadas y luego aplicar sistemáticamente la transformación de Duffy (1982). A diferencia de la propuesta de Taylor (2003), en D'Elía et al. (2010, 2011) se empleó una cuadratura numérica cuádruple complementado con Transformación de Duffy (TD), implicando una mayor generalidad de esa estrategia.

En el presente trabajo se expone un GBEM basado en una cuadratura de Taylor cuádruple pero complementado con la Transformación Asinh (TA). El integrador emplea el esquema de Taylor (2003) extendido (D'Elía et al., 2011) pero, en lugar de aplicar la TD se utiliza la Transformación Asinh (TA). El método se aplica para hacer estudios de convergencia en malla y dependencia con la frecuencia de oscilación en el caso de la esfera unitaria que permanece en reposo en el seno de un fluido viscoso e incompresible que oscila armónicamente en el modo de traslación.

## 2. FORMULACIÓN INTEGRAL DE POWER-MIRANDA/HEBEKER

La formulación integral de Power-Miranda/Hebeker (PMH-IF, por *Power-Miranda/Hebeker integral formulation*) consiste en una BIE sin modos rígidos que describe el flujo de Stokes alrededor de un cuerpo rígido cerrado y suave por partes  $A$  en  $\mathbb{R}^3$ , e.g. ver Sarraf et al. (2017a). La misma puede ser clasificada como una *Completed Indirect Velocity* BIE (CIV-BIE) (Ingber y Mammoli, 1999), o *Completed Double-Layer* BIE (CDL-BIE) (Power y Wrobel, 1995; Pozrikidis, 1992). En lo que sigue se emplea notación tensorial cartesiana, i.e. los índices  $i, j, k$  pueden adoptar los valores 1, 2, 3 y corresponden a las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , respectivamente. Una formulación integral indirecta para la ecuación de Stokes sugiere considerar los núcleos de simple-capa  $\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y de doble-capa  $\tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Para el caso de flujo reptante oscilatorio dichos núcleos están dados por (Pozrikidis, 1992; Sarraf et al., 2017b, 2014a)

$$\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ij}}{r} \mathcal{A}(s) + \frac{r_i r_j}{r^3} \mathcal{B}(s) \right] \quad (1a)$$

$$\tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(\delta_{ij} r_k + \delta_{kj} r_i)}{r^3} c_1(s) + \frac{\delta_{ik} r_j}{r^3} c_2(s) + \frac{r_i r_j r_k}{r^5} c_3(s) \right\} n_k(\mathbf{y}) \quad (1b)$$

en los cuales

$$\mathcal{A}(s) = 2e^{-s} \left( 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) - \frac{2}{s^2} \quad (2a)$$

$$\mathcal{B}(s) = -2e^{-s} \left( 1 + \frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} \right) + \frac{6}{s^2} \quad (2b)$$

$$c_1(s) = e^{-s}(s+1) - \mathcal{B}(s) \quad (2c)$$

$$c_2(s) = 1 - \mathcal{B}(s) \quad (2d)$$

$$c_3(s) = 5\mathcal{B}(s) - 2e^{-s}(s+1) \quad (2e)$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  y  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ , con los puntos de integración y de observación  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , respectivamente (ver Fig. 1, izq.), mientras que  $n_k = n_k(\mathbf{y})$  es el versor normal a la superficie  $A$  en el punto  $\mathbf{y}$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\|\cdot\|_2$  es norma euclídea para vectores,  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido, y se emplea la convención de la suma sobre índices repetidos de Einstein. Además,  $s = r\sqrt{-I\Omega/\nu}$  es la distancia adimensional,  $\Omega = 2\pi f$  es la frecuencia circular de oscilación,  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido, e  $I$  es la unidad imaginaria, mientras que  $f$  es la frecuencia en Hz, y  $\rho$  es la densidad del fluido. Notar que el núcleo, dado por la Ec. (1b), no es simétrico debido a los coeficientes de la Ec. (2e), aunque tiende a serlo cuando la frecuencia  $\Omega \rightarrow 0$ . La PMH-IF emplea ambas densidades de simple y doble capa, y pueden escribirse como (D'Elía et al., 2014)

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_A \left[ \tilde{K}_{ij} \psi_j(\mathbf{x}) - \tilde{H}_{ij} \psi_j(\mathbf{y}) \right] dA_{\mathbf{y}}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in A \quad (3)$$

donde  $\psi_j(\mathbf{x})$  es la densidad de doble-capa, y  $u_i(\mathbf{x})$  es la velocidad del flujo no perturbado. El elemento diferencial de superficie es denotado como  $dA_{\mathbf{y}} = dA(\mathbf{y})$  (ver Fig. 1, izq.). Por otra parte, el núcleo PMH  $\tilde{H}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  está dado por

$$\tilde{H}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{K}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \chi_H \tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4)$$

donde  $\chi_H$  es un parámetro positivo arbitrario que es introducido por Hebeker (citado en Pozrikidis (1992)) con la finalidad de acoplar la densidad de capa simple  $\phi$  con la densidad de capa

doble  $\psi$ , para lo cual Hebecker define  $\phi(\mathbf{x}) = \chi_H \psi(\mathbf{x})$ . Este acoplamiento permite eliminar los seis modos rígidos de la BIE clásica mediante la introducción *ad-hoc* del núcleo de capa simple  $\tilde{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Además, da cuenta de la fuerza y cupla viscosas sobre el cuerpo (Power y Wrobel, 1995; Pozrikidis, 1992). En el análisis presentado por Hebecker basado en una solución iterativa del sistema de ecuaciones, concluye que  $\chi_H = 1$  es una buena elección con respecto al número de condición de la matriz del sistema, lo cual será también empleado en el presente trabajo. Dado que el lado izquierdo de la Ec. (3) es dato, la misma se reduce a una BIE de Fredholm de segunda clase con un núcleo débilmente singular para la densidad  $\psi_j(\mathbf{x})$ .

### 3. FORMULACIÓN NUMÉRICA

Para resolver numéricamente la Ec. (3) se emplea una técnica de ponderación de Galerkin en BEM, que es descripta en detalle en Sarraf et al. (2017a, 2014b, 2013). La misma utiliza un lazo anidado doble sobre los elementos  $p, q = 1, 2, \dots, E$ , donde  $E$  es el número de elementos (o paneles) en la malla BEM, y los puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  están asociados a los elementos  $p, q$ , respectivamente (ver Fig. 1, izq.). En esta sección, los valores de las variables a nivel elemental son denotados con supraíndices, mientras que los valores nodales son indicados con subíndices, mientras que el supraíndice especial  $T$  denota arreglo traspuesto. Además, se prefiere la notación  $\int dz \int dy \int dx \int dw f(w, x, y, z)$  en lugar de  $\int \int \int \int f(w, x, y, z) dw dx dy dz$ , donde las integraciones son realizadas de derecha a izquierda.

#### 3.1. Ponderación de Galerkin usando elementos lineales

Una técnica estándar de ponderación de Galerkin adopta las funciones de forma  $N_\gamma(\mathbf{x})$ , con  $\gamma = 1, 2, \dots, N$ , donde  $N$  es número de nodos en la malla, para minimizar el error promedio a través de las condiciones de ortogonalidad en la BIE discretizada. Cuando esta técnica es aplicada a la Ec. (3), se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{p=1}^E \sum_{q=1}^E [\mathcal{I}^{(p,q)} \psi^{(p)} - \mathcal{J}^{(p,q)} \psi^{(q)}] = \sum_{p=1}^E \mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} \quad (5)$$

donde se emplea la siguiente notación para las matrices elementales

$$\mathcal{I}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_x \int_{A^{(q)}} dA_y \left[ \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \quad (6)$$

y

$$\mathcal{J}^{(p,q)} = \int_{A^{(p)}} dA_x \int_{A^{(q)}} dA_y \left[ \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{N}^{(q)}(\mathbf{y}) \right] \quad (7)$$

mientras que el vector fuente a nivel elemental está dado por

$$\mathcal{M}^{(p)} \mathbf{u}^{(p)} = \int_{A^{(p)}} dA_x \left[ \mathbf{N}^{(p)T}(\mathbf{x}) \mathbf{N}^{(p)}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{U}^{(p)} \quad (8)$$

#### 3.2. Integrales de superficie sobre triángulos planos en GBEM

Se emplean triángulos planos de 3 nodos (elementos T1) como elementos de borde. La numeración global de los nodos en los triángulos  $p$  y  $q$  se denota con  $i, j, k$  y  $r, s, t$ , respectivamente (ver Fig. 1, der.). Los vectores elementales para el campo solución en la Ec. (5) son escritos como

$$\psi^{(p)}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix} \text{ y } \psi^{(q)}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_r \\ \psi_s \\ \psi_t \end{bmatrix}, \text{ con } \psi_m_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_{3m-2} \\ \psi_{3m-1} \\ \psi_{3m} \end{bmatrix} \quad (9)$$

respectivamente, donde  $m$  denota cualquiera de los nodos  $i, j, k$  y  $r, s, t$ , mientras que el término fuente a nivel del elemento está dado por

$$\mathbf{U}^{(p)} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_k \end{bmatrix}_{9 \times 1}, \text{ con } \mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} U_{3m-2} \\ U_{3m-1} \\ U_{3m} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (10)$$

Las Ecs. (6-7) definen las integrales de interacción elementales, las cuales tienen una singularidad débil  $O(1/r)$ . Para evaluar las Ecs. (6-7), se emplea un esquema de integración de Taylor extendido (Taylor, 2003; Sarraf et al., 2017a, 2014b), con una cuadratura numérica en las cuatro coordenadas de integración. Para tal fin, se introducen dos conjuntos de coordenadas, uno para el símplice  $(\xi_1, \xi_2)$  sobre el panel  $p$ , y  $(\eta_1, \eta_2)$  sobre el panel  $q$  (ver Fig. 1, der.)

$$(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq 1 ; 0 \leq \xi_2 \leq \xi_1 \quad (11a)$$

$$(\eta_1, \eta_2) : 0 \leq \eta_1 \leq 1 ; 0 \leq \eta_2 \leq \eta_1 \quad (11b)$$

Las coordenadas genéricas de los puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son expresadas en los paneles  $p$  y  $q$  usando las expresiones

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{N}^{(p)}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}^{(p)} \quad (12a)$$

$$\mathbf{y}(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{N}^{(q)}(\eta_1, \eta_2) \mathbf{y}^{(q)} \quad (12b)$$

con las funciones de forma elementales

$$\mathbf{N}^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_i^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_j^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_k^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}_{3 \times 9} \quad (13a)$$

$$\mathbf{N}^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} N_r^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_s^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_t^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}_{3 \times 9} \quad (13b)$$

y las coordenadas nodales de los vértices de cada triángulo

$$\mathbf{x}^{(p)} = [\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_j \quad \mathbf{x}_k]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{y}^{(q)} = [\mathbf{y}_r \quad \mathbf{y}_s \quad \mathbf{y}_t]^T \quad (14)$$

En las Ecs. (13a-13b)

$$\mathbf{N}_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} N_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) & N_\alpha^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \right)_{3 \times 3} \quad (15a)$$

$$\mathbf{N}_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} N_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) & N_\beta^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \right)_{3 \times 3} \quad (15b)$$

para  $\alpha = i, j, k$  en el elemento  $p$ , y  $\beta = r, s, t$  en el elemento  $q$ , ver Fig. 1 (der.), y

$$\begin{aligned} N_i^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) &= (1 - \xi_1) & N_r^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) &= (1 - \eta_1) \\ N_j^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) &= (\xi_1 - \xi_2) & N_s^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) &= (\eta_1 - \eta_2) \\ N_k^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) &= \xi_2 & N_t^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) &= \eta_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Entonces, las integrales de interacción elementales, Ecs. (6-7), son escritas como

$$\mathcal{I}^{(p,q)} = J^{(p)} J^{(q)} \hat{\mathcal{I}}^{(p,q)} \quad \text{y} \quad \mathcal{J}^{(p,q)} = J^{(p)} J^{(q)} \hat{\mathcal{J}}^{(p,q)} \quad (17)$$

donde  $J^{(p)} = 2A^{(p)}$  es la jacobiana del panel  $p$ ,  $A^{(p)}$  es su área, y la misma notación se aplica al panel  $q$ . Finalmente, las integrales de interacción elementales quedan expresadas en coordenadas símlices como sigue

$$\hat{I}^{(p,q)} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \mathbf{N}^{(p)T}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}(\boldsymbol{\eta})) \mathbf{N}^{(p)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (18)$$

y

$$\hat{J}^{(p,q)} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \mathbf{N}^{(p)T}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}(\boldsymbol{\eta})) \mathbf{N}^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) \quad (19)$$

#### 4. EL ESQUEMA DE TAYLOR Y LAS TRANSFORMACIONES DE DUFFY Y ASINH

Sin pérdida de generalidad, las Ecs. (18-19) pueden escribirse como

$$\mathbf{I} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (20)$$

La estrategia de Taylor para evaluar la Ec. (20) está diseñada específicamente para triángulos planos simples  $p$  y  $q$ , ya sea cuando son contiguos o coinciden, y el integrando  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  contiene una singularidad débil. En esas condiciones, se introducen las coordenadas relativas  $\mu_1 = \eta_1 - \xi_1$  y  $\mu_2 = \eta_2 - \xi_2$ . Reemplazando estas coordenadas en la Ec. (20) resulta

$$\mathbf{I} = \int_0^1 d\xi_1 \int_{-\xi_1}^{1-\xi_1} d\mu_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\xi_2}^{\mu_1 + \xi_1 - \xi_2} d\mu_2 \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \quad (21)$$

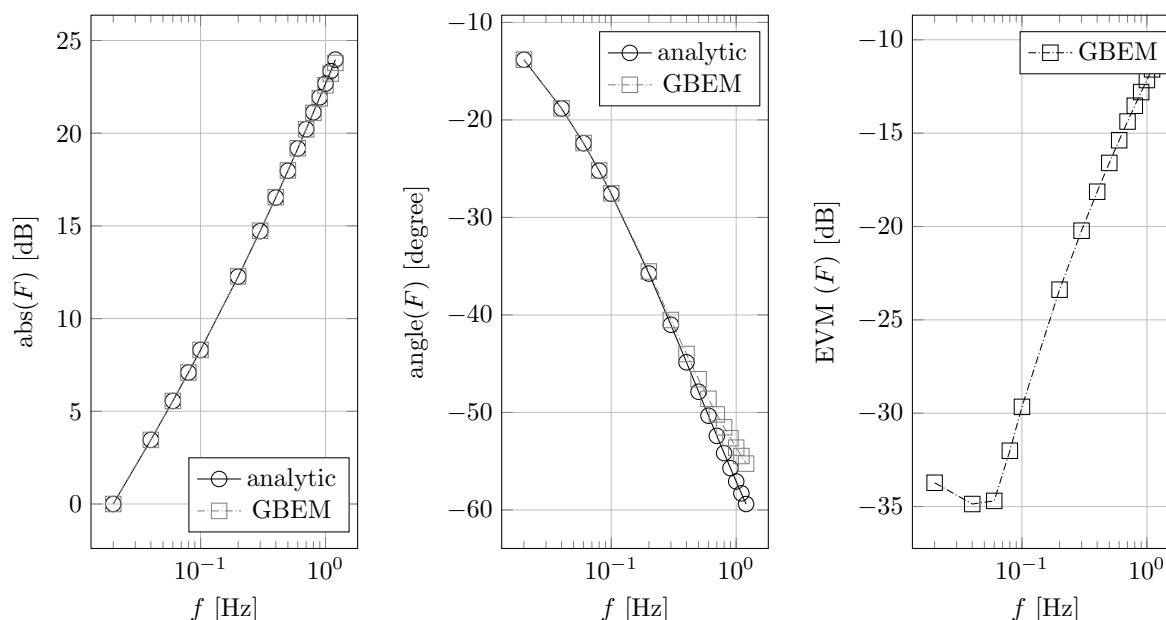
Cambiando el orden de integración  $(\mu_2, \xi_2, \mu_1, \xi_1)$  a  $(\xi_2, \xi_1, \mu_2, \mu_1)$ , y combinando las integrales que tienen dominios solapados, la Ec. (20) se separa en 3, 6 y 1 integrales independientes para los casos de: paneles coincidentes, paneles con aristas compartidas, y paneles con un vértice compartido, respectivamente. El nuevo orden de integración introducido por Taylor traslada la singularidad débil al origen, mientras que el dominio con los solapamientos eliminados transcurre en el plano de las coordenadas relativas  $(\mu_1, \mu_2)$ . A continuación, Taylor introduce diez transformaciones de Duffy para regularizar el integrando mediante la introducción de coordenadas polares convenientes para cada integral.

Para complementar o mejorar la transformación de Duffy se han propuesto diversas variantes (Botha, 2013a,b, 2012b,a), donde una de las mismas la constituye la transformación asinh entendiendo emplear, como es usual en las funciones de librería, el valor principal de la función  $\text{asinh}(z)$ , y que es estándar desde Fortran  $\geq 2008$ . A diferencia de los trabajos anteriores (Sarraf et al., 2017a, 2014b), en este trabajo se reemplaza la Transformación de Duffy (TD) por la Transformación Asinh (TA), dando lugar a una variante de GBEM basado en una cuadratura de Taylor cuádruple y con la Transformación Asinh (GBEM-T4-TA), el cual conlleva a un reemplazo de las diez Transformaciones de Duffy (TD) por sendas Transformaciones Asinh (TA), y que es presentado en D'Elía et al. (2017).

#### 5. EJEMPLO NUMÉRICO: ESFERA UNITARIA EN FLUJO REPTANTE OSCILATORIO

A continuación se presenta el caso de régimen de flujo reptante oscilatorio mientras que en D'Elía et al. (2017) se presenta el caso de flujo reptante estacionario. Se considera el flujo reptante oscilatorio alrededor de la esfera unitaria (radio  $R = 1$  m) cuyo centro coincide con el

Malla $L$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N$	98	218	386	602	866	1178	1538	2402	3458	4706
$E$	192	432	768	1200	1728	2352	3072	4800	6912	9408

Tabla 1: Número de nodos  $N$  y número de elementos  $E$  para cada malla  $L$ .Figura 2: Soluciones analíticas versus soluciones numéricas con GBEM-asinh en el test del flujo de Stokes oscilatorio alrededor de la esfera unitaria. Valor absoluto de la fuerza viscosa  $F$  sobre la esfera en dB (izq.), ángulo de fase (cent.), en grados, y el EVM ( $F$ ) en dB (der.), en función de la frecuencia  $f$  en Hz.

origen de coordenadas. La viscosidad dinámica del fluido es  $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  y su densidad es  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ . La amplitud de movimiento es  $\mathbf{A} = (0.01, 0, 0) \times 1 \text{ m}$ , por lo que la velocidad máxima será  $\mathbf{U} = \Omega \mathbf{A}$ , mientras que la frecuencia circular será  $\Omega = 2\pi f$ , en donde la frecuencia  $f$  será un parámetro impuesto, con valores en el intervalo  $[0.02, 1.2] \text{ Hz}$ . La fuerza de Stokes en régimen oscilatorio está dada por  $F_a = F_S(1 + \zeta + \zeta^2/3)$ , cuando la esfera está en reposo y el fluido está oscilando (Venkatalaxmi et al., 2004), donde  $\zeta = R\sqrt{-I\Omega/\nu}$ , mientras que  $F_S = 6\pi\mu UR$  es la fuerza de Stokes en régimen de flujo estacionario.

Se emplea el GBEM basado en una cuadratura de Taylor cuádruple y con la Transformación Asinh (GBEM-T4-TA) descrito en D'Elía et al. (2017). En dicho integrador se utiliza la regla de cuadratura de Gauss-Legendre (GL) con  $n_{1d}$  puntos de cuadratura a lo largo de cada coordenada de integración, implicando un total de  $n_{1d}^4$  puntos por cada par de interacción. En particular, se opta por la regla  $Q_{22}$ , en donde el primer subíndice 2 denota el número de puntos de GL en las autointegrales y en la primera capa de elementos vecinos, mientras que el segundo subíndice 2 es el número de puntos de GL presentes en las remanentes capas. En la Tabla 1 se listan los números de nodos  $N$  y de elementos  $E$  para cada malla  $L$  empleada, en donde, sin perder generalidad, todas son estructuradas, mientras que el número de grados de libertad en ponderación de Galerkin es  $M = 3N$ . Dado que las cantidades involucradas son fasores (números complejos  $z = x + Iy$ ), se adopta el *Error Vector Magnitude* (EVM) para las mediciones de los errores numéricos, y definido como  $\text{EVM}(z_n) = \text{abs}(e(z_n))/\text{abs}(z_a)$ , donde  $e(z_n) = z_n - z_a$  es el error entre los números complejos  $z_n$  y  $z_a$ , numérico y analítico, respecti-

vamente, mientras que  $\text{abs}(z) = |z|$  es el módulo del número complejo  $z$ . Una utilidad del EVM reside en que representa los efectos combinados de los errores en el módulo y en la fase, por lo que es frecuente su empleo en problemas que involucran fasores para brindar un único número, e.g. usualmente disponible en las librerías de los software de tratamiento de señales digitales. Además, dado que la fuerza de Stokes en flujo reptante oscilatorio cambia en varios órdenes de magnitud en los intervalos de las frecuencias  $f$  consideradas, en forma ocasional se medirá en decibeles. En esas condiciones, en la Fig. 2 se trazan curvas obtenidas con GBEM-T4-TA

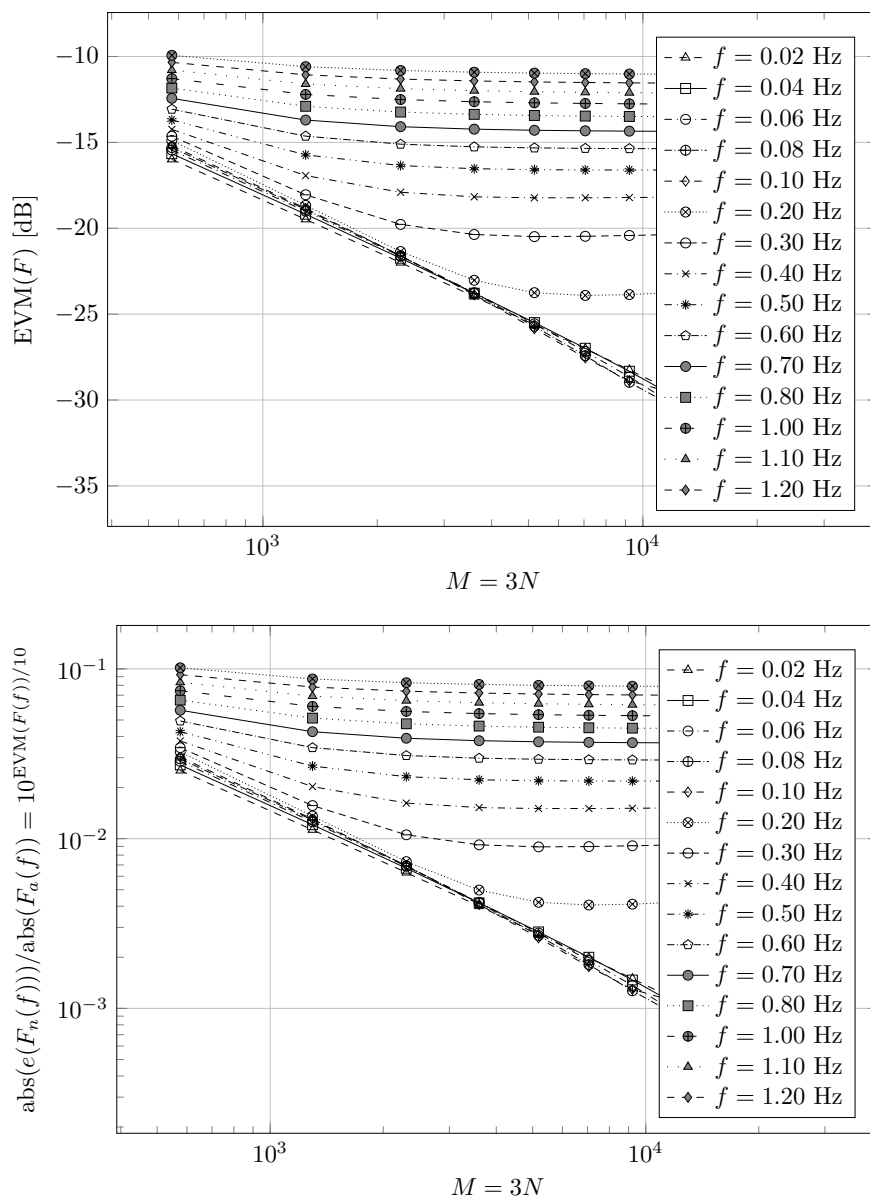


Figura 3: Convergencia en malla de la fuerza  $F$  en función del número de grados de libertad  $M = 3N$ , y de las frecuencias  $f$  en Hz: medido en  $\text{EVM}(F)$ , en dB (arriba), y adimensional  $\text{abs}(e(F_n(f)))/\text{abs}(F_a(f))$  (abajo).

versus la solución analítica, usando la malla  $L = 10$ , la cual es la más refinada de la serie, en función de la frecuencia impuesta  $f$  en Hz.

En la Fig. 2 (izq.) se grafica el módulo de la fuerza  $F(f)$  en decibeles, con respecto a la fuerza  $F(f_1)$  obtenida para la primera frecuencia  $f_1 = 0.02$  Hz, en donde se puede observar,



por ejemplo, que la fuerza para  $f = 1.2$  Hz es unos dos órdenes de magnitud mayor que la primera. Por su parte, en la Fig. 2 (cent.) se traza el ángulo de fase  $\varphi = \text{angle}(F_n(f))$  en grados sexagesimales, en donde se percibe que el error numérico en la fase tiende a crecer cuando la frecuencia  $f$  va creciendo, especialmente cuando se va acercando al extremo derecho del intervalo considerado. Finalmente, en la Fig. 2 (der.) se grafica el EVM para el módulo de la fuerza  $F_n(f)$  obtenida con GBEM-T4-TA, en base a la Ec. (22)

$$\text{EVM}(F_n(f)) = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{abs}(e(F_n(f)))}{\text{abs}(F_a(f))} \right) \quad (22)$$

cuya función inversa está dada por la Ec. (23)

$$\frac{\text{abs}(e(F_n(f)))}{\text{abs}(F_a(f))} = 10^{\text{EVM}(F_n(f))/10} \quad (23)$$

En cuanto a convergencia en malla, en la Fig. 3 se grafican el  $\text{EVM}(F)$  en dB (arriba), y en forma adimensional  $\text{abs}(e(F_n(f)))/\text{abs}(F_a(f))$  (abajo), también en función del número de grados de libertad  $M = 3N$ , y con la frecuencia  $f$  como parámetro.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se validó un método de elementos de borde por ponderación de Galerkin (GBEM, por *Galerkin Boundary Element Method*) basado en una cuadratura de Taylor cuádruple y complementado con la Transformación Asinh (GBEM-T4-TA), a través de un estudio de convergencia en malla y dependencia con la frecuencia de oscilación en el caso de una esfera unitaria que permanece en reposo en el seno de un fluido viscoso e incompresible que oscila armónicamente en el modo de traslación, en condiciones próximas a un flujo reptante oscilatorio. Las curvas de convergencia obtenidas, resumidas en las Figs. 2-3, proveen resultados de mejor calidad con respecto a lo obtenido anteriormente mediante GBEM-T4-TD (idem anterior pero con la Transformación de Duffy (TD)), las cuales fueron presentadas en trabajos anteriores (D'Elía et al., 2010). No obstante, en la Fig. 2 (cent.) se aprecia que el error numérico en la fase tiende a crecer cuando la frecuencia  $f$  aumenta, especialmente cuando se acerca al extremo derecho del intervalo considerado. Asumiendo que no hayan otras causas que expliquen ese comportamiento, se estima que podría modificarse el GBEM-T4-TA agregando un integrador que contemple integrandos muy oscilatorios en el dominio de integración.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, proyecto PIP 112-201501-00588CO), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, proyectos PICT-2014-2660, PICT-E-2014-0191, y PICT-2013-0938), la Universidad Nacional del Litoral (UNL, proyectos CAI+D-2011-01-00134-LI y CAI+D-2011-01-00012-LI), la Universidad Nacional del Comahue (UNCo, proyecto 04/I-215), la Universidad Tecnológica Nacional (UTN, proyecto PID 3526), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU-Linux-OS, GNU-GFortran, GNU-Octave, GNU-Git, GNU-Doxygen, y GNU-GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, PGF, TikZ, y PGFPlots.

## REFERENCIAS

- Botha M. Analysis and augmentation of the Duffy transformation for near-singular integrals. En *Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), 2012 IEEE*, páginas 1–2. 2012a. doi:10.1109/APS.2012.6347937.
- Botha M. Comments on the construction of near-singularity cancellation transformations for triangle domains. En *Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2012 International Conference on*, páginas 824–826. 2012b. doi:10.1109/ICEAA.2012.6328747.
- Botha M. Accuracy of near-singularity cancellation quadrature schemes for the dynamic MoM kernel. *IEEE Antenn. Wireless Propag. Lett.*, 12:714–717, 2013a. doi:10.1109/LAWP.2013.2264714.
- Botha M. A family of augmented Duffy transformations for near-singularity cancellation quadrature. *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, 61(6):3123–3134, 2013b. doi:10.1109/TAP.2013.2252137.
- D'Elía J., Battaglia L., Cardona A., y Storti M. A boundary element method for oscillating Stokes flow at low frequencies around a rigid body. En E. Dvorkin, M. Goldschmit, y M. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, vol. XXIX, páginas 2243–2253. Buenos Aires, 2010.
- D'Elía J., Battaglia L., Cardona A., y Storti M. Full numerical quadrature of weakly singular double surface integrals in Galerkin boundary element methods. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(2):314–334, 2011.
- D'Elía J., Battaglia L., Cardona A., Storti M., y Ríos Rodríguez G. Galerkin boundary elements for a computation of the surface tractions in exterior Stokes flows. *ASME J. Fluids Eng.*, 136(11):111102–111117, 2014.
- D'Elía J., Sarraf S., López E., Battaglia L., y Ríos Rodríguez G. Integración numérica en ecuaciones integrales de superficie con núcleos débilmente singulares. Transformación de coordenadas asinh. En *Mecánica Computacional*, vol. XXXV. La Plata, 2017.
- Duffy M.G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(6):1260–1262, 1982.
- Ingber M.S. y Mammoli A.A. A comparison of integral formulations for the analysis of low Reynolds number flows. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 23:307–315, 1999.
- Klotsa K.D. *The dynamics of spheres in oscillatory fluid flows*. Tesis de Doctorado, University of Nottingham, England, 2009.
- Power H. y Miranda G. Second kind integral equation formulation of Stokes flows past a particle of arbitrary shape. *SIAM J. Appl. Math.*, 47(4):689–698, 1987.
- Power H. y Wrobel L.C. *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1995.
- Pozrikidis C. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge University Press, New York, USA, 1992.
- Pozrikidis C. *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford, 1996.
- Sarraf S., D'Elía J., Battaglia L., y López E. Método de elementos de borde jerárquico basado en el árbol de Barnes-Hut aplicado a flujo reptante exterior. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 30(4):211–220, 2013. doi:10.1016/j.rimni.2013.07.005.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. Amortiguamiento viscoso en un microresonador en flujo reptante simulado con elementos de borde. En C. García Garino, A. Mirasso, y M. Storti, editores, *Mecánica Computacional*, volumen XXXIII, páginas 263–272. 2014a.

- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. An improved assembling algorithm in boundary elements with Galerkin weighting applied to three-dimensional Stokes flows. *ASME Journal of Fluids Engineering.*, aceptado, 2017a.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., Battaglia L., y D'Elía J. Una rederivación del tensor de tensiones para el flujo reptante oscilatorio tridimensional. En *Revista MACI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial VI MACI 2017*. 2017b.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. Validation of a Galerkin technique on a boundary integral equation for creeping flow around a torus. *Comp. Appl. Math.*, 33(1):63–80, 2014b.
- Taylor D. Accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin EFIE solutions. *IEEE Trans. on Antennas and Propag.*, 51(7):1630–1637, 2003.
- Venkatalaxmi A., Padmavathi B.S., y Amaranath T. A general solution of unsteady Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 35:229–236, 2004. doi:10.1016/j.fluidyn.2004.06.001.
- Wang X. *Fast Stokes: a Fast 3-D Fluid Simulation Program for Micro-Electro-Mechanical Systems*. Tesis de Doctorado, MIT, 2002.
- Xiao J. y Ye W. Wavelet BEM for large-scale Stokes flows based on the direct integral formulation. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, 88(7):693–714, 2011. doi:10.1002/nme.3198.