



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

---

*Trabajo de Tesis Doctoral*

*No extensividad en Física: ecuaciones cuánticas no lineales y mecánica estadística de la gravitación*

---

*Tesista: Lic. Darío Javier Zamora*

*Director: Dr. Mario Carlos Rocca*

*Co-director: Dr. Ángel Luis Plastino*

*Año 2020*



*We live on an island surrounded by a sea of ignorance. As our island of knowledge grows, so does the shore of our ignorance.*

John Archibald Wheeler, *Scientific American* (1992), Vol. 267



A mi familia.



# Agradecimientos

Primero deseo agradecer a quienes va dedicada esta tesis, mi familia. Especialmente a mis padres por el amor, consejos y educación brindada. A mis hermanos por todos los momentos compartidos. Ellos son mi soporte del día en día.

Agradezco a todos mis amigos, a los que estuvieron cerca o a la distancia, por las distracciones y buenos momentos.

A mi director de tesis, Mario Rocca, por estar presente constantemente y su ayuda en todos los ámbitos, no solo el científico. Sin su guía durante estos años el desarrollo de esta tesis no hubiera sido posible. Al codirector de esta tesis, Ángel Plastino, por abrirme las puertas de su grupo de investigación desde un primer momento y por compartir su experiencia.

A todos los miembros del grupo de investigación por los debates y enseñanzas. A todos los investigadores y becarios del Instituto de Física de La Plata que me alentaron a lo largo de estos años de trabajo. A quienes me dieron un consejo, o de alguna manera me hicieron un poquito mas sencillo este arduo camino.

A los profesores y ayudantes del Departamento de Física con los que compartí a lo largo de estos años.

A los divulgadores y profesores que sabiendo o sin saberlo de alguna manera me incentivaron a seguir este apasionante camino de aprendizaje.

Al Estado Argentino por financiar mis estudios doctorales a través del CONICET.

Y a todos aquellos que de una forma u otra contribuyeron para que pueda alcanzar esta meta en mi vida.





# Índice general

Índice de Figuras . . . . .	V
Índice de Tablas . . . . .	VII
Abreviaturas . . . . .	IX
Constantes . . . . .	XI
Símbolos . . . . .	XIII
Lista de publicaciones . . . . .	XV
Resumen . . . . .	XVII
<b>I Fundamentos Teóricos</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Poniendo en contexto: un poco de historia . . . . .	3
1.2. Motivaciones . . . . .	5
1.3. Cómo está organizada esta tesis . . . . .	7
<b>2. Conceptos Básicos</b>	<b>9</b>
2.1. Mecánica Estadística de Boltzmann-Gibbs . . . . .	10
2.2. Teoría de la información . . . . .	11
2.2.1. Más allá de la entropía de Boltzmann-Gibbs . . . . .	13
2.3. Fuerza entrópica y entropía de camino . . . . .	14
2.3.1. Fuerza entrópica . . . . .	14
2.3.2. Entropía de camino . . . . .	15
2.3.3. Un ejemplo: fuerza entrópica de un oscilador armónico . . . . .	16
2.3.4. Generalización n-dimensional . . . . .	20
2.4. Mecánica estadística no extensiva . . . . .	21
2.4.1. Extensividad versus aditividad . . . . .	22
2.4.2. Funciones q-logaritmo, q-exponencial y q-gaussiana . . . . .	24

2.4.3.	Optimización de entropía . . . . .	25
2.4.4.	El q-triplete . . . . .	27
2.4.5.	Sobre sistemas no extensivos . . . . .	29
2.4.6.	Divergencias en la teoría de Tsallis . . . . .	30
2.5.	Regularización Dimensional . . . . .	33
2.5.1.	La generalización de regularización dimensional del espacio de con- figuraciones al espacio euclídeo . . . . .	34
2.6.	Sistemas autogravitantes . . . . .	36
2.6.1.	Catástrofe Gravitotérmica . . . . .	37
2.7.	Generalización no lineal de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon .	39
2.7.1.	Estados Gamow y q-Gamow . . . . .	42
<b>II</b>	<b>Contribuciones originales</b>	<b>45</b>
<b>3.</b>	<b>Tratamiento perturbativo de las ecuaciones no lineales de Schrödinger y Klein-Gordon</b>	<b>47</b>
3.1.	Introducción . . . . .	47
3.1.1.	Motivación . . . . .	48
3.2.	Expansión de primer orden de $e_q$ como solución a la ecuación de q-Schrödinger	49
3.2.1.	Desarrollo de primer orden de $\psi = e_q$ . . . . .	50
3.2.2.	Comparación entre las soluciones exacta y aproximada . . . . .	52
3.3.	Desarrollo de primer orden de una función q-Gaussiana . . . . .	53
3.4.	Ecuación no-lineal de q-Klein-Gordon . . . . .	55
3.5.	Separación de variables . . . . .	56
3.5.1.	Soluciones de las ecuaciones diferenciales de $f$ y $g$ . . . . .	56
3.6.	Conclusiones . . . . .	57
<b>4.</b>	<b>Estados q-Gamow para energías intermedias</b>	<b>59</b>
4.1.	Nuevos estados q-Gamow . . . . .	59
4.2.	Predicción: distribución q-Breit-Wigner . . . . .	63
4.3.	Conclusiones . . . . .	65
<b>5.</b>	<b>Fenomenología de la Entropía de Tsallis sobre un camino para curvas en el espacio de fase</b>	<b>67</b>
5.1.	Introducción . . . . .	67
5.2.	Cálculos preliminares . . . . .	68
5.3.	Entropía de camino . . . . .	70
5.4.	Teorema de equipartición . . . . .	72
5.5.	Fuerza entrópica . . . . .	73
5.6.	Los efectos del pozo de potencial armónico . . . . .	77

---

5.7. Conclusiones . . . . .	79
<b>6. Fuerza entrópica <math>n</math>-dimensional en la teoría de Tsallis</b>	<b>81</b>
6.1. Introducción . . . . .	81
6.2. Cálculos preliminares . . . . .	82
6.3. Entropía en la curva $\Gamma$ . . . . .	85
6.4. Fuerza entrópica y fuerza total . . . . .	86
6.5. Calor específico . . . . .	88
6.6. Conclusiones . . . . .	90
<b>7. Mecánica Estadística de Tsallis y Gravitación Newtoniana de dos cuerpos Regularizada Dimensionalmente</b>	<b>91</b>
7.1. Introducción . . . . .	92
7.2. La teoría para $q > 1$ . . . . .	92
7.3. La teoría para $q < 1$ . . . . .	94
7.4. Las divergencias de la teoría . . . . .	95
7.5. El escenario tridimensional para $q > 1$ . . . . .	96
7.6. El escenario tridimensional para $q < 1$ . . . . .	97
7.7. Calores específicos . . . . .	97
7.8. Discusión . . . . .	98
<b>8. Mecánica Estadística de Boltzmann-Gibbs regularizada dimensionalmente y gravitación newtoniana de dos cuerpos</b>	<b>101</b>
8.1. Introducción . . . . .	101
8.2. Extensión analítica . . . . .	102
8.3. La distribución de BG $\nu$ -dimensional . . . . .	104
8.4. La distribución de BG regularizada en tres dimensiones . . . . .	105
8.5. Calor específico . . . . .	106
8.6. Discusión . . . . .	107
<b>9. Mecánica Estadística de sistemas estelares planos</b>	<b>109</b>
9.1. Introducción . . . . .	109
9.2. Un modelo galáctico simple . . . . .	110
9.3. La distribución de BG regularizada en dos dimensiones . . . . .	111
9.4. Calor específico . . . . .	113
9.5. Entropía . . . . .	114
9.6. Catástrofe Gravitotérmica . . . . .	114
9.7. Conclusiones . . . . .	115

<b>10. Una aproximación de primer orden a la teoría de Tsallis</b>	<b>117</b>
10.1. Introducción . . . . .	117
10.2. Otra entropía . . . . .	118
10.2.1. Comparación entre las soluciones exactas y aproximadas . . . . .	119
10.3. Hamiltonianos cuadráticos . . . . .	120
10.4. La capa de ozono . . . . .	122
10.5. La aproximación de segundo orden . . . . .	125
10.5.1. Comparación con las soluciones exactas . . . . .	125
10.6. Conclusiones . . . . .	125
<b>11. Conclusiones</b>	<b>129</b>
<b>III Apéndices</b>	<b>133</b>
<b>A. Funciones importantes e integrales útiles</b>	<b>135</b>
A.1. Funciones Gamma y Beta . . . . .	135
A.2. Funciones Hipergeométricas . . . . .	137
A.3. Funciones Hipergeométrica Confluente, de Whittaker y Cilindro Parabólico	138
A.4. Integrales útiles . . . . .	139
<b>B. Desarrollos de Taylor y derivadas de la función q-exponencial y funciones relacionadas</b>	<b>141</b>
B.1. Desarrollo de primer orden de $\psi = e_q[i/\hbar(px - Et)]$ . . . . .	141
B.2. Segunda derivada con respecto a $x$ . . . . .	142
B.3. Segunda derivada de $\phi = e_q(ikx - i\omega t)$ con respecto a $t$ . . . . .	143
B.4. Desarrollo de primer orden de $q\phi^{2q-1}$ . . . . .	143
B.5. Desarrollo de primer orden de $f(t)$ . . . . .	144
B.6. Desarrollo de primer orden de $f^q$ . . . . .	146
B.7. Derivada de $f^q$ con respecto a $t$ . . . . .	146
B.8. Desarrollo de $g(x)$ . . . . .	147
B.9. Segunda derivada de $g$ con respecto a $x$ . . . . .	149
B.10. Desarrollo de primer orden de $g^q$ . . . . .	149
<b>C. Formas explícitas de ecuaciones complicadas</b>	<b>151</b>
<b>D. Un ejemplo simple de Regularización Dimensional</b>	<b>157</b>
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>160</b>

# Índice de figuras

2.1. Fuerza entrópica para curvas arbitrarias en el espacio de fases versus $q, p$ para $\beta = 1$ . . . . .	18
2.2. $C/k_B$ versus $U$ para $\beta = 0,5, 1,0$ y $2,0$ . . . . .	19
2.3. La entropía adimensional $s_q$ para el caso de iguales probabilidades como función del número de estados $W$ para distintos valores de $q$ . . . . .	23
2.4. La función q-exponencial $e_q(x)$ para varios valores de $q$ . . . . .	25
2.5. La función q-gaussiana $g_q(x)$ paraa varios valores de $q$ . . . . .	26
2.6. Representación gráfica de sistemas extensivos y no extensivos en el plano $(d, \alpha)$ . . . . .	31
2.7. Representación gráfica del calor específico del HO en el polo ( $q = 3/2$ ) y fuera de él ( $q = 1$ y $q = 4/3$ ) versus $T$ . . . . .	33
2.8. Representación de partes de una galaxia. . . . .	38
3.1. Relación $R$ vs. $x$ (en metros) para electrones de 1 MeV y $q - 1 = 10^{-9}$ . . .	52
3.2. Relación $R$ vs. $x$ (en metros) para electrones de 1 MeV y $q - 1 = 10^{-12}$ . . .	52
3.3. Relación $R$ vs. $x$ (en metros) para protones de 1 MeV y $q - 1 = 10^{-9}$ . . .	53
3.4. Relación $R$ vs. $x$ (en metros) para protones de 1 MeV y $q - 1 = 10^{-12}$ . . .	53
3.5. Relación entre las q-Gaussianas de las ecuaciones (3.36) y (3.25) vs. $x$ (en unidades absolutas) para $q - 1 = 10^{-3}$ . . . . .	55
4.1. qBW y BW tradicional vs. $x$ , la parte real del momento $p$ , para $q = 1 + 10^{-3}$ . 65	
4.2. qBW y BW tradicional vs. $x$ , la parte real del momento $p$ , para $q = 1 + 10^{-4}$ . 65	
4.3. qBW y BW tradicional vs. $x$ , la parte real del momento $p$ , para $q = 1 + 10^{-5}$ . 66	
4.4. qBW y BW tradicional vs. $x$ , la parte real del momento $p$ , para $q = 1 + 10^{-6}$ . 66	
5.1. Comportamiento de la fuerza entrópica con $T$ . . . . .	76
5.2. Comportamiento de la fuerza entrópica con $q$ . . . . .	76
5.3. Fuerza total asociada a la entropía de camino como función de $T$ . . . . .	78
5.4. Fuerza total asociada a la entropía de camino como una función de $q$ . . . .	78
6.1. Comportamiento de la fuerza entrópica con $n$ . . . . .	88
6.2. Comportamiento de la fuerza total con $n$ . . . . .	89

7.1. Calor específico versus $k_B T/E$ para $q = 3/2$ . . . . .	98
7.2. Calor específico versus $k_B T/E$ paara $q = 1/3$ . . . . .	99
8.1. Calor específico en función de $k_B T/E$ para el colectivo canónico de BG . .	107
9.1. Temperatura inversa adimensional $\beta E$ versus energía adimensional $- <$ $U > /E$ , con $E = G^2 M^2 m^3$ . . . . .	112
9.2. Calor específico $C/k_B$ versus $k_B T/E$ . . . . .	113
9.3. $S/k_B N$ versus $k_B T/E$ . . . . .	114
9.4. Calor específico de una galaxia y de un halo versus $k_B T/E$ . . . . .	115
10.1. Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,5$ . . . . .	120
10.2. Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,1$ . . . . .	120
10.3. Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,01$ . . . . .	121
10.4. Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,001$ . . . . .	121
10.5. Ajuste de datos de la capa de ozono con una q-gaussiana y con la nueva PDF.	123
10.6. $\ln_q$ del coeficiente de autocorrelación $C(\tau)$ vs. tiempo $\tau$ (en días) . . . . .	124
10.7. Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,5$ . . . . .	126
10.8. Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,1$ . . . . .	126
10.9. Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,01$ . . . . .	127
10.10. Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para $1 - q = 0,001$ . . . . .	127
A.1. Función Gamma en la línea real. . . . .	136
A.2. Valor absoluto de la función Gamma en el plano complejo. . . . .	136

# Índice de tablas

2.1. Algunas medidas entrópicas . . . . .	13
2.2. Comparación de ecuaciones comunes de BGStatMech y qStatMech . . . . .	28
2.3. Tres interpretaciones físicas de la q-exponencial . . . . .	28





# Abreviaturas

<b>AE</b>	Extensión Analítica ( <i>Analytic extension</i> )
<b>BGStatMech</b>	Mecánica Estadística de Boltzmann-Gibbs ( <i>BG Statistical Mechanics</i> )
<b>BH</b>	Agujero negro ( <i>Black-Hole</i> )
<b>BW</b>	Distribución de Breit-Wigner
<b>DR</b>	Regularización Dimensional ( <i>Dimensional Regularization</i> )
<b>HO</b>	Oscilador Armónico ( <i>Harmonic Oscillator</i> )
<b>IT</b>	Teoría de la Información ( <i>Information Theory</i> )
<b>KG</b>	Ecuación de Klein-Gordon
<b>MaxEnt</b>	Máxima Entropía
<b>NEStatMech</b>	Mecánica Estadística No Extensiva ( <i>Nonextensive Statistical Mechanics</i> )
<b>NRT</b>	Ecuación no lineal de Nobre, Rego-Monteiro y Tsallis
<b>PDF</b>	Función Densidad de Probabilidad ( <i>Probability Density Function</i> )
<b>QFT</b>	Teoría Cuántica de Campos ( <i>Quantum Field Theory</i> )
<b>qBW</b>	Distribución de q-Breit-Wigner
<b>qStatMech</b>	q-Mecánica Estadística ( <i>q-Statistical Mechanics</i> )
<b>SG</b>	Autogravitación ( <i>Self-gravitation</i> )



# Constantes

Velocidad de la luz	$c = 2,997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Euler-Mascheroni	$C = 0,577\,215\,664\dots$
Constante de Gravitación Universal	$G = 6,674\,30 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s})$
Constante de Planck	$h = 6,626\,069\,57 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $h = 4,135\,667\,33 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Constante de Planck Reducida	$\hbar = 1,054\,571\,82 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\hbar = 6,582\,119\,62 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,380\,648\,81 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ $k_B = 8,617\,332\,48 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
Masa solar	$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$



# Símbolos

Símbolo	Significado
$B(x, y)$	Función Beta
$C$	Calor específico
$D_p(x)$	Función Cilindro Parabólico
$E$	Energía
$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$	Función Hipergeométrica
$F_e$	Fuerza entrópica
$H(P, Q)$	Hamiltoniano
$\mathcal{H}(x)$	Función escalón de Heaviside
$Im(x)$	Parte imaginaria de $x$
$K$	Energía Cinética
$M$	Masa
$M_{\lambda, \mu}(x)$	Función de Whittaker
$P$	Momento (en teoría de Tsallis)
$Re(x)$	Parte real de $x$
$Q$	Posición (en teoría de Tsallis)
$S$	Entropía
$T$	Temperatura
$\langle U \rangle$	Energía media
$V$	Volumen; energía potencial
$W$	Número de configuraciones o de estados
$W_{\lambda, \mu}(x)$	Función de Whittaker
$Z$	Función de partición

Símbolo	Significado
$\cos_q(x)$	q-coseno
$e_q(x)$	q-exponencial
$k$	Número de onda
$\ln_q(x)$	q-logaritmo
$m$	Masa
$p$	Momento (en teoría de BG)
$q$	Parámetro de extensividad; coordenada generalizada (en teoría de BG)
$r$	Distancia radial
$s$	Entropía adimensional
$\sin_q(x)$	q-seno
$t$	Tiempo
$\Gamma$	Curva en el espacio de fases
$\Gamma(x)$	Función Gamma
$\Phi(\alpha, \gamma; x)$	Función hipergeométrica confluyente
$\beta$	Temperatura inversa
$\nu$	Dimensión
$\rho$	Función densidad de probabilidad
$\phi$	Función de onda
$\psi$	Función de onda
$\omega$	Frecuencia
$\nabla$	Divergencia
$\vec{\nabla}$	Gradiente
$\Delta = \nabla^2$	Laplaciano
$\square$	D'Alembertiano

# Lista de publicaciones

La investigación e ideas desarrolladas en la presente tesis dieron lugar a las publicaciones en revistas internacionales con referato que se muestran a continuación [1-7].

- [1] D.J. Zamora, M.C. Rocca, A. Plastino, and G. Ferri. **Perturbative treatment of the non-linear  $q$ -Schrödinger and  $q$ -Klein-Gordon equations**. Entropy, 19(1):21, (2016).
- [2] A. Plastino, M.C. Rocca, G.L. Ferri, and D.J. Zamora.  **$q$ -Gamow states for intermediate energies**. Nuclear Physics A, 955:16-26, (2016).
- [3] D.J. Zamora, M.C. Rocca, A. Plastino, and G.L. Ferri.  **$q$ -path entropy phenomenology for phase-space curves**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 490:1522-1531, (2018).
- [4] D.J. Zamora, M.C. Rocca, A. Plastino, and G.L. Ferri. **Verlinde's emergent gravity in an  $n$ -dimensional, non-additive Tsallis' scenario**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 506:1050-1059, (2018).
- [5] D.J. Zamora, M.C. Rocca, A. Plastino, and G.L. Ferri. **Dimensionally regularized Tsallis' statistical mechanics and two-body Newton's gravitation**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 497:310-318, (2018).
- [6] D.J. Zamora, M.C. Rocca, A. Plastino, and G.L. Ferri. **Dimensionally regularized Boltzmann-Gibbs statistical mechanics and two-body Newton's gravitation**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 503:793-799, (2018).
- [7] G.L. Ferri, A. Plastino, M.C. Rocca, and D.J. Zamora (en orden alfabético). **A first order Tsallis theory**. The European Physical Journal B, 90(3), (2017).





# Resumen

La finalidad de esta tesis es contribuir al esfuerzo que han iniciado otros investigadores con el objetivo de construir y reforzar el edificio científico del Paradigma de Wheeler. Este paradigma tiene como propósito reescribir algunas áreas de las ciencias desde el punto de vista de la teoría matemática de la información. Para cumplir este objetivo, trabajo en un área interdisciplinaria entre teoría de la información, mecánica estadística, física semi-clásica, sistemas no lineales, mecánica cuántica y astrofísica.

En particular, me enfoco en el estudio de la entropía de Tsallis aplicada a ecuaciones no lineales cuánticas y algunos aspectos de gravitación como fuerzas entrópicas y mecánica estadística de sistemas autogravitantes. Respecto al primer tema, analizo exhaustivamente un tratamiento perturbativo de primer orden (en  $q \sim 1$ ) de las ecuaciones diferenciales parciales de q-Schrödinger y q-Klein-Gordon. Muestro que, para pequeños valores de  $q - 1$ , la aproximación es bastante buena. Ésto es de relevancia en física porque esos valores de  $q$  son los relevantes en el rango de energías de interés para física de altas e intermedias energías. También exploro desarrollos de las ecuaciones de q-Schrödinger de variables separadas y de la función q-Gaussiana.

A su vez, desarrollo un conjunto de estados q-Gamow para los cuales la distribución de q-Breit-Wigner asociada podría ser encontrada fácilmente a energías intermedias, para las cuales existen aceleradores de partículas. En tales experimentos nunca se detecta una Gaussiana pura, sino una q-Gaussiana.

Sobre el segundo tema, estudio la fenomenología de curvas en el espacio de fases en el marco de la teoría de Tsallis. Desarrollo una q-entropía de camino para la cual uno puede calcular un mecanismo de fuerza entrópica capaz de imitar algunos aspectos de cromodinámica cuántica en una manera clásica. Trabajo tanto con la fuerza entrópica unidimensional como con su generalización a  $n$  dimensiones. Ésto une diferentes pero importantes conceptos en física: fuerza entrópica, entropía a lo largo de una curva, estadística de Tsallis y gravedad emergente. Es interesante que, a pesar que la dimensionalidad es muy importante en gravitación, con lo que respecta a curvas en el espacio de fases, cualitativamente sus propiedades son intrínsecas a la curva, no importa en que espacio está sumergida.

Presento un tratamiento novedoso de las divergencias de la función de partición de la gravedad Newtoniana via regularización dimensional en ambos escenarios: Tsallis (ya que los sistemas autogravitantes son altamente no extensivos) y el usual de Boltzmann-Gibbs. Muestro que existe una cota en la temperatura y que el calor específico negativo emerge naturalmente en ambos escenarios.

Para ilustrar el alcance de esta técnica desarrollo un modelo de una galaxia de disco con un agujero negro supermasivo en el centro. Se obtienen resultados interesantes y coherentes: i-una cota máxima para la temperatura, ii-el calor específico es negativo, iii-el límite del calor específico cuando la masa del agujero negro tiende a cero es la de un gas autogravitante ideal, iv-la tercera ley de la termodinámica es violada, y v-la catástrofe gravotérmica es evitada si el número de constituyentes del halo que rodea a la galaxia es menor o igual que el número de estrellas en ésta.

Finalmente, propongo una nueva entropía de Tsallis libre de polos, obtenida a partir de desarrollos alrededor de  $q = 1$ . Además, muestro que nuestro tratamiento es compatible con datos existentes de la capa de ozono.

Palabras clave: *No extensividad, mecánica estadística, gravitación, sistemas cuánticos, teoría de la información, sistemas no lineales, sistemas complejos*

## Parte I

# Fundamentos Teóricos



# Capítulo 1

## Introducción

*“Ludwig Boltzmann, who spent much of his life studying statistical mechanics, died in 1906, by his own hand. Paul Ehrenfest, carrying on the work, died similarly in 1933.*

*Now it is our turn to study statistical mechanics.*

*Perhaps it will be wise to approach the subject cautiously.”*

David L. Goodstein, States of Matter, 1975

Comienzo este capítulo poniendo al lector en contexto mediante una breve introducción histórica de la mecánica estadística. Aprovecharé esto para definir algunos conceptos claves de esta rama de la física. Luego, describo las motivaciones para estudiar la mecánica estadística no extensiva y sus consecuencias en diversos sistemas físicos como ecuaciones cuánticas no lineales y gravitación. Finalmente, hablo sobre la estructura de esta tesis.

### 1.1. Poniendo en contexto: un poco de historia

Uno podría definir la mecánica estadística como *la ciencia de describir propiedades macroscópicas de un sistema compuesto por muchos constituyentes estudiando el comportamiento e interacciones entre ellos* [8]. Esto significa que la mecánica estadística es un nexo entre los mundos microscópicos y macroscópicos, entre mecánica cuántica y termodinámica, por ejemplo. La conexión no solo es conceptual sino también temporal, ya que se puede reconocer a la mecánica estadística como la primer teoría que aceptó completamente el hecho de que la materia está compuesta por partículas microscópicas, permitiendo el nacimiento de la mecánica cuántica más tarde. De hecho, se cree que una de las causas del suicidio de Boltzmann es el bajo reconocimiento académico a sus ideas.

El antecedente histórico de la mecánica estadística es, por supuesto, la termodinámica. El trabajo de Carnot es usualmente citado como el comienzo de la termodinámica como una ciencia formal. En él, se pueden encontrar algunas ideas relacionadas a lo que ahora llamamos segunda ley de la termodinámica [9]. Una presentación más sistemática de la termodinámica fue realizada por Clausius, quien presenta la segunda ley de la termodinámica

en una manera completa y formal e introduce el concepto clave de la presente tesis: **entropía** [10]. Pero la termodinámica no se preocupa por la estructura de los sistemas que estudia y sus conceptos centrales, energía interna y entropía, quedan conceptualmente no claros.

El esclarecimiento del significado de esos conceptos tuvieron que esperar hasta la aparición de la mecánica estadística. A partir de hipótesis muy simples, Maxwell introduce la idea de distribución estadística de velocidades y obtiene para ella una distribución Gaussiana [11]. La idea que propiedades macroscópicas de un sistema pueden ser explicadas por sus constituyentes microscópicos y las leyes dinámicas que los gobiernan era completamente hipotética en ese momento. Atraído por esas ideas, Boltzmann deduce la segunda ley de la termodinámica desde el enfoque estadístico de Maxwell [12].

Desde entonces, Boltzmann profundiza en sus ideas estadísticas, intentando un enfoque completamente probabilístico. Este nuevo enfoque consiste en definir, por un lado, un **microestado** como cada posible forma de distribuir la energía total de un sistema entre sus constituyentes, un microestado está definido (clásicamente) especificando la posición  $q_i$  y momento  $p_i$  de cada partícula:  $\{q_i, p_i, i = 1, \dots, 3N\}$  donde  $N$  es el número de partículas. O, más generalmente, describiendo cada grado de libertad de su constituyentes. Los microestados son descritos por un gran número de variables.

Por otro lado, un **macroestado** es el estado termodinámico de un sistema, descrito por su temperatura, presión, número de partículas, etc., es decir, por un número relativamente bajo de variables. Cada macroestado tiene varios microestados correspondientes, ya que el sistema puede estar en diferentes configuraciones que conduzcan a la misma descripción macroscópica.

El espacio euclídeo  $q_i \times \dots \times p_i$  es llamado **espacio de fases**, por lo que un microestado está representado por un punto en este espacio. El hamiltoniano  $H = H(q_i, p_i)$  describe una hipersuperficie en el espacio de fases.

Estos esfuerzos conducen a Boltzmann a su famosa fórmula  $S = k_B \ln W$ , donde  $S$  es la entropía,  $W$  el número de configuraciones posibles y  $k_B$  la ahora llamada constante de Boltzmann. *A priori* no sabemos en que microestado está el sistema así que le asociamos una probabilidad a cada uno. La expresión de la entropía de Boltzmann surge de la hipótesis que cada microestado es igualmente probable. Esta es una definición completamente probabilística de entropía y la segunda ley de la termodinámica es cierta en un sentido estadístico: todo sistema evoluciona al estado de equilibrio porque es el estado más probable, esto es, que más microestados correspondientes tiene. Se puede ver ya en que dirección esta ciencia evoluciona.

Un avance significativo en esta dirección fue hecho por Gibbs, quien enfatizó el uso de colectivos “generalizados” y desarrolló esquemas que, en principio, nos permite calcular un conjunto completo de cantidades termodinámicas de un dado sistema a partir puramente de las propiedades de sus constituyentes microscópicos [13]. Consideremos que cada

microestado tiene asociada una distribución de probabilidad  $\rho(q_i, \dots, p_i, \dots)$ . El enfoque de **colectivo** de Gibbs nos permite definir una expresión más general de entropía, que en un marco clásico es:

$$S = -k_B \int \rho \ln \rho \, dp_i \dots dq_i \dots \quad (1.1)$$

Recientemente, la mecánica estadística ha experimentado una gran expansión a otras áreas de la física y más allá: economía, biofísica, sistemas sociales, neurociencias, etc. De hecho, las leyes de la mecánica estadística y sus herramientas son a menudo independientes de la naturaleza del sistema y sus constituyentes. Podemos considerar, por ejemplo, un gas, líquido o sólido como un conjunto de moléculas cada uno con sus interacciones, un láser como un conjunto de fotones, pero también una galaxia como un conjunto de estrellas interactuando a través de gravitación, una red neuronal como un conjunto de neuronas intercambiando pulsos eléctricos, la economía como un conjunto de agentes que intercambian dinero o el tráfico como vehículos con sus interacciones.

Pero no está claro si la entropía de Gibbs (1.1) es la mejor medida para cuantificar estos sistemas, generalmente llamados **sistemas complejos**, debido a que no cumplen todas las hipótesis de la mecánica estadística tradicional. Por ello, diversas medidas entrópicas (algunas vienen de la Teoría de la Información) han sido propuestas como mostraré en el siguiente capítulo.

## 1.2. Motivaciones

Esta tesis está enfocada en el objetivo de continuar con el esfuerzo que otros han iniciado a fin de construir y reforzar el edificio científico del Paradigma de Wheeler. Este paradigma tiene como propósito reescribir algunas áreas de la ciencia desde el punto de vista de la Teoría de la Información. Para alcanzar ese objetivo, trabajo en un área interdisciplinaria entre teoría de la información, mecánica estadística, física semiclásica, sistemas no lineales, mecánica cuántica y astrofísica. ¿Porqué tales temas? Por un lado la física semiclásica es un área de gran actividad porque es apropiada para estudiar sistemas mesoscópicos. Por otro lado, a pesar de que la mecánica cuántica es considerada por gran parte de la comunidad científica como una teoría fundamental de la física, otra parte afirma que debería existir una teoría más fundamental. Esto podría ser posible si encontramos algunos aspectos de la física semiclásica que no tienen un límite cuántico. El estudio de medidas alternativas de información tiene aplicaciones tecnológicas pero también involucra aspectos básicos de la ciencia que exploro en esta tesis. La investigación en sistemas no lineales, que tiene aplicaciones en distintas ramas de las ciencias como física, biología, química, meteorología, etc., están conectadas al estudio de medidas alternativas de información. En particular, me enfoco en la entropía de Tsallis aplicada a ecuaciones cuánticas no lineales y a gravitación.

Luego de más de 140 años de impresionante éxito no hay duda que la entropía de

Boltzmann-Gibbs (BG) es la apropiada para ser usada en una amplia e importante clase de sistemas físicos, básicamente aquellos que son ergódicos y están en equilibrio. Sin embargo, existen muchos sistemas físicos complejos que no cumplen esas hipótesis, típicos ejemplos son aquellos en los que la dinámica es caótica, tienen sensibilidad a condiciones iniciales, memoria o sus interacciones son de largo alcance.

A fin de describir tales sistemas, una forma de mecánica estadística generalizada ha sido propuesta usando entropía no aditiva. En las últimas décadas, el nuevo formalismo ha tenido una amplia variedad de aplicaciones exitosas en física y otras ciencias. Haré especial énfasis en la aplicación de la entropía de Tsallis en ecuaciones cuánticas no lineales y algunos aspectos de gravitación como fuerzas entrópicas y la mecánica estadística de sistemas autogravitantes. Estos últimos sistemas tienen como principal característica la interacción gravitatoria (de largo alcance) entre sus componentes. Esto lleva a interesantes efectos todavía no entendidos completamente como calor específico negativo y la catástrofe gravotérmica.

Mencioné que hay sistemas que no cumplen las hipótesis de la mecánica estadística o termodinámica y, por lo tanto, sus métodos y conceptos tienen que ser modificados a fin de ser útiles para explicar fenómenos complejos. El conocimiento de los límites de validez de una teoría es muy importante. Algunos libros y autores, especialistas en el campo, hacen mención de esto. Por ejemplo, Brian Cowan dice en su libro (*Topics in Statistical Physics*, [8]):

*“Como he argumentado, la termodinámica trata con el comportamiento de sistemas “grandes” y generalmente, para ellos, los efectos de tamaño finito no son de interés. Por lo tanto, a menos que uno esté preocupado específicamente con fenómenos de superficie, es sensato concentrarse en sistemas que son lo suficientemente grandes para que la contribución de la superficie a la energía sea despreciable comparada con la contribución del volumen. Esto es posible porque la interacción de los átomos es suficientemente corta. En general, se consideran propiedades en el límite  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  mientras  $N/V$  es constante. Este es el llamado límite termodinámico. Debería ser manifiesto que la verdadera extensividad de una cantidad como energía surge sólo en el límite termodinámico. [La gravedad es una fuerza de largo alcance. Es evidente que la energía gravitatoria no es verdaderamente extensiva . . . Esta no extensividad crea serias dificultades cuando se trata la termodinámica estadística de sistemas gravitatorios. Una generalización de la definición de entropía para acomodarse a sistemas no extensivos fue propuesta por Tsallis en 1989.]”*

También algunos físicos muy famosos han hablado sobre esto, como Enrico Fermi en *Thermodynamics*, (1938) [14]

*“La entropía de un sistema compuesto de varias partes es, a menudo, igual a la suma de las entropías de las partes. Esto es cierto si la energía del sistema es la suma de las energías*



*de todas las partes y si el trabajo hecho por el sistema durante una transformación es igual a la suma de las cantidades de trabajo hecha por todas las partes. Notar que esas condiciones no son tan obvias y, en algunos casos, pueden no ser cumplidas. Entonces, por ejemplo, en el caso de un sistema compuesto por dos sustancias homogéneas, será posible expresar la energía como la suma de las energías de dos sustancias solo si podemos despreciar la energía de superficie de ambas sustancias donde están en contacto. La energía de superficie puede generalmente ser despreciada si las sustancias no están finamente subdivididas; en otro caso, pueden jugar un rol considerable.”*

Y Gibbs en su *Elementary Principles on “Statistical Mechanics”* [13]:

*“Al tratar la distribución canónica, siempre supondremos que la integral múltiple (la función de partición) tiene un valor finito... Excluyendo, por ejemplo, casos en los cuales el sistema o partes de él pueden ser distribuidos en espacio ilimitados... También excluye muchos casos en los que la energía puede decrecer sin límites, como cuando el sistema contiene materia que se atrae entre sí inversamente al cuadrado de su distancia.”*

Como podemos ver, una de las limitaciones de la mecánica estadística estándar es que no es capaz de tratar con sistemas gravitatorios, o en general, con interacciones de largo alcance, porque el sistema, por definición, es no extensivo. Luego, si uno quiere estudiar agujeros negros, galaxias, estrellas, *clusters*, etc., la mecánica estadística usual no puede explicar sus propiedades. Otros sistemas son no ergódicos (recuerde que la hipótesis ergódica es una pieza fundamental de la mecánica estadística) o están fuera del equilibrio.

Por esto, el objetivo de mi tesis es contribuir al entendimiento de la no extensividad en mecánica estadística, física cuántica, y su relación con otras áreas de las ciencias como astrofísica y sistemas complejos.

### 1.3. Cómo está organizada esta tesis

Organicé la presente tesis en tres partes. En la primera, compuesta por el presente capítulo y el siguiente, presento los antecedentes del trabajo. Aquí defino los conceptos que voy a utilizar en las otras partes. Primero hago un breve repaso de conceptos y metodologías de mecánica estadística y teoría de la información, como maximización de entropía bajo restricciones, colectivos, función de partición, espacio de fases, etc. Luego hablo sobre los conceptos de fuerza entrópica y entropía de camino. Una parte importante del capítulo 2 es sobre mecánica estadística no extensiva, sus conceptos y mecanismos. Finalmente defino sistemas autogravitantes y explico porqué es interesante su estudio.

La segunda parte está compuesta por mis contribuciones originales, que están en los capítulos 3 a 11. En el capítulo 3, presento un tratamiento perturbativo de ecuaciones cuánticas no lineales, particularmente de las ecuaciones NRT de Schrödinger y Klein-Gordon. También exploro desarrollos de la ecuación de q-Schrödinger de variables separa-

das y de la función  $q$ -gaussian. En el capítulo 4 desarrollo un conjunto de estados  $q$ -Gamow que son solución a esta ecuación no lineal de Schrödinger y para la cual la distribución de  $q$ -Breit-Wigner asociada puede ser fácilmente medida para energías intermedias en aceleradores de partículas disponibles actualmente. En los capítulos 5 y 6 estudio la fenomenología de curvas en el espacio de fases en el marco de la teoría de Tsallis. Desarrollo una entropía de camino con la cual se puede calcular un mecanismo de fuerza entrópica capaz de imitar algunos aspectos de cromodinámica cuántica de una manera clásica. El capítulo 5 trabaja con la fuerza entrópica unidimensional y su generalización al escenario  $n$ -dimensional es el tema del capítulo 6. Presento un tratamiento novedoso de las divergencias de la función de partición de la gravitación newtoniana *via* regularización dimensional en los capítulos 7 y 8. En el primero me concentro en el marco de la teoría de Tsallis, ya que los sistemas autogravitantes son fuertemente no extensivos. En el capítulo 8 exploro la solución para la mecánica estadística usual y los comparo. A modo de ilustrar la utilidad de esta técnica desarrollo un modelo simple de galaxia plana en el capítulo 9. En el capítulo 10, propongo una nueva entropía de Tsallis libre de polos, obtenida a partir de una aproximación de primer orden para  $q$  cercano a uno. Además muestro que este tratamiento es compatible con datos existentes de la capa de ozono. Las conclusiones y perspectivas son presentadas en el capítulo 11.

Finalmente, una serie de apéndices se presentan al final de esta tesis. Tienen algunos desarrollos complementarios al texto principal de modo que no estorben a la lectura de éste. Por ejemplo, en el apéndice A defino algunas funciones esenciales omnipresentes en toda la tesis y sus propiedades. Los apéndices B y C tienen algunas expresiones explícitas pero complicadas que aparecen en los capítulos 3 y 6, respectivamente. El apéndice D muestra un ejemplo sencillo en detalle de un proceso de regularización dimensional.

## Capítulo 2

# Conceptos Básicos

*“My greatest concern was what to call it. I thought of calling it information, but the word was overly used, so I decided to call it uncertainty. When I discussed it with John von Neumann, he had a better idea. Von Neumann told me, You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, nobody knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage”*

Claude Elwood Shannon, 1961.

En este capítulo resumo los conceptos básicos que uso durante la tesis. Primero hago un breve repaso de la Mecánica Estadística tradicional, enfocándome en aquellos conceptos que usaré explícitamente durante la tesis. En la sección 2.2, explico la entropía desde el punto de vista de la Teoría de la Información y presento la idea de entropías diferentes a la de Boltzmann-Gibbs. Luego presento los conceptos de fuerza entrópica y entropía de camino y doy un ejemplo de aplicación al oscilador armónico. La mecánica estadística no extensiva es el tema de la sección 2.4. Ahí presento la entropía de Tsallis, sus propiedades, diferencias entre extensividad y aditividad, las funciones fundamentales de la teoría: q-exponencial, q-logaritmo y q-gaussiana y el colectivo canónico no extensivo. Luego hablo sobre sistemas no extensivos, sus divergencias en la teoría de Tsallis y como resolverlas a través de la regularización dimensional. Con ese objetivo, en la sección 2.5, describo brevemente esta técnica. En la sección 2.6, presento los sistemas autogravitantes, sus curiosas propiedades como calor específico negativo y la catástrofe gravotérmica. Finalmente hablo sobre no extensividad en ecuaciones cuánticas: las ecuaciones q-generalizadas no lineales de Schrödinger y Klein-Gordon NRT y los estados q-Gamow relacionados a ellas.

## 2.1. Mecánica Estadística de Boltzmann-Gibbs

Comenzaré revisando algunos conceptos de la mecánica estadística tradicional y como funcionan. Durante todo el texto me refiero usualmente a la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs (de ahora en adelante BGStatMech) como “estándar”, “tradicional” o “usual”.

En el capítulo anterior mencioné que a partir del funcional entrópico de Gibbs (1.1), es posible deducir la entropía de Boltzmann. Sea  $\rho$  una función densidad de probabilidad (PDF), entonces debe cumplir con la normalización:

$$\int \rho(p, q) dp dq = 1 \quad (2.1)$$

Donde  $dp$  y  $dq$  en realidad refieren a  $dp_1 \dots dp_i \dots$  y  $dq_1 \dots dq_i \dots$ , respectivamente. Uso esta notación durante todo el texto. Tomando en cuenta esta restricción y considerando el caso particular de que todos los microestados son equiprobables uno puede obtener de manera directa:

$$S = k_B \ln W \quad (2.2)$$

O sea, recobramos la entropía de Boltzmann. Esta formulación en la cual cada microestado es igualmente probable es llamada **colectivo microcanónico**, y termodinámicamente representa un sistema aislado. Podemos considerar un sistema en contacto con un reservorio térmico infinito o baño a temperatura  $T$ , caso en el cual tenemos una restricción extra:

$$\int \rho E dp dq = \langle U \rangle \quad (2.3)$$

Este es el **colectivo canónico** y la maximización de  $S$  bajo estas dos restricciones lleva al famoso factor de BG:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad (2.4)$$

Donde  $\beta = 1/k_B T$  es la **temperatura inversa** y  $Z$  es llamada **función de partición**:

$$Z = \int e^{-\beta H} dp dq \quad (2.5)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.5), (2.3) y (2.4) en la ecuación (1.1) se puede verificar que

$$S = \ln Z + \beta \langle U \rangle \quad (2.6)$$

Por supuesto podemos también pensar en otros colectivos con sus respectivas restricciones.

Las últimas expresiones son el corazón de la BGStatMech, y son amplia y exitosamente utilizadas en física y otras ciencias. Desde su establecimiento son piezas fundamentales de la física contemporánea pero deben tener un dominio de validez, fuera del cual necesitan ser modificadas (generalizadas), en particular en la mayoría de los llamados **sistemas complejos**.

A pesar que todos los colectivos son equivalentes en el límite termodinámico (i.e.  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , con  $N/V \rightarrow \text{constante}$ ), presentan algunas diferencias, especialmente cuando son usados en un marco microscópico. Esto es posible debido a que la base teórica de la BGStatMech puede ser reformulada en términos de **teoría de la información**, donde no hay necesidad de baños térmicos o sistemas macroscópicos. Voy a hablar más sobre esto en la sección 2.2. Un ejemplo relevante de las diferencias entre los colectivos es la capacidad calorífica en los colectivos microcanónico y canónico. Un resultado importante de la formulación canónica es que la capacidad calorífica puede ser expresada como:

$$C = \frac{1}{k_B T^2} \langle (\Delta U)^2 \rangle = \frac{1}{k_B T^2} \langle (U - \langle U \rangle)^2 \rangle \quad (2.7)$$

Esto es, la capacidad calorífica es la varianza de la energía media. A partir de esta ecuación parece ser claro que la capacidad calorífica es siempre positiva. En cambio, el colectivo microcanónico no impone ninguna restricción a su signo.

El **teorema de equipartición**, primero formulado por Boltzmann en 1871, es uno de los pilares de la física clásica. Establece que la energía es compartida equitativamente entre todos los grados de libertad accesibles de un sistema. No es un resultado particularmente sorprendente, puede ser pensado como otra forma de decir que el sistema trata de maximizar su entropía (i.e. que tan “dispersa” está la energía en el sistema) distribuyendo la energía en todos los modos de movimiento accesibles. Específicamente, el teorema muestra que en equilibrio térmico cualquier grado de libertad (como una componente de la posición o velocidad de una partícula) que aparece cuadráticamente en la energía contribuye igualmente al promedio de la energía total. Si  $H = K + V$ ,

$$\langle K \rangle = \langle V \rangle = \frac{\langle U \rangle}{2} \quad (2.8)$$

O, específicamente, si  $H = K + V = Ap^2 + Bq^2$ , donde  $A$  y  $B$  son constantes de proporcionalidad:

$$A \langle p^2 \rangle = B \langle q^2 \rangle = \frac{\langle U \rangle}{2} \quad (2.9)$$

## 2.2. Teoría de la información

La **Teoría de la Información** (IT) estudia la cuantificación, almacenamiento y comunicación de información. Fue propuesta originalmente por Claude Shannon en 1948 para

encontrar límites fundamentales en el procesamiento de señales y operaciones de comunicación, como compresión de datos, en una publicación titulada “Una teoría matemática de la comunicación” [15]. Una medida clave en IT es entropía. En este contexto, la entropía cuantifica la cantidad de incertidumbre asociada al valor de una variable aleatoria o el resultado de un proceso aleatorio.

La expresión que define la entropía en BGStatMech en un marco discreto es de la forma:

$$S = -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i \quad (2.10)$$

Donde  $\rho_i$  es la probabilidad del microestado  $i$  tomado de un colectivo de equilibrio. La expresión que define a la entropía en IT establecida por Shannon en 1948 es:

$$\sigma = - \sum_i \rho_i \log_b \rho_i \quad (2.11)$$

Donde  $b$  es la base del logaritmo usado. Valores comunes de  $b$  son 2, el número de Euler  $e$ , y 10, y las unidades de la entropía son el bit para  $b = 2$ , nat para  $b = e$ , y hartley para  $b = 10$ .

Matemáticamente  $\sigma$  puede también ser visto como una información promedio, tomada sobre el espacio de eventos, porque cuando cierto evento ocurre con probabilidad  $\rho_i$ , se obtiene la cantidad de información  $-\log(\rho_i)$ .

Se puede hacer una conexión directa entre estas dos cantidades. Si las probabilidades en cuestión son las probabilidades termodinámicas,  $\rho_i$ , la entropía adimensional de Gibbs,  $s = S/k_B$ , puede entonces ser vista simplemente como la cantidad de información de Shannon necesaria para definir el estado microscópico del sistema, dada su descripción macroscópica. Para ser más concreto, en el caso discreto usando el logaritmo de base dos, la entropía adimensional de Gibbs es igual al número mínimo de preguntas con respuestas sí-no necesarias para especificar completamente el microestado, dado el macroestado.

Aún más, la descripción para encontrar las distribuciones de equilibrio de la BGStatMech, como la distribución de Boltzmann, mediante la maximización de la entropía de Gibbs sujeta a las restricciones apropiadas, puede ser considerada como algo que no pertenece solo a la termoestadística, sino que es un principio general de relevancia en inferencia estadística si se desea encontrar la distribución de probabilidades, sujeta a ciertas restricciones de los promedios: el principio de Máxima Entropía de Jaynes (MaxEnt) [16].

A pesar de lo anterior, existe una diferencia entre estas dos cantidades. La entropía de la IT  $\sigma$  puede ser calculada para cualquier distribución de probabilidades (si el evento  $i$  tiene probabilidad  $\rho_i$  de ocurrencia), mientras que la entropía termodinámica  $S$  se refiere a las probabilidades termodinámicas  $\rho_i$  específicamente. La diferencia es más teórica que real, sin embargo, porque cualquier distribución de probabilidad puede ser aproximada de forma arbitrariamente cercana por un sistema termodinámico.

Estamos viviendo un tiempo donde un cambio de paradigma está en proceso, los conceptos de información y entropía están ganando más y más atención. Nos estamos dando cuenta que la información es de naturaleza física y estamos expresando nuestras teorías en términos de ella. Véase, por ejemplo, el rol protagónico que la información está jugando en la teoría de agujeros negros, cosmología, computación cuántica y otros. Reescribir algunas áreas de la física desde la teoría de la información es llamado el **paradigma de Wheeler**, propuesto por John Archibald Wheeler en 1989, donde resume esta idea en el concepto que él llamó “*It from bit*” [17].

### 2.2.1. Más allá de la entropía de Boltzmann-Gibbs

El concepto de entropía emerge en un amplio dominio, ya que puede ser definida para cualquier sistema, físico o no, el cual admite un conjunto de probabilidades para sus posibles configuraciones. En este sentido, luego de la entropía de Shannon, varias medidas entrópicas fueron definidas en el contexto de la teoría de la información. En la tabla 2.1 resumo algunas de ellas como ejemplos. Sólo profundizaré en la de Tsallis en las siguientes secciones porque es el tema de esta tesis.

Tabla 2.1: Algunas medidas entrópicas

Shannon	$-\sum_i \rho_i \ln \rho_i dx$
Rényi	$\frac{1}{1-\alpha} \ln(\sum_i p_i^\alpha)$
Tsallis	$\frac{1}{1-q} (\sum_i p_i^q - 1)$
Unificada	$\frac{1}{(1-r)^s} (\sum_i p_i^r)^s - 1$
Kaniadakis	$\frac{1}{2\kappa} \sum_i (p_i^{1-\kappa} - p_i^{1+\kappa})$

El punto es que, en física, desde hace más de un siglo, sólo un funcional entrópico es considerado “físico” en el sentido termodinámico, me refiero a la de BG. En otras áreas, como cibernética, teoría de control, sistemas dinámicos no lineales, teoría de la información, muchos otros funcionales entrópicos han sido estudiados y usados de igual manera. En la comunidad de físicos, sólo la forma de BG es indudablemente admitida como la entropía con significado físico debido a sus profundas conexiones con termodinámica.

La entropía física, un concepto crucial, no debe ser pensada como un funcional universal dado para todo, más bien como un concepto delicado y poderoso que debe ser cuidadosamente construido para una clase de sistemas. En otras palabras, adopto el punto

de vista de pensar que existen clases universales de sistemas. Estos sistemas comparten la misma conexión funcional entre la entropía y el conjunto de probabilidades de sus estados microscópicos.

## 2.3. Fuerza entrópica y entropía de camino

### 2.3.1. Fuerza entrópica

La **fuerza entrópica** es un fenómeno emergente resultante de la tendencia de un sistema termodinámico (con muchos grados de libertad) de maximizar su entropía, más que de una fuerza microscópica subyacente particular. El sistema, o el conjunto de variables macroscópicas que lo describen, tienden a evolucionar desde un estado a otro estadísticamente más probable. La evolución del sistema parece ser producida por una fuerza. Un ejemplo es la contracción de un polímero en un baño térmico. El movimiento de una partícula pequeña (como el polen) producido por impulsos aleatorios de las moléculas que la rodean es otro buen ejemplo de un proceso estocástico en el cual se espera que tales fuerzas emerjan.

Por ejemplo, la energía interna de un gas ideal depende sólo de su temperatura, y no del volumen de la caja que lo contiene, por lo que no es un efecto de la energía el que tiende a incrementar el volumen de la caja como lo hace la presión del gas. Esto implica que la presión de un gas ideal tiene un origen entrópico. ¿Cuál es el origen de la fuerza entrópica? La respuesta más general es que el efecto de las fluctuaciones térmicas tiende a llevar al sistema termodinámico a un estado macroscópico que se corresponda con el máximo número de estados microscópicos que sean compatibles con este macroestado.

La ecuación de la fuerza está expresada en términos de diferencias de entropía, y es independiente de los detalles de la dinámica microscópica. En el colectivo canónico, a una temperatura fija  $T$ , la fuerza entrópica  $F_e$  asociada al macroestado está dada por [18]

$$\vec{F}(\vec{q}_0) = T\vec{\nabla}S(\vec{q})|_{q_0} \quad (2.12)$$

Donde  $q$  es la posición. En particular, no hay un campo fundamental asociado a la fuerza entrópica. Ésta ocurre típicamente en sistemas macroscópicos como coloides o en biofísica. Grandes moléculas de coloides suspendidas en un ambiente térmico de pequeñas partículas, por ejemplo, experimentan fuerzas entrópicas debido a efectos de exclusión de volumen. Las fuerzas entrópicas emergen en sistemas coloidales debido a la presión osmótica que viene de la multitud de partículas. Ósmosis, el proceso por el cual las moléculas de un solvente tienden a pasar a través de una membrana semipermeable de una solución de menor a una de mayor concentración, es otro fenómeno producido por una fuerza entrópica.

La discusión sobre los ejemplos anteriores es para ilustrar que los cambios en la cantidad de información, medidos por la entropía, pueden producir una fuerza. Esta es la idea



central. El concepto de fuerza entrópica se ha hecho importante también en física de la gravitación y cosmología. Recientemente Verlinde ha aplicado el concepto de fuerza entrópica para dar nuevas interpretaciones de la segunda ley de Newton y la gravedad [19]. La aceleración cósmica observada parece estar cuantitativamente en acuerdo con una fuerza entrópica ejercida por el horizonte del Universo. El horizonte es la distancia máxima desde la cual las partículas pueden haber viajado hasta el observador en la edad del Universo.

La universalidad de la gravedad sugiere que su emergencia debería ser entendida a partir de principios generales que sean independientes de los detalles específicos de una teoría microscópica subyacente. Los cambios en la entropía cuando la materia es desplazada conducen a una fuerza entrópica, que toma la forma de gravedad. Su origen radica, por lo tanto, en la tendencia a maximizar la entropía. La suposición más importante es que la información asociada con una parte del espacio obedece el principio holográfico. La evidencia más fuerte para el principio holográfico viene de la física de agujeros negros y de la correspondencia AdS/CFT. Esos desarrollos teóricos indican que al menos parte de los grados de libertad microscópicos pueden ser representados holográficamente en el borde del espacio tiempo o horizonte.

### 2.3.2. Entropía de camino

Recordemos que un microestado está representado por un punto en el espacio de fases y, por lo tanto, cuando el sistema evoluciona en el tiempo, define un camino en él. **Entropías de camino** (o sea, una curva sobre el espacio de fase) han sido discutidas recientemente en las referencias [18, 20], por ejemplo. Aquí trataremos con una noción relacionada pero no idéntica. Trataremos con una partícula moviéndose en el espacio de fases, prestando atención a su entropía evaluada cuando se mueve a lo largo de un camino,  $\Gamma$ , que comienza en el origen y termina en algún punto arbitrario  $(p_0(q_0), q_0)$ . El camino  $\Gamma$  está parametrizado por la variable  $q$ .

En concordancia, el propósito de esta sección es definir las variables termodinámicas de la sección 2.1 en esas curvas del espacio de fases  $\Gamma$ . Veremos que esto es útil. Remarquemos que los cálculos aquí presentados son de carácter microscópico, ya que no involucramos macroestados en ellos. Supongamos que el sistema está en contacto con un reservorio a una temperatura inversa fija  $\beta$ . Entonces, generalizando los integrandos (que son diferenciales exactos) (2.3) y (2.5) a curvas  $\Gamma$ , definimos:

$$\langle U \rangle (\beta, \Gamma) = \frac{1}{Z(\beta, \Gamma)} \int_{\Gamma} H(p, q) e^{-\beta H(p, q)} dp dq \quad (2.13)$$

$$Z(\beta, \Gamma) = \int_{\Gamma} e^{-\beta H(p, q)} dp dq \quad (2.14)$$

Usando la expresión (2.6) se puede definir la entropía de camino sobre  $\Gamma$  *via*  $Z(\beta, \Gamma)$  y  $\langle U \rangle (\beta, \Gamma)$  como

$$S(\beta, \Gamma) = \ln Z(\beta, \Gamma) + \beta \langle U \rangle (\beta, \Gamma) \quad (2.15)$$

### 2.3.3. Un ejemplo: fuerza entrópica de un oscilador armónico

Aquí voy a mostrar los principales resultados de la publicación [21] para mostrar como la fuerza entrópica puede conducir a resultados interesantes, incluso para hamiltonianos simples como el del oscilador armónico (HO). Advierto al lector que aquí presento algunas ecuaciones corregidas de aquellas del trabajo original. Consideremos un hamiltoniano HO típico en contacto térmico con un baño térmico a la temperatura inversa  $\beta$ , que permanece constante:

$$H(p, q) = p^2 + q^2 \quad (2.16)$$

Donde  $p$  y  $q$  tienen las mismas dimensiones (unidades naturales, las de  $H$ ; ya que deseamos evitar tratar con un tensor  $g_{ij}$ ). La función de partición correspondiente está dada por la ecuación (2.5):

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H(p,q)} dp dq \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-\beta U} dU = \frac{\pi}{\beta} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde empleamos el hecho de que la energía total microscópica es (no confundir con  $\langle U \rangle$ ):

$$U = p^2 + q^2 \quad (2.18)$$

Y usamos el cambio de variables  $p = \sqrt{U - q^2}$ . Evaluando la integral resultante, primero en la variable  $q$  y luego en  $U$ , tenemos para la energía media:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle (\beta) &= \frac{1}{Z(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q) e^{-\beta H(p,q)} dp dq \\ &= \frac{\pi}{Z(\beta)} \int_0^{\infty} U e^{-\beta U} dU = \frac{\pi}{\beta^2 Z(\beta)} = \frac{1}{\beta} = k_B T \end{aligned} \quad (2.19)$$

Y la entropía (*via* ecuación (2.6)) es:

$$S(\beta) = \ln \frac{\pi}{\beta} + \frac{1}{\beta} \quad (2.20)$$

Luego podemos definir para el camino  $\Gamma$

$$Z(\beta, \Gamma) = \pi \int_{\Gamma} e^{-\beta U} dU \quad (2.21)$$

$$\langle U \rangle (\beta, \Gamma) = \frac{\pi}{Z(\beta, \Gamma)} \int_{\Gamma} U e^{-\beta U} dU \quad (2.22)$$

Si consideramos ahora curvas parametrizadas en función de la variable independiente  $q$ , pasando por el origen, para el cual  $p(0) = 0$  y  $q = 0$  y, como consecuencia,  $U(0, 0) = 0$  para toda temperatura. Este puede ser siempre el caso luego de un adecuado cambio de coordenadas. Más aún, si tenemos en cuenta que (i) los integrandos en (2.23) y (2.24) son diferenciales exactos y (ii) las integrales son independientes de la forma de la curva y sólo dependen del punto final  $q_0$ , entonces las funciones solo dependen del estado microscópico y tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Z(\beta, q_0) &= \pi \int_0^{q_0} e^{-\beta U} dU \\ &= \frac{\pi}{\beta} [1 - e^{-\beta U(p_0(q_0), q_0)}] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \langle U \rangle (\beta, q_0) &= \frac{\pi}{Z(\beta, q_0)} \int_0^{q_0} U e^{-\beta U} dU \\ &= -\frac{\pi}{Z(\beta, q_0)} U(p_0(q_0), q_0) e^{-\beta U(p_0(q_0), q_0)} + \frac{\pi}{\beta^2 Z(\beta, q_0)} [1 - e^{-\beta U(p_0(q_0), q_0)}] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Notar que cuando  $q_0 \rightarrow \infty$  las ecuaciones (2.23) y (2.24) se reducen a (2.17) y (2.19), respectivamente.

Puede ser probado que el teorema de equipartición se cumple en esta formulación [21], esto es:

$$\langle q^2 \rangle (\beta, q_0) = \langle p^2 \rangle (\beta, q_0) = \frac{\langle U \rangle (\beta, q_0)}{2} \quad (2.25)$$

La fuerza entrópica es

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial q} \\ &= \beta U \frac{\partial U[p(q), q]}{\partial q} \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})^2} \\ &= 2q\beta(p^2 + q^2) \frac{e^{-\beta(p^2 + q^2)}}{[1 - e^{-\beta(p^2 + q^2)}]^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

El comportamiento de la fuerza entrópica es mostrado en la figura (2.1). Notar la barrera (*hard-core*) y que la fuerza tiende a anularse en un entorno del origen. También, hay una gran fuerza de repulsión en  $q = 0$ .

Uno puede ver que, de hecho, la barrera repulsiva es infinita cerca de, pero no en, el origen. En el entorno inmediato al origen sin embargo se anula, y también tiende a

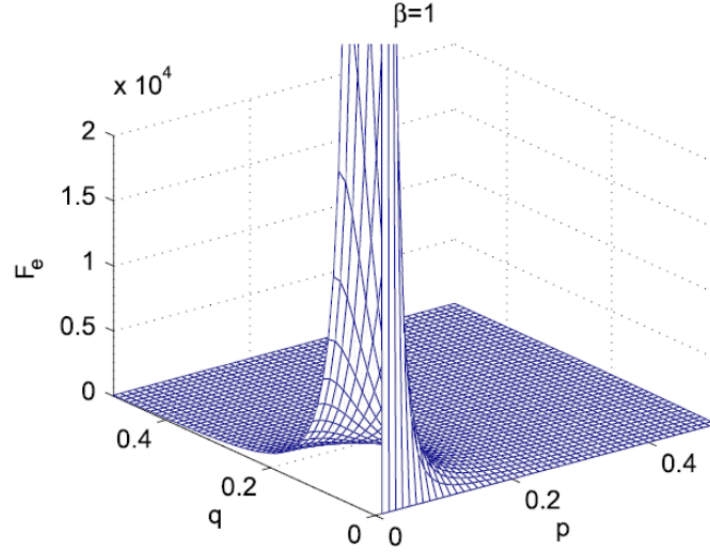


Figura 2.1: Fuerza entrópica para curvas arbitrarias en el espacio de fases versus  $q, p$  para  $\beta = 1$ .

cero para distancias grandes desde el *hard core*. La combinación de estos comportamientos llevan a efectos de confinamiento y de libertad asintótica a través de un mecanismo clásico simple.

Por supuesto, la partícula no solo siente la influencia de  $F_e$ , sino también la del gradiente negativo del potencial del HO. Por lo tanto, se ve afectada por una fuerza total  $F_T = F_e + F_{HO}$ . La expresión correspondiente es

$$F_T = \frac{q}{2} \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})^2} (1 + 3\beta U - e^{-\beta U}) \quad (2.27)$$

Donde

$$F_{HO} = \frac{q}{2} \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})^2} (1 - \beta U - e^{-\beta U}) \quad (2.28)$$

Se puede ver que sumar la fuerza debido al potencial del HO no cambia los resultados cualitativos de  $F_e$ . Adicionalmente, presiones y calores específicos negativos pueden ser obtenidos de este mecanismo. En una dimensión, la presión se reduce, por supuesto, a una fuerza lineal. Se obtiene para ella [21]:

$$F_{linear}(\beta, \Gamma) = \frac{e^{-\beta(p^2+q^2)} \left( 2p \frac{dp}{dq} + 2q \right)}{1 - e^{-\beta(p^2+q^2)}} \quad (2.29)$$

Ahora, las presiones negativas son una propiedad distintiva de la **energía oscura**, una forma hipotética de energía que está presente en todo el espacio y tiende a acelerar la expansión del universo. De hecho, constituye la hipótesis más aceptada para explicar las

observaciones obtenidas desde los 90 que indican que el universo se está expandiendo a una tasa acelerada. Entonces, la energía oscura puede ser descrita como un fluido con presión negativa y se dice que ésta contrarresta la gravedad. Consideremos ahora, por ejemplo, una estrella. La gravedad contrae la estrella, pero la presión térmica (positiva) contrarresta el colapso. Notar que, independientemente de su naturaleza real, la energía oscura necesitaría tener una presión negativa muy fuerte (actuando repulsivamente) para poder explicar la aceleración observada en la expansión del universo. De acuerdo a la Relatividad General, la presión en una sustancia contribuye a su atracción gravitatoria hacia otras cosas tal como lo hace la masa. Esto sucede porque la cantidad física que causa que la materia tenga efectos gravitacionales es el tensor de energía-momento, el cual contiene ambas: la densidad de energía (o materia) de una sustancia y su presión y viscosidad.

Finalmente, el calor específico, que es la derivada de la energía media respecto a la temperatura a volumen constante, es fácilmente calculable y es:

$$C = k_B \left\{ 1 - \frac{\beta^2(p^2 + q^2)e^{-\beta(p^2+q^2)}}{[1 - e^{-\beta(p^2+q^2)}]^2} \right\} \quad (2.30)$$

Independientemente de la curva  $\Gamma$ . En la figura (2.2) se muestra  $C/k_B$  versus  $U$  para distintos valores de  $\beta$  para apreciar mejor el cambio de signo mencionado. El *hard core* genera una transición de fase. El calor específico cambia de signo y se vuelve negativo cerca de él y cae rápidamente cerca del origen. El calor específico negativo es, quizás, la característica termodinámica más distintiva de los sistemas autogravitantes, como veremos en la sección 2.6.

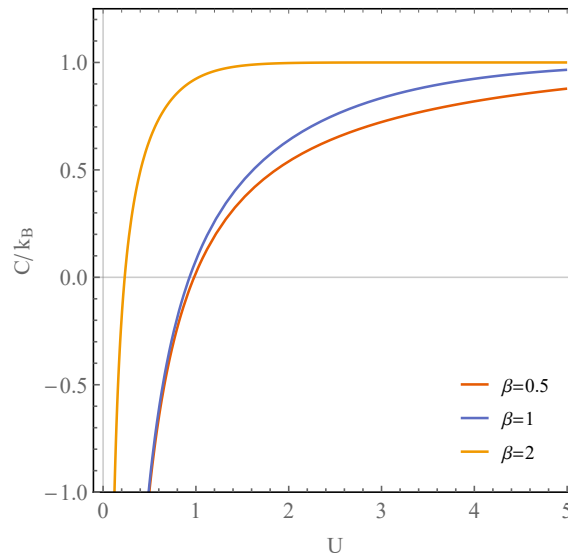


Figura 2.2:  $C/k_B$  versus  $U$  para  $\beta = 0,5, 1,0$  y  $2,0$ . Notar el cambio de signo del calor específico.

### 2.3.4. Generalización n-dimensional

En la sección 2.3.3 introduje el análisis de las propiedades térmicas de una entropía de camino, esto es, estudiamos la mecánica estadística clásica de una curva en el espacio de fases. Esto revela un mecanismo que, asociado a una fuerza entrópica, nos provee con una herramienta simple pero que tiene interesantes efectos como confinamiento, *hard core*, y libertad asintótica, análogo a la gravitación emergente de Verlinde.

Adicionalmente, obtuvimos calores específicos negativos, una característica típica de sistemas autogravitantes, y presiones negativas, típicas de energía oscura. Ahora, es bien sabido que la gravedad es fuertemente dependiente de la dimensionalidad. Es muy distinta, por ejemplo, en dos o tres dimensiones. Entonces, tiene sentido realizar el análisis previo pero en  $n$  dimensiones, que es lo que presento aquí. Puede ser probado que las respectivas generalizaciones a  $n$  dimensiones de las ecuaciones (2.17), (2.19), (2.23) y (2.24) son [22]

$$Z = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^n \quad (2.31)$$

$$\langle U \rangle = \frac{n}{\beta} \quad (2.32)$$

$$Z(\beta, q_1^0) = \frac{\pi^n}{\beta^n} - e^{-\beta U} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\pi^n}{s!} \frac{U^s}{\beta^{n-s}} \quad (2.33)$$

$$\langle U \rangle (\beta, q_1^0) = \frac{\pi^n}{\beta^n Z(\beta, q_1^0)} \left\{ \frac{n}{\beta} - \sum_{s=0}^n \frac{n\beta^{s-1} U^s}{s!} e^{-\beta U} \right\} \quad (2.34)$$

Donde ahora un punto en el espacio de fases está determinado por  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ , pero el vector puede ser parametrizado, por ejemplo, por  $q_1$ , y luego un punto arbitrario puede ser expresado como  $(p_1(q_1), \dots, p_n(q_1), q_2(q_1), \dots, q_n(q_1))$ . Y suponiendo una vez más que el camino  $\Gamma$  comienza en el origen y termina en  $(p_1(q_1^0), \dots, p_n(q_1^0), q_2(q_1^0), \dots, q_n(q_1^0))$ , la generalización de la fuerza entrópica es:

$$F_e = \frac{1}{\beta Z} \frac{dZ}{dq} + \frac{d\langle U \rangle}{dq} \quad (2.35)$$

Donde  $Z$  es la ecuación (2.33), y  $\frac{dZ}{dq}$  y  $\frac{d\langle U \rangle}{dq}$  son:

$$\frac{dZ}{dq} = 2\pi^n q e^{-\beta U} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{U^k}{k! \beta^{n-k-1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{k-1}}{(k-1)! \beta^{n-k}} \right\} \quad (2.36)$$

$$\frac{d\langle U \rangle}{dq} = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{dZ}{dq} + \frac{2q\pi^n}{Z} e^{-\beta U} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{nU^k}{k! \beta^{n-k}} - \sum_{k=0}^n \frac{nU^{k-1}}{(k-1)! \beta^{n-k+1}} \right] \quad (2.37)$$

En el escenario n-dimensional el comportamiento de *hard-core* de la fuerza entrópica es preservada pero no en el origen. La libertad asintótica y la presión negativa emergen en

este tratamiento n-dimensional también. El calor específico, en cambio, es positivo para todo el espacio de fases [22], y es igual a:

$$C = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{k\pi^n}{Z} \left[ \frac{n(n+1)}{\beta^n} - \sum_{s=0}^n \frac{nU^{s+1}}{s!\beta^{n-s-1}} - e^{-\beta U} \sum_{s=0}^n \frac{n(n-s+1)U^s}{s!\beta^{n-s}} \right] \quad (2.38)$$

## 2.4. Mecánica estadística no extensiva

Durante el último cuarto de siglo, un campo activo de la mecánica estadística está centrada alrededor del concepto de la, así llamada, **mecánica estadística no extensiva** (de ahora en más NStatMech, Tsallis' StatMech o qStatMech), que Tsallis introdujo en [23], y que parece dar mejores respuestas, en varios escenarios, que el funcional entrópico tradicional de Boltzmann-Gibbs [24-29]. Ha sido usada en múltiples aplicaciones en los últimos años [30-40], siendo de gran relevancia para astrofísica, particularmente para sistemas autogravitantes [41-45]. Toda la teoría está basada en la entropía de Tsallis,  $S_q$ , la cual, para el índice  $q$  igual a la unidad, reproduce la entropía estándar. Otro ejemplo es su aplicación a la física de altas energías. En este caso, la qStatMech parece describir adecuadamente las distribuciones de momento transversal de diferentes hadrones [24, 46-48], donde el valor  $q = 1,15$  del parámetro de extensividad ha adquirido una relevancia particular.

Adicionalmente, ha sido de gran utilidad en una amplia gama de campos científicos y ha originado miles de publicaciones y muchos autores trabajan en ella. Estos campos científicos involucran una gran variedad de disciplinas, la investigación de sus características estructurales es importante para la astronomía, física, neurología, biología, ciencias económicas, etc, [49-62]. Su éxito reafirma la idea que una gran parte de la física se deriva exclusivamente de consideraciones estadísticas, más que de la mecánica.

La teoría es muy vasta, por lo que me concentraré en mostrar sólo el núcleo de su estructura y los argumentos esenciales de los que voy a hacer uso en mi investigación. Para un desarrollo más detallado de la misma, el lector puede referir, por ejemplo, al libro de Tsallis [24] y por supuesto, todos los trabajos citados durante el texto.

**La entropía de Tsallis**  $S_q$  está definida como [23, 24]:

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \left[ 1 - \int \rho(x)^q dx \right] \quad (2.39)$$

Formas equivalentes son:

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \int [\rho(x) - \rho(x)^q] dx \quad (2.40)$$

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \int \rho(x) [1 - \rho(x)^{q-1}] dx \quad (2.41)$$

Se puede verificar que cuando  $q = 1$  entonces  $S_{q=1} = S_{BG}$  y, por lo tanto, la medida entrópica de Tsallis generaliza a la de BG.  $q \in \mathbb{R}$  es un parámetro real llamado **parámetro entrópico** o **parámetro de extensividad** y jugará un rol muy importante a través de toda la teoría. Por eso uno usualmente habla de “q-mecánica estadística” o “q-entropía”.

Vimos en la sección 2.2 que un conjunto de entropías en el contexto de la teoría de la información ha sido definido pero usualmente la de BG es la única considerada como “física”. Entonces, ¿que podemos decir de  $S_q$  en este sentido? Una variedad de argumentos termodinámicos como extensividad, desigualdad de Clausius, primer principio de la termodinámica, teorema de equipartición y otros definitivamente señalan a  $S_q$  como una entropía física en un sentido bastante análogo al que  $S_{BG}$  seguramente es.

La entropía de Tsallis cumple un conjunto de propiedades deseables que una entropía debería cumplir.

- Es no negativa.
- $S_q$  es cóncava si  $q \geq 0$  y convexa si  $q \leq 0$ . Vea, por ejemplo, la figura (2.3) para el colectivo microcanónico. Por eso, hablaré de **optimización** de entropía, y no de maximización como usualmente se habla en BGStatMech.
- Es extrema para iguales probabilidades. Debido al punto previo tendrá un máximo si  $q \geq 0$  y un mínimo si  $q \leq 0$ .
- $S_q$  es expansible  $\forall q$ , i.e.,  $S_q(\rho_1, \dots, \rho_W, 0) = S_q(\rho_1, \dots, \rho_W)$
- Es no aditiva. Expandiré esto en la sección 2.4.1.

### 2.4.1. Extensividad versus aditividad

Primero quiero hacer una aclaración importante: la entropía de Tsallis  $S_q$  ES extensiva pero no es aditiva. Aclaremos en que sentido.

La palabra *no extensiva* que refiere a la presente generalización de la BGStatMech causa alguna confusión. Esta palabra debe ser asociada al hecho de que la energía total de sistemas con interacciones de largo alcance es no extensiva., en contraste con el caso de sistemas con interacciones de corto alcance, cuya energía es extensiva en el sentido termodinámico.

Sería más apropiado llamarla mecánica estadística no aditiva. Sin embargo, existe, por un lado, el hecho de que la expresión mecánica estadística no extensiva es hoy en día usada en miles de trabajos. Existe, por el otro lado, el hecho de que sistemas importantes que se espera se beneficien de esta teoría son sistemas con hamiltonianos de muchos cuerpos con interacciones de largo alcance. Para tales sistemas, conocidos como **sistemas no extensivos**, la energía total es bien conocida de ser no extensiva, a pesar de que la



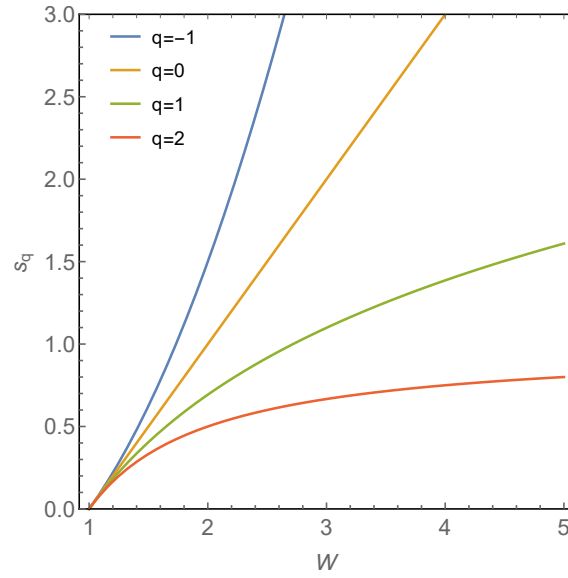


Figura 2.3: La entropía adimensional  $s_q$  para el caso de iguales probabilidades como función del número de estados  $W$  para distintos valores de  $q$ .

extensividad de la entropía puede ser preservada al elegir convenientemente el valor del índice  $q$ .

La definición de **aditividad** puede ser tomada del libro clásico de Penrose [63], una entropía  $S$  se dice aditiva si, para dos sistemas probabilísticamente independientes A y B, i.e., si  $\rho_{i,j}^{A+B} = \rho_i^A \rho_j^B, \forall(i, j)$ , entonces:

$$S(A + B) = S(A) + S(B) \quad (2.42)$$

El funcional entrópico tradicional de BG es aditivo. De hecho, para un sistema compuesto por dos subsistemas independientes, la entropía de BG de la suma coincide con la suma de las entropías.

De la definición de entropía de Tsallis (2.39) se puede probar que [24]

$$s_q(A + B) = s_q(A) + s_q(B) + (1 - q)s_q(A)s_q(B) \quad (2.43)$$

Donde  $s_q = S_q/k_B$  es la entropía adimensional. Por lo tanto, la entropía de BG es aditiva, mientras que  $S_q$  es no aditiva.

**Extensividad** es un concepto más sutil. La entropía  $S$  de un dado sistema constituido por  $N$  elementos se dice extensiva si

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty \quad (2.44)$$

i.e.,  $S(N) \propto N$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Se puede ver, por lo tanto, que la aditividad sólo depende de la forma funcional específica de la entropía en término de las probabilidades. Extensividad depende de ello pero también del sistema específico, más precisamente, de la naturaleza de la correlación de sus elementos, y por lo tanto de sus configuraciones colectivas.

Como consecuencia, para un sistema cuyos elementos son independientes o están débilmente correlacionados, la entropía aditiva de BG es extensiva, mientras que la entropía no aditiva  $S_q$  es no extensiva. En contraste, para un sistema cuyos elementos están fuertemente correlacionados, la entropía aditiva de BG puede ser no extensiva, mientras que la entropía no aditiva  $S_q$  puede ser extensiva para valores especiales de  $q$ . Consistentemente, el índice  $q$  caracteriza clases universales de no-aditividad, en un concepto similar al usado en la teoría de fenómenos críticos estándar.

### 2.4.2. Funciones q-logaritmo, q-exponencial y q-gaussiana

Existe una manera en la que se puede escribir  $S_q$  (2.39) de una forma más concisa y reconocible. Se define la función **q-logaritmo** como:

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}; \quad x > 0 \quad (2.45)$$

Es fácil probar que  $\ln_{q=1}(x) = \ln(x)$ . La función q-logaritmo satisface la siguiente propiedad:

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q(x_A) + \ln_q(x_B) + (1 - q)\ln_q(x_A)\ln_q(x_B) \quad (2.46)$$

Esta función generaliza al logaritmo natural. De la ecuación (2.41) es directo que se puede expresar  $S_q$  como:

$$S_q = -k_B \int \rho \ln_{2-q}(\rho) dx \quad (2.47)$$

Esta expresión nos recuerda a la entropía de BG definida en la manera en que Gibbs lo hizo (ecuación (1.1)).

Se define la función inversa de (2.45) como la función **q-exponencial**, que es igual a:

$$e_q(x) = [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.48)$$

Por supuesto, generaliza la exponencial usual: si  $q = 1$  entonces  $e_{q=1}(x) = e^x$  [24]. La notación  $[ ]_+$  significa que la función está definida de tal manera que se anula para argumentos negativos del corchete, i.e.,  $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ . Esto es llamado el **cut-off de Tsallis**. La figura (2.4) muestra la función q-exponencial para varios valores de  $q$ .

Otra función central para la BGStatMech que puede ser q-generalizada es la función gaussiana. Ésta es muy importante en BGStatMech porque es la solución de la distribución de equilibrio en esta teoría, que en forma general podemos expresarla como:

$$g(x) \propto e^{-(a.x^2 + b.x + c)} \quad (2.49)$$

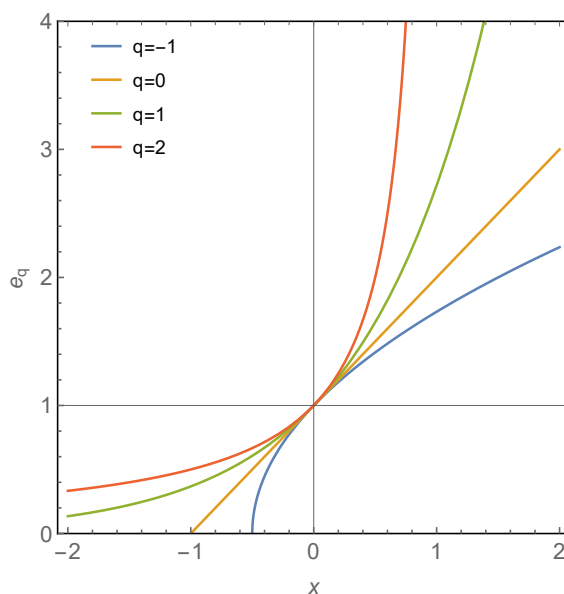


Figura 2.4: La función  $q$ -exponencial  $e_q(x)$  para varios valores de  $q$ .

De [64], podemos definir la función **q-gaussiana** como:

$$g_q(x) = e_q(-(a.x^2 + b.x + c)) = [1 + (q - 1)(a.x^2 + b.x + c)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.50)$$

Esta función es muy usada para ajustes de datos experimentales, debido al hecho de que muchos sistemas físicos parecen comportarse de una forma en la que la distribución de velocidades de es una  $q$ -gaussiana en vez de una gaussiana. El valor de  $q$  en una  $q$ -gaussiana es capaz de dar más o menos peso a las colas o la cabeza de la PDF. En la figura (2.5) se puede ver la función  $q$ -gaussiana para diferentes valores de  $q$  con los parámetros  $a = 1, b = 0, c = 0$ . Como se puede apreciar, cuando  $q > 1$  la  $q$ -gaussiana tiene colas pesadas. Esto significaría darle más peso o importancia a los eventos poco comunes. Mientras que si  $q < 1$  las colas desaparecen y la cabeza de la distribución gana más peso.

### 2.4.3. Optimización de entropía

Al igual que en la StatMech usual, se puede construir un conjunto de herramientas para estudiar diversos sistemas, apelando a la optimización de la entropía con algunas restricciones apropiadas. Supongamos que dado un sistema físico conocemos su energía media:

$$\langle U \rangle = \int H(P, Q) \rho(H(P, Q)) dP dQ \quad (2.51)$$

Donde ahora  $P$  y  $Q$  son el momento y coordenadas generalizadas respectivamente, ya que reservo el símbolo  $q$  para el parámetro de extensividad. La última ecuación, junto con

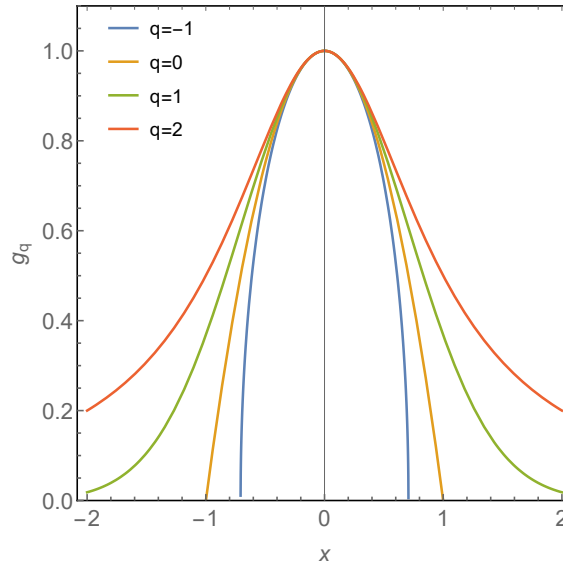


Figura 2.5: La función q-gaussiana  $g_q(x)$  para varios valores de  $q$ . Los parámetros tomados son  $a = 1, b = 0, c = 0$ .  $q < 1$  da más peso a la cabeza de la distribución mientras que  $q > 1$  da más peso a las colas.

la normalización (2.1), lleva al **colectivo canónico no extensivo**. La optimización de  $S_q$  con ambas restricciones lleva a la PDF:

$$\rho = \frac{[1 - (q-1)\beta H(P, Q)]^{\frac{1}{q-1}}}{\int [1 - (q-1)\beta H(P, Q)]^{\frac{1}{q-1}} dP dQ} = \frac{e_{2-q}(-\beta H(P, Q))}{\int e_{2-q}(-\beta H(P, Q)) dP dQ} \quad (2.52)$$

Donde  $\beta = 1/k_B T$  es la temperatura inversa. La **función de partición** está definida como el factor de normalización, que es:

$$Z = \int e_{2-q}(-\beta H(P, Q)) dP dQ \quad (2.53)$$

Notar que, si  $q \rightarrow 1$ , la función de partición se reduce a la usual, eso es, la función de partición de Boltzmann-Gibbs en la ecuación (2.5). Reemplazando la ecuación (2.52) en la definición de  $S_q$  (2.39) y teniendo en cuenta las definiciones (2.51) y (2.53) se obtiene una expresión generalizada de la ecuación (2.6) [65]:

$$S_q = \ln_q Z + Z^{1-q} \beta \langle U \rangle \quad (2.54)$$

Existe una forma alternativa en la que se puede redefinir el parámetro de extensividad  $q$  que lleva a una dualidad aditiva. Si uno realiza la transformación:  $q \rightarrow 2 - q$  entonces la

teoría entera queda igual, y las ecuaciones anteriores pueden ser reescritas como:

$$\begin{aligned} S_{q'} &= S_{2-q} = \frac{k_B}{1-q} \int \rho(x)[1 - \rho(x)^{1-q}] dx \\ &= -k_B \int \rho(x) \ln_q(\rho) dx \\ &= \ln_{2-q} Z + Z^{q-1} \beta \langle U \rangle \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\ln_{q'}(x) = \ln_{2-q}(x) = \frac{x^{q-1} - 1}{q-1} \quad (2.56)$$

$$e_{q'}(x) = e_{2-q}(x) = [1 + (q-1)x]_+^{\frac{1}{q-1}} \quad (2.57)$$

$$\rho(P, Q) = \frac{e_q(-\beta H(P, Q))}{Z} \quad (2.58)$$

$$Z = \int e_q(-\beta H(P, Q)) dP dQ \quad (2.59)$$

Esto puede llevar a malentendidos debido al hecho de que algunas veces se usa una  $q$  o la otra sin aclaración y usando la misma notación, pero es fácil saber que  $q$  se está usando simplemente prestando atención a como están definidas las omnipresentes funciones generalizadas  $q$ -exponencial y  $q$ -logaritmo. Se pueden utilizar ambas  $q$  y las propiedades esenciales de la teoría, como el límite usual  $q \rightarrow 1$ , son preservados. Particularmente durante esta tesis, uso el segundo conjunto de ecuaciones (2.55)-(2.59).

En la tabla (2.2) comparo algunas cantidades típicas de la BGStatMech y la qStatMech.

#### 2.4.4. El $q$ -tripleto

Consideremos la ecuación

$$y = e^{ax} \quad (2.60)$$

Podemos pensarla de tres maneras físicas diferentes, relacionadas respectivamente a la sensibilidad a las condiciones iniciales, a la relajación en el espacio de fases y, si el sistema es hamiltoniano, a la distribución de energías en equilibrio térmico. En la primera interpretación tenemos:

$$\xi = e^{\lambda t} \quad (2.61)$$

Donde  $\lambda$  es el exponente de Lyapunov. En la segunda interpretación, nos enfocamos en la relajación temporal de una cantidad relevante:

$$\Omega(t) = e^{-t/\tau} \quad (2.62)$$

Tabla 2.2: Comparación de ecuaciones comunes de BGStatMech y qStatMech

	BGStatMech	qStatMech
Entropía	$S = -k_B \int \rho \ln \rho dx$	$S_q = \frac{k_B}{1-q} \int \rho(x)[1 - \rho(x)^{1-q}] dx$ $S_q = -k_B \int \rho(x) \ln_q(\rho) dx$
Entropía microcanónica	$S = k_B \ln W$	$S_q = k_B \ln_q W$
PDF canónica	$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$	$\rho = \frac{e_q(-\beta H)}{Z} = \frac{[1+(q-1)\beta H]_+^{\frac{1}{q-1}}}{Z}$
Función de partición canónica	$Z = \int e^{-\beta H} dp dq$	$Z = \int e_q(-\beta H(P, Q)) dP dQ$ $Z = \int [1 + (1-q)\beta H]_+^{\frac{1}{q-1}}$
Valor medio de $X$	$\langle X \rangle = \int X \rho(X) dp dq$	$\langle X \rangle = \int X \rho(X) dp dq$
$S(Z, \langle U \rangle)$	$S = \ln Z + \beta \langle U \rangle$	$S_q = \ln_{2-q} Z + Z^{q-1} \beta \langle U \rangle$

Donde  $\tau$  es el tiempo de relajación. Finalmente en la tercera interpretación, tenemos:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad (2.63)$$

Generalizando estas maneras de pensar tenemos las siguientes expresiones, resumidas en la tabla (2.3) [24]:

Tabla 2.3: Tres interpretaciones físicas de la q-exponencial

	BGStatMech	qStatMech
Distribución de estado estacionario	$\rho = e^{-\beta H} / Z$	$\rho = e_{q_{stat}}^{-\beta H} / Z_{q_{stat}}$
Sensibilidad a las condiciones iniciales	$\xi(t) = e^{\lambda t}$	$\xi(t) = e_{q_{sens}}^{\lambda_{q_{sens}} t}$
Relajación de un observable	$\Omega(t) = e^{-t/\tau}$	$\Omega(t) = e_{q_{rel}}^{-t/\tau_{q_{rel}}}$

El conjunto  $(q_{sens}, q_{rel}, q_{stat})$  constituye lo que se llama el **q-triplete** (ocasionalmente referido también como el q-triángulo). En el caso particular de BG, recobramos  $q_{sens} = q_{rel} = q_{stat} = 1$ . La existencia de estas tres q-exponenciales caracterizadas por el q-triplete fue predicha en [25] y confirmada en [66].

Estos índices están interrelacionados ya que los tres surgen de la exploración dinámica particular que el sistema hace de su espacio de fases:

$$q_{rel} + \frac{1}{q_{sens}} = 2 \quad (2.64)$$

$$q_{stat} + \frac{1}{q_{rel}} = 2 \quad (2.65)$$

Y por lo tanto

$$1 - q_{sens} = \frac{1 - q_{stat}}{3 - 2q_{stat}} \quad (2.66)$$

Luego, sólo uno de los tres es independiente. Existe también una conexión realmente bella si definimos  $\varepsilon_{sens} = 1 - q_{sens}$ ,  $\varepsilon_{rel} = 1 - q_{rel}$  y  $\varepsilon_{stat} = 1 - q_{stat}$ :

$$\varepsilon_{stat} = \frac{\varepsilon_{sens} + \varepsilon_{rel}}{2} \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_{sens} = \sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_{rel}} \quad (2.68)$$

$$\varepsilon_{rel}^{-1} = \frac{\varepsilon_{sens}^{-1} + \varepsilon_{stat}^{-1}}{2} \quad (2.69)$$

Esto es, están conectados por las medias aritmética (2.67), geométrica (2.68) y armónica (2.69).

#### 2.4.5. Sobre sistemas no extensivos

Supongamos un sistema de muchos cuerpos clásico con el siguiente hamiltoniano:

$$H = K + V = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i \neq j} V(r_{ij}) \quad (2.70)$$

Donde la energía potencial de dos cuerpos  $V(r)$  se comporta como:

$$V(r) \sim -\frac{A}{r^\alpha} \quad (A > 0; \alpha \geq 0) \quad (2.71)$$

Un ejemplo típico podría ser el modelo de gas 3-dimensional de Lennard-Jones ( $d = 3$ ), para el cual  $\alpha = 6$ . Otro ejemplo es la gravitación newtoniana  $d = 3$ , para la cual  $\alpha = 1$ . Analicemos la energía potencial promedio característica por partícula,  $U_{pot}$ :

$$\frac{U_{pot}(N)}{N} \propto -A \int_1^\infty r^{d-1} r^{-\alpha} dr \quad (2.72)$$

Esta es la típica energía que uno podría calcular en el enfoque de BG. Se ve inmediatamente que esta integral converge si  $\alpha/d > 1$  (condición que define las interacciones de corto

alcance para sistemas clásicos) pero diverge si  $0 \leq \alpha/d \leq 1$  (definición de interacciones de largo alcance). Esto ya indica que algo anómalo podría ocurrir.

De una forma ligeramente distinta al enfoque usual, en el que se exige que la integración sea hasta el infinito en la ecuación (2.72), supongamos que el sistema de  $N$  partículas está homogéneamente distribuido dentro de una esfera limitada. Entonces la ecuación (2.72) debe ser reemplazada por la siguiente:

$$\frac{U_{pot}(N)}{N} \propto -A \int_1^{N^{1/d}} r^{d-1} r^{-\alpha} dr = -\frac{A}{d} N^* \quad (2.73)$$

Con

$$N^* = \frac{N^{1-\alpha/d} - 1}{1 - \alpha/d} = \ln_{\alpha/d} N \quad (2.74)$$

Si el sistema tiene interacciones de corto alcance entonces

$$\alpha/d > 1 \implies \ln_{\alpha/d} N \sim \frac{1}{\alpha/d - 1} \implies \frac{U_{pot}(N)}{N} \propto -\frac{A}{\alpha - d} \quad (2.75)$$

Por lo tanto,  $U_{pot}$  crece linealmente cuando  $N \rightarrow \infty$ , i.e., la energía es extensiva. Veamos que ocurre en el caso de interacciones de largo alcance. En el caso límite:

$$\alpha/d = 1 \implies \ln_{\alpha/d} N = \ln N \implies \frac{U_{pot}(N)}{N} \propto -\frac{A \ln N}{d} \quad (2.76)$$

Entonces la energía por partícula diverge logarítmicamente cuando  $N \rightarrow \infty$ . El último caso de interacciones de largo alcance también diverge:

$$0 < \alpha/d < 1 \implies \ln_{\alpha/d} N \sim \frac{N^{1-\alpha/d}}{1 - \alpha/d} \implies \frac{U_{pot}(N)}{N} \propto -\frac{AN^{1-\alpha/d}}{1 - \alpha/d} \quad (2.77)$$

Los, así llamados, sistemas extensivos (interacciones de corto alcance) típicamente involucran series absolutamente convergentes, mientras que los llamados sistemas no extensivos (interacciones de largo alcance) involucran series divergentes.

La figura (2.6) muestra las regiones del plano  $(d, \alpha)$ . Los sistemas extensivos pueden ser encontrados en la región blanca, mientras que los no extensivos están en la región azul. El punto rojo está representando la gravitación newtoniana. Los sistemas marginales ( $\alpha/d = 1$ ) típicamente involucran series condicionalmente convergentes, las que dependen de las condiciones de contorno, i.e., típicamente de la forma externa del sistema y están representados en la figura (2.6) por la línea azul.

#### 2.4.6. Divergencias en la teoría de Tsallis

Fue encontrado en [65] que la teoría clásica de Tsallis exhibe polos en la función de partición  $Z$  y la energía media  $\langle U \rangle$ . Esto ocurre en un conjunto contable de la línea “q”. Doy aquí, mediante un procedimiento simple, un reporte de ellos. Prestando atención



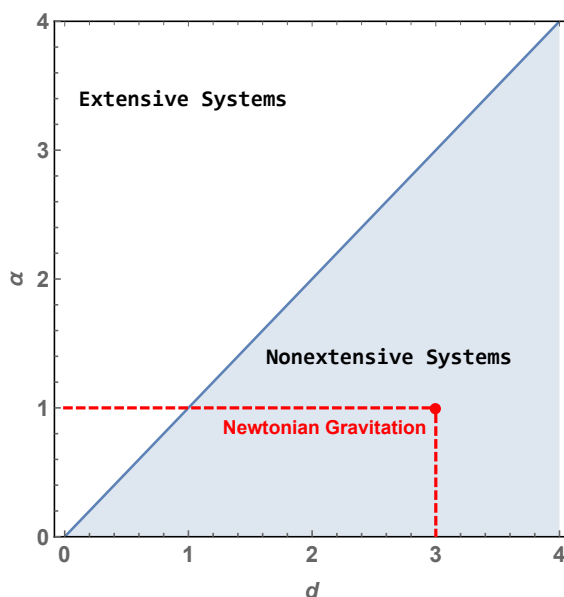


Figura 2.6: Representación gráfica de sistemas extensivos y no extensivos en el plano  $(d, \alpha)$ . Como un ejemplo, la gravitación 3-dimensional de Newton, un sistema no extensivo, es representado por un punto rojo.

en la física escondida detrás de los polos, se pueden encontrar interesantes efectos. En particular, el calor específico esconde efectos gravitacionales [67].

Las divergencias son un tema importante en la física teórica. De hecho, el estudio y eliminación de las divergencias de una teoría física es quizás uno de los aspectos más importantes de la física teórica. El típico ejemplo es el intento actual por cuantificar el campo gravitacional, lo cual aún no se ha logrado.

Tomemos, por ejemplo, un hamiltoniano del tipo oscilador armónico (HO) en  $\nu$  dimensiones. La función de partición puede ser escrita de la forma [65]:

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{U^{\nu-1}}{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{q-1}}} dU \quad (2.78)$$

Donde  $U$  es la energía del espacio de fases. El resultado de esa integral es:

$$Z = \frac{\pi^\nu}{[\beta(q-1)]^\nu} \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1} - \nu)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \quad (2.79)$$

Con la restricción  $1 \leq q < 2$ , de acuerdo a la ecuación (A.28). Las singularidades (divergencias) de  $Z$  están dadas por los polos de la función  $\Gamma$  que aparece en el numerador, esto es, para:

$$\frac{1}{q-1} - \nu = -p \quad \text{for } p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.80)$$

O, equivalentemente, para:

$$q = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{\nu}{\nu-1}, \frac{\nu+1}{\nu} \quad (2.81)$$

De una manera similar, tenemos para la energía media del HO:

$$\langle U \rangle = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)Z} \int_0^\infty \frac{U^\nu}{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{q-1}}} dU \quad (2.82)$$

El resultado es

$$\langle U \rangle = \frac{\nu\pi^\nu}{Z[(q-1)\beta]^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1} - \nu - 1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \quad (2.83)$$

En este caso las singularidades están dadas por:

$$\frac{1}{q-1} - \nu - 1 = -p \quad \text{for } p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.84)$$

O

$$q = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{\nu+1}{\nu}, \frac{\nu+2}{\nu+1} \quad (2.85)$$

Tomemos el caso unidimensional. En una dimensión  $Z$  es regular y  $\langle U \rangle$  tiene una singularidad en  $q = 3/2$ . Para  $q \neq 3/2$ ,  $Z$  y  $\langle U \rangle$  pueden ser fácilmente evaluadas:

$$Z = \frac{\pi}{\beta(2-q)} \quad (2.86)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\beta(3-2q)} \quad (2.87)$$

En  $q = 3/2$  tenemos un polo en el valor medio de la energía, el cual queremos investigar. En cambio, para  $q = 3/2$  tenemos para  $Z$ :

$$Z = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.88)$$

Es un valor regular. La regularización es necesaria entonces sólo para  $\langle U \rangle$ . Explico esta técnica en la siguiente sección. Ahora es suficiente con saber que el resultado es:

$$\langle U \rangle = -\frac{2}{\beta} \left[ 1 + \ln \left( \frac{2\pi}{\beta} \right) \right] \quad (2.89)$$

Debido a que la energía media debe ser positiva, de acuerdo a la última ecuación, los valores posibles de  $\beta$  están restringidos por  $\beta > 2\pi e$ , o  $T < 1/2\pi e k_B$ . Este es un límite máximo para la temperatura física, la cual no puede ser infinita. Esto concuerda con las consideraciones hechas en [68]: la qStatMech se refiere a sistemas en contacto térmico con un baño finito.

Demostremos una mirada a los calores específicos. Tendremos una expresión válida fuera de los polos y otra dentro. Ellos son, respectivamente:

$$C = \frac{k_B}{3 - 2q} \quad (2.90)$$

$$C = -2k_B(\ln k_B T + \ln 2\pi + 2); \quad k_B T < \frac{1}{2\pi e} \quad (2.91)$$

La figura (2.7) muestra los calores específicos, (2.90) y (2.91), dentro de sus rangos válidos de temperatura, para una dimensión. Vemos que, en el caso  $q = 3/2$ , emerge un calor específico negativo. Tal fenómeno ha sido asociado a sistemas autogravitacionales [44, 69], como veremos más detalladamente en próximas secciones. En cambio, Verlinde ha asociado este tipo de sistemas con una fuerza entrópica, [19], como ya vimos. Es natural entonces conjeturar que una fuerza como esa puede aparecer en los polos de energía.

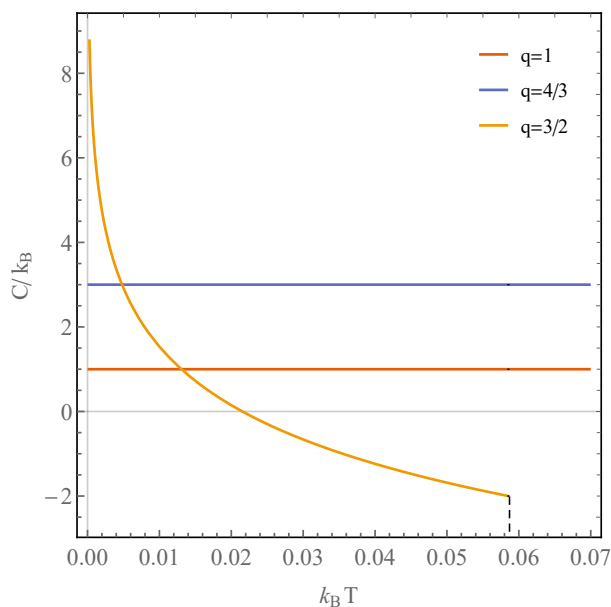


Figura 2.7: Representación gráfica del calor específico del HO en el polo ( $q = 3/2$ ) y fuera de él ( $q = 1$  y  $q = 4/3$ ) versus  $T$ .

## 2.5. Regularización Dimensional

La Regularización Dimensional (DR) constituye uno de los avances teóricos más importantes en física de la segunda mitad del siglo pasado. Es utilizada en varias disciplinas [70-92]. La teoría cuántica de campos (*Quantum Field Theory*, QFT) tiene el problema de definir el producto de dos distribuciones (un producto en un anillo sin divisores de cero), un viejo interrogante del análisis funcional. Esto sucede porque en QFT el problema de evaluar el producto de distribuciones con puntos singulares coincidentes está íntimamente relacionado con el comportamiento asintótico de integrales de curvas cerradas.

Desde un punto de vista matemático, casi todas las definiciones de productos de dos distribuciones llevan a limitaciones en el conjunto de distribuciones que pueden ser multiplicadas de modo que el resultado sea una distribución del mismo tipo. De hecho, el gran matemático Laurent Schwartz no fue capaz de definir un producto de distribuciones considerada como un álgebra, más que como un anillo con divisores de cero.

Las referencias [93-96] muestran que es posible definir una convolución general entre las ultradistribuciones del matemático portugués J. Sebastiao e Silva (JSS) [97] (llamadas ultrahiperfunciones). Tal convolución produce otra ultrahiperfunción. Por lo tanto, nos enfrentamos al producto en un anillo con cero divisores. Este anillo es el espacio de las distribuciones de tipo exponencial, o ultradistribuciones de tipo exponencial, obtenido aplicando una antitransformada de Fourier al espacio de las ultradistribuciones temperadas o ultradistribuciones de tipo exponencial. Remarco que las hiperultrafunciones son la generalización al plano complejo de las distribuciones temperadas de Schwartz y las distribuciones de tipo exponencial. Esto es, las distribuciones temperadas y las de tipo exponencial son subconjuntos de las ultrahiperfunciones. El problema que uno enfrenta entonces es el de formular la convolución entre ultradistribuciones. Este es un problema complicado, difícil de manejar. Afortunadamente, existe un método similar a aquel utilizado para definir la convolución de ultradistribuciones que también puede ser usado para definir la convolución de distribuciones invariantes de Lorentz usando el enfoque de DR en el espacio de momentos.

Como consecuencia, las ultradistribuciones no necesitan ser usadas en los cálculos, lo cual los simplifica considerablemente. Aprovechando el tratamiento de DR, se puede también trabajar en el espacio de configuración [98]. Técnicamente, la generalización de DR es una convolución de distribuciones en el espacio de momentos y un producto en un anillo con divisores de cero en el espacio de configuraciones. En particular, garantiza que el producto de distribuciones existe y es finito.

En DR uno básicamente expande en un desarrollo de Laurent la cantidad a ser regularizada en términos de la dimensión (tomada como si fuera un número real) y se queda con el término del desarrollo que no depende de la dimensión. ¿Cuál es la importancia de usar sólo el término independiente de la dimensión? Que el resultado obtenido para convoluciones finitas coincide con ese término. Esto se traduce al espacio de configuraciones como una operación de producto en un anillo con divisores de cero.

### 2.5.1. La generalización de regularización dimensional del espacio de configuraciones al espacio euclídeo

Consideremos primero el caso del espacio  $\nu$ -dimensional Minkowskiano  $M_\nu$ . Sea  $S'$  el espacio de las distribuciones temperadas de Schwartz [99, 100]. Sea  $g \in S'$ . Decimos que

$g \in S'_L$  si y solo si

$$g(\rho) = \frac{d^l}{d\rho^l} f(\rho) \quad (2.92)$$

Donde la derivada debe ser considerada como la derivada en el sentido de las distribuciones,  $l$  es un número natural,  $\rho = k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - \dots - k_{\nu-1}^2$ , y  $f$  satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\rho)|}{(1 + \rho^2)^n} d\rho < \infty \quad (2.93)$$

Siendo continua en  $M_\nu$ . El exponente  $n$  es un número natural. Decimos entonces que  $f \in T_{1L}$ . En el caso del espacio Euclídeo  $R_\nu$ , sea  $g \in S'$ . Decimos que  $g \in S'_R$  si y solo si

$$g(k) = \frac{d^l}{dk^l} f(k), \quad (2.94)$$

Donde  $k^2 = k_0^2 + k_1^2 + \dots + k_{\nu-1}^2$ , con  $f(k)$  satisfaciendo

$$\int_0^{\infty} \frac{|f(k)|}{(1 + k^2)^n} dk < \infty \quad (2.95)$$

Y  $f(k)$  siendo continua en  $R_\nu$ . Decimos entonces que  $f \in T_{1R}$ .

La expresión para la convolución de dos funciones esféricamente simétricas  $h(k, \nu) = (f * g)(k, \nu)$  fue deducida en la referencia [98]. Se tiene que:

$$h(k, \nu) = \frac{2^{4-\nu} \pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) k^{\nu-2}} \iint_0^{\infty} f(k_1, \nu) g(k_2, \nu) [4k_1^2 k_2^2 - (k^2 - k_1^2 - k_2^2)^2]_+^{\frac{\nu-3}{2}} k_1 k_2 dk_1 dk_2 \quad (2.96)$$

Sin embargo, Bollini y Giambiagi no pudieron obtener un producto en un anillo con divisores de cero. Esto es algo que Plastino y Rocca lograron en [101]. Supongamos que  $f$  y  $g$  pertenecen a  $S'_R$ . Con el cambio de variables  $\rho = k^2$ ,  $\rho_1 = k_1^2$ ,  $\rho_2 = k_2^2$  tenemos:

$$h(\rho, \nu) = \frac{2^{4-\nu} \pi^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) \rho^{\frac{\nu-2}{2}}} \iint_0^{\infty} f(\rho_1, \nu) g(\rho_2, \nu) [4\rho_1 \rho_2 - (\rho - \rho_1 - \rho_2)^2]_+^{\frac{\nu-3}{2}} d\rho_1 d\rho_2 \quad (2.97)$$

Sea  $\mathcal{V}$  una banda vertical en el plano complejo  $\nu$ -dimensional. La integral (2.97) es una función analítica de  $\nu$  definida en el dominio  $\mathcal{V}$ . Luego, de acuerdo al método de referencia [93],  $h(\rho, \nu)$  puede ser analíticamente continuada a otras partes del plano complejo  $\nu$ -dimensional. En particular, cerca de la dimensión  $\nu_0$  tenemos el siguiente desarrollo de Laurent

$$h(\rho, \nu) = \sum_{m=-1}^{\infty} h^{(m)}(\rho) (\nu - \nu_0)^m \quad (2.98)$$

Aquí,  $\nu_0$  es la dimensión del espacio en el que estamos interesados. Ahora *se define la convolución-producto* como el término  $(\nu - \nu_0)$ -independiente del desarrollo de Laurent,

debido a que los términos con  $m > 0$  se anulan y el término con  $m = -1$  exhibe un polo en (2.98). Entonces, es natural definir:

$$h_{\nu_0}(\rho) = h^{(0)}(\rho) \quad (2.99)$$

Insisto: si la convolución es finita entonces el término  $h^{-1}(\rho)$  es nulo. Por lo tanto, en este caso, el valor de la serie en  $\nu = \nu_0$  es precisamente  $h_{\nu_0}(\rho) = h^{(0)}(\rho)$ . Se define entonces la convolución-producto como el término independiente de  $(\nu - \nu_0)$  del desarrollo de Laurent pertinente para obtener un producto en un anillo con cero divisores. Muestro un ejemplo de aplicación de éste método en el apéndice D. Para una explicación más detallada y ejemplos, el lector puede consultar [21, 101-107].

La idea será usar esta técnica con el objetivo de resolver las divergencias en algunas medidas de la mecánica estadística como en la función de partición y la energía media.

## 2.6. Sistemas autogravitantes

La autogravitación (*self-gravitation*, SG) es la fuerza gravitatoria ejercida sobre un grupo de cuerpos por ellos mismos que les permite mantenerse juntos. Luego, definimos un **sistemas autogravitante** como todo sistema que se mantiene unido por la propia interacción gravitatoria entre sus partes. Podemos pensar, por ejemplo, en estrellas, galaxias, agujeros negros y *clusters*. La SG tiene importantes efectos en los campos de la astronomía, física, sismología y geología. Trata con observaciones de larga escala en campos fuera de la astronomía también. A pesar de típicamente no aparecer como un tema central de la investigación científica, su entendimiento y la capacidad de calcular sus efectos matemáticamente aumentan la precisión de modelos y comprensión de sistemas de larga escala.

En secciones previas he mencionado que la termodinámica de sistemas SG presenta algunos aspectos de no equilibrio y caos, por ejemplo, el calor específico negativo (recordar que uno de los requisitos de equilibrio de la termodinámica es que el calor específico debe ser positivo). El **calor específico negativo** sólo puede ocurrir en sistemas aislados o casi aislados. Son imposibles en sistemas extensivos en colectivos canónicos o para la materia en colectivo gran canónico. Sin embargo, lejos de ser un fenómeno extraño que solo se encuentra en la termodinámica de agujeros negros, ocurre en una amplia variedad de sistemas astronómicos macroscópicos. Podemos entender el calor específico negativo intuitivamente considerando un sistema simple de dos cuerpos: agregar energía al sistema causa que la órbita se expanda, y cuerpos en órbita más grandes se mueven a velocidades menores de acuerdo a  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r}$ ; entonces, incluso para órbitas muy excéntricas, la velocidad promedio de los dos cuerpos disminuye cuando la energía aumenta, y esto puede ser generalizado a sistemas de muchas partículas, donde la velocidad promedio determina la temperatura del sistema.

Los astrónomos saben que cuando una estrella o un *cluster* de estrellas pierde energía su temperatura aumenta de acuerdo al teorema del virial, como Lynden-Bell mostró en [44, 108], y que agregar energía a una estrella o *cluster* de estrellas hará que se expanda y se enfríe [109]. Bekenstein [110] y Hawking [111, 112] mostraron que la termodinámica de agujeros negros involucra calores específicos negativos. Vemos entonces que los sistemas astronómicos exhiben calores específicos negativos. Sin embargo, existe en StatMech una prueba simple de que el calor específico es positivo como vimos en la sección 2.1. Esta paradoja, primero resuelta por Thirring [113], es solucionada con un modelo simple que obedece el teorema del virial. Él se dió cuenta que la dificultad es removida una vez que una distinción clara es hecha entre los colectivos canónico y microcanónico. Propone un modelo simple en el que el calor específico es negativo para un dado rango de energías en el colectivo microcanónico y por una transición de fases en el canónico.

Un sistema autogravitante aislado como una estrella obedece el teorema del virial:

$$2 \langle K \rangle + n \langle V \rangle = 0 \quad (2.100)$$

Donde  $\langle K \rangle$  es la energía cinética promedio y  $\langle V \rangle \propto r^{-n}$  la energía potencial promedio. Para la gravedad  $n = 1$  y para un gas ideal la energía cinética es proporcional a la temperatura a través de la relación  $\langle K \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$ . Del teorema del virial podemos entonces encontrar que

$$\langle U \rangle = - \langle K \rangle = - \frac{3}{2} N k_B T \quad (2.101)$$

Luego la capacidad calorífica es

$$C_V = \frac{d \langle U \rangle}{dT} = - \frac{3}{2} N k_B \quad (2.102)$$

El argumento está sobresimplificado debido a que las esferas isotérmicas no pueden ser confinadas por su propia gravedad y por lo tanto una caja esférica es requerida. Cuando esta caja es tenida en cuenta el teorema del virial es modificado por términos de superficie y reescrito como  $2 \langle T \rangle + n \langle V \rangle = 3pV$  donde  $p$  es la presión en la superficie y  $V$  su volumen. Lynden-Bell mostró que esta modificación no elimina la capacidad calorífica negativa.

### 2.6.1. Catástrofe Gravotérmica

Primero haré una revisión de las consecuencias de sistemas con  $C_V$  negativos.

Consideremos primero un sistema extensivo uniforme y lo dividamos en dos partes por una frontera por la que puede pasar el calor. Una pequeña cantidad de calor  $dQ$  fluye a través de la frontera generando una diferencia de temperatura y por lo tanto un flujo de calor de la parte más caliente a la más fría. El calor específico es el mismo para cada parte e igual al del todo; si fuera negativo el flujo de calor aumenta la diferencia

de temperaturas, incrementando el flujo de calor. Un sistema como el descrito no podría llegar al equilibrio termodinámico. Por lo que dos sistemas con  $C_V$  negativo en contacto térmico no tienen equilibrio térmico, ya que uno se calienta perdiendo energía y el otro se enfría ganándola [108]. Entonces los sistemas con  $C_V$  negativo no pueden ser divididos en dos partes independientes cada una con calor específico negativo; ya que los sistemas con  $C_V$  negativo no pueden ser considerados extensivos y por lo tanto la qStatMech será la adecuada para tratar tales sistemas.

Imaginemos un sistema con capacidad calorífica negativa  $C_1 = -|C_1|$  conectado a otro de capacidad calorífica positiva  $C_2$ . Si una cantidad de calor  $dQ$  es transferida del sistema 1 al 2, entonces el primero incrementará su temperatura de  $T_0$  a  $T_0 + dQ/|C_1|$  y el segundo la incrementará a  $T_0 + dQ/C_2$ . Estas nuevas temperaturas causarán un flujo contrario de calor si y solo si  $|C_1|^{-1} < C_2^{-1}$ . Entonces el sistema solo es estable si  $C_2 < |C_1|$ . Este resultado demuestra que un sistema de capacidad calorífica negativa sólo puede estar en equilibrio con un sistema de capacidad calorífica positiva si la suma de ambos es negativa [44].

Un sistema con  $C_V$  negativo no llega al equilibrio térmico con un reservorio. Cualquier fluctuación hace que la energía temporalmente se incremente y que la temperatura disminuya y el flujo de calor del reservorio sólo hará que el sistema aumente aún más su energía y que disminuya más su temperatura [108].

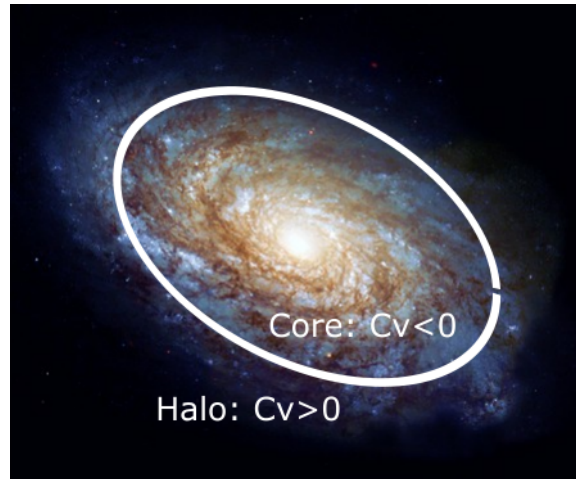


Figura 2.8: Representación de partes de una galaxia: un núcleo autogravitacional de alta densidad y un halo gaseoso de baja densidad.

Ahora estamos en posición de explicar la **Catástrofe Gravotérmica** de Antanov [114]. Imaginemos un gas isotérmico gravitante confinado en una esfera que se expande adiabáticamente. Un trabajo es realizado por el gas sobre la esfera, entonces  $\langle U \rangle$  se vuelve más negativo y el gas se contrae mientras el radio de la esfera aumenta. La parte interna del gas es mucho más densa y sostenida principalmente por su propia gravedad, entonces la expansión es principalmente realizada por el gas menos denso en las partes



exteriores. La caída adiabática en la temperatura de las partes externas debido a la expansión será inicialmente mayor que la caída de temperatura de la parte interna. Entonces se producirá un gradiente de temperatura entre las partes exteriores e interiores del gas. Sin embargo, como vimos, las esferas isotérmicas autogravitantes tienen calor específico negativo. Como el flujo de calor disminuye el gradiente de temperatura la parte central se contrae y calienta mientras que la parte exterior sostenida por la esfera se comporta como un gas normal por lo que recibe el calor y se calienta también. Ahora tenemos una competencia, ¿la parte externa se calentará más rápido al recibir calor que la parte interna al perderlo? Claramente si la parte externa tiene un gran calor específico positivo no podrá responder con la suficiente rapidez y la parte interna llegará a temperaturas aún más altas perdiendo más y más energía. Esta es la catástrofe gravotérmica de Antanov. Tiende a ocurrir en antiguos *clusters* globulares donde el núcleo puede calentarse, comenzando una transferencia de energía cinética a partes externas, y colapsa. Lo mismo ocurre en galaxias elípticas, donde podemos identificar una parte interna con alta densidad de estrellas autogravitantes, y una parte externa, un halo de baja densidad que se comporta como un gas ideal, como podemos ver en la figura (2.8). Luego, la parte interna tiene calor específico negativo mientras que el halo tiene calor específico positivo. Una fluctuación es suficiente para conducir a la catástrofe gravotérmica en la cual ambas partes aumentan su temperatura sin control.

## 2.7. Generalización no lineal de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon

Generalmente las ecuaciones lineales en física están restringidas a sistemas idealizados, siendo válidas para medios caracterizados por condiciones específicas, como homogeneidad, isotropía e invariancia traslacional, con partículas interactuando a través de fuerzas de corto alcance y con un comportamiento dinámico caracterizado por memoria de corto plazo. Sin embargo, muchos sistemas reales, especialmente los sistemas complejos, no cumplen esos requisitos, y usualmente exhiben comportamientos colectivos complicados asociados a fenómenos no lineales. Por lo tanto, el estudio de ecuaciones no lineales ha abierto una nueva área de la física, atrayendo mucho interés debido a la posibilidad de describir muchas situaciones reales.

Bajo este contexto, varias ecuaciones no lineales de Schrödinger han sido propuestas recientemente. Es una ecuación de campo clásica cuyas principales aplicaciones son la propagación de luz en fibras ópticas no lineales, y guías de ondas planas, condensados de Bose-Einstein confinados en trampas “*cigar-shaped*” anisotrópicas. Además, este tipo de ecuación aparece en el estudio de ondas de Langmuir en plasmas calientes, propagación de ondas planas difractadas en regiones de la ionósfera y otros [115].

En [116] Nobre, Rego-Monteiro y Tsallis (NRT) introdujeron generalizaciones no lineales

les de las tres ecuaciones principales de la física cuántica: las ecuaciones de Schrödinger, Klein-Gordon y Dirac. Su propuesta consiste en extender los términos lineales en términos no lineales, como se hace con la ecuación no lineal de Fokker-Planck. Un aspecto interesante acerca de estas generalizaciones es que pueden ser formuladas fácilmente en dimensiones arbitrarias, y cuyas soluciones son todas expresadas en términos de la función q-exponencial que emerge naturalmente en NStatMech. Muchas ecuaciones no lineales en la literatura son formuladas en una dimensión y su extensión a  $n$  dimensiones no siempre es una tarea sencilla.

Primero deberíamos definir la q-exponencial para un argumento complejo. Para un número imaginario puro,  $iu$ , se define  $e_q(iu)$  como el valor principal de

$$e_q(iu) = [1 + (1 - q)iu]^{1/(1-q)} \quad (2.103)$$

Esta ecuación satisface

$$e_q(\pm iu) = \cos_q(u) \pm i \sin_q(u) \quad (2.104)$$

Donde el q-coseno y el q-seno son:

$$\cos_q(u) = g_q(u) \cos\left\{\frac{1}{q-1} \arctan[(q-1)u]\right\} \quad (2.105)$$

$$\sin_q(u) = g_q(u) \sin\left\{\frac{1}{q-1} \arctan[(q-1)u]\right\} \quad (2.106)$$

Con  $g_q$  una q-gaussiana:

$$g_q(u) = [1 + (1 - q)^2 u^2]^{1/(2(1-q))} \quad (2.107)$$

$$e_q(iu) \cdot e_q(-iu) = \cos_q^2(u) + i \sin_q^2(u) = g_q^2(u) \quad (2.108)$$

Notar que  $e_q[i(u_1 + u_2)] \neq e_q(iu_1)e_q(iu_2)$  para  $q \neq 1$ . Como una consecuencia de las ecuaciones (2.104-2.108), la q-exponencial de un imaginario puro presenta un comportamiento oscilatorio con una amplitud variable  $g_q(u)$  que decrece (aumenta) para  $1 < q < 3$  ( $q < 1$ ). Más precisamente,  $e_q(iu)$  es modulada por la q-gaussiana.

Consideremos una onda q-plana, esto es:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(0, 0) e_q[i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)] \quad (2.109)$$

La onda q-plana no puede ser descompuesta, para  $q \neq 1$ , en factores espacial y temporal, como sucede con muchas soluciones de ecuaciones no lineales. Más aún, la amplitud de la onda q-plana para  $1 < q < 3$  decrece cuando su argumento aumenta. Debido a esta propiedad, este nuevo tipo de solución podría ser aplicable a varios fenómenos físicos no

lineales. Uno puede ver que la onda q-plana  $n$ -dimensional de la ecuación (2.109) satisface la ecuación de onda lineal:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.110)$$

Equipado con  $\omega = ck$ . La onda q-plana se comporta como un solitón propagándose con velocidad  $c = \omega/k$ . Esto habilita el estudio de excitaciones no lineales que no se deforman con el tiempo y serían relevantes, por ejemplo, en óptica no lineal y física de plasmas.

El procedimiento de NRT consiste en encontrar una ecuación no lineal para la cual la ecuación (2.109) es una solución [116]. Y tiene la forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] = \frac{1}{2-q} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^{2-q} \quad (2.111)$$

Consistentemente, los operadores energía y momento deben ser generalizados de la forma  $E = i\hbar D_t$  y  $\hat{p} = -i\hbar D_x$  respectivamente, donde  $D_u f(u) = [f(u)]^{1-q} df(u)/du$ . Estos operadores, cuando actúan sobre la q-exponencial  $e_q[i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)]$ , dan la energía  $E = \hbar\omega$  y momento  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . Ahora, si se considera la solución de la onda q-plana de (2.109) se puede verificar que esta nueva forma es una solución de la ecuación anterior con  $E = p^2/2m$ , para todos los valores de  $q$ .

Un enfoque diferente es propuesto en [117] por Plastino y Rocca. Ellos notaron que la onda q-plana es una función hipergeométrica (ver apéndice A), de la forma:

$$\left[ 1 + \frac{i}{\hbar} (1-q)(px - Et) \right]^{\frac{1}{1-q}} = F \left[ \frac{1}{q-1}, \gamma; \gamma; \frac{i}{\hbar} (q-1)(px - Et) \right] \quad (2.112)$$

Como las funciones hipergeométricas obedecen la ecuación diferencial (A.11) la onda q-plana obedece:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^q + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] = 0 \quad (2.113)$$

O,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^q = H_0 \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] \quad (2.114)$$

La ecuación presente es, para el caso de partícula libre, equivalente a la ecuación NRT (2.111). La última ecuación NRT modificada es fácilmente generalizable. Entonces para un hamiltoniano arbitrario  $H$  podemos escribir:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^q = H \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] \quad (2.115)$$

NRT también presentaron una q-generalización de la ecuación de Klein-Gordon, que es igual a [116]:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + q \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\vec{x}, t) \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^{2(q-1)} \quad (2.116)$$

Se puede verificar fácilmente que la misma onda q-plana usada para la ecuación de q-Schrödinger es una solución de la ecuación (2.116), preservando para todos los valores de  $q$  la relación de Einstein  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ . Debo mencionar que el término no lineal en la ecuación (2.116) es nuevo y diferente de aquellos en previas formulaciones. En trabajos previos de otros autores, el término no lineal es construido multiplicando la función de onda por una potencia de su módulo, llevando a diferentes tipos de soluciones y diferentes espectros de energía. Otro aspecto importante de la ecuación (2.116) tiene que ver con su invarianza de Lorentz: debido a que esta propiedad está directamente relacionada con los dos primeros términos, que no han sido cambiados, la ecuación (2.116) permanece invariante ante transformaciones de Lorentz. Algunas ecuaciones no lineales de Klein-Gordon no son invariantes ante la transformación de Lorentz usual y requieren una modificación de ésta.

### 2.7.1. Estados Gamow y q-Gamow

Esta sección resume algunos resultados de [118]. Las resonancias son comúnmente encontradas en varios sistemas cuánticos, independientemente de sus constituyentes y del régimen cinemático en que aparecen. Las resonancias son propiedades intrínsecas de los sistemas cuánticos, asociadas con su frecuencia natural, y que describen decaimientos preferenciales de estados no acotados. El efecto de las resonancias en estados de *scattering* pueden ser considerados en los sistemas cuánticos abiertos como una extensión del modelo de capas nuclear, el llamado modelo de capas nuclear continuo. Una realización particular de este modelo es el modelo de capas nuclear continuo de energía compleja basada en el colectivo de Berggren, el modelo de Gamow [119].

Nos enfocamos en los estados de decaimiento a grandes distancias del centro de dispersión y comprobamos que una representación de Gamow es adecuada. El uso de exponenciales para representar una resonancia es una aproximación válida sólo a grandes distancias del centro de dispersión.

Un estado Gamow, a grandes distancias, tiene la forma

$$|\psi_G\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x)\} e^{\frac{ipx}{\hbar}} |x\rangle dx \quad (2.117)$$

Donde  $\mathcal{H}(x)$  es la función escalón de Heaviside. El cuadrado de la norma es

$$\langle \psi_G | \psi_G \rangle = \int_0^{\infty} \mathcal{H}[Im(p)] e^{\frac{i(p-p^*)x}{\hbar}} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}[-Im(p)] e^{\frac{i(p-p^*)x}{\hbar}} dx \quad (2.118)$$

Estas integrales pueden ser fácilmente evaluadas y se encuentra que

$$\langle \psi_G | \psi_G \rangle = \{\mathcal{H}[Im(p)] - \mathcal{H}[-Im(p)]\} \frac{\hbar}{i(p^* - p)} = \frac{\hbar}{2|Im(p)|} \quad (2.119)$$

En consecuencia, el estado Gamow normalizado  $\phi_G$  es [120]

$$|\phi_G\rangle = \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} |\psi_G\rangle. \quad (2.120)$$

Y

$$\langle \phi_G | (H | \phi_G \rangle) = \frac{p^2}{2m} \quad (2.121)$$

$$(\langle \phi_G | H) | \phi_G \rangle = \frac{p^{*2}}{2m} \quad (2.122)$$

La energía media es

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} [\langle \phi_G | (H | \phi_G \rangle) + (\langle \phi_G | H) | \phi_G \rangle] = \frac{p^2 + p^{*2}}{4m} = \frac{Re(p^2)}{2m} \quad (2.123)$$

Para obtener la distribución de probabilidad asociada al estado Gamow miramos el producto escalar entre este estado y uno libre

$$\langle \phi | \phi_G \rangle = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{|Im(p)|}{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \mathcal{H}[Im(p)] e^{\frac{i(p-k)x}{\hbar}} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}[-Im(p)] e^{\frac{i(p-k)x}{\hbar}} dx \right\} \quad (2.124)$$

Luego,

$$\langle \phi | \phi_G \rangle = \frac{i \sqrt{\frac{|Im(p)|}{\pi}}}{p - k} \quad (2.125)$$

La distribución de probabilidad es la de Breit-Wigner [120]

$$|\langle \phi | \phi_G \rangle|^2 = \frac{|Im(p)|}{\pi \{ [Re(p) - k]^2 + Im(p)^2 \}} \quad (2.126)$$

Se ha mostrado que los estados Gamow pueden ser interpretados como Ultradistribuciones de Sebastiao e Silva [121, 122].

Existe un gran número de experimentos de alta energía que pueden ser satisfactoriamente interpretados a través de la estadística de Tsallis. En particular, esto sucede para experimentos del LHC respecto a distribuciones de estados estacionarios. La q-estadística parece ser adecuada para describir las distribuciones de momento transversal de diferentes hadrones. Los 4 experimentos del LHC llevaron a publicaciones que involucran distribuciones que parecen ser ajustadas de forma apropiada por funciones q-exponenciales. Los valores asociados de  $q$  son del orden de 1,15, distintos del valor de Gibbs-Boltzmann  $q = 1$ . En consecuencia, los estados estacionarios antes de la hadronización no son los de equilibrio térmico. Las mediciones de la distribución de momentos transversos en una escala logarítmica muestran que  $q = 1,15$  ajusta los datos en un gran rango [46, 47].

Estas circunstancias motivan a investigar los estados de energía compleja relacionados a las distribuciones q-exponenciales, esto es, los estados q-Gamow (o q-resonancias), y establecer la relación con los estados Gamow. Estos estados q-Gamow no son soluciones de la ecuación de Schrödinger sino de su q-generalización no lineal que vimos en la sección

anterior. Un primer análisis es realizado en [118], reemplazando la exponencial por una q-exponential, y llegando a los siguientes estados q-Gamow:

$$\psi_{qG}(x) = \{\mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x)\} \otimes \left[ 1 + \frac{i(1-q)px}{\hbar\sqrt{2(q+1)}} \right]^{\frac{2}{1-q}} \quad (2.127)$$

Con norma:

$$\langle \psi_{qG} | \psi_{qG} \rangle = \frac{\hbar}{5-q} \frac{\sqrt{2(q+1)}}{|p|} \otimes F\left(\frac{1}{2}, \frac{5-q}{2(q-1)}, \frac{3+q}{2(q-1)}; \frac{[Re(p)]^2}{|p|^2}\right) = [A(q, p)]^2 \quad (2.128)$$

Donde  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  es la función hipergeométrica. (Ver apéndice A para más información).

La distribución de q-Breit-Wigner correspondiente es:

$$|\langle \phi | \phi_{qG} \rangle|^2 = \frac{\hbar}{2\pi A(q, p)} \left[ \frac{2(q+1)}{(1-q)^2 |p|^2} \right]^{\frac{2}{q-1}} k^{\frac{2(3-q)}{q-1}} e^{\frac{\sqrt{2(q+1)k(p+p^*)}}{(1-q)|p|^2}} \otimes \Gamma\left[\frac{3-q}{1-q}, \frac{\sqrt{2(q+1)k}}{(1-q)p}\right] \left\{ \Gamma\left[\frac{3-q}{1-q}, \frac{\sqrt{2(q+1)k}}{(1-q)p}\right] \right\}^* \quad (2.129)$$

## Parte II

# Contribuciones originales





## Capítulo 3

# Tratamiento perturbativo de las ecuaciones no lineales de Schrödinger y Klein-Gordon

*“L’inspiration existe, mais il faut qu’elle nous trouve au travail”*

Pablo Picasso.

En este capítulo realizo un análisis detallado de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon NRT mediante un tratamiento perturbativo en  $q \sim 1$ . Primero doy las motivaciones de porqué es importante estudiar estas ecuaciones. Luego estudio el desarrollo de la ecuación de Schrödinger NRT, y también de un paquete de onda q-gaussiano. La ecuación de Klein-Gordon NRT es el tema de la sección 3.4 y finalmente analizo mediante el desarrollo perturbativo la ecuación de q-Schrödinger de variables separadas y realizo unas conclusiones finales.

### 3.1. Introducción

Mencioné en la sección 2.7 que, recientemente, ecuaciones no lineales generalizadas de Schrödinger y Klein-Gordon han sido propuestas por Nobre, Rego-Monteiro y Tsallis (NRT) en [116]. Actualmente hay mucha actividad en ésta área. La no linealidad de estas ecuaciones está gobernada por el parámetro real  $q$ . Es un hecho que las consiguientes ecuaciones no lineales, llamadas de q-Schrödinger y q-Klein-Gordon, son manifestaciones naturales de fenómenos de muy alta energía, como fue verificado por experimentos en el LHC. Esto sucede para valores de  $q$  cercanos a la unidad [2, 118]. Es también bien sabido que el comportamiento q-exponencial es encontrado en una gran variedad de arreglos. Una explicación para tal fenómeno fue dado en [123] haciendo referencia a escenarios empíricos en los cuales los datos son obtenidos vía arreglos que efectúan una normalización además de un pre-procesamiento de datos. Precisamente, se mostró que la salida de datos

normalizada correspondiente está q-exponencialmente distribuida si la entrada de datos muestra simetría elíptica, generalización de la simetría esférica, lo cual constituye una situación frecuente. Esto hace difícil saber con certeza, para valores de  $q$  cercanos a la unidad, si estamos tratando con soluciones a la ecuación ordinaria de Schrödinger (cuyas soluciones de partículas libres son exponenciales y para el cual  $q = 1$ ) o con la ecuación no lineal de NRT, cuya solución de partícula libre son q-exponenciales.

Datos experimentales indican que el comportamiento tipo ley de potencia en las distribuciones de probabilidad observadas de magnitudes interesantes es muy común en el mundo natural [124]. En [123] se mostró que una razón para este fenómeno es la normalización en el detector. En la mayoría de los dispositivos encontramos una etapa de pre-procesamiento de datos que impide que el dispositivo de medición sea sobrepasado por datos de muy grande amplitud que puedan dañar el *hardware*. Se apela, entonces, a la normalización estadística de los datos de entrada. Estos primero son centrados por substracción de su valor medio estimado y luego escalados con su desviación estándar estimada. En [123] fue mostrado que los procedimientos asociados transforman la entrada de datos gaussiana en una salida de tipo q-gaussiana. Recordemos que una q-exponencial viene definida como:

$$e_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}; \quad (e_{q=1}(x) = \exp x) \quad (3.1)$$

En vista de las consideraciones empíricas antes hechas, resulta claro que en el entorno de  $q = 1$  es muy difícil saber con certeza si uno está tratando con exponenciales o q-exponenciales. Las primeras corresponden a las soluciones para una partícula libre de la celebrada ecuación de Schrödinger, mientras que las segundas corresponden a las soluciones de partícula libre de su generalización no lineal presentada en [116, 117] (ver también [125-127]), la así llamada ecuación NRT. Si deseamos analizar un flujo de partículas, ¿cuál de las dos ecuaciones gobierna su comportamiento, la lineal o la no lineal?

Con el objetivo de ayudar a encontrar una respuesta adecuada a esta pregunta realizo un estudio cuidadoso de las soluciones de la ecuación NRT en el entorno de  $q \sim 1$ .

### 3.1.1. Motivación

La motivación radica en el hecho de que tanto la ecuación de q-Schrödinger como la de q-Klein-Gordon son manifestaciones naturales de fenómenos de muy alta energía [2, 118], como fue verificado por experimentos en el LHC [24], para los cuales  $q$  es muy cercano a la unidad. En tal caso, las dos ecuaciones mencionadas anteriormente se acercan a las ecuaciones usuales de Schrödinger y Klein-Gordon, siendo idénticas en el límite  $q \rightarrow 1$ , siendo entonces una generalización de estas. La ecuación de q-Schrödinger de la que hablo es la ecuación (2.113). Recordemos que es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^q + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] = 0 \quad (3.2)$$

Y para  $q$  cercano a la unidad se puede escribir

$$\left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right]^q = \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} + (q - 1) \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \ln \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] \quad (3.3)$$

El segundo término del lado derecho de (3.3) es despreciable por lo que se puede escribir

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \left[ \frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi(0, 0)} \right] = 0 \quad (3.4)$$

O

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.5)$$

Que es la ecuación de Schrödinger lineal convencional.

Una situación análoga sucede con la ecuación de q-Klein-Gordon. Se tiene que

$$\square \left[ \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \right] + \frac{qm^2c^2}{\hbar^2} \left[ \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \right]^{2q-1} = 0 \quad (3.6)$$

Para  $q$  cercano a la unidad:

$$\left[ \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \right]^{2q-1} = \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} + 2(q - 1) \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \ln \left[ \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \right] \quad (3.7)$$

Una vez más, el segundo término es despreciable. Como consecuencia, se obtiene

$$\square \left[ \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \right] + \frac{qm^2c^2}{\hbar^2} \left[ \frac{\phi(\vec{x}, t)}{\phi(0, 0)} \right] = 0 \quad (3.8)$$

O

$$\square \phi(\vec{x}, t) + \frac{qm^2c^2}{\hbar^2} \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.9)$$

Luego, como  $q$  es cercano a la unidad, se obtiene la ecuación usual de Klein-Gordon:

$$\square \phi(\vec{x}, t) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.10)$$

Se ve que es muy importante obtener soluciones aproximadas para las ecuaciones de q-Schrödinger y q-Klein-Gordon, debido a que serían ecuaciones correspondientes a energías intermedias [117] entre altas energías (régimen no lineal) y bajas energías (régimen lineal).

### 3.2. Expansión de primer orden de la función q-exponencial como una solución a la ecuación no lineal de q-Schrödinger NRT

Primero demostraré que el desarrollo de Taylor de primer orden alrededor de  $q = 1$  de la función q-exponencial  $e_q$ , es una solución a la ecuación no lineal de q-Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\psi(x, t)}{\psi(0, 0)} \right]^q = H_0 \left[ \frac{\psi(x, t)}{\psi(0, 0)} \right] \quad (3.11)$$

$\psi(0, 0)$  es una función de onda fija y:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (3.12)$$

En este caso:  $\psi \propto e_q$ , definida como

$$e_q = [1 + \frac{i}{\hbar}(1-q)(px - Et)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.13)$$

Llamando  $z = \frac{i}{\hbar}(px - Et)$  se obtiene

$$e_q = [1 + (1-q)z]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.14)$$

La función  $e_q$  tiende a la exponencial usual cuando  $q \rightarrow 1$

$$e_q(z)|_{q \rightarrow 1} = e^z \quad (3.15)$$

Se puede observar que  $\psi(0, 0) = 1$ . Luego, la ecuación (3.11) se reduce a

$$i\hbar \frac{\partial \psi^q(x, t)}{\partial t} = H_0 \psi(x, t) \quad (3.16)$$

### 3.2.1. Desarrollo de primer orden de $\psi = e_q$

Luego de un largo cálculo (ver Apéndice B.1) se obtiene

$$\psi \simeq e^z + (q-1) \frac{z^2}{2} e^z$$

O

$$\psi \simeq e^z \left[ 1 + (q-1) \frac{z^2}{2} \right] \quad (3.17)$$

Notar que la última relación difiere de una función exponencial, cuando  $q$  es cercano a la unidad, solo por el término  $(q-1)z^2/2$ .

Explícitamente se tiene que

$$\psi \simeq e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \left[ 1 + (1-q) \frac{(px - Et)^2}{2\hbar^2} \right] \quad (3.18)$$

Necesitamos ahora la segunda derivada del desarrollo de  $e_q$  con respecto a  $x$ . Esto implica de nuevo un largo cálculo (ver Apéndice B.2), luego del cual se encuentra que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} \left[ q + \frac{2i}{\hbar}(q-1)(px - Et) - \frac{(q-1)}{2\hbar^2}(px - Et)^2 \right] \quad (3.19)$$

Obviamente, también necesitaremos el desarrollo de primer orden de  $\psi^q$ . Esta expansión es en la variable  $q$ , alrededor de  $q = 1$ . Se tiene que

$$\psi^q = e^{q \ln \psi}$$

Luego,

$$\frac{\partial \psi^q}{\partial q} = \frac{\partial(q \ln \psi)}{\partial q} \psi^q = \left( \ln \psi + \frac{q}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) \psi^q = \psi^q \ln \psi + q \psi^{q-1} \frac{\partial \psi}{\partial q} \quad (3.20)$$

Para  $q=1$  se obtiene

$$\left. \frac{\partial \psi^q}{\partial q} \right|_{q=1} = \psi|_{q=1} (\ln \psi)|_{q=1} + \left. \frac{\partial \psi}{\partial q} \right|_{q=1}$$

Sabiendo que

- $\psi|_{q=1} = e^z$
- $(\ln \psi)|_{q=1} = z$
- $\left. \frac{\partial \psi}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{z^2}{2} e^z$

Luego,

$$\left. \frac{\partial \psi^q}{\partial q} \right|_{q=1} = z e^z + \frac{z^2}{2} e^z \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial \psi^q}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{i}{\hbar} (px - Et) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - \frac{(px - Et)^2}{2\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (3.22)$$

El desarrollo de primer orden de  $\psi^q$  es, entonces,

$$\psi^q \simeq \psi^q|_{q=1} + (q-1) \left. \frac{\partial \psi^q}{\partial q} \right|_{q=1}$$

Reemplazando aquí las ecuaciones (3.15) y (3.22) se obtiene

$$\psi^q \simeq e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} + (q-1) \left[ \frac{i}{\hbar} (px - Et) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - \frac{(px - Et)^2}{2\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \right] \quad (3.23)$$

Finalmente, necesitamos la derivada respecto al tiempo, que es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^q}{\partial t} &= \frac{-iE}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} + (q-1) \left[ \frac{-iE}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} + \frac{2E}{\hbar^2} (px - Et) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{iE}{2\hbar^3} (px - Et)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \right] \end{aligned}$$

O

$$\frac{\partial \psi^q}{\partial t} = \frac{-iE}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \left[ q + \frac{2i(q-1)}{\hbar} (px - Et) - \frac{(q-1)}{2\hbar^2} (px - Et)^2 \right] \quad (3.24)$$

Ahora reemplazando las ecuaciones (3.19) y (3.24) en la ecuación no-lineal de q-Schrödinger (3.16), se puede comprobar que el desarrollo de Taylor de primer orden de la función q-exponencial es, de hecho, una solución a esta ecuación con el *eigenvalor* usual correspondiente a una partícula libre,  $E = p^2/2m$ . Se obtiene por lo tanto autoconsistencia, indicando que los cálculos han sido correctamente realizados.

### 3.2.2. Comparación entre las soluciones exacta y aproximada

En esta sección realizo comparaciones entre las soluciones aproximada y exacta de la ecuación de q-Schrödinger. Para este fin, primero evalué el módulo de la relación,  $R$ , de las funciones (3.18) y (3.13). Como un ejemplo, en las figuras (3.1) a (3.4), se muestra  $R$  correspondiente a un electrón y un protón de 1 MeV de energía en  $t = 0$  para dos valores de  $q$  distintos. Notar que, para un rango de  $x$  considerable en términos de distancias atómicas o nucleares, la relación es esencialmente la unidad. Por lo tanto, la aproximación puede ser considerada muy buena en ese rango.

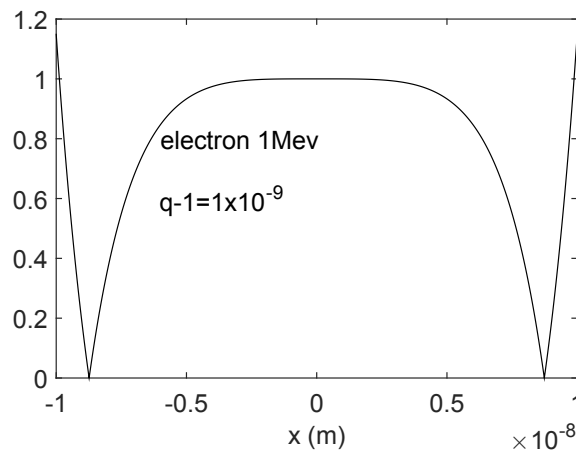


Figura 3.1: Relación  $R$  vs.  $x$  (en metros) para electrones de 1 MeV y  $q - 1 = 10^{-9}$ .

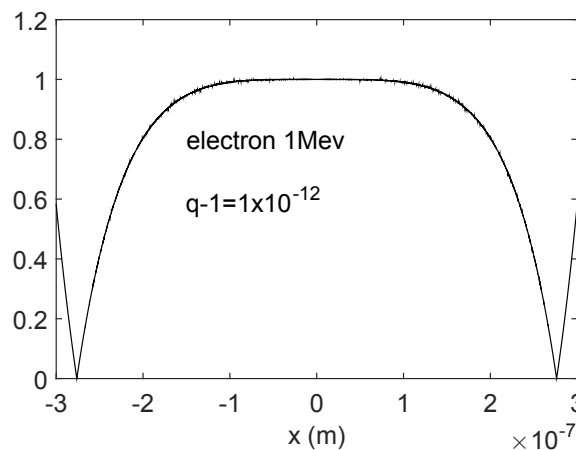


Figura 3.2: Relación  $R$  vs.  $x$  (en metros) para electrones de 1 MeV y  $q - 1 = 10^{-12}$ .

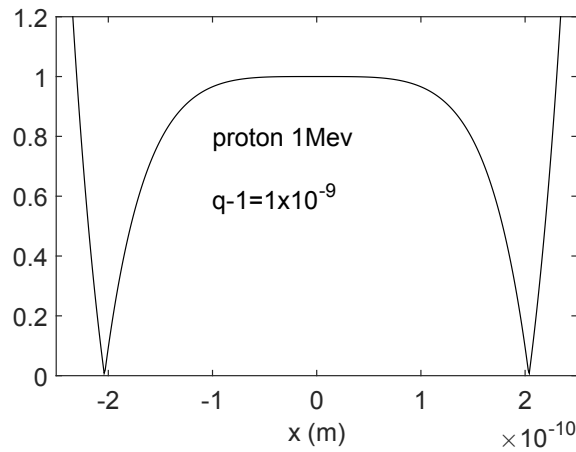


Figura 3.3: Relación  $R$  vs.  $x$  (en metros) para protones de 1 MeV y  $q - 1 = 10^{-9}$ .

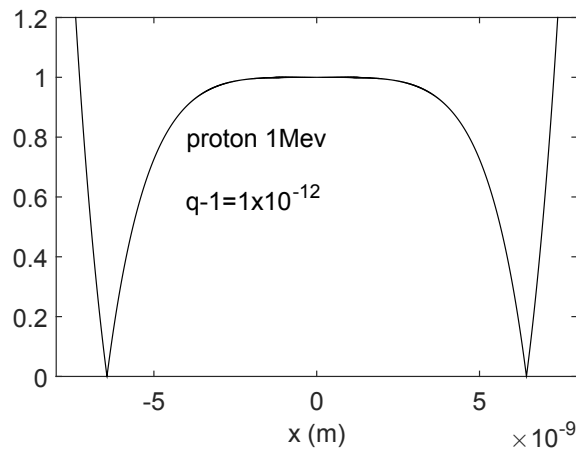


Figura 3.4: Relación  $R$  vs.  $x$  (en metros) para protones de 1 MeV y  $q - 1 = 10^{-12}$ .

### 3.3. Desarrollo de primer orden de una función q-Gaussiana

Paso ahora a discutir una solución importante de la ecuación (3.11): el paquete de onda q-gaussiano. Siguiendo a [128], una solución propuesta es:

$$\psi(x, t) = \{1 + (q - 1) [a(t)x^2 + b(t)x + c(t)]\}^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.25)$$

Donde los parámetros  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  pueden ser encontrados reemplazando esta solución en la ecuación diferencial (3.11), como en [128]. Aquí utilizo una expresión simplificada de los parámetros, seleccionando  $mqa = 1$ , con el objetivo de simplificar los cálculos. Tengo

entonces:

$$a(t) = \frac{mq}{1 + i\hbar(q+1)t} \quad (3.26)$$

$$b(t) = \frac{1}{\beta[1 + i\hbar(q+1)t]} \quad (3.27)$$

$$c(t) = \left( \frac{1}{q-1} - \frac{1}{4mq\beta^2} \right) [1 + i\hbar(q+1)t]^{\frac{q-1}{q+1}} + \frac{1}{4mq\beta^2[1 + i\hbar(q+1)t]} + \frac{1}{1-q} \quad (3.28)$$

Podemos aproximar los coeficientes a primer orden en la variable  $q$ :

$$\begin{aligned} a(t) &= a_1(t) + (q-1)a_2(t) \\ b(t) &= b_1(t) + (q-1)b_2(t) \\ c(t) &= c_1(t) + (q-1)c_2(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donde  $a_1, b_1$  y  $c_1$  son los coeficientes valuados en  $q = 1$  y  $a_2, b_2$  y  $c_2$  la primera derivada de los coeficientes valuados en  $q = 1$ . Obteniendo de (3.26), (3.27) y (3.28):

$$a_1(t) = \frac{m}{1 + 2i\hbar t} \quad (3.30)$$

$$a_2(t) = \frac{m(1 + i\hbar t)}{(1 + 2i\hbar t)^2} \quad (3.31)$$

$$b_1(t) = \frac{1}{\beta(1 + 2i\hbar t)} \quad (3.32)$$

$$b_2(t) = -\frac{i\hbar t}{\beta(1 + 2i\hbar t)^2} \quad (3.33)$$

$$c_1(t) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2i\hbar t) - \frac{i\hbar t}{2m\beta^2(1 + 2i\hbar t)} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \frac{1}{4m\beta^2} + \frac{i\hbar t}{2(1 + 2i\hbar t)} - \frac{(1 + 3i\hbar t)}{4m\beta^2(1 + 2i\hbar t)^2} + \\ &\frac{1}{8} \ln^2(1 + 2i\hbar t) - \frac{1 + 2m\beta^2}{8m\beta^2} \ln(1 + 2i\hbar t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por lo tanto la aproximación de primer orden de la q-Gaussiana es:

$$\psi(x, t) = \left\{ 1 - (q-1) \left\{ a_2(t)x^2 + b_2(t)x + c_2(t) - \frac{1}{2} [a_1(t)x^2 + b_1(t)x + c_1(t)]^2 \right\} \right\} \otimes e^{-[a_1(t)x^2 + b_1(t)x + c_1(t)]} \quad (3.36)$$



Por construcción,  $\psi(x, t)$ , como se presenta en la ecuación (3.36), es una aproximación de primer orden de (3.25). Para tener una idea de la calidad de la aproximación en la figura (3.5) muestro la relación entre (3.36) y (3.25) versus la distancia  $x$  (en unidades absolutas) para  $q - 1 = 10^{-3}$ . Notar que la relación es esencialmente 1 para distancias mucho mas grandes que las atómicas o nucleares, por lo que la aproximación es muy buena en ese rango.

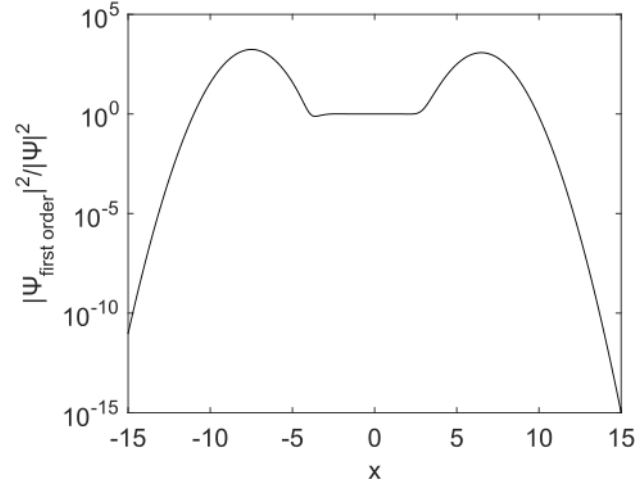


Figura 3.5: Relación entre las q-Gaussianas de las ecuaciones (3.36) y (3.25) vs.  $x$  (en unidades absolutas) para  $q - 1 = 10^{-3}$ .

### 3.4. Ecuación no-lineal de q-Klein-Gordon

Ahora deseo verificar que el desarrollo de la función  $e_q$  es una solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{qm^2c^2}{\hbar^2} \phi^{2q-1} = 0 \quad (3.37)$$

Esta ecuación, llamada de q-Klein-Gordon o Klein-Gordon NRT, fue propuesta en [116]. En nuestro caso  $\phi = e_q(ikx - i\omega t)$ .

Por analogía a las ecuaciones (3.18) y (3.19) se sabe que los desarrollos de  $e_q$  y sus derivadas con respecto a  $x$ , respectivamente, son

$$\phi \simeq e^{i(kx-\omega t)} \left[ 1 + (1-q) \frac{(kx-\omega t)^2}{2} \right] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 e^{i(kx-\omega t)} \left[ q + 2i(q-1)(kx-\omega t) - \frac{(q-1)}{2} (kx-\omega t)^2 \right] \quad (3.39)$$

Ahora deberíamos calcular la segunda derivada con respecto a  $t$  y el desarrollo de primer orden de  $q\phi^{2q-1}$ . Esto está desarrollado con detalle en los Apéndices B.3 y B.4, y los resultados son:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i(kx-\omega t)} \left[ q + 2i(q-1)(kx-\omega t) - \frac{(q-1)}{2}(kx-\omega t)^2 \right] \quad (3.40)$$

$$q\phi^{2q-1} \simeq e^{i(kx-\omega t)} \left[ q + 2i(q-1)(kx-\omega t) - (q-1)\frac{(kx-\omega t)^2}{2} \right] \quad (3.41)$$

Reemplazando (3.41), (3.40) y (3.39) en (3.37) se puede verificar que el desarrollo de Taylor de primer orden de la q-exponencial es una solución a la ecuación de q-KG. Una vez más, hemos obtenido autoconsistencia.

### 3.5. Separación de variables

En [117] se ha demostrado que la ecuación (3.11) es de variables separables cuando el hamiltoniano es independiente del tiempo. De (3.11), la ecuación no lineal de q-Schrödinger de variables separadas [ $\psi(t, x) = f(t)g(x)$ ] están dadas por

$$i\hbar \frac{\partial f^q}{\partial t} = \lambda f(t) \quad (3.42)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \lambda g^q \quad (3.43)$$

Aquí muestro que, para  $\psi(x, t) = f(t)g(x)$ , las ecuaciones para, respectivamente,  $f$  y  $g$ , mantienen la forma de la ecuación no lineal para  $\psi$  (3.11). Ahora probaré que los desarrollos de primer orden alrededor de  $q = 1$  de las funciones

$$f(t) = \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (3.44)$$

$$g(x) = \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]^{\frac{2}{1-q}} \quad (3.45)$$

son soluciones a sus respectivas ecuaciones diferenciales. Los cálculos detallados se encuentran en el Apéndice B.

#### 3.5.1. Soluciones de las ecuaciones diferenciales de $f$ y $g$

1) Del Apéndice B se obtienen las relaciones

$$f(t) \simeq e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ 1 + (q-1) \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right) \right] \quad (3.46)$$

Y

$$\frac{\partial f^q}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ 1 + (q-1) \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} + (q-1) \frac{iEt}{\hbar} \right] \quad (3.47)$$

Ahora, reemplazando las ecuaciones (3.46) y (3.47) en (3.42), se observa que el desarrollo de Taylor de  $f$  es una solución a la ecuación (3.42), con autovalor  $\lambda = E = p^2/2m$ . Nuevamente, hemos obtenido autoconsistencia.

2) Del Apéndice B se tiene que

$$g^q \simeq e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 + \frac{3(q-1)}{4} \frac{ipx}{\hbar} - \frac{(q-1)}{4} \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right] \quad (3.48)$$

y

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 - \frac{3(1-q)}{4} \frac{ipx}{\hbar} + \frac{(1-q)}{4} \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right] \quad (3.49)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.48) y (3.49) en la ecuación (3.43), se encuentra que el desarrollo de Taylor de  $g$  es una solución de su ecuación diferencial con autovalor  $\lambda = E = p^2/2m$ .

### 3.6. Conclusiones

En este capítulo he analizado exhaustivamente los tratamientos perturbativos de primer orden (en  $q$ ) de la ecuación no lineal de q-Schrödinger y de q-Klein Gordon. He mostrado que, para pequeños valores de  $q-1$ , la aproximación es muy buena. Esto es de relevancia en física porque, como se discutió anteriormente [2, 118], estos valores de  $q$  son los relevantes en el rango de energías de interés para la física de intermedias y altas energías.



## Capítulo 4

# Estados q-Gamow para energías intermedias

*“Science is not a democracy. It is a dictatorship. It is evidence that does the dictating.”*

John Reisman.

La evidencia experimental en aceleradores de partículas ha constatado la presencia de distribuciones de la  $q$ -estadística en experimentos de muy alta energía. Esto motiva a preguntarse por un tipo de estado  $q$ -Gamow para el cual la distribución de  $q$ -Breit-Wigner ( $q$ BW) asociada pueda ser fácilmente encontrada a energías intermedias, para lo cual hay muchos aceleradores disponibles. Ese es el objetivo que busco conseguir en este capítulo. Baso las consideraciones en el hecho de que empíricamente, uno no detecta gaussianas puras, sino más bien  $q$ -gaussianas con valores de  $q$  cercanos a uno [123]. Esto sugiere mirar estados  $q$ -Gamow especiales para el entorno de  $q = 1$ .

Comienzo el capítulo definiendo un nuevo tipo de estado  $q$ -Gamow utilizando una aproximación de primer orden en  $q$ . Luego de normalizar, calculo la distribución asociada de  $q$ -Breit-Wigner, la cual puede ser medida experimentalmente. Y finalmente realizo unas conclusiones.

### 4.1. Nuevos estados $q$ -Gamow

Obtendremos un nuevo tipo de estados  $q$ -Gamow para  $q$  cercano a la unidad, utilizando teoría de perturbación alrededor de dicho valor de  $q$  de los estados estudiados en [118] y presentados en el capítulo 2, quedándonos solo con el primer término. Por lo tanto,

$$\left[ 1 + \frac{i(1-q)px}{\hbar\sqrt{2(q+1)}} \right]^{\frac{2}{1-q}} \simeq \left[ 1 - (q-1) \left( \frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right) \right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad (4.1)$$

Y los nuevos estados q-Gamow quedan

$$|\psi_{qG}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x)\} \otimes \left[1 - (q-1) \left(\frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} |x\rangle dx \quad (4.2)$$

Donde  $\mathcal{H}(x)$  es la función escalón de Heaviside. Luego,

$$\psi_{qG}(x) = \{\mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x)\} \otimes \left[1 - (q-1) \left(\frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad (4.3)$$

La norma del estado q-Gamow es ahora

$$\begin{aligned} \langle \psi_{qG} | \psi_{qG} \rangle = & \int_0^{\infty} \mathcal{H}[Im(p)] \left[1 - (q-1) \left(\frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \otimes \\ & \left[1 + (q-1) \left(\frac{ip^*x}{4\hbar} - \frac{p^{*2}x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{-\frac{ip^*x}{\hbar}} dx \\ + \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}[-Im(p)] & \left[1 - (q-1) \left(\frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \otimes \\ & \left[1 + (q-1) \left(\frac{ip^*x}{4\hbar} - \frac{p^{*2}x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{-\frac{ip^*x}{\hbar}} dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

O, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{qG} | \psi_{qG} \rangle = & \int_0^{\infty} \mathcal{H}[Im(p)] \left[1 - (q-1) \left(\frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \otimes \\ & \left[1 + (q-1) \left(\frac{ip^*x}{4\hbar} - \frac{p^{*2}x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{-\frac{ip^*x}{\hbar}} dx \\ + \int_0^{\infty} \mathcal{H}[-Im(p)] & \left[1 + (q-1) \left(\frac{ipx}{4\hbar} - \frac{p^2x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \otimes \\ & \left[1 - (q-1) \left(\frac{ip^*x}{4\hbar} + \frac{p^{*2}x^2}{4\hbar^2}\right)\right] e^{\frac{ip^*x}{\hbar}} dx \end{aligned} \quad (4.5)$$

Luego de un poco de álgebra, (4.5) se transforma en

$$\langle \psi_{qG} | \psi_{qG} \rangle =$$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{H}[Im(p)] \left\{ 1 + (q-1) \left[ \frac{i(p^* - p)x}{4\hbar} - \frac{(p^2 + p^{*2})x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} e^{\frac{i(p-p^*)x}{\hbar}} dx +$$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{H}[-Im(p)] \left\{ 1 + (q-1) \left[ \frac{i(p - p^*)x}{4\hbar} - \frac{(p^2 + p^{*2})x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} e^{\frac{i(p^*-p)x}{\hbar}} dx \quad (4.6)$$

La integración es directa:

$$\langle \psi_{qG} | \psi_{qG} \rangle = \frac{\hbar}{2|Im(p)|} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{4} \left[ 1 + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{Im(p)^2} \right] \right\} \quad (4.7)$$

Entonces, elevando al cuadrado la norma encontramos

$$A^2(q, p) = \frac{\hbar}{2|Im(p)|} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{4} \left[ 1 + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{Im(p)^2} \right] \right\} \quad (4.8)$$

Y luego se obtiene

$$A(q, p) = \sqrt{\frac{\hbar}{2|Im(p)|} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{4} \left[ 1 + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{Im(p)^2} \right] \right\}} \quad (4.9)$$

Notar que:

$$\lim_{q \rightarrow 1} A(q, p) = \sqrt{\frac{\hbar}{2|Im(p)|}} \quad (4.10)$$

Vemos que las ecuaciones (4.10) y (2.119) coinciden. El estado q-Gamow normalizado es ahora

$$|\phi_{qG}\rangle = \frac{|\psi_{qG}\rangle}{A(q, p)} \quad (4.11)$$

Que puede ser escrito en la forma

$$|\phi_{qG}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x) \} \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} \otimes$$

$$\left[ 1 - (q-1) \left( \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} + \frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right) \right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} |dx\rangle \quad (4.12)$$

Y entonces

$$\phi_{qG}(x) = \{ \mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x) \} \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} \otimes$$

$$\left[ 1 - (q-1) \left( \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} + \frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right) \right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad (4.13)$$

Vemos ahora que los nuevos estados q-Gamow satisfacen la ecuación no lineal de q-Schrödinger NRT. Consideremos la función  $f(x)$  definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} \left[ 1 - (q-1) \left( \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} + \frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right) \right] e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad (4.14)$$

Queremos mostrar que  $f(x)$  satisface

$$H \left[ \frac{f(x)}{f(0)} \right] = \frac{p^2}{2m} \left[ \frac{f(x)}{f(0)} \right]^q \quad (4.15)$$

O

$$Hf(x) = \frac{p^2}{2m} [f(0)]^{1-q} [f(x)]^q \quad (4.16)$$

Teniendo en cuenta que

$$[f(0)]^{1-q} = 1 - (q-1) \ln \left[ \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} \right] \quad (4.17)$$

Y

$$[f(x)]^q = \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \otimes \left\{ 1 + (q-1) \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} \right) - \frac{1}{8} - \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} + \frac{3ipx}{4\hbar} - \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} \quad (4.18)$$

En consecuencia, se encuentra que

$$\begin{aligned} [f(0)]^{1-q} [f(x)]^q &= \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \otimes \\ &\left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} - \frac{3ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} = \\ &-\frac{1}{p^2} \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2m}{p^2} Hf(x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Viendo la última ecuación (4.19) vemos que  $f(x)$  satisface (4.15) y, entonces, el estado q-Gamow también lo verifica.

Pasamos ahora a calcular el valor medio de la energía correspondiente al estado q-Gamow. Comenzamos con

$$\begin{aligned} H|\phi_{qG}\rangle &= \frac{p^2}{2m} \sqrt{\frac{2|Im(p)|}{\hbar}} \otimes \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x) \} \otimes \\ &\left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} - \frac{3ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} e^{\frac{ipx}{\hbar}} |x\rangle dx \end{aligned} \quad (4.20)$$

Luego

$$\langle \phi_{qG} | H | \phi_{qG} \rangle = \frac{p^2}{2m} \frac{2|Im(p)|}{\hbar} \otimes$$



$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x) \} \otimes \\
& \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} - \frac{ip^*x}{4\hbar} + \frac{p^{*2}x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} \otimes \\
& \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} - \frac{3ipx}{4\hbar} + \frac{p^2x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} e^{\frac{i(p-p^*)x}{\hbar}} dx \quad (4.21)
\end{aligned}$$

La ecuación anterior puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{qG}(H|\phi_{qG} \rangle) &= \frac{p^2}{2m} \frac{2|Im(p)|}{\hbar} \otimes \\
& \left\{ \int_0^{\infty} \mathcal{H}[Im(p)] \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{4} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{4Im(p)^2} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{i(3p+p^*)x}{4\hbar} + \frac{(p^2+p^{*2})x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} e^{\frac{i(p-p^*)x}{\hbar}} dx \\
& \int_0^{\infty} \mathcal{H}[-Im(p)] \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{4} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{4Im(p)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{i(3p+p^*)x}{4\hbar} + \frac{(p^2+p^{*2})x^2}{4\hbar^2} \right] \right\} e^{\frac{i(p^*-p)x}{\hbar}} dx \right\} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Evaluando las integrales en la ecuación (4.22) se encuentra

$$\langle \phi_{qG}(H|\phi_{qG} \rangle) = \frac{p^2}{2m} \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{4} - \frac{i(3p+p^*)}{8|Im(p)|} Sgn[Im(p)] \right] \right\} \quad (4.23)$$

Análogamente, llegamos a

$$\langle \phi_{qG}(H)|\phi_{qG} \rangle = \frac{p^{*2}}{2m} \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{4} - \frac{i(3p^*+p)}{8|Im(p)|} Sgn[Im(p)] \right] \right\} \quad (4.24)$$

Luego, de acuerdo a [118], obtenemos para el valor medio de la energía

$$\langle H \rangle_q = \frac{1}{2} [\langle \phi_{qG}(H|\phi_{qG} \rangle) + \langle \phi_{qG}(H)|\phi_{qG} \rangle] \quad (4.25)$$

Y

$$\lim_{q \rightarrow 1} \langle H \rangle_q = \frac{Re(p^2)}{2m} = \langle H \rangle \quad (4.26)$$

## 4.2. Predicción: distribución q-Breit-Wigner

Calculamos ahora la nueva distribución de qBW pertinente, empezando con

$$\langle \phi|\phi_{Gq} \rangle = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{|Im(p)|}{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathcal{H}[Im(p)]\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}[-Im(p)]\mathcal{H}(-x) \} \right.$$

$$\left[ 1 - (q-1) \left( \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} + \frac{ipx}{4\hbar} + \frac{p^2 x^2}{4\hbar^2} \right) \right] e^{\frac{i(p-k)x}{\hbar}} dx \quad (4.27)$$

Luego de evaluar las integrales en la ecuación (4.27) se tiene

$$\langle \phi | \phi_{Gq} \rangle = \frac{1}{i(k-p)} \sqrt{\frac{|Im(p)|}{\pi}} \otimes \left[ 1 - (q-1) \left( \frac{1}{8} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{8Im(p)^2} + \frac{p}{4(k-p)} - \frac{p^2}{2(k-p)^2} \right) \right] \quad (4.28)$$

Entonces, la relación para la distribución de q-Breit-Wigner es

$$|\langle \phi | \phi_{Gq} \rangle|^2 = \frac{|Im(p)|}{\pi \{ [Re(p) - k]^2 + Im(p)^2 \}} \left\{ 1 - (q-1) \left[ \frac{1}{4} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{4Im(p)^2} + Re \left( \frac{p}{2(k-p)} \right) - Re \left( \frac{p^2}{(k-p)^2} \right) \right] \right\} \quad (4.29)$$

El factor  $X$

$$X = (q-1) \left[ \frac{1}{4} + \frac{Im(p)^2 - Re(p)^2}{4Im(p)^2} + Re \left( \frac{p}{2(k-p)} \right) - Re \left( \frac{p^2}{(k-p)^2} \right) \right] \quad (4.30)$$

constituye la firma de las nuevas resonancias q-Gamow y es, en principio, sensible a verificación empírica.

Notar que para  $q \rightarrow 1$  se cumple

$$\lim_{q \rightarrow 1} |\langle \phi | \phi_{Gq} \rangle|^2 = \frac{|Im(p)|}{\pi \{ [Re(p) - k]^2 + Im(p)^2 \}} \quad (4.31)$$

En acuerdo con la ecuación (2.126).

Haremos ahora lo que creo es una conjetura razonable que relaciona los valores de  $q$  con el rango de energía. Las q-resonancias tienen lugar a energías de la escala de TeV para  $q = 1,1$  [118]. Por otro lado, las resonancias ordinarias aparecen en el orden de los MeV en las descripciones de Breit-Wigner (BW) ( $q = 1$ ). A esa escala también podemos encontrar las resonancias de la teoría cuántica de campos. Por interpolación lineal entre esos dos casos podemos suponer que  $q = 1 + 10^{-3}$  debería estar asociada a energías de 1 GeV,  $q = 1 + 10^{-4}$  a 0.1 GeV, etc.

Cuatro casos de la amplitud de la distribución qBW son mostrados en las figuras (4.1)-(4.4), para cuatro valores de  $q$  iguales a, respectivamente,  $1 + 10^{-3}$  –  $1 + 10^{-6}$ , en pasos de  $10^{-1}$  sumados a la unidad. Esos valores de  $q$  corresponden, respectivamente, a energías entre GeV (asociada a  $q = 1 + 10^{-3}$ ) y MeV (asociada a  $q = 1$ ). El eje horizontal representa la parte real del momento  $p$ , aquí llamado  $x$ . Las curvas gruesas corresponden a  $q = 1$  y las delgadas a  $q > 1$ . Curvas para tres valores de  $y = Im(p)$  son dibujadas en cada figura. Rojo para  $y = 0,25$ , verde para  $y = 5$ , y azul para  $y = 10$ . Se aprecia el hecho que a) para valores pequeños de  $y$  la qBW difiere de una manera más significativa de la BW tradicional y b) esas diferencias crecen cuando la energía aumenta.

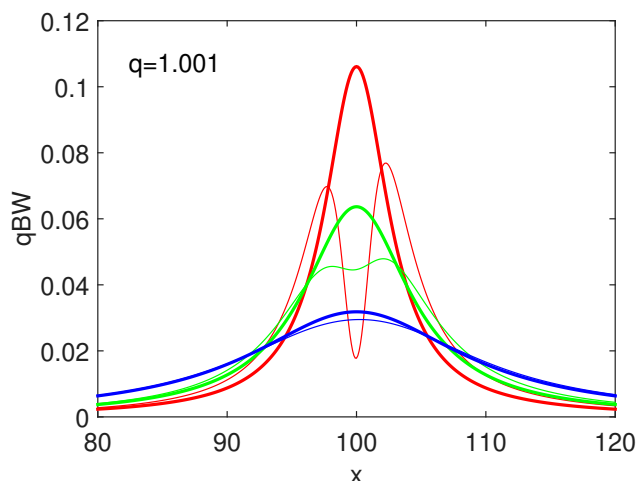


Figura 4.1: qBW y BW tradicional vs.  $x$ , la parte real del momento  $p$ , para  $q = 1 + 10^{-3}$ .

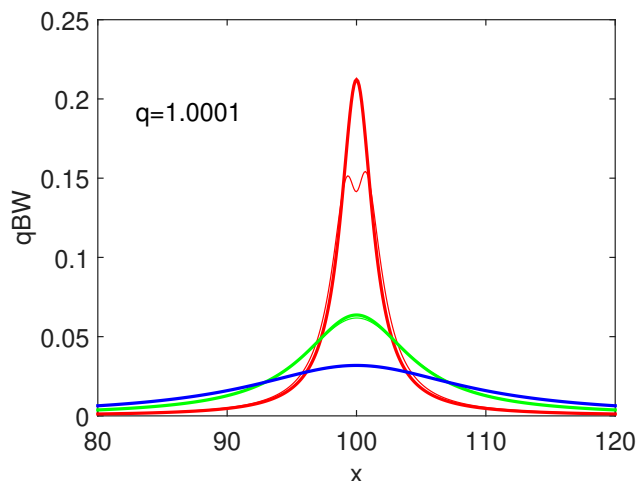


Figura 4.2: qBW y BW tradicional vs.  $x$ , la parte real del momento  $p$ , para  $q = 1 + 10^{-4}$ .

### 4.3. Conclusiones

Es esencial señalar que, como se discute en [123], empíricamente a menudo se obtienen q-Gaussianas en vez de Gaussianas puras, con  $q$  muy cercano a la unidad, en experimentos de altas energías. En consecuencia, he estudiado en este capítulo, en el entorno de  $q = 1$ , las propiedades principales de los estados q-Gamow asociados, que son solución a la q-generalización no lineal de la ecuación de Schrödinger [116]. Calculé su norma, el valor medio de energía y las distribuciones de q-Breit-Wigner correspondientes. En todos los casos, los resultados tienden a los usuales cuando el parámetro entrópico obedece  $q \rightarrow 1$ .

Nuestro resultado principal es que la distribución de probabilidad q-Breit-Wigner difiere de la usual de acuerdo al factor dado por la ecuación (4.30), el cual puede ser comprobado, luego de un análisis de errores, por datos experimentales en aceleradores de partículas,

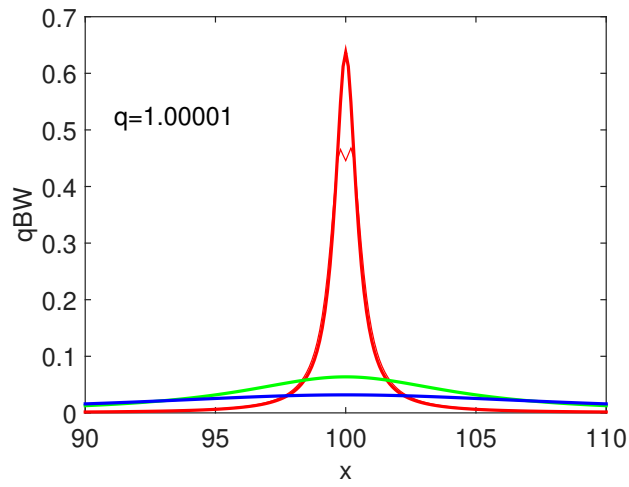


Figura 4.3: qBW y BW tradicional vs.  $x$ , la parte real del momento  $p$ , para  $q = 1 + 10^{-5}$ .

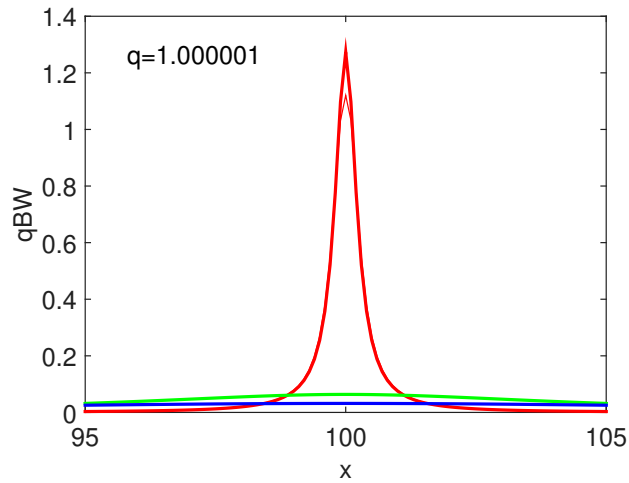


Figura 4.4: qBW y BW tradicional vs.  $x$ , la parte real del momento  $p$ , para  $q = 1 + 10^{-6}$ .

y por lo tanto probando la existencia de los nuevos estados q-Gamow que estamos proponiendo aquí.

## Capítulo 5

# Fenomenología de la Entropía de Tsallis sobre un camino para curvas en el espacio de fase

*“I dont feel frightened by not knowing things, by being lost in the mysterious universe without having any purpose, which is the way it really is, as far as I can tell, possibly. It doesn't frighten me.”*

Richard Feynman.

En este capítulo describo la fenomenología de la entropía clásica de Tsallis calculada sobre un camino en el espacio de fases. Esto permite derivar un mecanismo de fuerza entrópica que es capaz de imitar algunos aspectos fenomenológicos de la fuerza fuerte, como confinamiento, *hard-core* y libertad asintótica.

El capítulo está organizado como sigue: en la sección 1 introduzco algunas ideas previas y en la sección 2 realizo un repaso de nociones básicas. En la sección 3 calculo la entropía de camino de Tsallis y la energía media asociada para un oscilador armónico. En la sección 4 trabajo con el principio de equipartición. Las fuerzas entrópicas asociadas a las entropías de camino son el tema de la sección 5. Analizo esta fuerza en la sección 6 y, finalmente, realizo unas conclusiones en la sección 7.

### 5.1. Introducción

Por confinamiento se entiende el fenómeno que impide aislar partículas con carga de color (los quarks no pueden ser aislados individualmente) y por lo tanto no pueden ser detectados directamente, mientras que por libertad asintótica nos referimos a la propiedad de algunas teorías de *gauge* que generan ligaduras entre partículas que se debilitan asintóticamente cuando la distancia disminuye. Deseo enfatizar que los efectos de la fuerza entrópica que describo aquí no son el confinamiento y la libertad asintótica conocidas de

la física de altas energías, sino que son efectos nombrados así por analogía. El cálculo de entropías sobre curvas en el espacio de fases lleva, sorpresivamente, a un mecanismo entrópico clásico (en el sentido de “no-cuántico”) y simple que es capaz de imitar algunos de los fenómenos citados anteriormente.

Recordemos que la fuerza entrópica (ver sección 2.3.1) es una fuerza fenomenológica que deriva de la tendencia estadística a aumentar la entropía [18, 19, 21, 129-134], sin apelar a ninguna interacción microscópica específica subyacente. El ejemplo típico es la elasticidad de moléculas polímeras libremente conectadas [129, 130]. Es remarcable que Verlinde ha argumentado que la gravedad también puede ser entendida en términos de una fuerza entrópica [19].

Aquí usaré la entropía de Tsallis, calculada sobre una curva, para demostrar que el fenómeno de confinamiento puede emerger clásicamente de fuerzas entrópicas, apelando a hamiltonianos cuadráticos en el espacio de fases. Estos hamiltonianos son bien conocidos, clásica y cuánticamente. Para ellos, la correspondencia entre mecánica clásica y cuántica es la más simple. Desafortunadamente, las fórmulas explícitas que desarrollaré aquí no son triviales.

El conocimiento de hamiltonianos cuadráticos es de gran utilidad para investigar hamiltonianos más generales (y sus ecuaciones de Schrödinger asociadas) en un escenario semiclásico. Los hamiltonianos cuadráticos son relevantes en ecuaciones diferenciales parciales: de ellos se derivan fenómenos de propagación de ondas no triviales. También ayudan a esclarecer las propiedades de hamiltonianos más complicados utilizados en cuántica.

En consecuencia utilizaré hamiltonianos cuadráticos en un contexto clásico para aprender algunas de las interesantes propiedades emergentes concernientes a la fuerza entrópica a lo largo de curvas en el espacio de fases. Un análisis previo similar utilizando la entropía de Gibbs (equivalente a tomar el límite  $q = 1$ ) ha sido realizado en [21] y resumido en la sección 2.3.3. Tomar  $q \neq 1$  agregará algunos detalles interesantes.

## 5.2. Cálculos preliminares

Consideremos una partícula moviéndose en el espacio de fases bajo la influencia de un oscilador armónico, pensemos por ejemplo en un resorte conectado al origen (el centro de la atracción oscilatoria). Escribimos el hamiltoniano en la forma:

$$H(P, Q) = P^2 + Q^2 \tag{5.1}$$

Donde  $P$  y  $Q$  son el momento y la coordenada, respectivamente, y ambos,  $P^2$  y  $Q^2$ , tienen dimensiones de  $H$ . Trabajaré en el marco teórico de Tsallis, en el cual las distribuciones de probabilidad son  $q$ -exponenciales.

La función de partición de Tsallis está definida como (ec. 2.59):

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_q[-\beta H(P, Q)] dP dQ \quad (5.2)$$

O

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + (q-1)\beta H(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} dP dQ \quad (5.3)$$

Por supuesto,  $\beta$  es la temperatura inversa. En el contexto de la teoría de información, cuando se utiliza el principio de MaxEnt de Jaynes [16, 135, 136],  $\beta$  es un multiplicador de Lagrange que garantiza la conservación de la energía media. Es considerado como un dato previo cuando uno maximiza la entropía a fin de obtener la distribución de probabilidad apropiada. La teoría de Jaynes no necesita de colectivos (*ensambles*) ni baños térmicos.

Apelando al cambio de variables

$$U = P^2 + Q^2, \quad Q' = \sqrt{U - P^2} \quad (5.4)$$

Y resolviendo la integral en  $Q$ , se obtiene

$$Z(\beta) = \pi \int_0^{\infty} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (5.5)$$

Evaluando ahora (5.5) tenemos, ver ecuación (A.28),

$$Z(\beta) = \frac{\pi}{\beta(q-1)} B\left[1, \frac{2-q}{q-1}\right] \quad (5.6)$$

Donde  $B[a, b]$  es la función beta. Notar que las condiciones para las cuales la ecuación (A.28) tiene solución impone que  $1 \leq q < 2$ . Luego,

$$Z(\beta) = \frac{\pi}{\beta(q-1)} \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \quad (5.7)$$

O equivalentemente,

$$Z(\beta) = \frac{\pi}{\beta(2-q)} \quad (5.8)$$

Notar que el hecho que el parámetro de extensividad obedece  $1 \leq q < 2$  garantiza que  $Z > 0$ . Si  $q \rightarrow 1$ , entonces

$$Z \rightarrow \frac{\pi}{\beta} \quad (5.9)$$

La ecuación (5.8) se reduce a la expresión obtenida en la ec. (2.17) para la BGStatMech. Similarmente, para el valor medio de la energía se tiene que

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(P, Q) [1 + (q-1)\beta H(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} dP dQ \quad (5.10)$$

O

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{\pi}{Z} \int_0^{\infty} U [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (5.11)$$

El resultado de (5.11) es, nuevamente utilizando la ecuación (A.28),

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{\pi}{\beta^2(q-1)^2 Z} B \left[ 2, \frac{3-2q}{q-1} \right] \quad (5.12)$$

Que puede ser reescrito como

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{\pi}{\beta^2 Z} \frac{1}{(2-q)(3-2q)} \quad (5.13)$$

Reemplazando arriba el valor de  $Z$ , se obtiene

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{1}{\beta(3-2q)} \quad (5.14)$$

Con la restricción  $1 \leq q < 1,5$  para garantizar que  $\langle U \rangle$  sea positiva y finita. Cuando  $q \rightarrow 1$ , se obtiene la ecuación (2.19):

$$\langle U \rangle \rightarrow \frac{1}{\beta} \quad (5.15)$$

De la ecuación (2.55), tenemos para la entropía

$$S(\beta) = \ln_{2-q} Z + Z^{q-1} \beta \langle U \rangle \quad (5.16)$$

Donde  $\ln_q(z)$  es la función q-logaritmo.

Un reemplazo apropiado en la ecuación (5.16) lleva a

$$S(\beta) = Z^{q-1} \left( \beta \langle U \rangle + \frac{1}{q-1} \right) - \frac{1}{q-1} \quad (5.17)$$

Y

$$S(\beta) = \left[ \frac{\pi}{\beta(2-q)} \right]^{q-1} \frac{(2-q)}{(3-2q)(q-1)} - \frac{1}{q-1} \quad (5.18)$$

Este resultado para  $S$  es válido para el intervalo  $1 \leq q < 1,5$  y, por supuesto, fuera de los polos, de acuerdo a la referencia [137].

### 5.3. Entropía de camino

Nos concentraremos ahora en el concepto de entropía de camino. El camino es una curva en el espacio de fases  $\Gamma$  parametrizada por la variable  $Q$ . Siguiendo el mismo procedimiento que en [21], redefiniremos las ecuaciones (5.5) y (5.11) sobre la curva  $\Gamma$ . Primero defino

$$Z(\beta, \Gamma) = \pi \int_{\Gamma} [1 + (q-1)\beta U(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} dU(P, Q) \quad (5.19)$$

Si consideramos curvas (parametrizadas por la variable independiente  $Q$ ) que pasan por el origen, tenemos  $P(0) = 0$  y  $Q = 0$ , y consecuentemente  $U(0, 0) = 0$ . Debido a que el



integrando en la ecuación (5.19) es un diferencial exacto y luego la integral solo depende del punto final  $Q_0$  tenemos

$$Z(\beta, Q_0) = \pi \int_0^{U(Q_0, P(Q_0))} [1 + (q-1)\beta U(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} dU(P, Q) \quad (5.20)$$

O

$$Z(\beta, Q_0) = \frac{\pi}{(2-q)\beta} \left\{ 1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{2-q}{1-q}} \right\} \quad (5.21)$$

Si  $Q_0 \rightarrow \infty$  entonces  $Z(\beta, Q_0)$  reduce a la expresión (5.8). Más aún, si  $q \rightarrow 1$ , entonces la expresión tiende a la ecuación (2.23) calculada para la BGStatMech

$$Z(\beta, Q_0) \rightarrow \frac{\pi}{\beta} (1 - e^{-\beta U(P(Q_0), Q_0)}) \quad (5.22)$$

De la misma forma, tenemos para el valor medio de la energía

$$\langle U \rangle (\beta, \Gamma) = \frac{\pi}{Z(\beta, \Gamma)} \int_{\Gamma} U(P, Q) [1 + (q-1)\beta U(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} dU(P, Q) \quad (5.23)$$

O equivalentemente,

$$\langle U \rangle (\beta, Q_0) = \frac{\pi}{Z(\beta, Q_0)} \int_0^{U(Q_0, P(Q_0))} U(P, Q) [1 + (q-1)\beta U(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} dU(P, Q) \quad (5.24)$$

Si evaluamos la ecuación (5.24) obtenemos

$$\langle U \rangle (\beta, Q_0) = \frac{\pi}{Z(\beta, Q_0)\beta^2} \left\{ \frac{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{3-2q}{1-q}}}{(3-2q)(q-1)} - \frac{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{2-q}{1-q}}}{(2-q)(1-q)} \right\} \quad (5.25)$$

Y, simplificando la última expresión,

$$\langle U \rangle (\beta, Q_0) = \frac{1}{\beta(q-1)} \left\{ -1 + \frac{(2-q)}{(3-2q)} \frac{\{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{3-2q}{1-q}}\}}{\{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{2-q}{1-q}}\}} \right\} \quad (5.26)$$

Si  $Q_0 \rightarrow \infty$ , entonces  $\langle U \rangle (\beta, Q_0)$  reduce a la expresión (5.14). Si  $q \rightarrow 1$ , entonces

$$\langle U \rangle (\beta, Q_0) \rightarrow \frac{1 - (1 + \beta U)e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})\beta} \quad (5.27)$$

Lo cual es consistente con los resultados obtenidos en la sección 2.3.3. Nuevamente, podemos expresar la entropía mediante la función de partición y la energía media, como

$$S(\beta, Q_0) = \ln_{2-q} Z(\beta, Q_0) + Z(\beta, Q_0)^{q-1} \beta \langle U \rangle (\beta, Q_0) \quad (5.28)$$

O equivalentemente,

$$S(\beta, Q_0) = \frac{1}{q-1} \left\{ \frac{(2-q)}{(3-2q)} \left[ \frac{\pi}{(2-q)\beta} \right]^{(q-1)} \{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{2-q}{1-q}}\}^{(q-2)} \right. \\ \left. \{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{3-2q}{1-q}}\} - 1 \right\} \quad (5.29)$$

Notar que, para esta expresión de  $S$  las mismas consideraciones realizadas antes para la ecuación (5.18) deben hacerse. Esto es, el resultado de  $S$  es válido para el intervalo  $1 \leq q < 1,5$  y, por supuesto, fuera de los polos, de acuerdo a la referencia [137].

## 5.4. Teorema de equipartición

Muestro en esta sección que el teorema de equipartición también se cumple en esta formulación. A partir de la definición de valor medio tenemos que

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q^2 [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{1}{1-q}} dP dQ \quad (5.30)$$

O

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{\pi}{2Z} \int_0^{\infty} U [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (5.31)$$

Mientras que a lo largo de una curva  $\Gamma$ ,

$$\langle Q^2 \rangle (\beta, \Gamma) = \frac{\pi}{2Z(\beta, \Gamma)} \int_{\Gamma} U [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (5.32)$$

Entonces,

$$\langle Q^2 \rangle (\beta, Q_0) = \frac{\pi}{2Z(\beta, Q_0)} \int_0^{U(Q_0, P(Q_0))} U [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (5.33)$$

Esta integral lleva a

$$\langle Q^2 \rangle (\beta, Q_0) = \frac{\pi}{2Z(\beta, Q_0)\beta^2} \left\{ \frac{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{3-2q}{1-q}}}{(3-2q)(q-1)} - \frac{1 - [1 + (q-1)\beta U(P(Q_0), Q_0)]^{\frac{2-q}{1-q}}}{(2-q)(1-q)} \right\} \quad (5.34)$$

Y luego

$$\langle Q^2 \rangle (\beta, Q_0) = \frac{\langle U \rangle (\beta, Q_0)}{2} \quad (5.35)$$

El resultado  $\langle P^2 \rangle (\beta, Q_0) = \langle Q^2 \rangle (\beta, Q_0)$  es inmediato, ya que  $Q$  y  $P$  aparecen totalmente simétricos en el hamiltoniano. Finalmente, eso significa que

$$\langle Q^2 \rangle (\beta, Q_0) = \langle P^2 \rangle (\beta, Q_0) = \frac{\langle U \rangle (\beta, Q_0)}{2} \quad (5.36)$$

Lo cual, para  $Q_0 \rightarrow \infty$  da

$$\langle Q^2 \rangle = \langle P^2 \rangle = \frac{\langle U \rangle}{2} = \frac{1}{2(3-2q)\beta} \quad (5.37)$$

Hemos llegado al teorema de equipartición [138]. En este contexto fenomenológico, obviamente impone un límite superior para  $q$ , que es  $q < 3/2$ , y que aplica sólo a la  $q$ -entropía de camino y no a todo el mundo de la  $q$ -no aditividad.

Concluyo esta sección diciendo que la presente metodología permite una aplicación directa de técnicas de mecánica estadística a sistemas clásicos dentro de un escenario generalizado como el que está bajo consideración. También deseo mencionar que la existencia de un teorema de equipartición generalizado es otra manifestación de la coherencia de los cálculos realizados.

## 5.5. Fuerza entrópica

De acuerdo a la ecuación (2.12), [18, 19], la fuerza entrópica  $F_e$  para una dimensión está dada por

$$F_e = \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial Q_0} \quad (5.38)$$

Como el punto final de la curva  $Q_0$  es arbitrario, simplemente lo llamaré  $Q$ . En este caso usando la ecuación (5.28):

$$F_e = \frac{Z^{q-2}}{\beta} \frac{\partial Z}{\partial Q} + (q-1)Z^{q-2} \frac{\partial Z}{\partial Q} \langle U \rangle + Z^{q-1} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \quad (5.39)$$

Notar que  $Z$  y  $\langle U \rangle$  ya fueron determinados en las ecuaciones (5.21) y (5.26), respectivamente. Notar también que esas cantidades son funciones de  $\beta$  y  $Q$ . Vale aclarar que cuando escribo  $U$ , es una forma concisa de referirme a  $U(P(Q), Q)$ , a fin de no ensuciar la notación. De acuerdo a lo dicho anteriormente, tengo que

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = \pi \frac{\partial U}{\partial Q} [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{1}{1-q}} = 2\pi Q [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{1}{1-q}} \quad (5.40)$$

Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} = & \frac{(2-q)}{(3-2q)(q-1)} \cdot \frac{2Q}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \left\{ (3-2q) [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{2-q}{1-q}} \right. \\ & \left. - (2-q) [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{1}{1-q}} \frac{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{3-2q}{1-q}}\right\}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \right\} \quad (5.41) \end{aligned}$$

Reordenando términos y sumando y restando los términos apropiados uno puede encontrar que

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} = \frac{2Q(2-q)}{(q-1)} \cdot \frac{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \left\{ [1 + (q-1)\beta U] - \frac{(2-q)}{(3-2q)} \frac{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{3-2q}{1-q}}\right\}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \right\} \quad (5.42)$$

Mientras que la ecuación (5.42) puede ser escrita como

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} = 2Q(2-q) \frac{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \{\beta U - \beta \langle U \rangle\} \quad (5.43)$$

Luego, tenemos para la expresión de  $F_e$ :

$$F_e = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{q-1} 2Q(2-q)^{2-q} \frac{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}}}{\left(1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\right)^{2-q}} \left\{ \beta U + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{(q-1)} \frac{(2-q)^2}{(3-2q)} \frac{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{3-2q}{1-q}}\right\}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \right\} \quad (5.44)$$

Esto es de la forma

$$F_e = K(q, \beta, U[Q, P]) \times Q, \quad (5.45)$$

Y puede ser tanto atractiva como repulsiva. La fuerza entrópica es del tipo “armónica” también. Pero es no conservativa porque depende de  $P$  y no solo de la posición. En los ejemplos que considero aquí, tomo  $K$  positiva. ¿De donde viene esta fuerza? Podríamos argumentar lo siguiente: deseamos que la partícula recorra un dado camino en el espacio de fases. Este camino puede conectar diferentes puntos que corresponden a diferentes energías del oscilador armónico. Como una respuesta al movimiento de la partícula, una fuerza no conservativa emerge y se opone a este movimiento, como en un argumento à la Chatelier.

Si  $q \rightarrow 1$ ,

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} \rightarrow 2\pi Q e^{-\beta U} \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \rightarrow \frac{2Q e^{-\beta U}}{1 - e^{-\beta U}} \left[ \frac{\beta U}{1 - e^{-\beta U}} - 1 \right] \quad (5.47)$$

Y

$$F_e \rightarrow 2Q\beta U \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})^2} \quad (5.48)$$

Vemos que coincide con la ecuación (2.26). Claramente, en BGStatMech,  $K(\beta, U[Q, P])$  es positiva y la fuerza repulsiva. Esta es la primera diferencia que encontramos entre la formulación de BG de la sección 2.3.3 y el presente trabajo. Exploremos ahora como se

comporta la fuerza entrópica cerca del origen. Para  $\beta U \ll 1$ , una aproximación de primer orden lleva a

$$Z \approx \pi U \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} \approx 2\pi Q(1 - \beta U) \approx 2\pi Q \quad (5.50)$$

$$\langle U \rangle \approx 0 \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \approx 2Q(1 - \beta U) \approx 2Q \quad (5.52)$$

Y

$$F_e \approx \frac{\pi}{\beta} (\pi U)^{q-2} 2Q + (\pi U)^{q-1} 2Q \approx (\pi U)^{q-1} 2Q \left( \frac{1}{\beta U} + 1 \right) \quad (5.53)$$

Finalmente, la fuerza entrópica se simplifica como

$$F_e \approx (\pi U)^{q-1} \frac{2Q}{\beta U} \quad (5.54)$$

Con  $K$  positiva y, para  $q \rightarrow 1$ ,

$$F_e \approx \frac{2Q}{\beta U} \quad (5.55)$$

En acuerdo con [21]. Esto significa que la fuerza entrópica diverge cerca del origen, conduciendo a un comportamiento tipo *hard-core*. He explorado cuidadosamente el plano  $(Q, P)$  completo y descubierto que los efectos de  $F_e$  son apreciables solo en una pequeña región de él.

Puedo aún reemplazar  $U$  en las ecuaciones de arriba usando el cambio de variables  $U = P^2 + Q^2$ . Se tiene que

$$F_e = \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{q-1} 2Q(2-q)^{2-q} \frac{[1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{1}{1-q}}}{\left(1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{2-q}{1-q}}\right)^{2-q}} \left\{ \beta(P^2 + Q^2) + \frac{1}{q-1} - \frac{1}{(q-1)(3-2q)} \frac{\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{3-2q}{1-q}}\}}{\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{2-q}{1-q}}\}} \right\} \quad (5.56)$$

Entendemos por confinamiento al hecho de que la fuerza es significativa solo en una región. Se ve que en este sentido la fuerza entrópica está confinada a sólo una pequeña región del espacio de fases. Este efecto de confinamiento i) crece con  $q$  y ii) lleva a una libertad asintótica (fuerza cero) fuera de esa región. Notar también que si la partícula está dentro de la barrera de potencial, será difícil para ella escapar (recordar que no tenemos efecto túnel en física clásica). El pico de la fuerza entrópica se hace más pronunciada

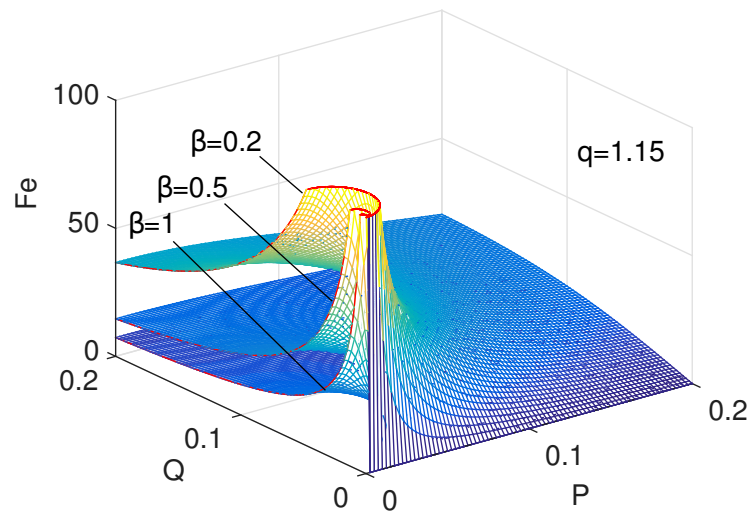


Figura 5.1: Comportamiento de la fuerza entrópica con  $T$ . Notar que la fuerza entrópica crece con la temperatura, como uno esperaría.

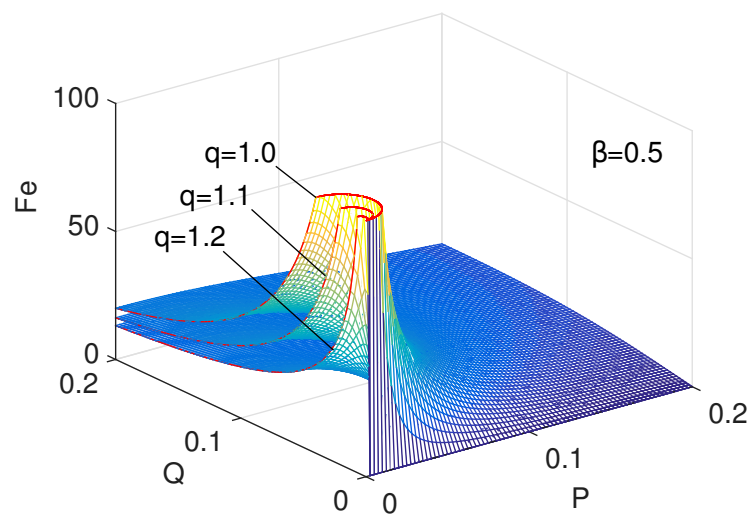


Figura 5.2: Comportamiento de la fuerza entrópica con  $q$ . Notar que la fuerza entrópica disminuye cuando  $q$  crece, lo cual constituye un nuevo resultado.

cuando  $q$  aumenta. Señalemos que, cuando la energía cinética, asociada al momento, crece, también lo hace el confinamiento. Estas observaciones son ilustradas en las figuras (5.1) y (5.2).

## 5.6. Los efectos del pozo de potencial armónico

Obviamente, nuestra partícula también siente la fuerza armónica. Sumemos su efecto al de  $F_e$ . Tenemos que

$$F_{HO} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \langle Q^2 \rangle}{\partial Q} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \quad (5.57)$$

En nuestro caso esto es

$$F_{HO} = -\frac{Q}{2} (2-q) \frac{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \{\beta U - \beta \langle U \rangle\} \quad (5.58)$$

Notar que cuando  $q \rightarrow 1$ ,

$$F_{HO} \rightarrow -\frac{Q}{2} \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})} \left( \frac{\beta U}{1 - e^{-\beta U}} - 1 \right) \quad (5.59)$$

O

$$F_{HO} \rightarrow \frac{Q}{2} \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})^2} (1 - \beta U - e^{-\beta U}) \quad (5.60)$$

En acuerdo con la expresión calculada en la sección 2.3.3. La fuerza total que siente la partícula es

$$F_T = F_e + F_{HO} = Z^{q-2} \frac{\partial Z}{\partial Q} \left( \frac{1}{\beta} + (q-1) \langle U \rangle \right) + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \left( Z^{q-1} - \frac{1}{4} \right) \quad (5.61)$$

Y luego:

$$\begin{aligned} F_T = & \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{q-1} 2Q(2-q)^{2-q} \frac{[1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{1}{1-q}}}{\left(1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{2-q}{1-q}}\right)^{2-q}} \\ & \left\{ \beta(P^2 + Q^2) + \frac{1}{q-1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{(q-1)(3-2q)} \frac{(2-q)^2 \left\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{3-2q}{1-q}}\right\}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \right\} - \\ & \frac{Q}{2} (2-q) \frac{[1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{1}{1-q}}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \\ & \left[ \beta(P^2 + Q^2) + \frac{1}{(q-1)} \left( 1 - \frac{(2-q)}{(3-2q)} \frac{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{3-2q}{1-q}}\right\}}{\left\{1 - [1 + (q-1)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{2-q}{1-q}}\right\}} \right) \right] \quad (5.62) \end{aligned}$$

Para poder apreciar el significado de la ecuación anterior, consideremos su límite cuando  $q \rightarrow 1$ , nuevamente consistente con la ecuación (2.27),

$$F_T \rightarrow \frac{Q}{2} \frac{e^{-\beta U}}{(1 - e^{-\beta U})^2} (1 + 3\beta U - e^{-\beta U}) \quad (5.63)$$

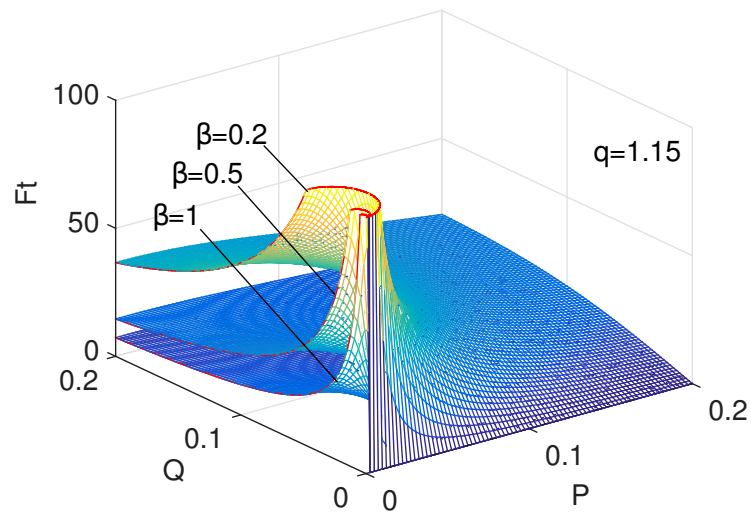


Figura 5.3: Fuerza total asociada a la entropía de camino como una función de  $T$ . Crece cuando la temperatura aumenta, como uno esperaría.

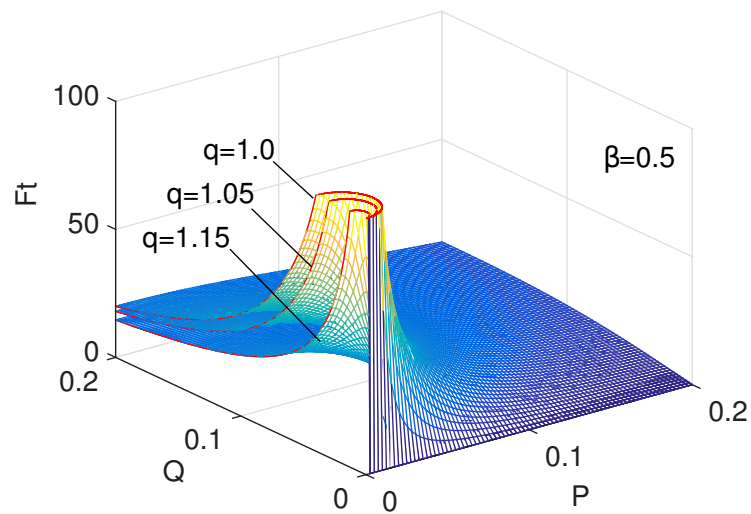


Figura 5.4: Fuerza total asociada a la entropía de camino como una función de  $q$ . Disminuye cuando  $q$  crece.

El valor absoluto de la fuerza crece linealmente con la distancia  $Q$ . También crece con  $T$ .

Notar que, como antes, la fuerza total está confinada (es diferente de cero) a sólo una pequeña región del espacio de fases. Tal efecto de confinamiento i) crece con  $q$  y ii) lleva a una libertad asintótica (fuerza total cero) fuera de dicha región. Una vez más, el pico de la



fuerza entrópica se hace más pronunciado cuando  $q$  aumenta. También, cuando  $F_{total}$  crece, lo hace el confinamiento. Vemos que, aquí, la fuerza entrópica es una manifestación del cambio de entropía a lo largo de una curva en el espacio de fases. Cuando una partícula recorre ese camino, siente la acción de  $F_e$ . Estas consideraciones son ilustradas en las figuras (5.3) y (5.4).

## 5.7. Conclusiones

En este capítulo introduje la noción de entropía de camino clásica y describí su comportamiento para un oscilador armónico. En otras palabras, describí la fenomenología de la entropía de camino de Tsallis para el oscilador armónico. Una faceta principal de esta fenomenología es la existencia de una fuerza entrópica generalizada. Mostré que uno puede imitar clásicamente, con la fuerza entrópica, aspectos de otras fuerzas, como la fuerza fuerte.

- Si bien el cálculo de la entropía se realiza sobre una curva arbitraria  $\Gamma$ , en general, los efectos mencionados no dependen de la  $\Gamma$  específica seleccionada. La  $q$ -fenomenología parece razonable debido a que el principio de equipartición se cumple.
- Descubrí que la fuerza entrópica diverge para pequeñas regiones del espacio de fases (*hard-core effect*) anulándose fuera de ellas (confinamiento más libertad asintótica). El tamaño de esa área es dependiente de  $q$ . La altura de la barrera del *hard-core* también depende de  $q$ . Sumar el potencial armónico no modifica estos efectos.
- Mientras que la fuerza entrópica para el HO en la BGStatMech es siempre repulsiva, en la Tsallis' StatMech puede ser tanto repulsiva como atractiva.
- Además, la fuerza entrópica disminuye con  $q$ , un resultado interesante. Es decir, que cuanto más “no aditivo” se vuelve el sistema más débil es la fuerza entrópica. Esta fuerza también depende de la temperatura, lo cual es un resultado razonable.



## Capítulo 6

# Fuerza entrópica $n$ -dimensional en la teoría de Tsallis

*“Beauty is the first test:  
there is no permanent place in the world for ugly mathematics.”*

G.H. Hardy, 1941.

Este capítulo reúne cuatro nociones físicas distintas pero importantes, que ya introdujimos anteriormente en otros capítulos: 1) fuerza entrópica, 2) entropía de camino, 3) estadística de Tsallis, y 4) gravedad emergente. Al igual que en el capítulo anterior investigo la q-mecánica estadística clásica de una curva en el espacio de fases pero en  $n$  dimensiones (y, en particular, en 3 dimensiones). Enfoco la atención nuevamente en el mecanismo de fuerza entrópica que lleva a un mecanismo simple pero capaz de reproducir algunos efectos interesantes como confinamiento, *hard core*, y libertad asintótica, típicas de la física de altas energías.

El capítulo está organizado como sigue. En la sección 1, realizo una introducción y presento las motivaciones para extender esta formulación a  $n$  dimensiones. Introduzco el formalismo y la notación en la sección 2. En la sección 3, calculo la entropía de camino y la energía media asociada al oscilador armónico. La sección 4 trata de la fuerza entrópica y el tema de la sección 5 es el calor específico. Las conclusiones son hechas en la sección 6.

### 6.1. Introducción

La gravedad emergente (también llamada gravedad entrópica) es la noción que describe la gravedad como una fuerza entrópica con una homogeneidad en grandes escalas, pero sujeta a desorden de orden cuántico. Afirma que la gravedad no es una fuerza fundamental. La teoría, propuesta por Verlinde [19] está basada en teoría de cuerdas, física de agujeros negros, y teoría de la información cuántica. Aquí en cambio considero otra fuerza entrópica (la del oscilador armónico) en un contexto estadístico clásico pero motivados

por la gravedad emergente.

En las secciones 2.3.3 y 2.3.4, introduje el análisis de las propiedades térmicas de una entropía a lo largo de una curva, esto es, estudié la mecánica estadística clásica de una curva en el espacio de fases. Como vimos esto desvela un mecanismo asociado a una fuerza entrópica, que provee una herramienta simple con efectos interesantes como confinamiento, *hard-core* y libertad asintótica, características de la fuerza fuerte, y obtenidas de una manera análoga a la gravedad emergente de Verlinde.

El descubrimiento principal de Tsallis fue mostrar que distintas estadísticas a menudo cubren nueva física, y miles de autores siguieron este camino. En este contexto vimos la qStatMech de curvas del espacio de fases en una dimensión [3] asociada al oscilador armónico, lo cual está reflejado en el capítulo anterior. Calculando la fuerza entrópica encontramos efectos análogos a confinamiento, *hard core* y libertad asintótica, al igual que en el contexto de la estadística usual [21].

Tal esfuerzo es extendido aquí a curvas  $n$  dimensionales, dada la relevancia de la dimensionalidad en gravitación. ¿Como afecta la dimensionalidad a nuestra fuerza entrópica? ¿El escenario q-estadístico afecta a las propiedades de las fuerzas emergentes? ¿En que forma? ¿Cómo interactúan  $n$  y  $q$ ? Estas son las preguntas que deseo contestar en el presente trabajo.

## 6.2. Cálculos preliminares

Existe una conexión entre el HO y gravitación, por ejemplo el problema de Kepler [139]. Fung elaboró la correspondencia entre el problema de Kepler y el oscilador armónico isotrópico en la mecánica newtoniana a través de una transformación especial. A partir de esto pudo obtener todos los detalles del problema de Kepler desde una solución simple del HO isotrópico. Entonces, es apropiado introducir el HO en el presente trabajo. Considero una partícula agarrada a un resorte conectado al origen, en contacto térmico con un reservorio a la temperatura inversa  $\beta$ . Consideremos el hamiltoniano tipo HO  $n$ -dimensional

$$H(P, Q) = P^2 + Q^2 \quad (6.1)$$

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2; \quad Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_n^2 \quad (6.2)$$

Donde  $P^2$  y  $Q^2$  tienen las dimensiones de  $H$ . La función de partición  $n$ -dimensional en la estadística de Tsallis está definida como [25]

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + (q-1)\beta H(P, Q)]^{\frac{1}{1-q}} d^n P d^n Q \quad (6.3)$$

Recordemos que, si  $q \rightarrow 1$ , la función de partición se reduce a la usual, es decir, la función de partición canónica de Gibbs-Boltzmann. Siguiendo el procedimiento de [22]

llegamos a

$$Z(\beta) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty U^{n-1} [1 + (q-1)\beta U]^{-\frac{1}{q}} dU \quad (6.4)$$

Donde utilicé el cambio de variables

$$U = P^2 + Q^2 \quad (6.5)$$

Como en el capítulo anterior, evaluando (6.4) a través de la ecuación (A.28), con la restricción  $1 \leq q < 2$  obtengo:

$$Z(\beta) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} \right]^n B \left[ n, \frac{1}{q-1} - n \right] \quad (6.6)$$

Donde  $B[a, b]$  es la función beta. Luego:

$$Z(\beta) = \left[ \frac{\pi}{\beta(q-1)} \right]^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - n\right)}{\left(\frac{1}{q-1} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1\right)} \quad (6.7)$$

Donde usé la propiedad de recurrencia de la función Gamma (ver apéndice A, ecuación A.2):

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (6.8)$$

Usando (6.8)  $n$  veces, se obtiene

$$Z(\beta) = \left[ \frac{\pi}{\beta(q-1)} \right]^n \frac{1}{\left(\frac{2-q}{q-1}\right) \left(\frac{3-2q}{q-1}\right) \dots \left(\frac{n+1-nq}{q-1}\right)} \quad (6.9)$$

Y, finalmente:

$$Z(\beta) = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \quad (6.10)$$

Si  $q \rightarrow 1$ , entonces

$$Z \rightarrow \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^n \quad (6.11)$$

La ecuación (6.10) tiende a la expresión obtenida en la sección 2.3.4 para la estadística tradicional. Notemos también que si  $n = 1$ , entonces

$$Z(\beta) = \frac{\pi}{\beta(2-q)} \quad (6.12)$$

Es decir, la ecuación (6.10) se reduce a la expresión unidimensional obtenida en el capítulo 5. De manera similar, el valor medio de la energía en  $n$  dimensiones está definida en la qStatMech como:

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} H(P, Q) [1 + (q-1)\beta H(P, Q)]^{-\frac{1}{q}} d^n P d^n Q \quad (6.13)$$

Que lleva a

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)Z(\beta)} \int_0^\infty U^n [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (6.14)$$

La ecuación (6.14) tiene como solución

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)Z(\beta)} \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} \right]^{n+1} B \left[ n+1, \frac{1}{q-1} - n-1 \right] \quad (6.15)$$

Que es igual a

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{n\pi^n}{Z(\beta)[\beta(q-1)]^{n+1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1} - n-1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \quad (6.16)$$

Usando la ecuación (6.7) obtenemos

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{n}{\beta(q-1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{q-1} - n-1)}{\Gamma(\frac{1}{q-1} - n)} \quad (6.17)$$

Y empleando (6.8), la ecuación (6.17) puede ser escrita como

$$\langle U \rangle (\beta) = \frac{n}{\beta[(n+2) - (n+1)q]} \quad (6.18)$$

Con la restricción  $1 \leq q < \frac{n+2}{n+1}$  para garantizar la convergencia de  $\langle U \rangle$ . Cuando  $q \rightarrow 1$  obtenemos

$$\langle U \rangle \rightarrow \frac{n}{\beta} \quad (6.19)$$

Y cuando  $n = 1$ ,

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\beta(3-2q)} \quad (6.20)$$

La restricción en  $q$  ahora es  $q < 3/2$ . Las ecuaciones (6.19) y (6.20) son las expresiones de  $\langle U \rangle$  obtenidas en la sección 2.3.4 y el capítulo 5, respectivamente.

Como la entropía  $S$  es (2.55)

$$S(\beta) = \ln_{2-q} Z + Z^{q-1} \beta \langle U \rangle \quad (6.21)$$

Se obtiene

$$S(\beta) = \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^{n(q-1)} \left[ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right]^{q-1} \left[ \frac{1}{q-1} + \frac{n}{(n+2) - (n+1)q} \right] - \frac{1}{q-1} \quad (6.22)$$

### 6.3. Entropía en la curva $\Gamma$

Retomando las ideas principales del último capítulo, asumo que el sistema está en contacto con un reservorio con temperatura inversa  $\beta$ . Llamo  $\Gamma$  a un camino en el espacio de fases parametrizado por  $Q_1$  que comienza en el origen y termina en un punto arbitrario  $(P_1(Q_1^0), \dots, P_n(Q_1^0), Q_1(Q_1^0), \dots, Q_n(Q_1^0))$ . Todos los cálculos son de carácter microscópico. Generalizando los integrandos de las ecuaciones (6.4) y (6.14), introduzco

$$Z(\beta, \Gamma) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int_{\Gamma} U^{n-1} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (6.23)$$

$$\langle U \rangle (\beta, \Gamma) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)Z(\beta)} \int_{\Gamma} U^n [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (6.24)$$

Como  $P_i(0) = 0$  y  $Q_i(0) = 0$  entonces  $U(0, 0) = 0$ . Los integrandos son diferenciales exactos y por lo tanto las funciones definidas dependen únicamente del punto final  $Q_1^0$ . De acuerdo a esto podemos escribir,

$$Z(\beta, Q_1^0) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int_0^{Q_1^0} U^{n-1} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU \quad (6.25)$$

$$\langle U \rangle (\beta, Q_1^0) = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)Z(\beta, Q_1^0)} \int_0^{Q_1^0} U^n [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} dU. \quad (6.26)$$

Integrando por partes  $n$  veces la primera se encuentra que

$$Z(\beta, Q_1^0) = \frac{\pi^n}{\beta^n} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \quad (6.27)$$

Donde escribo  $U$  en vez de  $U(P(Q_1^0), Q(Q_1^0))$  para simplificar la notación. Notar que cuando  $Q_1^0 \rightarrow \infty$  recuperamos la relación (6.10). Si  $n = 1$ ,

$$Z(\beta, Q_1^0) = \frac{\pi}{\beta(2-q)} \{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\} \quad (6.28)$$

Y llegamos a la expresión encontrada en el capítulo 5. El otro límite interesante es  $q \rightarrow 1$ . En ese caso obtenemos

$$Z(\beta, Q_1^0) = \frac{\pi^n}{\beta^n} - e^{-\beta U} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\pi^n}{s!} \frac{U^s}{\beta^{n-s}} \quad (6.29)$$

Donde llamamos  $s = n - j$  y llegamos a la ecuación obtenida en la sección 2.3.4. De la misma manera, integrando por partes  $n + 1$  veces la ecuación (6.26), tenemos para la energía media

$$\langle U \rangle (\beta, Q_1^0) = \frac{n\pi^n}{\beta^n Z(\beta, Q_1^0)} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \quad (6.30)$$

Nuevamente, recupero la ecuación (6.18) cuando  $Q_1^0 \rightarrow \infty$ . Apelando ahora a la ecuación (6.27) obtengo

$$\langle U \rangle (\beta, Q_1^0) = n \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \times \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \quad (6.31)$$

Si  $q \rightarrow 1$ , recupero el resultado de la sección 2.3.4

$$\langle U \rangle (\beta, Q_1^0) = \frac{\pi^n}{\beta^n Z(\beta, Q_1^0)} \left\{ \frac{n}{\beta} - \sum_{s=0}^n \frac{n\beta^{s-1} U^s}{s!} e^{-\beta U} \right\} \quad (6.32)$$

Donde esta vez llamé  $s = n + 1 - j$ . Y para  $n = 1$ , encuentro que

$$\langle U \rangle (\beta, Q_1^0) = \frac{1}{\beta \{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}}\}} \left\{ \beta U [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}} + \frac{[1 + (q-1)\beta U]^{\frac{3-2q}{1-q}}}{3-2q} \right\} \quad (6.33)$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo 5, luego de integrar por partes. Finalmente, la entropía puede ser expresada por la ecuación (6.21), donde se puede reemplazar  $Z$  y  $\langle U \rangle$  desde las ecuaciones (6.27) y (6.30), respectivamente. Debido a la complejidad de esta ecuación, muestro la forma explícita en el Apéndice C con el fin de no estorbar la lectura del texto.

## 6.4. Fuerza entrópica y fuerza total

Como vimos previamente, la fuerza entrópica está dada por

$$F_e = \frac{1}{\beta} \frac{\partial S}{\partial Q} \quad (6.34)$$

En nuestro caso eso es

$$F_e = \frac{Z^{q-2}}{\beta} \frac{\partial Z}{\partial Q} [1 + (q-1)\beta \langle U \rangle] + Z^{q-1} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \quad (6.35)$$



Donde

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = \frac{\pi^n}{\beta^n} 2Q_i \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} \times \right. \\ \left. [1 + (q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} - (n-j)U^{n-j-1} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \quad (6.36)$$

Y

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{\partial Z}{\partial Q} + \frac{n\pi^n}{Z\beta^n} 2Q_i \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \times \\ \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n+1-j} [1 + (q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right. \\ \left. - (n+1-j)U^{n-j} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \quad (6.37)$$

Usando (6.36), (6.37) y (6.35) obtengo la expresión final de la fuerza entrópica que está dada por (C.2) en el apéndice por su complejidad. La figura (6.1) muestra el comportamiento de la fuerza entrópica para varios valores de  $n$ .

Si  $n = 1$  las ecuaciones (6.36) y (6.37) tienden, respectivamente, a

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = 2\pi Q [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{\partial Z}{\partial Q} + \frac{2QU\pi}{Z} [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}} \quad (6.39)$$

Esto es, se reducen a las expresiones obtenidas en el capítulo 5. También concuerdan con las ecuaciones obtenidas en la sección 2.3.4 [22] cuando  $q \rightarrow 1$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = 2\pi^n Q e^{-\beta U} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{U^k}{k! \beta^{n-k-1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{k-1}}{(k-1)! \beta^{n-k}} \right\} \quad (6.40)$$

Donde llamé  $k = n - j$ .

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{\partial Z}{\partial Q} + \frac{2Q\pi^n}{Z} e^{-\beta U} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{nU^k}{k! \beta^{n-k}} - \sum_{k=0}^n \frac{nU^{k-1}}{(k-1)! \beta^{n-k+1}} \right] \quad (6.41)$$

En la última ecuación llamé  $k = n + 1 - j$ . Como las ecuaciones (6.36) y (6.37) tienden a (6.40) y (6.41) cuando  $q \rightarrow 1$  y la ecuación (6.35) tiende a

$$F_e = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial Q} + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \quad (6.42)$$

Entonces el límite de  $F_e$  concuerda con la fuerza entrópica de 2.3.4. La forma completa de  $F_e$  puede ser encontrada en el Apéndice C, ecuación (C.2).

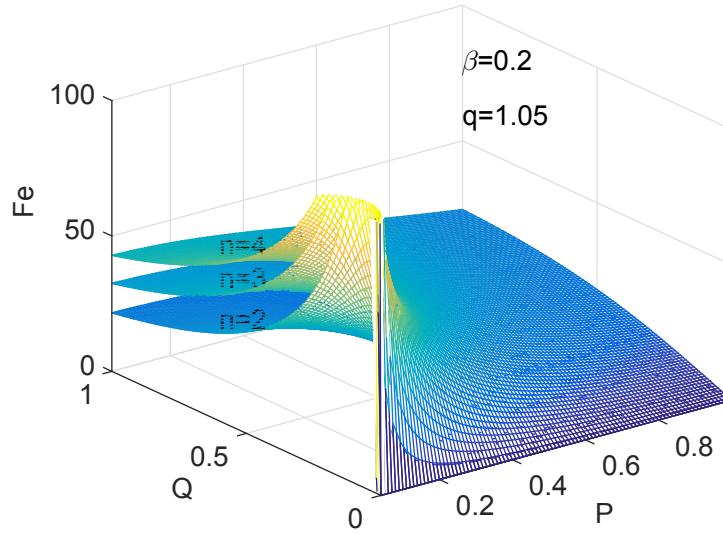


Figura 6.1: Comportamiento de la fuerza entrópica con  $n$ . Notar que la fuerza entrópica crece con la dimensionalidad.

Por supuesto la partícula también siente la influencia del gradiente negativo del potencial del HO:

$$F_{HO} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \quad (6.43)$$

Cuya expresión explícita está dada por la ecuación (C.3) del apéndice. Notar que la fuerza se anula en el origen, como se indica en la figura (6.2). La fuerza del oscilador armónico (i) cambia de signo cuando se pasa de un lado del origen al otro (ii) depende de si uno está comprimiendo o elongando el resorte. Recordar también que estamos tratando con los promedios estadísticos de las fuerzas.

Ahora, estamos en presencia de una fuerza total:

$$F_T = F_e + F_{HO} \quad (6.44)$$

Uno tiene

$$F_T = \frac{1}{\beta} Z^{q-2} \frac{\partial Z}{\partial Q} [1 + (q-1)\beta \langle U \rangle] + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial Q} \left( Z^{q-1} - \frac{1}{2} \right) \quad (6.45)$$

Y a partir de esta ecuación podemos obtener la forma explícita de  $F_T$  que se presenta en la ecuación (C.4) en el Apéndice C.

## 6.5. Calor específico

El calor específico puede ser calculado como

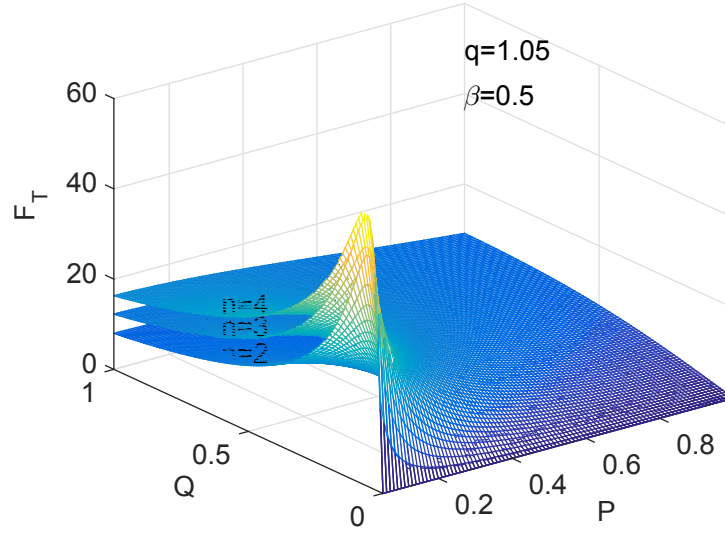


Figura 6.2: Comportamiento de la fuerza total con  $n$ . Notar que la fuerza total crece con la dimensionalidad.

$$C = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T} = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{k_B n \pi^n}{Z} \left\{ \frac{n+1}{\beta^n \prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{U^{n+1-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left[ \frac{j}{\beta^{j-1}} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} + \frac{(j+1-jq)U}{\beta^{j-2}} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right] \right\} \quad (6.46)$$

Donde

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{nk_B \pi^n}{\beta^{n-1} \prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - k_B \pi^n \sum_{j=1}^n \frac{U^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \times \left\{ \frac{j}{\beta^{j-1}} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} + \frac{(j+1-jq)U}{\beta^{j-2}} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right\} \quad (6.47)$$

Luego se obtiene para el calor específico la ecuación (C.5) del Apéndice C. Cuando  $q \rightarrow 1$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = k\pi^n \left[ n(kT)^{n-1} - e^{-\beta U} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{U^{s+1}}{s!} (kT)^{n-s-2} - e^{-\beta U} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s)U^s}{s!} (kT)^{n-s-1} \right] \quad (6.48)$$

Lo cual concuerda con el resultado dado en [22]. En la expresión anterior llamamos  $s = n - j$ . Cuando  $n = 1$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial T}$  toma la forma

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \frac{k\pi}{(2-q)} \{1 - [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{2-q}{1-q}} + (2-q)\beta U [1 + (q-1)\beta U]^{\frac{1}{1-q}}\} \quad (6.49)$$

Como en el capítulo anterior. El límite de  $C$  cuando  $q \rightarrow 1$  también coincide con aquel calculado en la sección 2.3.4:

$$C = -\frac{\langle U \rangle}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{k\pi^n}{Z} \left[ \frac{n(n+1)}{\beta^n} - \sum_{s=0}^n \frac{nU^{s+1}}{s!\beta^{n-s-1}} - e^{-\beta U} \sum_{s=0}^n \frac{n(n-s+1)U^s}{s!\beta^{n-s}} \right] \quad (6.50)$$

## 6.6. Conclusiones

Hemos reunido cuatro conceptos físicos importantes como fuerza entrópica, entropía de camino, mecánica estadística no extensiva y gravedad emergente discutiendo la qStatMech de curvas del espacio de fases.

Las expresiones para las cantidades aquí tratadas son generalizaciones de aquellas encontradas en [22] y [3] para los límites  $q \rightarrow 1$  y  $n = 1$ , respectivamente. Esto reconfirma que están correctamente calculadas. El comportamiento es el mismo en todas dimensiones, el cual incluye fenómenos similares a *hard-core*, confinamiento y libertad asintótica. Esto debería motivar esfuerzos dirigidos a encontrar estas propiedades en el laboratorio, en arreglos experimentales más generales de aquellos de la física de altas energías.

Es interesante notar que, a pesar que la dimensionalidad es muy importante en gravitación, en lo que respecta a la fuerza entrópica aquí calculada hemos probado que cualitativamente las propiedades estadísticas son intrínsecas a la curva, no importa en que espacio está embebida. Cuantitativamente los gráficos muestran que la fuerza entrópica crece con la dimensión  $n$ . Esto puede ser entendido si aceptamos que el desorden aumenta con  $n$ , ya que el número de configuraciones espaciales de cualquier argumento aumenta con  $n$ , y por lo tanto las variaciones de entropía a lo largo de la curva también.

## Capítulo 7

# Mecánica Estadística de Tsallis y Gravitación Newtoniana de dos cuerpos Regularizada Dimensionalmente

*“[...] This means that the total energy of any finite collection of self-gravitating mass points does not have a finite, extensive (e.g., proportional to the number of particles) lower bound. Without such a property there can be no rigorous basis for the statistical mechanics of such a system. Basically it is that simple. One can ignore the fact that one knows that there is no rigorous basis for one’s computer manipulations; one can try to improve the situation, or one can look for another job.”*

L.G. Taff, 1985, [140].

Los cuantificadores típicos de la mecánica estadística de Tsallis exhiben polos. Estamos hablando de la función de partición  $Z$  y la energía media  $\langle U \rangle$ . Los polos aparecen para valores distintivos del parámetro real  $q$ , en un conjunto numerable de números racionales de la línea  $q$ . Estos polos son tratados con regularización dimensional. En este capítulo los efectos físicos de los polos en el calor específico son estudiados para el potencial clásico gravitatorio de dos cuerpos.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera. Primero realizo una introducción al tema. En las secciones 2 y 3 calculo la función de partición y la energía media para los regímenes  $q > 1$  y  $q < 1$ , respectivamente. Las divergencias de la teoría son expuestas en la sección 4 y la regularización dimensional en 3 dimensiones para los valores  $q = 3/2$  y  $q = 1/3$  para los regímenes  $q > 1$  y  $q < 1$ , respectivamente, son el tema tratado en las secciones 5 y 6. Los calores específicos son calculados en la sección 7 y finalmente la discusión de resultados es realizada en la última sección.

## 7.1. Introducción

La necesidad de la regularización dimensional de algunas medidas de la NStatMech fue discutida en la sección 2.4.6 mediante la investigación de los polos que emergen al computar la función de partición y la energía media ( $Z$  y  $\langle U \rangle$ , respectivamente), comprobando el significado físico de esos polos para el oscilador armónico (HO). En este capítulo hago un trabajo similar para el potencial clásico gravitatorio. Para ello, apelo al enfoque de regularización dimensional de Bollini y Giambiagi [93-96, 98, 141, 142], generalizado como se explica en [101]. En particular, me apoyo en el artículo [65], un prerequisite muy útil. Más detalles de este tema son expuestos en el Apéndice D y la sección 2.5.

La mecánica estadística de sistemas gobernados por la gravedad está conectada a aspectos de física de materia condensada, mecánica de fluidos, grupo de renormalización y otros. Constituye un desafío con conexiones en fundamentos básicos como vimos en la sección 2.6, allí describo las propiedades únicas de tales sistemas y porqué es importante su estudio. Nociones asociadas y aplicaciones pueden ser encontradas en astrofísica y cosmología. Entre varios trabajos de este tipo recomiendo, por ejemplo, [69, 143-146].

## 7.2. La teoría para $q > 1$

Consideremos dos partículas de masas  $m$  y  $M$ , con  $M \gg m$ , interactuando mediante una fuerza de gravitación newtoniana y en un marco de estadística de Tsallis. El hamiltoniano del sistema es

$$H(r, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \quad (7.1)$$

Donde  $G$  es la constante de gravitación universal. Para la función de partición en  $\nu$  dimensiones,  $Z_\nu$ , se tiene que

$$Z_\nu = \int \left[ 1 + (1 - q)\beta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right) \right]_+^{\frac{1}{q-1}} d^\nu x d^\nu p \quad (7.2)$$

Donde, recordemos, el *cutt-off* de Tsallis,  $[ ]_+$ , significa que se debe considerar solo aquella región del espacio de fases donde el corchete es positivo. Para efectuar el proceso de integración usamos coordenadas hipersféricas y dos integrales, cada una en  $\nu$  dimensiones. Luego, nos quedan dos coordenadas radiales (una en el espacio  $r$  y otra en el  $p$ ) y  $2(\nu - 1)$  ángulos. Como el integrando no depende de los ángulos de integración el resultado de las integrales angulares es el volumen de una  $\nu$ -bola,  $\frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}$ , para cada integral. Y como el argumento dentro de los corchetes debe ser positivo por el *cutt-off* de Tsallis, la integración en  $p$  va de 0 a  $\sqrt{2m \left( \frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r} \right)}$  y por lo tanto obtenemos:

$$Z_\nu = \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right]^2 [\beta(q-1)]^{\frac{1}{q-1}} \int_0^\infty r^{\nu-1} dr \otimes \int_0^{\sqrt{2m\left(\frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r}\right)}} p^{\nu-1} \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r} - \frac{p^2}{2m} \right]^{\frac{1}{q-1}} dp \quad (7.3)$$

Las dos integrales anteriores pueden ser evaluadas utilizando la función beta de Euler  $B$ . La función beta aparece en casi todos los campos de la física, para más detalles y su forma explícita ver el Apéndice A. Doy el resultado de la primera integral usando la ecuación (A.29), la llamo  $I_1$ .

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{2m\left(\frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r}\right)}} p^{\nu-1} \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r} - \frac{p^2}{2m} \right]^{\frac{1}{q-1}} dp = \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r} \right]^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{q-1}} B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{q-1} + 1\right) \quad (7.4)$$

En consecuencia,

$$Z_\nu = \frac{2\pi^\nu (2m)^{\frac{\nu}{2}}}{[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^2} [\beta(q-1)]^{\frac{\nu}{2}} (GmM)^\nu B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{q-1} + 1\right) B\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{1-q}, -\nu\right) \quad (7.5)$$

De la ecuación (7.5) uno puede apreciar que los polos aparecen para toda dimensión,  $\nu = 3$  incluido. Entonces, apelar a la regularización dimensional (DR) será obligatorio. Con este fin, utilizaré la DR generalizada de la técnica original de Bollini y Giambiagi dada en [101].

Siguiendo con los cálculos nos enfrentamos ahora a

$$Z_\nu \langle U \rangle_\nu = \int_{\mathcal{M}} \left[ 1 + (1-q)\beta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right) \right]_+^{\frac{1}{q-1}} \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right) d^\nu x d^\nu p \quad (7.6)$$

Y

$$Z_\nu \langle U \rangle_\nu = \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right]^2 [\beta(q-1)]^{\frac{1}{q-1}} \left\{ \int_0^\infty r^{\nu-1} dr \otimes \int_0^{\sqrt{2m\left(\frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r}\right)}} \frac{p^{\nu+1}}{2m} \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r} - \frac{p^2}{2m} \right]^{\frac{1}{q-1}} dp \right\}$$

$$GmM \int_0^\infty r^{\nu-2} dr \int_0^{\sqrt{2m\left(\frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r}\right)}} p^{\nu-1} \left[ \frac{1}{\beta(q-1)} + \frac{GmM}{r} - \frac{p^2}{2m} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp \quad (7.7)$$

Usando las ecuaciones (A.26-A.29) se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle U \rangle_\nu &= \frac{2\pi^\nu (2m)^{\frac{\nu}{2}}}{Z_\nu [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^2} [\beta(q-1)]^{\frac{\nu}{2}-1} (GmM)^\nu \left[ B\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{1}{q-1} + 1\right) \otimes \right. \\ & \left. B\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{1-q} - 1, 1 - \nu\right) - B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{q-1} + 1\right) B\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{1-q} - 1, 1 - \nu\right) \right] \quad (7.8) \end{aligned}$$

### 7.3. La teoría para $q < 1$

El tratamiento en el régimen  $q < 1$  se vuelve más complicado. Para la ecuación (7.2) encontramos ahora que debido al *cutt-off* de Tsallis:

$$\begin{aligned} Z_\nu &= \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right]^2 [\beta(1-q)]^{\frac{1}{q-1}} \left\{ \int_0^{GmM\beta(1-q)} r^{\nu-1} dr \otimes \right. \\ & \int_0^\infty p^{\nu-1} \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{\beta(1-q)} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp + \\ & \left. \int_{GmM\beta(1-q)}^\infty r^{\nu-1} dr \int_0^\infty p^{\nu-1} \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{\beta(1-q)} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp \right\} \quad (7.9) \end{aligned}$$

Tratamos con cuatro integrales que pueden ser evaluadas usando la función beta.

$$\begin{aligned} Z_\nu &= \frac{2\pi^\nu (2m)^{\frac{\nu}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu}{2})]^2} [\beta(1-q)]^{\frac{\nu}{2}} (GmM)^\nu \left[ B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{1-q} - \frac{\nu}{2}\right) \otimes \right. \\ & B\left(-\nu, \frac{\nu}{2} - \frac{1}{1-q} + 1\right) + B\left(\frac{1}{1-q} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{q-1} + 1\right) \otimes \\ & \left. B\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{q-1} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{1-q}\right) \right] \quad (7.10) \end{aligned}$$

Mirando ahora a la energía media, a partir de la ecuación (7.6), encontramos que:

$$Z_\nu \langle U \rangle_\nu = \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \right]^2 [\beta(1-q)]^{\frac{1}{q-1}} \left\{ \int_0^{GmM\beta(1-q)} r^{\nu-1} dr \otimes \right.$$



$$\begin{aligned}
& \int_{\sqrt{2m\left(\frac{GmM}{r} - \frac{1}{\beta(q-1)}\right)}}^{\infty} \frac{p^{\nu+1}}{2m} \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{\beta(1-q)} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp_+ \\
& \int_{GmM\beta(1-q)}^{\infty} r^{\nu-1} dr \int_0^{\infty} \frac{p^{\nu+1}}{2m} \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{\beta(1-q)} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp_- \\
& GmM \int_0^{GmM\beta(1-q)} r^{\nu-2} dr \int_{\sqrt{2m\left(\frac{GmM}{r} - \frac{1}{\beta(q-1)}\right)}}^{\infty} p^{\nu-1} \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{\beta(1-q)} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp_- \\
& \left. GmM \int_{GmM\beta(1-q)}^{\infty} r^{\nu-1} dr \int_0^{\infty} p^{\nu-1} \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{\beta(1-q)} \right]_+^{\frac{1}{q-1}} dp \right\} \quad (7.11)
\end{aligned}$$

Expresión que involucra ocho integrales. Las funciones beta son necesarias una vez más, y la solución es:

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle_{\nu} &= \frac{2\pi^{\nu}(2m)^{\frac{\nu}{2}}}{Z_{\nu} [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^2} [\beta(1-q)]^{\frac{\nu}{2}-1} (GmM)^{\nu} \left[ B\left(\frac{1}{1-q} - \frac{\nu}{2} - 1, \frac{1}{q-1} + 1\right) \otimes \right. \\
& B\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{q-1} + 2, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{1-q} - 1\right) + B\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{1}{1-q} - \frac{\nu}{2} - 1\right) \otimes \\
& B\left(-\nu, \frac{\nu}{2} - \frac{1}{1-q} + 2\right) - B\left(\frac{1}{1-q} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{q-1} + 1\right) \otimes \\
& B\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{q-1} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{1-q} - 1\right) - B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{1-q} - \frac{\nu}{2}\right) \otimes \\
& \left. B\left(1 - \nu, \frac{\nu}{2} - \frac{1}{1-q} + 1\right) \right] \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Evidentemente la regularización dimensional es necesaria para resolver las divergencias.

## 7.4. Las divergencias de la teoría

Deseo hacer un breve resumen de las divergencias de la teoría, veamos como ejemplo el caso  $q < 1$ . A partir de la ecuación (7.12) podemos apreciar que la energía media no puede ser regularizada para algunos valores de  $q$ , aquellos que cumplen

$$1 + \frac{1}{q-1} = -n \text{ for } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.13)$$

La DR puede ser aplicada para todo  $q$  que cumple

$$1 + \frac{1}{q-1} \neq -n \text{ for } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7.14)$$

O, equivalentemente,

$$q \neq \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{\nu-2}{\nu-1}, \frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu}{\nu+1}, \dots \quad (7.15)$$

## 7.5. El escenario tridimensional para $q > 1$

Volvamos al régimen  $q > 1$ . En particular tratemos con el caso en que  $q = \frac{3}{2}$ . Vuelvo a la ecuación (7.5). La idea es resolver la regularización dimensional de esta ecuación usando su correspondiente desarrollo de Laurent, que es:

$$Z_\nu = -\frac{8\pi^2(\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}}}{3(\nu-3)} + \frac{4\pi^2}{3}(\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{23}{3} - \ln(16\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2) \right] + \sum_{s=1}^{\infty} a_s (\nu-3)^s \quad (7.16)$$

Donde utilicé varias ecuaciones de la sección A.1. En el caso que presento aquí, el término  $\nu-3$  independiente en el desarrollo de Laurent de  $Z$  lleva al valor físico de la serie, como explico anteriormente en la sección 2.5. Luego,

$$Z = \frac{4\pi^2}{3}(\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{23}{3} - \ln(16\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2) \right] \quad (7.17)$$

Como  $Z$  debe ser positivo, uno se enfrenta a la existencia de una cota mínima de la temperatura.

$$T > \frac{e^{-\frac{23}{3}}}{k_B} 16\pi^2 G^2 m^3 M^2 \quad (7.18)$$

De manera similar, partiendo de la ecuación (7.8), tenemos para  $\langle U \rangle$

$$Z \langle U \rangle_\nu = \frac{32\pi^2(\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}}}{3(\nu-3)} - \frac{32\pi^2}{3}(\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} [3 - \ln(\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)] + \sum_{s=1}^{\infty} a_s (\nu-3)^s \quad (7.19)$$

Y en consecuencia,

$$Z \langle U \rangle = \frac{32\pi^2}{\beta} (\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} [\ln(\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2) - 3 - 2\mathbf{C}] \quad (7.20)$$

O

$$\langle U \rangle = \frac{-8[3 + 2\mathbf{C} - \ln(\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)]}{\beta[\frac{23}{3} - \ln(16\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)]} \quad (7.21)$$

Donde  $\mathbf{C}$  es la constante de Euler o también llamada constante de Euler-Mascheroni [137].

## 7.6. El escenario tridimensional para $q < 1$

Consideremos ahora el caso  $q = \frac{1}{3}$ . El desarrollo de Laurent correspondiente que se obtiene de la ecuación (7.10) es

$$Z = \frac{4}{9\pi} (4\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} \left[ C + 8 \ln 2 + \frac{10}{3} - \ln \left( \frac{4\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2}{3} \right) \right] \quad (7.22)$$

La positividad de  $Z$  conduce nuevamente a una cota mínima de la temperatura  $T$ :

$$T > \frac{e^{-(C+8 \ln 2 + \frac{10}{3})}}{3k_B} 4\pi^2 G^2 m^3 M^2 \quad (7.23)$$

Para  $\langle U \rangle$  se deduce de ec. (7.12) que,

$$Z \langle U \rangle = \frac{1}{2\pi} (4\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} [8 + 3 \ln 3 - 3 \ln (\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2) - \ln 16 - 5C] \quad (7.24)$$

Y

$$\langle U \rangle = \frac{9}{8\beta} \frac{8 + 3 \ln 3 - 3 \ln (4\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2) - \ln 16 - 5C}{C + 8 \ln 2 + \frac{10}{3} + \ln 3 - \ln (4\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)} \quad (7.25)$$

## 7.7. Calores específicos

Ahora nos enfrentamos al calor específico, que puede ser calculado como  $C = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T}$ . Recordemos que consideramos aquí un sistema de una partícula de masa  $m$  en un campo gravitatorio newtoniano producido por una masa  $M$ . Luego, la capacidad calórica de una partícula es también el calor específico.

Para el régimen  $q = \frac{3}{2}$  obtenemos

$$C = \frac{8k_B [\ln(\pi^2 G^2 m^3 M^2) - 4 - \ln(k_B T) - 2C]}{\frac{22}{3} + \ln(k_B T) - \ln(16\pi^2 G^2 m^3 M^2)} - \frac{8k_B [3 \ln(\pi^2 G^2 m^3 M^2) - 3 - \ln(k_B T) - 2C]}{[\frac{22}{3} + \ln(k_B T) - \ln(16\pi^2 G^2 m^3 M^2)]^2} \quad (7.26)$$

Para  $q = \frac{1}{3}$  en cambio

$$C = \frac{9k_B [11 + 3 \ln 3 - \ln 16 + 3 \ln(k_B T) - 3 \ln(4\pi^2 G^2 m^3 M^2) - 5C]}{8 [C + 8 \ln 2 + 3 \ln 3 + \frac{10}{3} + \ln(k_B T) - \ln(\pi^2 G^2 m^3 M^2)]} - \frac{9k_B [8 + 3 \ln 3 - \ln 16 + 3 \ln(k_B T) - 3 \ln(4\pi^2 G^2 m^3 M^2) - 5C]}{8 [C + 8 \ln 2 + 3 \ln 3 + \frac{10}{3} + \ln(k_B T) - \ln(\pi^2 G^2 m^3 M^2)]^2} \quad (7.27)$$

Las figuras (7.1) y (7.2) muestran los calores específicos correspondientes a las ecuaciones (7.26) y (7.27), respectivamente. Llamo  $E = G^2 m^3 M^2$ , con  $m \ll \ll M$ . Expreso las cantidades en unidades de  $k_B T/E$ . Ambos calores específicos son negativos para toda temperatura, como es de esperar para la gravitación. De hecho, recordemos que tal fenómeno

está íntimamente asociado a los sistemas autogravitantes [44]. Y que, en cambio, Verlinde ha asociado este tipo de sistemas a una fuerza entrópica [19]. Es natural conjeturar que este tipo de fuerzas podría aparecer en los polos asociados a la energía. Notar también que el rango de temperaturas está restringido, existe una cota mínima de  $T$ . ¿Por qué una cota mínima y no una máxima como obtuvimos en el caso del HO? Bueno, podemos pensar que en el caso del HO, una cota máxima en la temperatura implica una cota máxima en la energía. Mientras que en un sistema gravitacional, donde el calor específico es negativo, una cota máxima en la energía se obtiene con una cota mínima de temperatura. En siguientes capítulos plantearé otro punto de vista a este debate.

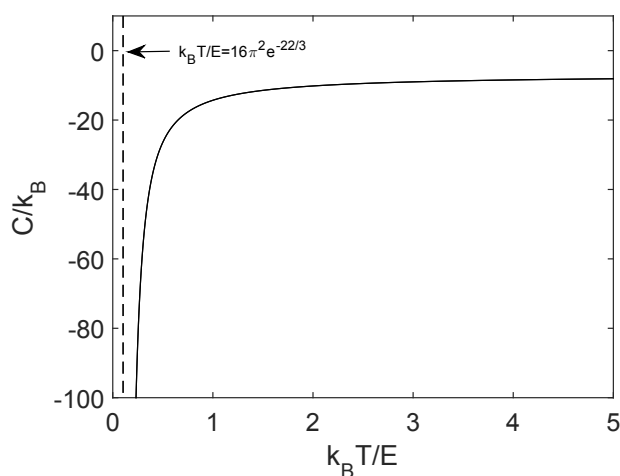


Figura 7.1: Calor específico versus  $k_B T/E$  para  $q = 3/2$ . Es bien sabido que los efectos gravitacionales hacen que el calor específico sea negativo. Esto se aprecia claramente en este gráfico y el siguiente.

## 7.8. Discusión

En este capítulo recurrí al procedimiento de regularización dimensional para estudiar los polos en la función de partición y energía media que aparecen para valores discretos y específicos de  $q$ , en la estadística de Tsallis de un problema de dos cuerpos en gravedad newtoniana. Estudié el comportamiento termodinámico de estos polos y encontramos interesantes peculiaridades. El análisis se realizó en particular en 3 dimensiones. Del análisis en los polos deseo recalcar:

- Los polos aparecen, tanto en la función de partición como en la energía media, para  $q \neq 1$
- Esos polos son una consecuencia de tener  $q \neq 1$ .

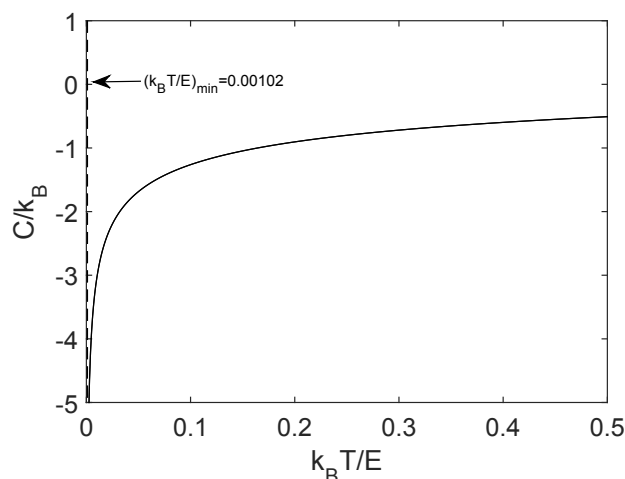


Figura 7.2: Calor específico versus  $k_B T/E$  para  $q = 1/3$ . Al igual que en el gráfico anterior se aprecia claramente que el calor específico es negativo, como es bien sabido para sistemas gravitacionales.

- Probamos que existe una cota mínima a la temperatura en los polos.
- Se encuentran calores específicos negativos, característicos de sistemas autogravitantes.

Los polos son una propiedad de los cuantificadores entrópicos, no del hamiltoniano. De hecho, sólo para  $q \neq 1$  aparece una función Gamma en la función de partición. Y es esta función Gamma la que contiene los polos.

Futuras investigaciones deberían concentrarse en casos en los que se sabe de antemano que  $q \neq 1$ . Para esos casos, los rasgos aquí descubiertos pueden adquirir algún grado de “realidad”.

En este esfuerzo me limité al problema de dos cuerpos, ya que las divergencias emergen ya en ese caso. Recordemos además que la gravitación de  $N$  cuerpos es un tema en la frontera de la investigación de la mecánica celeste. El caso  $q = 1$  no puede ser analizado con la presente formulación, ya que no es válido para ella. Por eso, el escenario  $q = 1$  es discutido en el próximo capítulo. La importancia de este trabajo reside en el hecho de que hemos mostrado algunos rasgos de la entropía de Tsallis que no se sospechaban con anterioridad y propuesto por primera vez una resolución para la función de partición para la gravitación newtoniana.



## Capítulo 8

# Mecánica Estadística de Boltzmann-Gibbs regularizada dimensionalmente y gravitación newtoniana de dos cuerpos

*“I cannot conceal the fact here that in the specific application of these rules, I foresee many things happening which can cause one to be badly mistaken if he does not proceed cautiously.”*

James Bernoulli, 1713

En este capítulo muestro que, haciendo uso de 1) la extensión analítica obtenida por Gradshteyn y Rizhik, y 2) el enfoque de regularización dimensional de Bollini y Giambiagi (DR), que uno puede obtener resultados gravitacionales finitos empleando la estadística de BG. El tratamiento para la BGStatMech es considerablemente más complicado que su equivalente en la StatMech de Tsallis. Este último necesita solamente de regularización dimensional, mientras que el primero requiere, además, extensión analítica. Por eso, luego de una introducción, hago referencia a la extensión analítica en la sección 2 de este capítulo. La función de partición y energía media de la gravitación newtoniana en el contexto de BG son calculadas por primera vez en las secciones 3 y 4, donde también la regularización dimensional es realizada. El calor específico es el tema de la sección 5 y finalmente discuto los resultados en la sección 6.

### 8.1. Introducción

Comúnmente se cree que la distribución de probabilidad clásica de Boltzmann-Gibbs (BG) no puede llevar a resultados finitos para el caso del hamiltoniano de la gravedad newtoniana porque la función de partición asociada  $Z$  en  $\nu$  dimensiones diverge[44, 69,

143-147]. Como se tiene que ( $m$  y  $M$  son las masas involucradas,  $G$  la constante de gravitación universal,  $\beta$  la temperatura inversa, y  $x-p$  las coordenadas del espacio de fases)

$$Z_\nu = \int e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r}\right)} d^\nu x d^\nu p \quad (8.1)$$

Donde hay una exponencial positiva. Sin embargo, tal creencia no tiene en cuenta la posibilidad de extensiones analíticas, que se harán cargo, junto a la regularización dimensional, de las divergencias en el origen.

Mostré en el capítulo anterior que, por primera vez,  $Z$  puede ser calculado para la entropía de Tsallis usando la técnica de DR.

¿Por qué insisto en este problema si ya ha sido resuelto? Este problema necesita ser revisado por aparte para el caso  $q = 1$  porque el análisis anterior no es válido para tal caso, debido a que aquí nos enfrentamos a una divergencia exponencial. En este capítulo, muestro como solucionar este problema con una combinación apropiada de DR y extensión analítica. Esto produce una función de partición de BG por primera vez para el problema de dos cuerpos interactuando por gravitación. Recordar que el problema gravitacional de  $N$  cuerpos no ha sido aún resuelto y constituye un problema de frontera en la investigación de la mecánica celeste.

Es bien sabido que, en teoría cuántica de campos, la DR no puede regularizar el campo gravitatorio, ya que es no renormalizable. Pero el presente problema es muy diferente, porque estamos tratando la estadística de un sistema interactuando por gravedad clásica newtoniana.

## 8.2. Extensión analítica

En esta sección reúno un conjunto de resultados matemáticos que serán necesarios más adelante. Debemos tener en mente que estamos tratando con la integral de una función que crece exponencialmente dada por la ecuación (8.1). Apoyándome en la referencia [137], considero la integral (A.30), que será de gran utilidad en nuestro problema, luego de algunas particularizaciones. La integral en cuestión es:

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} (x + \gamma)^{\mu-1} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = \beta^{\frac{\nu-1}{2}} \gamma^{\frac{\nu-1}{2} + \mu} \Gamma(1 - \mu - \nu) e^{\frac{\beta}{2\gamma}} W_{\frac{\nu-1}{2} + \mu, -\frac{\nu}{2}} \left( \frac{\beta}{\gamma} \right) \quad (8.2)$$

Con  $|\arg(\gamma)| < \pi$ ,  $Re(1 - \mu - \nu) > 0$  y  $W_{\lambda, \mu}(z)$  una de las funciones de Whittaker. Para más detalles ver el Apéndice A. Eligiendo  $\mu = 1$  encontramos

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = \beta^{\frac{\nu-1}{2}} \gamma^{\frac{\nu+1}{2}} \Gamma(-\nu) e^{\frac{\beta}{2\gamma}} W_{\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}} \left( \frac{\beta}{\gamma} \right) \quad (8.3)$$



Válido para  $\nu \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ . Adicionalmente, utilizando la propiedad (A.22) y la función hipergeométrica confluyente obtenemos

$$W_{\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = M_{\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{\beta}{2\gamma}} \quad (8.4)$$

Donde  $M_{\lambda, \mu}(z)$  es la *otra* función de Whittaker. Luego,

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = \beta^{\nu} \Gamma(-\nu) \quad (8.5)$$

Una integral que puede ser evaluada para todo  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  utilizando la técnica de regularización dimensional [98, 101, 141, 142]. Cambiando ahora  $\beta$  por  $-\beta$  en la ecuación (8.2) tenemos

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} (x + \gamma)^{\mu-1} e^{\frac{\beta}{x}} dx = (-\beta)^{\frac{\nu-1}{2}} \gamma^{\frac{\nu-1}{2} + \mu} \Gamma(1 - \mu - \nu) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}} W_{\frac{\nu-1}{2} + \mu, -\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) \quad (8.6)$$

Una vez más elegimos  $\mu = 1$  y obtenemos

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{\frac{\beta}{x}} dx = (-\beta)^{\frac{\nu-1}{2}} \gamma^{\frac{\nu+1}{2}} \Gamma(-\nu) e^{-\frac{\beta}{2\gamma}} W_{\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) \quad (8.7)$$

Válido para  $\nu \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ . Nos enfrentamos ahora a

$$W_{\frac{\nu+1}{2}, -\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) = M_{\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}}\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} e^{\frac{\beta}{2\gamma}} \quad (8.8)$$

Y

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{\frac{\beta}{x}} dx = (-\beta)^{\nu} \Gamma(-\nu) \quad (8.9)$$

Equivalente a cambiar  $\beta$  por  $-\beta$  en la ecuación (8.5). Hemos mostrado, entonces, un hecho interesante. La restricción de la extensión analítica (AE) de (8.2) es igual a la AE de la restricción de esa misma relación. Esto reconfirma que la AE de Gradshteyn y Rizhik es correcta. La ecuación (8.9) muestra un corte en  $Re(\beta) > 0$ . Uno puede entonces elegir  $(-\beta)^{\nu} = e^{i\pi\nu} \beta^{\nu}$ ,  $(-\beta)^{\nu} = e^{-i\pi\nu} \beta^{\nu}$ , o  $(-\beta)^{\nu} = \cos(\pi\nu) \beta^{\nu}$ . Selecciono la última opción y obtengo

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{\frac{\beta}{x}} dx = \cos(\pi\nu) \beta^{\nu} \Gamma(-\nu) \quad (8.10)$$

Un resultado importante que usaré en la sección 3.

Por otro lado, del Apéndice A, uso la integral (A.31)

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu} \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}} \right) \quad (8.11)$$

Donde  $D$  es la función cilindro parabólico. Seleccionando  $\gamma = 0$  se encuentra

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) D_{-\nu}(0) \quad (8.12)$$

Debido a que, ver ecuación (A.25),

$$D_{-\nu}(0) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad (8.13)$$

Encontramos

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2} dx = \frac{2^{-\nu} \beta^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad (8.14)$$

Otro resultado importante que usaré en la próxima sección.

### 8.3. La distribución de BG $\nu$ -dimensional

La función de partición de BG en  $\nu$  dimensiones,  $Z_\nu$ , es

$$Z_\nu = \int_M e^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right)} d^\nu x d^\nu p \quad (8.15)$$

Para efectuar el proceso de integración uso coordenadas hipersféricas y dos integrales, cada una en  $\nu$  dimensiones. El cambio correspondiente de variables está definido como

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ &\vdots \\ x_{\nu-1} &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{\nu-2} \cos \theta_{\nu-1} \\ x_\nu &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{\nu-1} \sin \theta_{\nu-1}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

Donde  $0 \leq \theta_j \leq \pi$ ,  $1 \leq j \leq \nu - 2$ , y  $0 \leq \theta_{\nu-1} \leq 2\pi$ . La integración en las variables angulares ( $\Omega_\nu = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\nu-1})$ ) lleva como resultado al hipervolumen de una  $\nu$ -bola:

$$\int_{\Omega_\nu} d\Omega_\nu = \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right] \quad (8.17)$$

Nos queda luego sólo dos coordenadas radiales (una en el espacio  $r$  y la otra en el  $p$ ) y  $2(\nu - 1)$  ángulos. En consecuencia,

$$Z_\nu = \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right]^2 \int_0^\infty \int_0^\infty (rp)^{\nu-1} e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r}\right)} dr dp \quad (8.18)$$

Ahora, usando la ecuación (8.10) para  $\int_0^\infty r^{\nu-1} e^{\beta\frac{GmM}{r}} dr$  y (8.14) para  $\int_0^\infty p^{\nu-1} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} dp$  se obtiene

$$Z_\nu = 4\sqrt{\pi} \cos(\pi\nu) \left( \frac{\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2}{2} \right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu)}{[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^2 \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad (8.19)$$

De la ecuación (8.19) es claro que los polos aparecen para toda dimensión,  $\nu = 3$  incluido. Luego, deberemos utilizar la técnica de DR de Bollini y Giambiagi generalizada como hicimos en el capítulo anterior [101].

Antes, aún necesitamos la expresión de la energía media en  $\nu$  dimensiones

$$\langle U \rangle_\nu = \frac{1}{Z_\nu} \int_M e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r}\right)} \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right) d^\nu x d^\nu p \quad (8.20)$$

Usando las coordenadas hiperesféricas obtenemos

$$\langle U \rangle_\nu = \frac{1}{Z_\nu} \left[ \frac{2\pi^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right]^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r}\right)} \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right) p^{\nu-1} r^{\nu-1} dp dr \quad (8.21)$$

Ahora utilizo nuevamente las ecuaciones (8.10) y (8.14), lo que da como resultado para la energía media

$$\langle U \rangle_\nu = \frac{1}{Z_\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cos(\pi\nu) \left( \frac{\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2}{2} \right)^{\frac{\nu}{2}} \otimes \left[ \frac{\Gamma(\nu+2)\Gamma(-\nu)}{[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^2 \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)} + 4 \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)]^2 \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \right] \quad (8.22)$$

## 8.4. La distribución de BG regularizada en tres dimensiones

Volvamos a la ecuación (8.19). La idea es resolver una vez más el proceso de DR. Recordar que si, por ejemplo, tenemos una expresión  $F(\nu)$  que diverge, digamos, para  $\nu = 3$ , el enfoque generalizado de la DR de Bollini-Giambiagi consiste en desarrollar  $F(\nu)$  en serie de Laurent alrededor de  $\nu = 3$  y seleccionar, como el resultado físico para  $F$ , el término  $\nu - 3$ -independiente del desarrollo. Para más información ver el capítulo 2, el Apéndice D, o la referencia [101]. Algunas correcciones son hechas aquí respecto a la publicación original [6] donde aparecen algunos errores de tipeo.

En nuestro caso, el desarrollo de Laurent correspondiente en la variable  $\nu$  alrededor de  $\nu = 3$  es

$$Z_\nu = -\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{(2\pi^2\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}}}{3(\nu-3)} - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} (2\pi^2\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} \otimes$$

$$\left[ \ln(2\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + 3\mathbf{C} - \frac{17}{3} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} a_s (\nu-3)^s \quad (8.23)$$

Donde  $\mathbf{C}$  es la constante de Euler. Claramente vemos que  $Z_\nu$  diverge en  $\nu = 3$ . Por definición (y esta es la esencia de la DR), el término  $(\nu - 3)$ -independiente en el desarrollo de Laurent de  $Z_\nu$  nos lleva al valor físico de  $Z$ . Que es,

$$Z = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} (2\pi^2\beta G^2 m^3 M^2)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{17}{3} - 3\mathbf{C} - \ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) \right] \quad (8.24)$$

Como  $Z$  debe ser positivo, uno encuentra que la temperatura debe cumplir

$$T > \frac{e^{-\frac{17}{3} + 3\mathbf{C}}}{k_B} 8\pi^2 G^2 m^3 M^2 \quad (8.25)$$

Similarmente, de la ecuación (8.22), tenemos para  $\langle U \rangle$  el desarrollo

$$Z \langle U \rangle_\nu = \frac{8}{\sqrt{\pi}\beta(\nu-3)} \left( \frac{\pi^2\beta G^2 m^3 M^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{\sqrt{\pi}\beta} \left( \frac{\pi^2\beta G^2 m^3 M^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \otimes$$

$$\left[ \frac{1}{2} \ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + \frac{3\mathbf{C}}{2} - \frac{5}{2} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} a_s (\nu-3)^s \quad (8.26)$$

Donde  $Z$  es el dado en la ecuación (8.24). En consecuencia, el término  $(\nu - 3)$ -independiente es el valor físico de  $\langle U \rangle$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{Z} \frac{4}{\sqrt{\pi}\beta} \left( \frac{\pi^2\beta G^2 m^3 M^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} [\ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + 3\mathbf{C} - 5] \quad (8.27)$$

Reemplazando aquí el valor de  $Z$  dado por (8.24) se obtiene

$$\langle U \rangle = -\frac{3 \ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + 3\mathbf{C} - 5}{2\beta \ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + 3\mathbf{C} - \frac{17}{3}} \quad (8.28)$$

## 8.5. Calor específico

Ahora estamos en posesión, por primera vez, de una energía media canónica gravitacional. Luego, podemos usarla para evaluar el calor específico  $C = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T}$ . Entonces, se obtiene

$$C = -\frac{3k_B}{2} \frac{\ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) - 6 + 3\mathbf{C}}{\ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + 3\mathbf{C} - \frac{17}{3}}$$

$$\frac{3k_B}{2} \frac{\ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) - 5 + 3\mathbf{C}}{[\ln(8\pi^2\beta G^2 m^3 M^2) + 3\mathbf{C} - \frac{17}{3}]^2} \quad (8.29)$$

El cual puede ser expresado como

$$\frac{C}{k_B} = \beta \langle U \rangle - \frac{1}{\left[ \ln(8\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2) + 3C - \frac{17}{3} \right]^2} \quad (8.30)$$

La figura (8.1) muestra el calor específico correspondiente a la ecuación (8.29). Llamo  $E = G^2 m^3 M^2$  con  $m \ll M$ . Y expreso las cantidades en unidades de  $k_B T/E$ . El calor específico es negativo para todo rango de temperaturas, como se espera para la gravitación (ver sección 2.6), ya que es asociado a sistemas autogravitatorios [44]. Thirring ha mostrado las consecuencias de los sistemas con calor específico negativo en astrofísica [113], y en cambio, Verlinde ha asociado estos sistemas a fuerzas entrópicas [19]. Uno puede notar que, como se mostró en el capítulo 2, el calor específico del colectivo canónico de BG debe ser positivo. Entonces, ¿Cómo obtuvimos un resultado negativo? Esto ocurre debido a la técnica de DR, en la cual, un término infinito y positivo no es tenido en cuenta.

Notar también que el rango de temperatura está restringido ya que existe una cota mínima, al igual que en la estadística de Tsallis en el capítulo anterior. Un resultado muy importante que debo destacar es el hecho de que el límite de altas temperaturas de nuestro calor específico es el calor específico de Lynden-Bell (2.102), esto es,  $C \rightarrow -\frac{3}{2}k_B$  cuando  $T \rightarrow \infty$

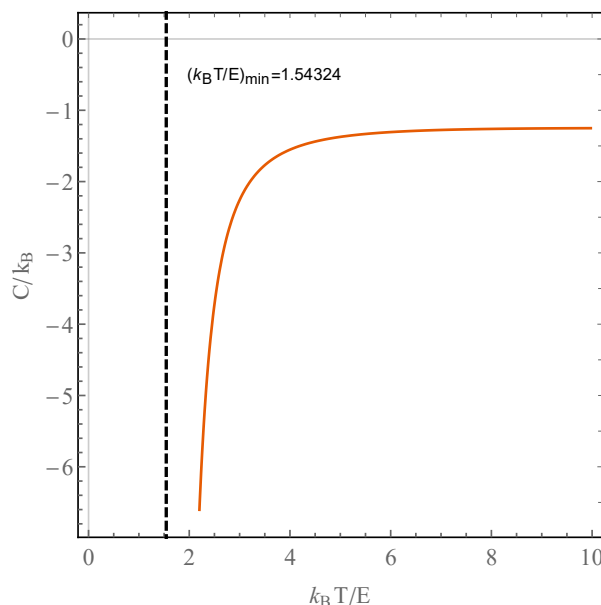


Figura 8.1: Calor específico en función de  $k_B T/E$  para el colectivo canónico de BG

## 8.6. Discusión

A pesar de que se cree comúnmente que la función de partición  $Z$  asociada a la distribución de probabilidad de Boltzmann-Gibbs diverge [44, 69, 143-146], pudimos obtener un

resultado finito para ella. Esto es así porque tal creencia no tiene en cuenta la posibilidad de usar extensión analítica y regularización dimensional. He mostrado en este capítulo que esta combinación de técnicas nos permite obtener una función de partición de BG finita por primera vez.

El problema clásico de gravitación tiene horizontes aún más grandes, que no he tocado aquí. Mi contribución fue la de proveer una expresión para la función de partición del problema de dos cuerpos con la cual se puede estudiar el comportamiento termodinámico de esta, como veremos en el siguiente capítulo.

Un punto especial ha ser remarcado es el siguiente. El problema estadístico de la gravitación requiere muchas más consideraciones a tener en cuenta que su contraparte en la estadística no extensiva. La última sólo necesita regularización dimensional, mientras que la primera, además, necesita extensión analítica.

Uno podría preguntarse que papel juega aquí la estadística de Tsallis, ya que un sistema autogravitante es no extensivo. Se ha mostrado en las referencias [2, 118, 148, 149] que  $q$  es un indicador de la cantidad de energía involucrada en los procesos físicos relacionados a resonancias en teoría cuántica de campos (QFT). Cuanto más grande es el valor de  $q$ , más grande es el valor de energía. De acuerdo a resultados del experimento Alice en el LHC, se encuentra que un campo cuántico no lineal se debería manifestar por sí mismo en energías de alrededor de 15 TeV y que esos campos se corresponderían con un valor aproximado de  $q = 1,5$ . El valor  $q = 1$  se corresponde con la QFT usual lineal.

Uno podría conjeturar quizás que con la gravedad de Newton algo similar ocurre. Para energías usuales, el tratamiento estadístico de la gravedad newtoniana sería el de BG. A mayores energías, uno debería tratarlo con estadística de Tsallis. Un ejemplo relevante de esto es dado en la referencia [41].

## Capítulo 9

# Mecánica Estadística de sistemas estelares planos

*“I protest against the use of infinite magnitude as something accomplished, which is never permissible in mathematics. Infinity is merely a figure of speech, the true meaning being a limit.”*

C. F. Gauss.

En este capítulo utilizo el procedimiento desarrollado en los capítulos anteriores para ilustrar el alcance de sus aplicaciones. Esta vez trato con un sistema 2D, una galaxia plana, y muestro que resultados interesantes y coherentes pueden ser obtenidos. Luego de una introducción, detallo el modelo. En la sección 3, regularizo la función de partición y la energía media y en las siguientes calculo el calor específico y la entropía. Las consecuencias en la catástrofe gravotérmica son el tema de la sección 6 y finalmente esbozo unas conclusiones en la última sección.

### 9.1. Introducción

Apelo aquí al procedimiento matemático que fue explicado previamente. Vimos que la función de partición de la gravitación newtoniana diverge trabajando en ambas teorías, la de Tsallis y la de BG. Si  $m$  y  $M$  son las masas involucradas,  $G$  la constante de gravitación universal,  $\beta$  la temperatura inversa, y  $x$ - $p$  las coordenadas del espacio de fase, la función de partición de BG es,

$$Z_\nu = - \int e^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right)} d^{\nu} x d^{\nu} p \quad (9.1)$$

Esta vez elijo una estrategia distinta a la anterior, defino la función de partición con un signo menos debido a que el procedimiento de DR puede cambiar el signo. Entonces, la

distribución de probabilidad está definida positiva en otro dominio, que es el que elegimos explorar ahora. La función de partición de Tsallis es:

$$Z_\nu = - \int \left[ 1 + (1 - q)\beta \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{GmM}{r} \right) \right]_+^{\frac{1}{q-1}} d^\nu x d^\nu p \quad (9.2)$$

En el capítulo 7 mostré que  $Z$  puede ser calculado en el marco de qStatMech usando la técnica de DR para un escenario tridimensional. El mismo sistema fue resuelto luego para la BGStatMech en el capítulo 8. Los sistemas autogravitantes poseen las características típicas de sistemas no extensivos por lo que la qStatMech sería más apropiada [24]. Pero luego nos encontraríamos con un serio problema: la función de partición de un conjunto de  $N$  partículas no es trivial en esa teoría debido a la no-aditividad. Como consecuencia, uso aquí la teoría de BG, teniendo en cuenta que es un caso límite de la teoría de Tsallis en la que el parámetro  $q$  es la unidad.

En este capítulo, propongo un modelo simple para galaxias usando la reducción dimensional a dos dimensiones de la función de partición calculada previamente (8.19). Este enfoque nos permite evitar suponer que el sistema esta contenido en una “caja”, como se suele usar en los modelos existentes [44, 69, 143, 145, 147]. En cambio, la DR se hará cargo de las divergencias. Quiero aclarar que estamos tratando con un sistema 2D (una galaxia plana), pero embebida en un espacio tridimensional, por lo que el potencial gravitatorio correspondiente varía con  $r^{-1}$ .

## 9.2. Un modelo galáctico simple

Consideremos un disco de  $N$  estrellas de la misma masa  $m$  no interactuantes entre sí y orbitando un agujero negro supermasivo (BH) de masa  $M$ ,  $M \gg m$ . Esta hipótesis es razonable ya que los BH en los centros galácticos tienen al menos  $10^6$  masas solares ( $M_\odot$ ) mientras que las estrellas poseen entre 0,5 y 20  $M_\odot$  [150].

Con estas suposiciones podemos usar el Hamiltoniano más simple:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{GMm}{r} \quad (9.3)$$

Donde podemos usar la energía cinética clásica en vez de la relativista porque las velocidades de las estrellas alrededor del BH son del orden de  $200 - 250 km/s \sim 10^{-3}c$ , con  $c$  la velocidad de la luz. La hipótesis que las estrellas no interactúan entre sí no se mantiene si uno desea estudiar los detalles de la dinámica de una galaxia. Pero es útil como una primera aproximación en nuestra tarea. Recordemos que la interacción de N-cuerpos es aún un problema abierto de la dinámica celeste. De hecho, la interacción entre las estrellas es más débil que la interacción con el BH pero no despreciable. De todas formas, la interacción BH-estrella es predominante en la dinámica. Consideremos la Vía Láctea como un ejemplo. Nuestra galaxia tiene  $50,000LY$  de radio. Si consideramos una



estrella de la masa del sol en el borde de la Vía Láctea, la energía potencial gravitatoria correspondiente es (LY represente años luz, *light-year*)

$$V_{estrella-BH} = GMm/r = G \times 10^6 M_\odot \times 1M_\odot / 5 \times 10^4 LY \quad (9.4)$$

La distancia entre el sol y su vecina más cercana, Proxima Centauri, es de 4,37LY. Si tomamos 5LY como la distancia entre nuestra estrella hipotética en el borde de la Vía Láctea y su vecina más cercana, la cual suponemos de la misma masa, obtenemos:

$$V_{estrella-estrella} = GMm/r = G \times 1M_\odot \times 1M_\odot / 5LY \quad (9.5)$$

con  $M_\odot$  la masa solar. Luego,

$$\frac{V_{est-est}}{V_{est-BH}} = 10^{-2} \quad (9.6)$$

Como vemos, podemos despreciar la interacción entre estrellas en una primera aproximación. Para cualquier estrella más cercana al BH la relación anterior es incluso menor. Con estas hipótesis utilizamos el hamiltoniano (9.3), y la función de partición ya fue calculada en el capítulo anterior *via* DR y AE. En  $\nu$  dimensiones  $Z$  es:

$$Z = -4\sqrt{\pi}\cos(\pi\nu) \left( \frac{\pi^2\beta G^2 M^2 m^3}{2} \right)^{\nu/2} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu)}{\Gamma^2(\nu/2)\Gamma(\nu+1/2)} \quad (9.7)$$

Y la energía media

$$\langle U \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cos(\pi\nu) \left( \frac{\pi^2\beta G^2 M^2 m^3}{2} \right)^{\nu/2} \left[ \frac{\Gamma(\nu+2)\Gamma(-\nu)}{\Gamma^2(\nu/2)\Gamma(\nu+3/2)} + \frac{4\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\Gamma^2(\nu/2)\Gamma(\nu+1/2)} \right] \quad (9.8)$$

### 9.3. La distribución de BG regularizada en dos dimensiones

Volvemos a la ecuación (9.7). Esta expresión tiene un polo en todas las dimensiones  $\nu$  debido a la función Gamma en el numerador. La idea es, entonces, realizar el proceso de DR en dos dimensiones.

En ese caso, la  $Z$  regularizada correspondiente es:

$$Z = -\pi^2\beta G^2 M^2 m^3 [3 - 3C - \ln(2\pi^2\beta G^2 m^3 M^2)] \quad (9.9)$$

Donde  $C = 0,5777\dots$  es la constante de Euler.

Notar que, como  $Z$  debe ser positiva, encontramos una cota máxima de la temperatura.

$$T < \frac{e^{-3+3C}}{k_B} 2\pi^2 G^2 m^3 M^2 \quad (9.10)$$

Esta temperatura, para nuestro ejemplo, es del orden de  $10^{167} K$ .

Análogamente, de la ecuación (9.8), tenemos la regularización de  $\langle U \rangle$

$$Z \langle U \rangle = \pi^2 G^2 M^2 m^3 [2 - 2C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)] \quad (9.11)$$

Donde  $Z$  está dada por la ec. (9.9). Reemplazando el valor de  $Z$  obtenemos

$$\langle U \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{2 - 2C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)}{3 - 3C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)} \quad (9.12)$$

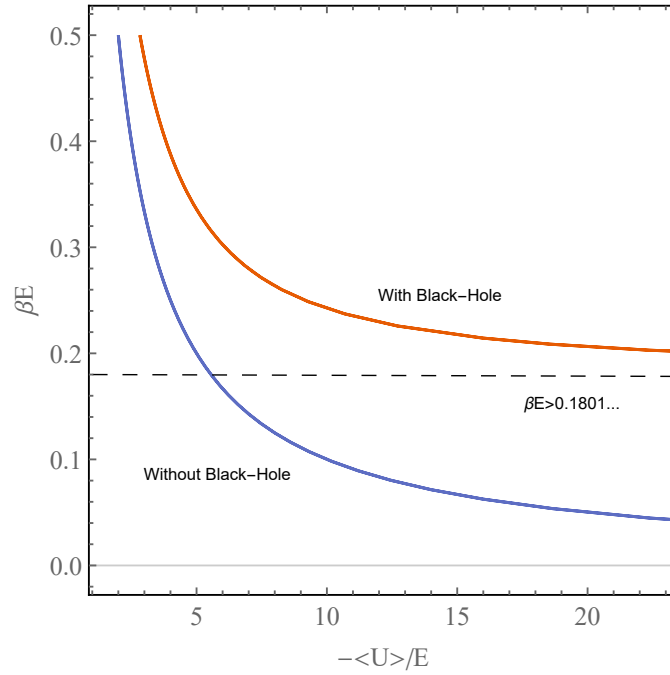


Figura 9.1: Curvas calóricas. Temperatura inversa adimensional  $\beta E$  versus energía adimensional  $-\langle U \rangle / E$ , con  $E = G^2 M^2 m^3$ . La curva naranja es nuestro modelo con un agujero negro central. En azul, un modelo de tipo Lynden-Bell bidimensional, i.e., un gas ideal autogravitante.

Las ecuaciones (9.9) y (9.12) son, respectivamente, la función de partición y la energía media para un sistema de una estrella y el BH. La fig. (9.1) muestra la curva calórica del sistema. Llamo  $E = G^2 M^2 m^3$  y grafico la temperatura inversa adimensional  $\beta E$  versus la energía adimensional  $-\langle U \rangle / E$ .

Notar que si tomamos el límite  $M \rightarrow 0$  (sin BH), la energía se comporta como  $\langle U \rangle = -1/\beta = -k_B T$ , i.e, como un gas ideal 2D autogravitante, que se muestra en azul en la fig. (9.1). Este caso particular es discutido por Lynden-Bell y mencionado por Chavanis y muchos otros para el caso tridimensional. Comparar, por ejemplo, las curvas calóricas de nuestro modelo con las curvas en la región de calor específico negativo en [108, 151] y [152].

Como en este modelo las estrellas no interactúan entre sí y la entropía es aditiva, la función de partición y la energía media total del sistema de  $N$  estrellas pueden ser obtenidas, respectivamente, como

$$Z_N = Z^N \quad (9.13)$$

$$\langle U \rangle_N = N \langle U \rangle \quad (9.14)$$

## 9.4. Calor específico

Estamos en posesión ahora de la función energía media canónica gravitacional, que podemos usar para calcular el calor específico  $C = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial T}$ .

Obtenemos

$$\frac{C}{k_B} = \beta \langle U \rangle + \frac{C - 1}{[3 - 3C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)]^2} \quad (9.15)$$

La fig. (9.2) muestra el calor específico correspondiente a la ecuación (9.15). El calor específico es negativo, como se espera para sistemas autogravitantes [44, 108, 147]. Notar también que las temperaturas están restringidas, existe una cota máxima. Si  $M \rightarrow 0$  entonces  $C \rightarrow -k_B$ , esto es, el calor específico de un gas ideal autogravitante bidimensional [108, 151, 152].

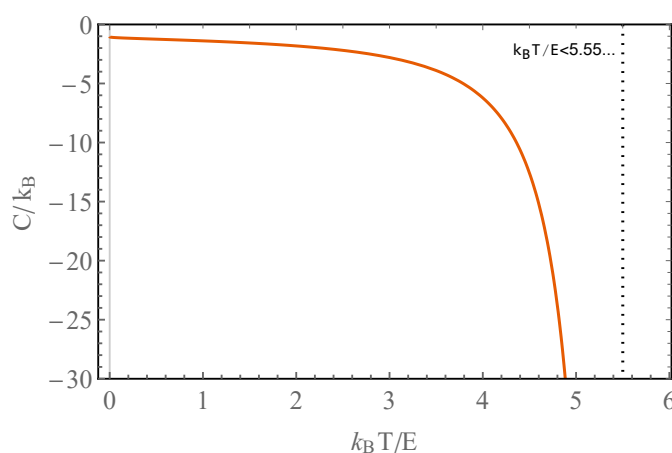


Figura 9.2: Calor específico  $C/k_B$  versus  $k_B T/E$ .

Por supuesto, la capacidad calorífica de la galaxia de  $N$  estrellas es  $C_N = NC$ .

## 9.5. Entropía

Podemos calcular la entropía *via* la ecuación

$$S = k_B(\ln Z_N + \beta \langle U \rangle_N) \quad (9.16)$$

En nuestro caso esto lleva a

$$\frac{S}{k_B N} = \ln(\pi^2 \beta G^2 M^2 m^3) + \ln[\ln(2\pi^2 \beta G^2 M^2 m^3) + 3C - 3] - \frac{2 - 2C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)}{3 - 3C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)} \quad (9.17)$$

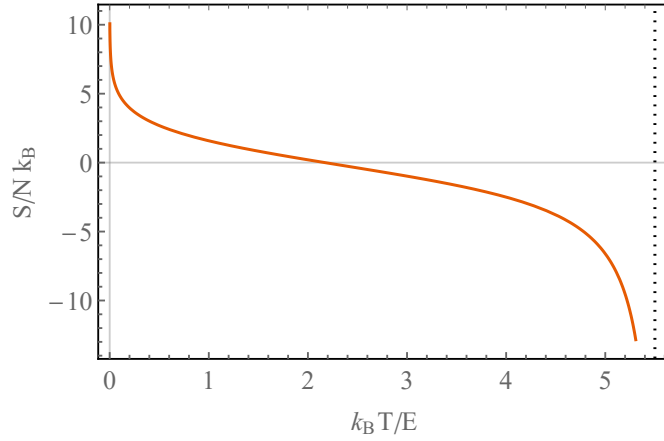


Figura 9.3:  $S/k_B N$  versus  $k_B T/E$

Esto viola la tercera ley de la termodinámica, de origen cuántico, debido a que la obtuvimos a través de un tratamiento clásico. De hecho, cuando  $T \rightarrow 0$ ,  $S \rightarrow \infty$ , como podemos ver en la figura (9.3). No considerar esta restricción como fundamental, como ilustra Miller [153]. En particular, la tercera ley no aplica a otros sistemas autogravitantes, como agujeros negros, donde existen versiones alternativas [154].

## 9.6. Catástrofe Gravitérmica

Vimos que un sistema con calor específico negativo en contacto con un reservorio térmico tendrá fluctuaciones que agregan energía y producen que la temperatura baje transitoriamente, causando un flujo de calor que lo conducirá a temperaturas aún menores. Por lo que sistemas con calor específico negativo no pueden llegar al equilibrio térmico. Este es la llamada “catástrofe gravitérmica”. Este escenario no parece ocurrir en nuestro modelo si imaginamos una galaxia de capacidad calorífica  $N_g C_g$ , donde  $C_g$  está dado por la ecuación

(9.15). Un halo compuesto por un gas ideal 2D, con capacidad calorífica  $N_h C_h = N_h k_B$ , se encuentra rodeándolo. Supongamos que ambos sistemas están en equilibrio a temperatura  $T_0$ . Si una cantidad de calor  $dQ$  debido a las fluctuaciones es transferida desde la galaxia al halo, entonces el primer sistema aumentará su temperatura de  $T_0$  a  $T_0 + dQ/|N_g C_g|$  mientras que el segundo aumentará a  $T_0 + dQ/N_h C_h$ . Estas nuevas temperaturas causarán un flujo inverso si y solo si  $|N_g C_g|^{-1} < (N_h C_h)^{-1}$ . Entonces, el sistema es estable si  $N_h C_h < N_g |C_g|$  [44]. Cuando  $N_g = N_h$ , el sistema es siempre estable, como podemos ver en la fig. (9.4), para todos los valores de temperaturas y masas involucradas.

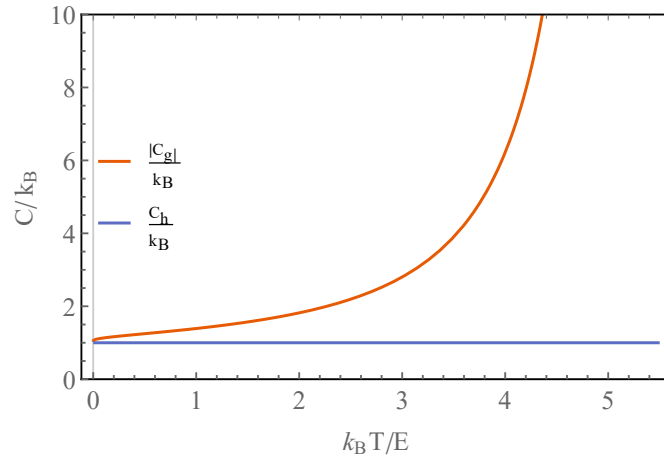


Figura 9.4: Calor específico de una galaxia y de un halo versus  $k_B T/E$ . Como se puede ver, el sistema es siempre estable, evitando la catástrofe gravotérmica.

La catástrofe gravotérmica es resuelta siempre que la galaxia tenga más constituyentes que el halo ( $N_h < N_g$ ), ya que la condición de estabilidad es

$$N_h k_B < -N_g k_B \beta < U > - \frac{N_g k_B (C - 1)}{[3 - 3C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)]^2} \quad (9.18)$$

$$\frac{N_h}{N_g} < \frac{2 - 2C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)}{3 - 3C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)} - \frac{C - 1}{[3 - 3C - \ln(2\pi^2 \beta G^2 m^3 M^2)]^2} \quad (9.19)$$

La expresión de la derecha es siempre menor que 1, por lo que si  $N_h/N_g \leq 1$  la catástrofe gravotérmica es evitada para toda temperatura y masas.

Cuando  $N_h > N_g$  la catástrofe gravotérmica es evitada dependiendo de la relación (9.19) entre temperatura, masa del BH y masa de las estrellas.

## 9.7. Conclusiones

En este capítulo utilicé el proceso de DR para estudiar los polos en la función de partición y la energía media que aparecen en la estadística del problema de dos cuerpos

newtonianos. El análisis fue realizado en dos dimensiones. Como los capítulos previos mostraron, emerge una cota a la temperatura y calor específico negativo, característicos de sistemas autogravitantes. En este esfuerzo nos limitamos al problema de dos cuerpos, debido a que las divergencias ya emergen a ese nivel. Recordemos que la gravitación  $N$  cuerpos es una frontera en la investigación de la mecánica celeste. Nuestro procedimiento utiliza extensiones analíticas y regularización dimensional.

La contribución de este trabajo es proveer de una función de partición finita para el problema de dos cuerpos interactuando mediante gravitación en dos dimensiones. Esta puede ser aplicada directamente en un modelo simple de galaxia de disco con un agujero negro supermasivo en el centro. Resultados interesantes y coherentes son obtenidos:

- se encuentra una cota superior a la temperatura,
- el calor específico correspondiente es negativo,
- el límite del calor específico cuando la masa del agujero negro tiende a cero es  $-k_B$ , i.e., el calor específico de un gas ideal 2D autogravitatorio,
- la tercera ley de la termodinámica no se cumple, debido al tratamiento clásico, y
- la catástrofe gravotérmica puede ser evitada si se agrega un halo alrededor de la galaxia, cuyo número de constituyentes es menor o igual que el número de estrellas en la galaxia.

## Capítulo 10

# Una aproximación de primer orden a la teoría de Tsallis

*“I conceive the mind as a moving thing, and arguments as the motive forces driving it in one direction or the other.”*

John Craig, 1699

En este capítulo reveo la teoría de Tsallis apelando a una aproximación alrededor de  $q = 1$ . Investigo las aproximaciones de primer y segundo orden de A) la entropía de Tsallis  $S_q$  y B) las solución del proceso de MaxEnt de  $S_q$ , la función  $q$ -exponencial.

Este capítulo está organizado como sigue: luego de una introducción construyo una nueva entropía y la comparo con la de Tsallis. En la sección 3, muestro que la nueva entropía está libre de polos para un hamiltoniano cuadrático. En la sección 4, muestro que los datos medidos del  $q$ -tripleto en la capa de ozono se ajustan a la nueva formulación. Menciono la aproximación de segundo orden en la sección 5 y, finalmente, hago unas conclusiones.

### 10.1. Introducción

Mostraré aquí que las funciones obtenidas a partir de una aproximación de primer orden de la  $q$ -exponencial son soluciones al proceso de MaxEnt de una nueva entropía que proviene de una aproximación de primer orden de la entropía de Tsallis. Esta formulación está libre de los polos que, para un hamiltoniano clásico cuadrático, plagan la teoría de Tsallis, como vimos anteriormente. Un análisis relacionado ha sido realizado en el contexto de procesos estocásticos, obteniendo ruidos de Ornstein-Uhlenbeck efectivos al menor orden [155-162]. Además mostraré que nuestro tratamiento es compatible con los datos existentes de la capa de ozono [163-165].

En [123] fue demostrado que el paso de normalización que sigue a la detección de datos no permite una inferencia directa de la distribución de datos en exponenciales o gaussianas

por una transformación sistemática en  $q$ -exponenciales y  $q$ -gaussianas. El origen de que uno se encuentre tan seguido con  $q$ -exponenciales y  $q$ -gaussianas necesita de un análisis cuidadoso. Para un conjunto muy grande de datos recolectados, esta ocurrencia es una simple consecuencia de una etapa de normalización de los datos. Esto implica que el entorno de  $q = 1$  es extremadamente importante para la  $q$ -estadística, mereciendo especial atención.

Debemos mencionar también que en el enfoque de superestadística de Beck y Cohen [166], el parámetro  $q - 1$  es una medida de las fluctuaciones de temperatura en un sistema fuera del equilibrio pero en estado estacionario, por lo que pequeños valores de  $q - 1$  corresponden a distribuciones de temperatura con un ancho pequeño alrededor del valor medio.

## 10.2. Otra entropía

Luego del trabajo pionero de Tsallis [23], muchas nuevas entropías han sido propuestas en la literatura [167]. En este hilo, comenzamos nuestras consideraciones con referencia a una nueva entropía, que tiene algunas importantes ventajas frente a la de Tsallis que discutiremos luego. La nueva entropía emerge como resultado de una aproximación de primer orden (alrededor de  $q = 1$ ) de la función  $q$ -exponencial. Ya obtuvimos dicha aproximación en el capítulo 3, y es:

$$[1 + (1 - q)\beta U]^{\frac{1}{q-1}} \simeq \left[1 + \frac{(1 - q)}{2}\beta^2 U^2\right] e^{-\beta U} \quad (10.1)$$

La distribución de probabilidad correspondiente es ahora, en vez de una  $q$ -exponencial, la siguiente:

$$\rho = \frac{\left[1 + \frac{(1-q)}{2}\beta^2 U^2\right] e^{-\beta U}}{Z} \quad (10.2)$$

Con

$$Z = \int \left[1 + \frac{(1 - q)}{2}\beta^2 U^2\right] e^{-\beta U} dU \quad (10.3)$$

Construimos ahora la aproximación de primer orden a la entropía de Tsallis:

$$S_q = \frac{1}{1 - q} \left(1 - \int \rho^q dU\right) \simeq - \int \rho \ln \rho \left[1 + \frac{(q - 1)}{2} \ln \rho\right] dU \quad (10.4)$$

Mostraré en lo que sigue que la ecuación (10.2) surge de optimizar (10.4). El problema variacional involucra los multiplicadores de Lagrange:

$$L_{S_q}(\rho) = - \int \rho \ln \rho \left[1 + \frac{(q - 1)}{2} \ln \rho\right] dU + \lambda_1 \left(\int \rho U dU - \langle U \rangle\right) + \lambda_2 \left(\int \rho dU - 1\right) \quad (10.5)$$



Cuyo incremento es

$$L_{S_q}(\rho + h) = - \int (\rho + h) \ln(\rho + h) \left[ 1 + \frac{(q-1)}{2} \ln(\rho + h) \right] dU +$$

$$\lambda_1 \left( \int (\rho + h) U dU - \langle U \rangle \right) + \lambda_2 \left( \int (\rho + h) dU - 1 \right) \quad (10.6)$$

Luego

$$L_{S_q}(\rho + h) - L_{S_q}(\rho) = - \int (\rho + h) \ln(\rho + h) \left[ 1 + \frac{(q-1)}{2} \ln(\rho + h) \right] dU +$$

$$\int \rho \ln \rho \left[ 1 + \frac{(q-1)}{2} \ln \rho \right] dU + \lambda_1 \int U h dU + \lambda_2 \int h dU \quad (10.7)$$

O

$$L_{S_q}(\rho + h) - L_{S_q}(\rho) = - \int \left[ 1 + \ln \rho + \left( \frac{q-1}{2} \right) (2 \ln \rho + \ln^2 \rho) - \lambda_1 - \lambda_2 \right] h dU$$

$$- \int \left[ \frac{1}{2\rho} + \left( \frac{q-1}{2} \right) \left( \frac{1 + \ln \rho}{\rho} \right) \right] h^2 dU \quad (10.8)$$

La última relación lleva a la distribución  $\rho$

$$1 + \ln \rho + \left( \frac{q-1}{2} \right) (2 \ln \rho + \ln^2 \rho) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (10.9)$$

$$- \int \left[ \frac{1}{\rho} + (q-1) \left( \frac{1 + \ln \rho}{\rho} \right) \right] h^2 dU \leq C \|h\|^2 \quad (10.10)$$

Con  $C < 0$  una constante. Para más detalles ver [168, 169]. Reemplazando la ecuación (10.2) en (10.9) se verifica que  $\rho$  es una solución a (10.9), con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dados por

$$\lambda_1 = -\beta[q - (q-1) \ln Z] \quad (10.11)$$

$$\lambda_2 = 1 - q \ln Z + \left( \frac{q-1}{2} \right) \ln^2 Z \quad (10.12)$$

Por supuesto, la ecuación (10.10) debería ser verificada por un máximo.

Esto podría sugerir que la entropía (10.4) no es sólo una aproximación sino una nueva entropía termodinámica legítima, ya que cumple que con la estructura de MaxEnt.

### 10.2.1. Comparación entre las soluciones exactas y aproximadas

Las figuras (10.1), (10.2), (10.3) y (10.4) corresponden a los módulos de las relaciones,  $R$ , entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt, miembros derecho e izquierdo de la ecuación (10.1), respectivamente. El eje horizontal está en metros. Por simplicidad tomamos  $U = x^2$  y  $\beta = 1$ . El acuerdo es excelente. De hecho, es excelente para distancias extremadamente grandes, comparado con fenómenos atómicos, por ejemplo.

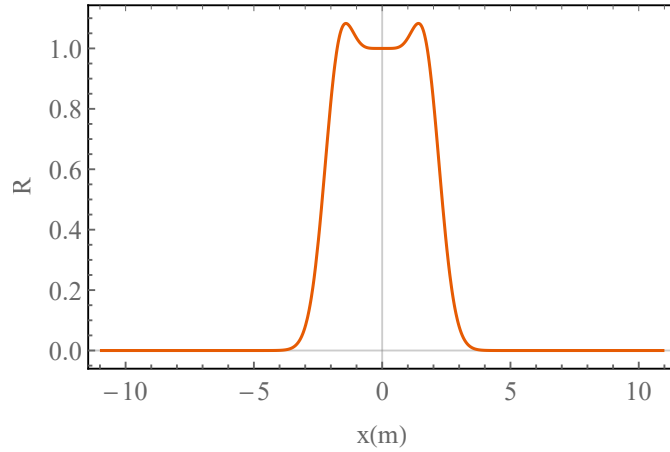


Figura 10.1: Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,5$

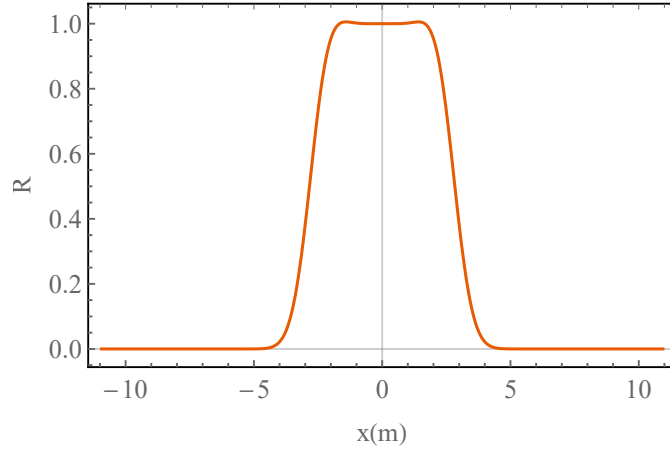


Figura 10.2: Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,1$

### 10.3. Hamiltonianos cuadráticos

En la referencia [65] se encuentra la función de partición y la energía media asociadas a la entropía de Tsallis, cuyos resultados se muestran en la sección 2.4.6. Vimos que estas expresiones presentan polos en ciertos valores del eje  $q$ . En contraposición, mostraré aquí que la alternativa de la nueva entropía está libre de polos.

La nueva función de partición para el hamiltoniano cuadrático es

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty U^{\nu-1} \left[ 1 + \frac{(q-1)}{2} \beta^2 U^2 \right] e^{-\beta U} dU \quad (10.13)$$

Y, evaluando la integral,

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\beta^\nu} \left[ 1 + \frac{(q-1)\nu(\nu+1)}{2} \right] \quad (10.14)$$

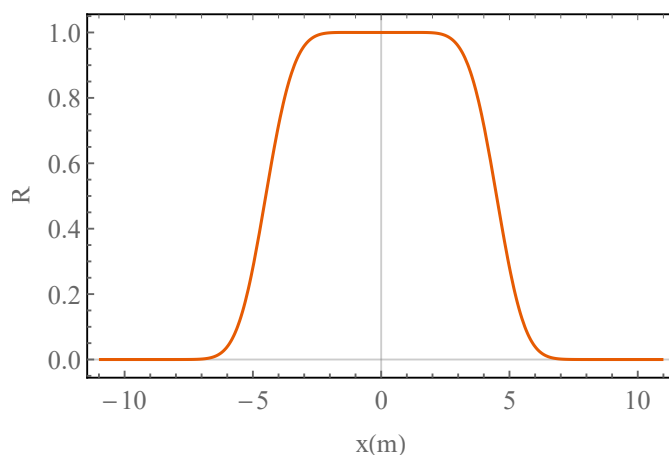


Figura 10.3: Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,01$

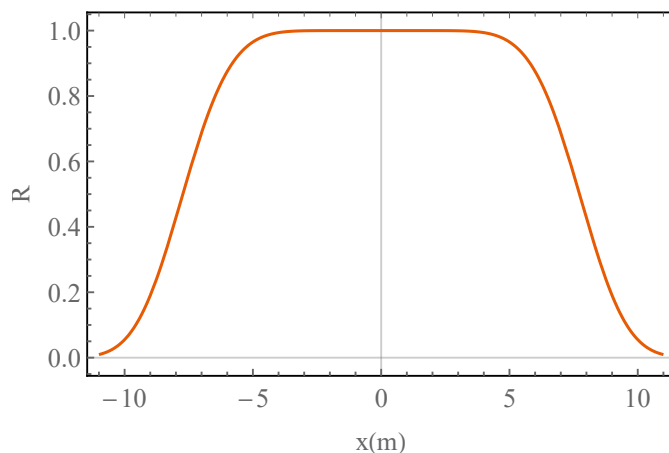


Figura 10.4: Relación entre las soluciones aproximadas y exactas al proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,001$

No se detectan polos! Para  $q = 1$  se reobtiene la función de partición de Boltzmann-Gibbs (BG). Para la energía media tenemos

$$\langle U \rangle = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)Z} \int_0^\infty U^\nu \left[ 1 + \frac{(q-1)}{2} \beta^2 U^2 \right] e^{-\beta U} dU \quad (10.15)$$

Luego de integrar

$$\langle U \rangle = \frac{\nu \pi^\nu}{\beta^{\nu+1} Z} \left[ 1 + \frac{(q-1)}{2} (\nu+1)(\nu+2) \right] \quad (10.16)$$

Nuevamente, sin polos. Usando ahora la ecuación (10.14) obtengo

$$\langle U \rangle = \frac{\nu}{\beta} [1 + (q-1)(\nu+1)] \quad (10.17)$$

Coincide con el resultado de BG si  $q = 1$ . Para calcular la entropía debemos desarrollar en primer orden  $Z^{1-q}$  y tenemos

$$Z^{1-q} = 1 + (q-1)\nu \ln\left(\frac{\beta}{\pi}\right) + \frac{(q-1)^2}{2} \left[ \nu^2 \ln^2\left(\frac{\beta}{\pi}\right) - \nu(\nu+1) \right] \quad (10.18)$$

Que junto con la ecuación (2.55) lleva a

$$S_q = \nu \left[ 1 + \ln\left(\frac{\beta}{\pi}\right) \right] + (q-1) \left[ \nu+1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu \ln\left(\frac{\beta}{\pi}\right) - \frac{\nu^2}{2} \ln^2\left(\frac{\beta}{\pi}\right) \right] \quad (10.19)$$

Que para  $q = 1$  es el resultado de BG.

Podemos calcular el calor específico, por ejemplo, para lo cual necesitamos la derivada de la ec. (10.17) con respecto a la temperatura  $T$ , que da

$$C = \nu k_B [1 + (q-1)(\nu+1)] \quad (10.20)$$

Con  $k_B$  la constante de Boltzmann. Para  $q = 1$  reobtenemos el resultado de BG. Las correcciones en la ecuación (10.20) pueden ser fácilmente chequeadas empíricamente.

## 10.4. La capa de ozono

El q-triplete de Tsallis [164] es posiblemente uno de los cuantificadores empíricos más espectaculares de la no extensividad. Los cuantificadores fueron estudiados en [165] con referencia a series de tiempo experimentales relacionadas con los valores de espesor diarios de la capa de ozono. Los datos pertinentes son expresados en unidades de Dobson y se extienden entre 1978 y 2005. Luego de evaluar los tres q-índices asociados, la no extensividad es claramente una característica de la capa de ozono.

El ozono estratosférico es encontrado principalmente dentro de una capa de  $\sim 15$ km a una altura de 15km. Hay una baja densidad de unas pocas moléculas de  $O_3$  por cada millón de moléculas de aire. El mecanismo asociado de las interacciones responsables de la deflexión de la radiación está dada en [163]. Un régimen estacionario prevalece, modulado por varios tipos de oscilaciones, que son 1) una oscilación anual debido a la orientación de la radiación entrante, 2) otra oscilación de un período de alrededor de 2 años originada en las corrientes de aire en la estratósfera, y 3) una variación secular. En [165] los autores concentran esfuerzos en dos series temporales: A)  $\{Z_n\}$  valores de espesor de la capa de ozono y B) su variabilidad diaria  $\{\Delta Z_n\}$ .

La teoría de Tsallis predice tres valores importantes y diferentes de  $q$  [164]:

- i) Un valor relacionado a estados meta-estables, que llamamos  $q \equiv q_{stat}$ .
- ii) Los estados mencionados que muestran sensibilidad a las condiciones iniciales (el así llamado caos débil). Estamos hablando de  $q_{sens}$ .

- iii) Cantidades macroscópicas meta-estables que tienen una relajación q-exponencial con  $q = q_{rel}$ .

Entonces, un estado meta-estable está caracterizado por un triplete de valores de  $q$ :  $(q_{stat}, q_{sens}, q_{rel}) \neq (1, 1, 1)$ , donde  $q_{stat} > 1$ ,  $q_{sen} < 1$ , y  $q_{rel} > 1$  [164].

Como en el caso de la BGStatMech los tres valores de  $q$  convergen a  $q = 1$ , con el presente tratamiento esperaríamos una convergencia de los tres valores del q-triplete a un valor cercano a uno. Los resultados numéricos, que siguen la metodología de cálculo de [165], no falsean esa convergencia. Aquí evaluamos  $q_{stat}$  y  $q_{rel}$  ( $q_{sen}$  implica un cálculo mucho más complicado). Los datos usados corresponden a datos satelitales de la ciudad de Buenos Aires. Estos son valores diarios de  $Z_n$  obtenidos desde noviembre del '78 hasta mayo '93 y de julio '96 hasta diciembre '05.

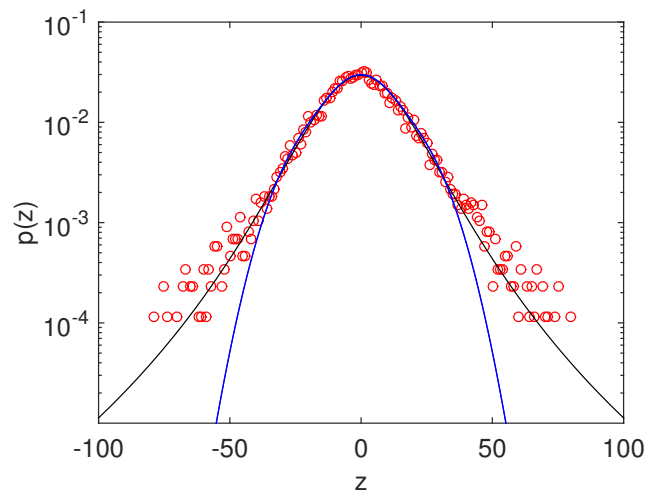


Figura 10.5: Ajuste de datos de la capa de ozono con una q-gaussiana y con la nueva PDF. Los círculos rojos corresponden a los datos del histograma  $\rho(Z)$  vs.  $Z$ ; la línea negra, el ajuste con una q-gaussiana; curva azul: mejor ajuste con una aproximación de primer orden de la q-gaussiana.

Para calcular  $q_{stat}$  ajustamos el histograma (10.5) con una q-gaussiana. El valor de  $q$  para el mejor ajuste es de  $q_{stat} = 1,32$ . En el caso de nuestro tratamiento de primer orden, debemos usar una “q-gaussiana de primer orden” apropiadamente normalizada

$$\rho(Z) = \left[1 + \frac{(1-q)}{2} a^2 Z^4\right] e^{-aZ^2} \quad (10.21)$$

El valor  $q_{stat}$  es obtenido del histograma (q-gaussiana o la PDF (10.2)), asociado a las variaciones diarias del espesor de la capa de ozono  $\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$ . Este rango de  $\Delta Z$  es subdividido en clases de ancho  $\delta z$  (en unidades de Dobson (UD)), centradas en  $z_i$ , por lo que podemos evaluar con que frecuencia los valores de  $\Delta Z$  caen en cada clase. Elegimos como ancho de clase  $\delta z = 5UD$ . El histograma resultante, apropiadamente normalizado,

da la PDF estacionaria  $\{\rho(z_i)\}_{i=1}^N$ . Por supuesto,  $\rho_i$  es la probabilidad de que el valor  $\Delta Z$  caigan en la clase  $i$ -ésima, centrada en  $z_i$ , con  $N$  el número de clases [165].

La figura (10.5) ilustra la situación de  $q_{stat}$ . Los círculos rojos son los datos del histograma. La curva negra muestra el mejor ajuste para una q-gaussiana y la azul para la PDF (10.2).

El valor de  $q_{rel}$  es determinado por el coeficiente de autocorrelación temporal

$$C(\tau) = \frac{\sum_n Z_{n+\tau} \cdot Z_n}{\sum_n Z_n^2} \quad (10.22)$$

La curva de correlación en la figura (10.6) para calcular  $q_{rel}$  ajusta con  $q_{rel} = 1,888$  en el caso de la q-exponencial. En la aproximación de primer orden usamos:

$$\rho(Z) = [1 + \frac{(1-q)}{2} \beta^2 Z^2] e^{-\beta Z} \quad (10.23)$$

De nuevo, normalizada adecuadamente.

Para un proceso de BG usual esta correlación debería caer exponencialmente, que no es el caso de los datos. En la figura (10.6) los círculos negros corresponden a la correlación para distintos  $\tau$ . La curva negra es el mejor ajuste para una q-exponencial y la curva roja lo mismo para el caso de la aproximación.

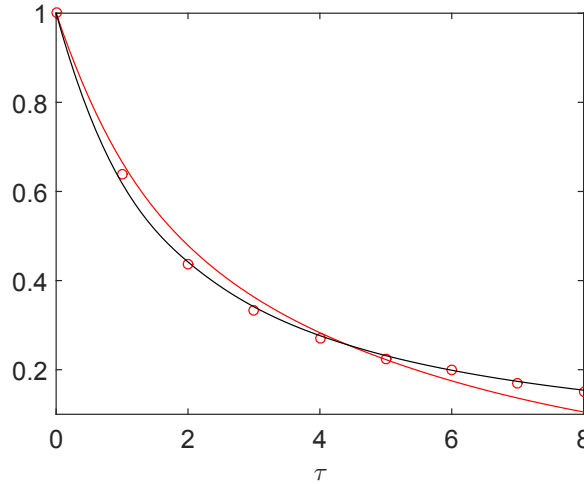


Figura 10.6:  $\ln_q$  del coeficiente de autocorrelación  $C(\tau)$  vs. tiempo  $\tau$  (en días). La curva negra es el ajuste para una q-exponencial y la roja la aproximación.

Se obtiene que

1. La diferencia para la teoría de Tsallis:  $|q_{rel} - q_{stat}| = 0,57$
2. Para la aproximación:  $|q_{rel} - q_{stat}| = 0,08$ , mucho menor que la anterior.

## 10.5. La aproximación de segundo orden

Podemos, por supuesto, pensar en la aproximación de segundo orden en  $q$ . Para la  $q$ -exponencial se tiene

$$[1 + (1 - q)\beta U]^{\frac{1}{q-1}} \simeq \left[ 1 + \frac{(1 - q)}{2}\beta^2 U^2 - (1 - q)^2 \left( \frac{\beta^3 U^3}{3} - \frac{\beta^4 U^4}{4} \right) \right] e^{-\beta U} \quad (10.24)$$

Mientras que la distribución de probabilidad es

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \frac{(1 - q)}{2}\beta^2 U^2 - (1 - q)^2 \left( \frac{\beta^3 U^3}{3} - \frac{\beta^4 U^4}{4} \right) \right] e^{-\beta U}}{Z} \quad (10.25)$$

Con

$$Z = \int \left[ 1 + \frac{(1 - q)}{2}\beta^2 U^2 - (1 - q)^2 \left( \frac{\beta^3 U^3}{3} - \frac{\beta^4 U^4}{4} \right) \right] e^{-\beta U} dU \quad (10.26)$$

Finalmente, la entropía es

$$S_q = \frac{1}{1 - q} \left( 1 - \int \rho^q dU \right) \simeq - \int \rho \ln \rho \left[ 1 + \frac{(q - 1)}{2} \ln \rho + \frac{(q - 1)^2}{6} \ln^2(\rho) \right] dU \quad (10.27)$$

Apelando a MaxEnt para (10.27) fácilmente se puede comprobar que esta expresión de entropía también funciona. Por supuesto, los cálculos correspondientes serán más complicados.

### 10.5.1. Comparación con las soluciones exactas

Las figuras (10.7), (10.8), (10.9) y (10.10) corresponden a los módulos de las relaciones entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas. El eje horizontal está en metros. Por simplicidad tomamos  $U = x^2$  y  $\beta = 1$ . El acuerdo es excelente para  $1 - q \leq 0,1$ . De nuevo, es excelente para distancias grandes comparadas con los fenómenos atómicos.

## 10.6. Conclusiones

En este capítulo investigué las aproximaciones de primer orden de 1) la entropía de Tsallis  $S_q$  y 2) las soluciones al MaxEnt de  $S_q$ . Mostré que las funciones que emergen de la aproximación de la  $q$ -exponencial son justamente las soluciones al tratamiento de MaxEnt de la entropía aproximada. Esto sugiere que la nueva entropía es un funcional entrópico legítimo. Lo mismo sucede con la aproximación de segundo orden.

El tratamiento presentado está libre de los polos que, para hamiltonianos cuadráticos, emergen en la teoría de Tsallis. Esto fue demostrado en [65], para ambos: la función de

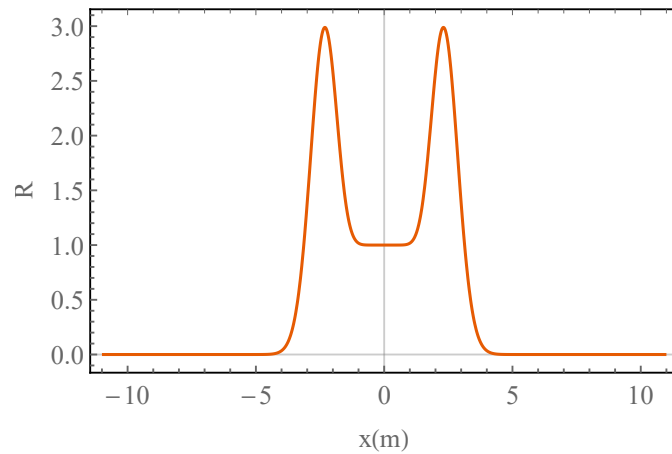


Figura 10.7: Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,5$

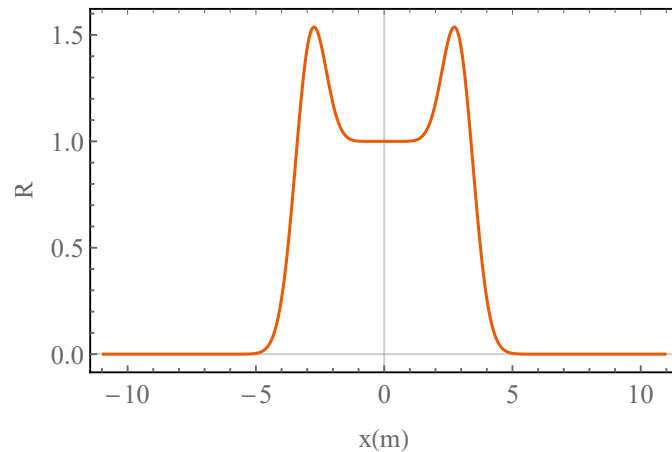


Figura 10.8: Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,1$

partición y la energía media. Los polos desaparecen para cualquier orden perturbativo, un resultado sorprendente.

También mostré que nuestro tratamiento es compatible con los datos existentes de la capa de ozono. El  $q$ -tripleto asociado es quizás el cuantificador más espectacular de la no extensividad. Estos fueron estudiados en [165] para la entropía de Tsallis, y aquí presenté el mismo análisis para la nueva entropía.

Finalmente, enfatizo que la idea principal del presente capítulo radica en la aproximación de la ecuación (10.1). Esto conduce a una corrección cuadrática en la variable  $U$ . La corrección cuadrática ha sido discutida también en [166], donde se encuentra que los resultados para  $q - 1$  pequeños son universales, estos es, aplicables a muchas situaciones físicas. Lo realmente nuevo aquí es la propuesta de que esos valores chicos de  $q - 1$  pueden conducir a un nuevo formalismo. La aproximación de la ecuación (10.1) puede ser



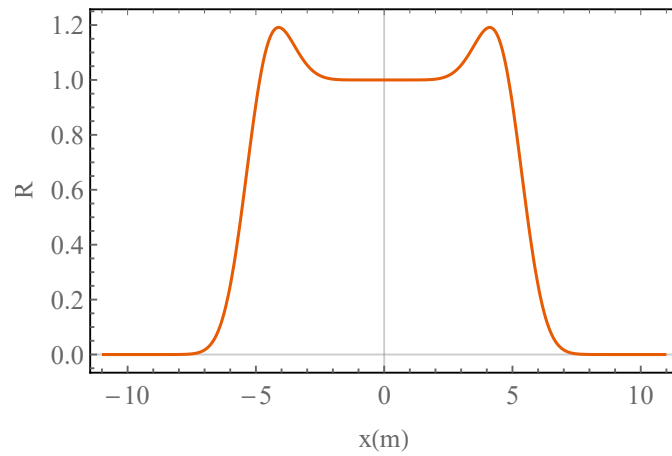


Figura 10.9: Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,01$

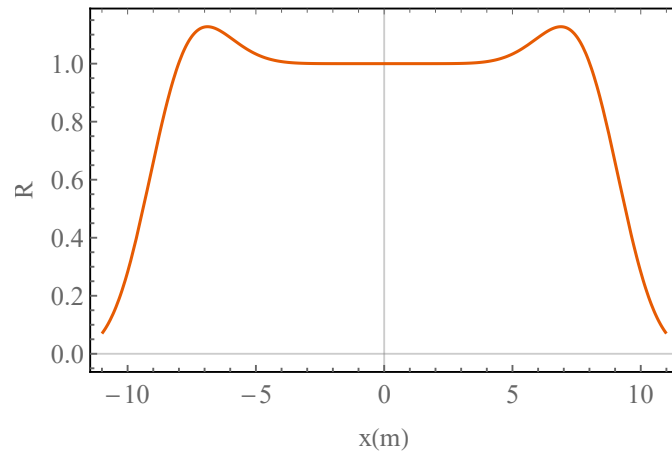


Figura 10.10: Relación entre la aproximación de segundo orden y las soluciones exactas del proceso de MaxEnt para  $1 - q = 0,001$

mejorada a ordenes perturbativos mayores sin afectar las últimas conclusiones.



# Capítulo 11

## Conclusiones

Durante esta tesis analicé diferentes aspectos de la entropía no aditiva  $S_q$  aplicada a ecuaciones cuánticas no lineales, mecánica estadística de sistemas no extensivos, como los autogravitantes, y fuerzas entrópicas. Estudié también los polos de la teoría y propuse distintas soluciones. Mostré que usando esta teoría algunos fenómenos y propiedades novedosas pueden ser derivados. Propuse diversos enfoques para resolver las divergencias y polos de la teoría, que podemos resumir en: regularización dimensional y tratamientos perturbativos. Resumamos algunas de las principales conclusiones.

Las ecuaciones no lineales de q-Schrödinger y q-Klein-Gordon son manifestaciones de fenómenos de muy alta energía, como se verifica en experimentos del LHC. Esto sucede para valores de  $q$  cercanos a la unidad. Esto hace difícil discernir si uno está tratando con las soluciones a la ecuación ordinaria de Schrödinger (para la que las soluciones de partícula libre son exponenciales y  $q = 1$ ) o con las soluciones de su generalización no lineal NRT, para la que las soluciones son q-exponenciales. Por eso desarrollé un tratamiento perturbativo de primer orden de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon NRT alrededor de  $q \sim 1$ . He mostrado que, para valores pequeños de  $q - 1$ , la aproximación es bastante buena. También desarrollé el análisis perturbativo de la ecuación de q-Schrödinger de variables separadas y de un paquete de onda q-Gaussiano.

Los datos empíricos indican que un comportamiento de ley de potencia en las distribuciones de probabilidad de magnitudes observadas es bastante frecuente en la naturaleza. Una de las razones para éste fenómeno es la normalización de la medida en el detector. Los procedimientos que se realizan transforman la entrada gaussiana en una q-gaussiana. Entonces, es interesante desarrollar la función q-gaussiana en primer orden alrededor de  $q \sim 1$  también. Mostré que esa aproximación es muy buena para un dado rango de distancias.

Conectado a las conclusiones previas, la evidencia experimental en aceleradores de partículas señala que a altas energías las distribuciones de los momentos transversos son de tipo Tsallis. Esto motiva a preguntarse por una generalización de estados Gamow, los estados q-Gamow, para los que la distribución asociada podría ser fácilmente verificada en energías intermedias, para las cuales hay actualmente aceleradores. Tal objetivo es

alcanzado en el capítulo 4. Las consideraciones realizadas se basan en el hecho de que, empíricamente, uno no detecta gaussianas puras, sino  $q$ -gaussianas, con  $q$  muy cercano a uno. Esto sugiere mirar especialmente estados  $q$ -Gamow en el entorno de  $q = 1$ .

En consecuencia, he estudiado en esta tesis, para una región en el entorno de  $q = 1$ , las propiedades principales de los estados  $q$ -Gamow, que son solución a la ecuación no lineal de Schrödinger NRT. Calculé su norma, el valor medio de energía y las distribuciones  $q$ -Breit-Wigner asociadas. En todos los casos, los resultados tienden a los usuales cuando el parámetro entrópico obedece  $q \rightarrow 1$ . El resultado principal es que la distribución de probabilidad de  $q$ -Breit-Wigner difiere de la usual de acuerdo a un factor que puede ser verificado, luego de un análisis de errores, a partir de datos de un acelerador.

En el capítulo 5, describí la fenomenología clásica de la  $q$ -entropía calculada sobre curvas en el espacio de fases,  $\Gamma$ , de la que se desprenden interesantes propiedades, similares a confinamiento y *hard-cores*. Deseo enfatizar que los efectos de la fuerza entrópica que describo en ese capítulo no son el confinamiento y la libertad asintótica que se conocen en física de altas energías. Las curvas en el espacio de fases llevan, sorpresivamente, a un mecanismo clásico simple que es capaz de imitar algunos de los fenómenos nombrados. El interés en las fuerzas entrópicas se está incrementando debido al trabajo de Verlinde en el que argumenta que la gravedad también puede ser entendida en término de fuerzas entrópicas. Utilicé la entropía de Tsallis de camino para demostrar que el confinamiento también puede emerger clásicamente de fuerzas entrópicas, apelando a un hamiltoniano cuadrático simple. Muestro entonces que algunos aspectos de otras fuerzas fundamentales podrían ser imitados con fuerzas entrópicas.

Una faceta principal de esta fenomenología es la existencia de efectos no extensivos. A pesar de que los cálculos son discutidos en una curva dada  $\Gamma$ , en general los efectos no dependen de la curva específica elegida. La  $q$ -fenomenología parece ser razonable porque el teorema de equipartición se cumple. Mostré que la fuerza  $q$ -entrópica diverge en pequeñas áreas específicas del espacio de fases (efecto de *hard-core*), anulándose fuera de esas áreas (confinamiento más libertad asintótica). La magnitud de esas áreas es dependiente de  $q$ . La “dureza” del *hard-core* también depende de  $q$ . Sumar la fuerza del pozo armónico no modifica esta fenomenología. Mientras que la fuerza entrópica para el HO en la BGS-tatMech es siempre repulsiva, en la StatMech de Tsallis puede ser tanto repulsiva como atractiva. Además, la fuerza entrópica crece con  $q$ , un resultado interesante. Cuanto más no aditivo sea el contexto, más fuerte es la fuerza entrópica. Esta fuerza aumenta con la temperatura, lo cual constituye un resultado razonable.

Tal esfuerzo es extendido en el capítulo 6 a curvas  $n$  dimensional, dada la relevancia de la dimensionalidad en gravitación. Las expresiones para todas las cantidades ahí discutidas son generalizaciones de aquellas encontradas en [22] y [3] para los límites  $q \rightarrow 1$  y  $n = 1$ , respectivamente. Esto reconfirma que son correctas. El comportamiento es el mismo en todas las dimensiones, que incluye *hard-core*, confinamiento y libertad asintótica. Esto

debería motivar esfuerzos dirigidos en encontrar estas propiedades en el laboratorio, en arreglos más generales que los de la física de altas energías. Es interesante que a pesar de que la dimensionalidad es importante para la gravedad, en lo que respecta a esta fuerza entrópica, cualitativamente las propiedades estadísticas son intrínsecas a la curva, sin importar en que espacio está embebida. Esto se puede entender si consideramos que el desorden crece con  $n$ , al igual que el número de configuraciones espaciales de cualquier tipo y por lo tanto la variación de entropía sobre una curva también.

En el capítulo 7, utilizando un procedimiento elemental de regularización dimensional, estudié los polos en la función de partición y la energía media que aparecen para valores discretos y específicos en la estadística de Tsallis del problema de dos cuerpos en gravedad newtoniana. Estudié el comportamiento termodinámico en los polos y encontré resultados interesantes. El análisis fue hecho en particular en 3 dimensiones. Entre las características de los polos, enfatizo que aparecen tanto en la función de partición como en la energía media, para  $q \neq 1$ . Mostré que hay una cota mínima para la temperatura en los polos y que el calor específico es negativo, algo típico de los sistemas autogravitantes. Los polos son una propiedad del cuantificador entrópico, y del hamiltoniano.

El caso  $q = 1$  no puede ser analizado con esa formulación, es decir, no es válida para él. Por eso el caso  $q = 1$  fue discutido independientemente en el capítulo 8. Se suele creer que la distribución de probabilidad clásica de BG para el problema de dos cuerpos gravitatorios no puede llevar a resultados finitos porque la función de partición diverge. Sin embargo, mostré que teniendo en cuenta la posibilidad de usar una extensión analítica y regularización dimensional se puede tratar las divergencias y obtener resultados finitos. Este procedimiento me llevó a conseguir la primera expresión para la función de partición de un sistema de dos cuerpos autogravitacionales. Estos sistemas tienen muchos otros aspectos, que no he discutido aquí, pero creo que mi contribución es significativa en este contexto.

Un punto especial a ser remarcado es el siguiente. El problema de dos cuerpos gravitacionales en el tratamiento de BG es más complicado que su contraparte en la teoría no extensiva de Tsallis, ya que mientras el último sólo requiere regularización dimensional, el primero además necesita una extensión analítica. Se puede conjeturar que el rol del parámetro de extensividad  $q$  es indicar la cantidad de energía involucrada en el proceso, como lo hace en QFT. Cuanto más grande es el valor de  $q$ , más grande sería la energía del sistema. Es decir que para las energías usuales la estadística de BG sería suficiente para tratar el sistema, pero a energías mayores uno debería utilizar la estadística de Tsallis.

En el capítulo 9 utilicé el proceso de DR para estudiar los polos en la función de partición y la energía media que en dos dimensiones. Al igual que en los capítulos previos, emerge una cota a la temperatura y calor específico negativo, característicos de sistemas autogravitantes. La contribución de ese capítulo es proveer de una función de partición finita para el problema de dos cuerpos interactuando mediante gravitación en dos dimen-

siones, la cual puede ser aplicada directamente en un modelo simple de galaxia de disco con un agujero negro supermasivo en el centro. Se obtienen los siguientes resultados: i- se encuentra una cota superior a la temperatura, ii- el calor específico correspondiente es negativo, iii- el límite del calor específico cuando la masa del agujero negro tiende a cero es  $-k_B$ , i.e., el calor específico de un gas ideal 2D autogravitatorio, iv- la tercera ley de la termodinámica no se cumple, debido al tratamiento clásico, v- y la catástrofe gravotérmica puede ser evitada si se agrega un halo alrededor de la galaxia, cuyo número de constituyentes es menor o igual que el número de estrellas en la galaxia.

En el capítulo 10 investigué aproximaciones de primer y segundo orden a 1) la entropía de Tsallis  $S_q$  y 2) la solución al proceso de MaxEnt de  $S_q$ . Mostré que las funciones que surgen del tratamiento de MaxEnt son precisamente las soluciones del MaxEnt de la entropía aproximada. Esto señala a la entropía aproximada como un funcional entrópico legítimo. Lo mismo sucede si uno realiza la aproximación de segundo orden. El presente tratamiento con la nueva entropía es libre de los polos que, para el hamiltoniano cuadrático, emergen en la NESTatMech. Los polos desaparecen a cualquier orden de perturbación, lo cual es un resultado sorprendente. Vimos también que nuestro tratamiento es compatible con datos existentes de la capa de ozono. El  $q$ -tripleto asociado de Tsallis es quizás uno de los cuantificadores más espectaculares de la no extensividad y mostramos que la nueva  $q$ -entropía puede acomodar el fenómeno del  $q$ -tripleto de manera bastante satisfactoria.

**Parte III**

**Apéndices**





# Apéndice A

## Funciones importantes e integrales útiles

### A.1. Funciones Gamma y Beta

La **función Gamma** aparece a lo largo de toda esta tesis y es esencial para ella. Está definida como la solución a la integral de Euler de segunda especie:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (\text{A.1})$$

Es una función analítica con polos simples en los puntos  $z = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Extiende el concepto de factorial a números reales y complejos y aparece en varias PDF, debido a esto es muy usada en probabilidad, estadística y combinatoria. En las figuras (A.1) y (A.2) se puede ver la función Gamma representada en la línea real y el plano complejo, respectivamente.

Algunas propiedades importantes son: la fórmula de recurrencia,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.2})$$

la fórmula de reflexión de Euler

$$\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (\text{A.3})$$

y la fórmula de duplicación

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z) \quad (\text{A.4})$$

Para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (\text{A.5})$$

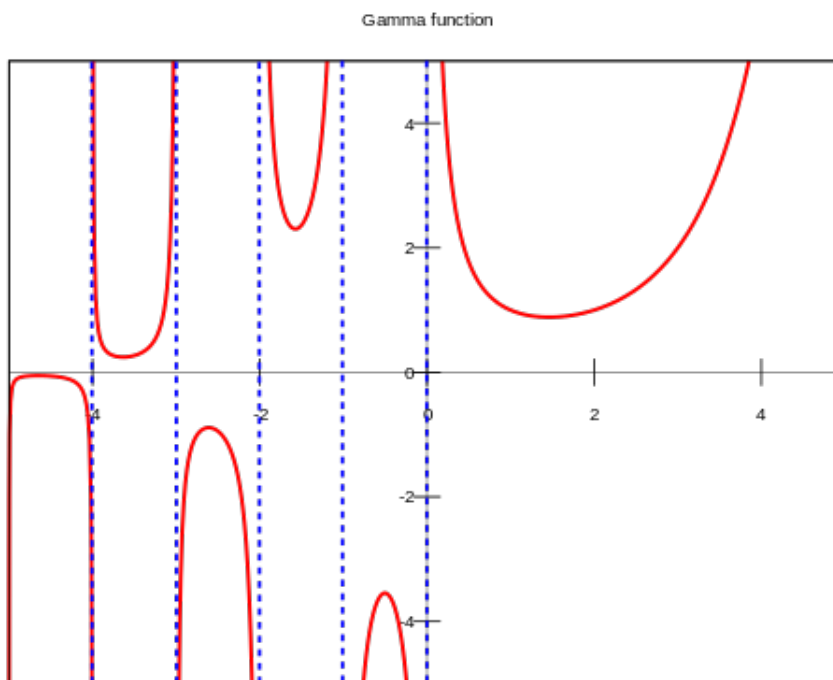


Figura A.1: Función Gamma en la línea real.

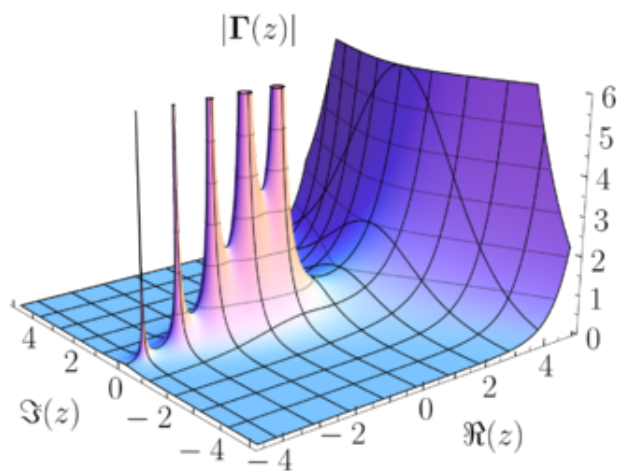


Figura A.2: Valor absoluto de la función Gamma en el plano complejo.

Su desarrollo en series de Laurent es fundamental cuando realizamos una regularización dimensional, y es:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - C + \left[ \frac{C^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} \right] z + \dots \quad (\text{A.6})$$

Donde  $\zeta$  es la función zeta de Riemman y  $C = 0,577\dots$  es la constante de Euler-Mascheroni.

La derivada de la función Gamma define la **función Digamma**:

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z)\psi_0(z) \quad (\text{A.7})$$

Que tiene la útil propiedad para números semi enteros [170]:

$$\psi_0\left(\frac{1}{2} \pm n\right) = -C - 2 \ln 2 + \sum_0^{n-1} \frac{1}{2k+1} \quad (\text{A.8})$$

La **función Beta** está estrechamente relacionada a la función Gamma y está definida como la solución a la integral de Euler de primera especie:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{Re}(x) > 0, \quad \text{Re}(y) > 0 \quad (\text{A.9})$$

Y puede ser expresada como:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x) \quad (\text{A.10})$$

## A.2. Funciones Hipergeométricas

Una **función hipergeométrica** es solución a la siguiente ecuación diferencial (las primas denotan derivada respecto a  $z$ ) [137]:

$$z(1-z)F''(\alpha, \beta; \gamma; z) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]F'(\alpha, \beta; \gamma; z) - \alpha\beta F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Puede ser representada por una serie de la forma

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma, 1}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1), 1, 2}z^2 + \dots \quad (\text{A.12})$$

Esta serie termina si  $\alpha$  o  $\beta$  es igual a un entero negativo o cero.

Para  $\gamma = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la función hipergeométrica está indeterminada si  $\alpha$  ni  $\beta$  son iguales a  $-m$  (donde  $m < n$  es un número natural). Si excluimos estos valores de los parámetros  $\alpha, \beta, \gamma$  una función hipergeométrica converge en el círculo unidad  $|z| < 1$ .

La función hipergeométrica puede ser representada por la integral

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha} dt \quad (\text{A.13})$$

Con  $\text{Re}(\gamma) > \text{Re}(\beta) > 0$ .

Una de sus propiedades, usada en la tesis, es:

$$F(-\alpha, \gamma; \gamma; -z) = (1+z)^\alpha \quad (\text{A.14})$$

### A.3. Funciones Hipergeométrica Confluente, de Whittaker y Cilindro Parabólico

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left( \frac{\lambda}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (\text{A.15})$$

Esta ecuación tiene las siguientes soluciones linealmente independientes para  $\mu \neq \pm 1/2, \pm 2/2, \pm 3/2, \dots$  [137]:

$$z^{\mu+1/2} e^{-z} \Phi(\mu - \lambda + 1/2, 2\mu + 1; z) \quad (\text{A.16})$$

$$z^{-\mu+1/2} e^{-z} \Phi(-\mu - \lambda + 1/2, -2\mu + 1; z) \quad (\text{A.17})$$

Donde  $\Phi(\alpha, \gamma; z)$  es la, así llamada, **función Hipergeométrica Confluente**, y puede ser representada por la serie:

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma, 1!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1), 2!} z^2 + \dots \quad (\text{A.18})$$

Notar que  $\Phi(0, \gamma; z) = \Phi(\alpha, \gamma; 0) = 1$ .

Si ahora hacemos el cambio de variables  $u = e^{-z/2} W$  en la ecuación (A.15), obtenemos:

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) W = 0 \quad (\text{A.19})$$

Esta ecuación tiene las siguientes soluciones linealmente independientes:

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} \Phi(\mu - \lambda + 1/2, 2\mu + 1; z) \quad (\text{A.20})$$

$$M_{\lambda, -\mu}(z) = z^{-\mu+1/2} e^{-z/2} \Phi(-\mu - \lambda + 1/2, -2\mu + 1; z) \quad (\text{A.21})$$

Para obtener soluciones que sean adecuadas también para  $\mu \neq \pm 1/2, \pm 2/2, \pm 3/2, \dots$ , introducimos la **función de Whittaker**

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2 - \mu - \lambda)} M_{\lambda, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - \lambda)} M_{\lambda, -\mu}(z) \quad (\text{A.22})$$

La cual, para  $2\mu$  entero, es solución a la ecuación (A.19). Para las funciones  $M_{\lambda, \mu}(z)$  y  $W_{\lambda, \mu}(z)$ ,  $z = 0$  es un punto de ramificación y  $z = \infty$  es un punto esencial singular. Por lo tanto, deberíamos examinar estas funciones sólo para  $|\arg(z)| < \pi$ . Las funciones  $W_{\lambda, \mu}(z)$  y  $W_{-\lambda, \mu}(-z)$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación (A.19).

La **función Cilindro Parabólico**  $D_p(z)$  está definida como:

$$D_p(z) = 2^{\frac{1}{4} + \frac{p}{2}} W_{\frac{1}{4} + \frac{p}{2}, -\frac{1}{4}} \left( \frac{z^2}{2} \right) z^{-1/2} \quad (\text{A.23})$$

Una forma equivalente es

$$D_p(z) = 2^{p/2} e^{-z^2/4} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-p}{2})} \Phi\left(\frac{-p}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}z}{\Gamma(\frac{-p}{2})} \Phi\left(\frac{1-p}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right\} \quad (\text{A.24})$$

Notar que

$$D_p(0) = 2^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)} \Phi(-p/2, 1/2; 0) = 2^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)} \quad (\text{A.25})$$

## A.4. Integrales útiles

Durante todo el texto deben ser resueltas muchas integrales. En esta sección presento las soluciones a las integrales que aparecen en la tesis y las referencias de las que fueron tomadas. Como la función q-exponencial es la potencia de un binomio, las siguientes ecuaciones son muy usadas en qStatMech, fueron tomadas de [137] y [170]:

$$\int_0^u x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} dx = u^{\mu+\nu-1} B(\mu, \nu), \quad \text{Re}(\mu) > 0, \text{Re}(\nu) > 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\int_u^\infty (x+\beta)^{-\nu} (x-u)^{\mu-1} dx = (u+\beta)^{\mu-\nu} B(\nu-\mu, \mu), \quad \text{Re}(\nu) > \text{Re}(\mu) > 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+\beta x)^\nu} dx = \beta^{-\mu} B(\mu, \nu-\mu), \quad \text{Re}(\nu) > \text{Re}(\mu) > 0 \text{ and } |\text{Arg}(\beta)| < \pi \quad (\text{A.28})$$

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} (b-x)^{\beta-1} dx = (b-a)^{\alpha+\beta+1} B(\alpha, \beta) \quad \alpha, \beta > 0 \quad (\text{A.29})$$

Para la estadística de Boltzmann-Gibbs son útiles:

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} (x+\gamma)^{\mu-1} e^{-\frac{\beta}{x}} dx = \beta^{\frac{\nu-1}{2}} \gamma^{\frac{\nu-1}{2}+\mu} \Gamma(1-\mu-\nu) e^{\frac{\beta}{2\gamma}} W_{\frac{\nu-1}{2}+\mu, -\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \quad (\text{A.30})$$

Con  $|\arg(\gamma)| < \pi$ ,  $\text{Re}(1-\mu-\nu) > 0$ , y donde  $W$  es una de las funciones de Whittaker. No se requiere que  $\text{Re}(\beta) > 0$ , como enfatizan Gradshteyn y Rizhik [137] (ver página 368, ec. (7), llamada ET II 234(13)a, donde se hace referencia a su vez al Proyecto Bateman de Caltech[171]). La última letra “a” indica que se ha llevado a cabo una extensión analítica con el fin de resolver la integral.

Y,

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \quad (\text{A.31})$$

Donde  $D$  es la función cilindro parabólico.



## Apéndice B

# Desarrollos de Taylor y derivadas de la función q-exponencial y funciones relacionadas

En este apéndice muestro cálculos correspondientes al capítulo 3, pero están presentados aquí para no complicar la lectura del mismo, ya que no agregan demasiados detalles significativos a la discusión de los resultados de éste.

### B.1. Desarrollo de primer orden de $\psi = e_q[i/\hbar(px - Et)]$

Como la función q-exponencial  $e_q$  está definida como

$$e_q = [1 + (1 - q)z]^{\frac{1}{1-q}}$$

Podemos escribir

$$\psi = e^{\frac{1}{1-q} \ln[1+(1-q)z]}$$

Luego

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{\partial \left\{ \frac{1}{1-q} \ln [1 + (1 - q)z] \right\}}{\partial q} \psi \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \left\{ \frac{1}{(1-q)^2} \ln [1 + (1 - q)z] - \frac{z}{(1-q)[1 + (1 - q)z]} \right\} \psi$$

Como  $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ , se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \left\{ \frac{1}{(1-q)^2} \left[ (1-q)z - \frac{(1-q)^2 z^2}{2} \right] - \frac{z}{(1-q)[1 + (1-q)z]} \right\} \psi$$

o

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \left\{ \frac{z}{(1-q)} - \frac{z}{(1-q)[1 + (1-q)z]} - \frac{z^2}{2} \right\} \psi \quad (\text{B.2})$$

Evaluemos  $\frac{\partial\psi}{\partial q}$  en  $q=1$ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \left\{ z \left\{ \frac{1}{(1-q)} - \frac{1}{(1-q)[1+(1-q)z]} \right\} - \frac{z^2}{2} \right\} \psi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \left\{ z \frac{[1+(1-q)z] - 1}{(1-q)[1+(1-q)z]} - \frac{z^2}{2} \right\} \psi$$

Cuando  $q \rightarrow 1$

$$\frac{[1+(1-q)z] - 1}{(1-q)[1+(1-q)z]} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Usando ahora la regla de L'Hopital

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial\psi}{\partial q} = \lim_{q \rightarrow 1} \left\{ \frac{z^2}{[1+(1-q)z] + (1-q)z} - \frac{z^2}{2} \right\} \psi$$

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial q} \right|_{q=1} = \left( z^2 - \frac{z^2}{2} \right) e^z$$

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{z^2}{2} e^z \quad (\text{B.3})$$

Luego, el desarrollo de Taylor de primer orden de  $\psi = e_q$  es

$$\psi \simeq \psi|_{q=1} + (q-1) \left. \frac{\partial\psi}{\partial q} \right|_{q=1}$$

o

$$\psi \simeq e^z + (q-1) \frac{z^2}{2} e^z \quad (\text{B.4})$$

## B.2. Segunda derivada con respecto a $x$

La primer derivada respecto a  $x$  del desarrollo de  $e_q$  ec. (B.4) es

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - \frac{(q-1)}{2\hbar^2} \left[ 2p(px-Et) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} + \frac{ip}{\hbar} (px-Et)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \right] \quad (\text{B.5})$$

Para la segunda derivada tenemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - \frac{(q-1)}{2\hbar^2} \left[ 2p^2 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} + \frac{4ip^2}{\hbar} (px-Et) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - \frac{p^2}{\hbar^2} (px-Et)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \right]$$

o

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - (q-1) \frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} - (q-1) \frac{2ip^2}{\hbar^3} (px-Et) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} + (q-1) \frac{p^2}{2\hbar^4} (px-Et)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$



**B.3. Segunda derivada de  $\phi = e_q(ikx - i\omega t)$  con respecto a  $t$** 

La derivada de primer orden de  $\phi = e_q(ikx - i\omega t)$  es

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)} \left[ 1 + \frac{(1-q)}{2}(kx - \omega t)^2 \right] - \omega e^{i(kx-\omega t)}(1-q)(kx - \omega t)$$

o

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)} \left[ 1 - (1-q)i(kx - \omega t) + \frac{(1-q)}{2}(kx - \omega t)^2 \right] \quad (\text{B.6})$$

La segunda derivada es entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = & -\omega^2 e^{i(kx-\omega t)} \left[ 1 - (1-q)i(kx - \omega t) + \frac{(1-q)}{2}(kx - \omega t)^2 \right] \\ & - i\omega e^{i(kx-\omega t)} [i\omega(1-q) - \omega(1-q)(kx - \omega t)] \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = & -\omega^2 e^{i(kx-\omega t)} [1 - (1-q)i(kx - \omega t) + \\ & \frac{(1-q)}{2}(kx - \omega t)^2 - (1-q) - (1-q)i(kx - \omega t)] \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{i(kx-\omega t)} \left[ q + 2i(q-1)(kx - \omega t) - \frac{(q-1)}{2}(kx - \omega t)^2 \right] \quad (\text{B.7})$$

**B.4. Desarrollo de primer orden de  $q\phi^{2q-1}$** 

La derivada de  $q\phi^{2q-1}$  con respecto a  $q$  es

$$\frac{\partial(q\phi^{2q-1})}{\partial q} = \phi^{2q-1} + q \frac{\partial\phi^{2q-1}}{\partial q} \quad (\text{B.8})$$

Podemos escribir entonces

$$\phi^{2q-1} = e^{(2q-1)\ln\phi}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi^{2q-1}}{\partial q} &= \left[ 2\ln\phi + \frac{(2q-1)}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial q} \right] \phi^{2q-1} \\ \frac{\partial\phi^{2q-1}}{\partial q} &= 2\phi^{2q-1}\ln\phi + (2q-1)\phi^{2q-2} \frac{\partial\phi}{\partial q} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Para la derivada de  $q\phi^{2q-1}$  tenemos

$$\frac{\partial(q\phi^{2q-1})}{\partial q} = \phi^{2q-1} + 2q\phi^{2q-1}\ln\phi + q(2q-1)\phi^{2q-2} \frac{\partial\phi}{\partial q} \quad (\text{B.10})$$

En  $q = 1$  obtenemos

$$\left. \frac{\partial(q\phi^{2q-1})}{\partial q} \right|_{q=1} = \phi|_{q=1} + 2\phi|_{q=1} \ln\phi|_{q=1} + \left. \frac{\partial\phi}{\partial q} \right|_{q=1}$$

Como sabemos que

- $\phi|_{q=1} = e^{i(kx-\omega t)}$
- $(\ln\phi)|_{q=1} = i(kx - \omega t)$
- $\left.\frac{\partial\phi}{\partial q}\right|_{q=1} = -\frac{(kx-\omega t)^2}{2}e^{i(kx-\omega t)}$

Entonces

$$\left.\frac{\partial(q\phi^{2q-1})}{\partial q}\right|_{q=1} = e^{i(kx-\omega t)} + 2i(kx - \omega t)e^{i(kx-\omega t)} - \frac{(kx - \omega t)^2}{2}e^{i(kx-\omega t)}$$

o

$$\left.\frac{\partial(q\phi^{2q-1})}{\partial q}\right|_{q=1} = e^{i(kx-\omega t)} \left[ 1 + 2i(kx - \omega t) - \frac{(kx - \omega t)^2}{2} \right] \quad (\text{B.11})$$

El desarrollo de primer orden de  $q\phi^{2q-1}$  es

$$q\phi^{2q-1} \simeq (q\phi^{2q-1})|_{q=1} + (q-1) \left.\frac{\partial(q\phi^{2q-1})}{\partial q}\right|_{q=1} \quad (\text{B.12})$$

Reemplazando la ecuación (B.11) en este desarrollo obtenemos

$$q\phi^{2q-1} \simeq e^{i(kx-\omega t)} + (q-1)e^{i(kx-\omega t)} \left[ 1 + 2i(kx - \omega t) - \frac{(kx - \omega t)^2}{2} \right]$$

o

$$q\phi^{2q-1} \simeq e^{i(kx-\omega t)} \left[ q + 2i(q-1)(kx - \omega t) - (q-1)\frac{(kx - \omega t)^2}{2} \right] \quad (\text{B.13})$$

## B.5. Desarrollo de primer orden de $f(t)$

Como  $f$  es

$$f(t) = \left[ 1 + \frac{i(1-q)}{\hbar} Et \right]^{\frac{1}{q-1}} = e^{\frac{1}{q-1} \ln \left[ 1 + \frac{i(1-q)}{\hbar} Et \right]}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q} &= \frac{\partial \left( \frac{1}{q-1} \ln \left[ 1 + \frac{i(1-q)}{\hbar} Et \right] \right)}{\partial q} f \\ &= \left\{ -\frac{1}{(q-1)^2} \ln \left[ 1 + \frac{i(1-q)}{\hbar} Et \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(q-1) \left[ 1 + \frac{i(1-q)}{\hbar} Et \right]} \left[ \frac{-iEt}{q\hbar} - \frac{(1-q)iEt}{q^2\hbar} \right] \right\} f. \end{aligned}$$

Y como  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ , tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \left\{ -\frac{1}{(q-1)^2} \left[ \frac{i(1-q)}{\hbar} Et + \frac{(1-q)^2}{2q^2} \frac{i}{\hbar} Et \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{(q-1) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} \left[ \frac{iEt}{q\hbar} + \frac{(1-q) iEt}{q^2 \hbar} \right] \Bigg\} f \quad (\text{B.14})$$

Para evaluar  $f$  en  $q = 1$  reordeno términos en (B.14) y obtengo

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \left\{ \frac{iEt}{q\hbar} \left[ -\frac{1}{(1-q)} + \frac{1}{(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} + \frac{1}{q \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} \right] - \frac{E^2 t^2}{\hbar^2} \frac{1}{2q^2} \right\} f$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \left\{ \frac{iEt}{q\hbar} \left[ \frac{1 - \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]}{(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} + \frac{1}{q \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} \right] - \frac{E^2 t^2}{\hbar^2} \frac{1}{2q^2} \right\} f \quad (\text{B.15})$$

Cuando  $q \rightarrow 1$

$$\frac{1 - \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]}{(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Usando nuevamente la regla de L'Hopital

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]}{(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right]} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{iEt}{q\hbar} + \frac{iEt(1-q)}{\hbar q^2}}{- \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{q} Et \right] + (1-q) \left[ \frac{iEt}{q\hbar} + \frac{iEt(1-q)}{\hbar q^2} \right]} = -\frac{iEt}{\hbar}$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{q=1} = \left\{ \frac{iEt}{\hbar} \left[ 1 - \frac{iEt}{\hbar} \right] - \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right\} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

o

$$\frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{q=1} = \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{\hbar^2} - \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{q=1} = \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (\text{B.16})$$

El desarrollo de Taylor de primer orden de  $f(t)$  es

$$f(t) \simeq f|_{q=1} + (q-1) \frac{\partial f}{\partial q} \Big|_{q=1}$$

Reemplazando aquí (B.16) tenemos

$$f(t) \simeq e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + (q-1) \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

o

$$f(t) \simeq e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ 1 + (q-1) \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right) \right] \quad (\text{B.17})$$

## B.6. Desarrollo de primer orden de $f^q$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para obtener (3.22) tenemos

$$\left. \frac{\partial f^q}{\partial q} \right|_{q=1} = f|_{q=1} \ln f|_{q=1} + \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=1} \quad (\text{B.18})$$

Sabemos que

- $f|_{q=1} = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$
- $(\ln f)|_{q=1} = -\frac{iEt}{\hbar}$
- $\left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=1} = \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

Entonces,

$$\left. \frac{\partial f^q}{\partial q} \right|_{q=1} = -\frac{iEt}{\hbar} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left( \frac{iEt}{\hbar} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right)$$

o

$$\left. \frac{\partial f^q}{\partial q} \right|_{q=1} = -\frac{iEt}{\hbar} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + \frac{iEt}{\hbar} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Luego,

$$\left. \frac{\partial f^q}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (\text{B.19})$$

El desarrollo de primer orden de  $f^q$  es

$$f^q \simeq f^q|_{q=1} + (q-1) \left. \frac{\partial f^q}{\partial q} \right|_{q=1}$$

Reemplazando aquí la ecuación (B.19)

$$f^q \simeq e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + (q-1) \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

o, finalmente,

$$f^q \simeq e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ 1 + (q-1) \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right] \quad (\text{B.20})$$

## B.7. Derivada de $f^q$ con respecto a $t$

La derivada de primer orden de  $f^q$  con respecto a  $t$  es

$$\frac{\partial f^q}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ 1 + (q-1) \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} \right] + e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \frac{(q-1)E^2 t}{\hbar^2}$$

o

$$\frac{\partial f^q}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ 1 + (q-1) \frac{E^2 t^2}{2\hbar^2} + (q-1) \frac{iEt}{\hbar} \right] \quad (\text{B.21})$$

## B.8. Desarrollo de $g(x)$

Podemos escribir

$$g(x) = \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]^{\frac{2}{1-q}} = e^{\frac{2}{1-q} \ln \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial q} &= \frac{\partial \left\{ \frac{2}{1-q} \ln \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right] \right\}}{\partial q} g \\ &= \left\{ \frac{2}{(1-q)^2} \ln \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} \left[ \frac{-ipx}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2(q+1)}} - \frac{ipx}{\hbar} \frac{(1-q)}{[2(q+1)]^{3/2}} \right] \right\} g. \end{aligned}$$

Como  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial q} &= \left\{ \frac{2}{(1-q)^2} \left[ \frac{ipx}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} + \frac{(1-q)^2 p^2 x^2}{2(q+1) 2\hbar^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} \left[ -\frac{ipx}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2(q+1)}} - \frac{(1-q)}{[2(q+1)]^{3/2}} \frac{ipx}{\hbar} \right] \right\} g \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

Para evaluar  $g$  en  $q = 1$  reordeno términos y obtengo

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial q} &= \left\{ \frac{ipx}{\hbar} \frac{2}{\sqrt{2(q+1)}(1-q)} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \frac{1}{2(q+1)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{ipx}{\hbar} \frac{2}{\sqrt{2(q+1)}(1-q) \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} - \right. \\ &\quad \left. \frac{ipx}{\hbar} \frac{2}{[2(q+1)]^{3/2} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} \right\} g \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial g}{\partial q} = \left\{ \frac{2ipx}{\hbar} \left[ \frac{\left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right] - 1}{(1-q)\sqrt{2(q+1)} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{[2(q+1)]^{3/2} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \frac{1}{2(q+1)} \right\} g$$

Cuando  $q \rightarrow 1$ ,

$$\frac{\left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right] - 1}{(1-q) \sqrt{2(q+1)} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} \rightarrow \frac{0}{0} \quad (\text{B.23})$$

Apelando una vez más a la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right] - 1}{(1-q) \sqrt{2(q+1)} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]} &= \\ \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{-ipx}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2(q+1)}} - \frac{ipx}{\hbar} \frac{(1-q)}{[2(q+1)]^{3/2}}}{-\sqrt{2(q+1)} \left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right] + (1-q)X} &= \\ &= \frac{ipx}{4\hbar} \end{aligned}$$

Donde

$$X = \frac{\left[ 1 + \frac{i}{\hbar} \frac{(1-q)}{\sqrt{2(q+1)}} px \right]}{\sqrt{2(q+1)}} + \sqrt{2(q+1)} \left[ \frac{-ipx}{\hbar \sqrt{2(q+1)}} - \frac{(1-q)ipx}{\hbar [2(q+1)]^{3/2}} \right]$$

Luego,

$$\left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=1} = \left\{ \frac{2ipx}{\hbar} \left[ \frac{ipx}{4\hbar} - \frac{1}{8} \right] + \frac{p^2 x^2}{4\hbar^2} \right\} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

o

$$\left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=1} = \left( -\frac{ipx}{4\hbar} - \frac{p^2 x^2}{2\hbar^2} + \frac{p^2 x^2}{4\hbar^2} \right) e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

Y, finalmente,

$$\left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=1} = -\frac{1}{4} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right) e^{\frac{ipx}{\hbar}} \quad (\text{B.24})$$

El desarrollo de primer orden de  $g(x)$  es

$$g(x) \simeq g|_{q=1} + (q-1) \left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=1}$$

Reemplazando la ecuación (B.24) llegamos a

$$g(x) \simeq e^{\frac{ipx}{\hbar}} + \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right) e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

o,

$$g(x) \simeq e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 + \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right) \right] \quad (\text{B.25})$$

## B.9. Segunda derivada de $g$ con respecto a $x$

La primer derivada de  $g$  es

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 + \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right) \right] + e^{\frac{ipx}{\hbar}} \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ip}{\hbar} + \frac{2xp^2}{\hbar^2} \right) \quad (\text{B.26})$$

Para la segunda derivada obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{-p^2}{\hbar^2} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 + \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right) \right] + \frac{ip}{\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ip}{\hbar} + \frac{2xp^2}{\hbar^2} \right) \\ &\quad + \frac{ip}{\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \frac{(1-q)}{4} \left( \frac{ip}{\hbar} + \frac{2xp^2}{\hbar^2} \right) + e^{\frac{ipx}{\hbar}} \frac{(1-q)}{4} \frac{2p^2}{\hbar^2} \end{aligned}$$

o

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 + \frac{(1-q)}{4} \frac{ipx}{\hbar} + \frac{(1-q)}{4} \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} - (1-q) \frac{ipx}{\hbar} \right]$$

Entonces finalmente,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 - \frac{3(1-q)}{4} \frac{ipx}{\hbar} + \frac{(1-q)}{4} \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right] \quad (\text{B.27})$$

## B.10. Desarrollo de primer orden de $g^q$

Siguiendo un procedimiento similar tenemos ahora

$$\left. \frac{\partial g^q}{\partial q} \right|_{q=1} = g|_{q=1} \ln g|_{q=1} + \left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=1} \quad (\text{B.28})$$

Sabiendo que

- $g|_{q=1} = e^{\frac{ipx}{\hbar}}$
- $(\ln g)|_{q=1} = \frac{ipx}{\hbar}$
- $\left. \frac{\partial g}{\partial q} \right|_{q=1} = -\frac{1}{4} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right) e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

Entonces,

$$\left. \frac{\partial g^q}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{ipx}{\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}} - \frac{1}{4} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left( \frac{ipx}{\hbar} + \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right)$$

o,

$$\left. \frac{\partial g^q}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{ipx}{\hbar} e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{ipx}{4\hbar} \right)$$

Luego:

$$\left. \frac{\partial g^q}{\partial q} \right|_{q=1} = \frac{ipx}{\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left( \frac{3}{4} + \frac{ipx}{4\hbar} \right) \quad (\text{B.29})$$

El desarrollo de primer orden de  $g^q$  es

$$g^q \simeq g^q|_{q=1} + (q-1) \left. \frac{\partial g^q}{\partial q} \right|_{q=1} \quad (\text{B.30})$$

Reemplazando la ecuación (B.29) en este desarrollo obtenemos

$$g^q \simeq e^{\frac{ipx}{\hbar}} + (q-1) \frac{ipx}{\hbar} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left( \frac{3}{4} + \frac{ipx}{4\hbar} \right)$$

o

$$g^q \simeq e^{\frac{ipx}{\hbar}} \left[ 1 + \frac{3(q-1)}{4} \frac{ipx}{\hbar} - \frac{(q-1)}{4} \frac{p^2 x^2}{\hbar^2} \right] \quad (\text{B.31})$$



## Apéndice C

# Formas explícitas de ecuaciones complicadas

Doy en este apéndice la forma explícita de algunas ecuaciones complicadas con las que trato en el capítulo 6. La  $q$ -entropía de camino  $n$  dimensional es:

$$\begin{aligned}
 S(\beta, Q_1^0) = & \frac{\left\{ \frac{\pi^n}{\beta^n} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \right\}^{q-1} - 1}{q-1} + \\
 & \left\{ \frac{\pi^n}{\beta^n} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \right\}^{q-1} \times \\
 & \beta n \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \times \\
 & \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

A partir de esta entropía de camino, la correspondiente fuerza entrópica es:

$$\begin{aligned}
F_e = & \frac{2Q_i \pi^{n(q-1)}}{\beta \beta^{n(q-1)}} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{q-2} \\
& \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right. \\
& \left. - (n-j)U^{n-j-1} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \left[ 1+(q-1)\beta n \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \right] + \frac{\pi^{n(q-1)}}{\beta^{n(q-1)}} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{q-1} \left\{ -2nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right. \\
& \left. \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} - (n-j)U^{n-j-1} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \right. \\
& \left. + 2nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \right. \\
& \left. \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right. \right. \\
& \left. \left. - (n+1-j)U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \right\} \quad (C.2)
\end{aligned}$$

Para la fuerza del oscilador armónico se tiene

$$\begin{aligned}
F_{HO} = nQ_i & \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-2} \\
& \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \\
& \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} \right. \\
& \left. [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} - (n-j)U^{n-j-1} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \\
& - nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \\
& \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right. \\
& \left. -(n+1-j)U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \quad (C.3)
\end{aligned}$$

La fuerza total es

$$\begin{aligned}
F_T = & \frac{2Q_i \pi^{n(q-1)}}{\beta \beta^{n(q-1)}} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{q-2} \\
& \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right. \\
& \left. - (n-j)U^{n-j-1} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \left[ 1+(q-1)\beta n \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j}}{(n+1-j)!} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{[1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{\prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \right] + \frac{\pi^{n(q-1)}}{\beta^{n(q-1)}} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{q-1} \\
& \left\{ -2nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j}}{(n-j)!} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{[1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{\prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right. \right. \\
& \left. \left. - (n-j)U^{n-j-1} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} + 2nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j}}{(n-j)!} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{[1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{\prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n+1-j} \right. \right. \\
& \left. \left. [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} - (n+1-j)U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} \right\} + nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-2} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j}}{(n+1-j)!} \right. \\
& \left. \frac{[1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{\prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \sum_{j=1}^n \frac{\beta^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n-j} \right. \\
& \left. [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} - (n-j)U^{n-j-1} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\} - nQ_i \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} \right. \\
& \left. - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \\
& \left\{ (j+1-jq)\beta U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} - (n+1-j)U^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} \right\}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Finalmente, el calor específico es

$$\begin{aligned}
C = & \frac{-n\beta^n}{\pi^n} \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-2} \\
& \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1} (i+1-iq)\beta} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\beta^{n-j} U^{n+1-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\} \\
& \left\{ \frac{nk_B\pi^n}{\beta^{n-1} \prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - k_B\pi^n \sum_{j=1}^n \frac{U^{n-j}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right. \\
& \left. \left\{ \frac{j}{\beta^{j-1}} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} + \frac{(j+1-jq)U}{\beta^{j-2}} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right\} \right\} \\
& + k_B n \beta^n \left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^n \frac{(\beta U)^{n-j} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}}}{(n-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right\}^{-1} \\
& \left\{ \frac{n+1}{\beta^n \prod_{i=1}^n (i+1-iq)} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{U^{n+1-j}}{(n+1-j)! \prod_{k=1}^j (k+1-kq)} \right. \\
& \left. \left[ \frac{j}{\beta^{j-1}} [1+(q-1)\beta U]^{\frac{j+1-jq}{1-q}} + \frac{(j+1-jq)U}{\beta^{j-2}} [1+(q-1)\beta U]^{j+\frac{q}{1-q}} \right] \right\} \quad (C.5)
\end{aligned}$$



## Apéndice D

# Un ejemplo simple de Regularización Dimensional

Este apéndice ilustra la regularización dimensional (DR) con un ejemplo simple. La justificación del procedimiento de DR está dado en la sección 2.5, basado en [101], siendo esta una generalización del tratamiento presentado en [141, 142].

Aquí discuto la función de partición  $Z$  del oscilador armónico 3D (HO) para  $q = \frac{2}{3}$ . Si primero consideramos  $Z$  en  $\nu$  dimensiones

$$Z = \int [1 + (1 - q)\beta(P^2 + Q^2)]^{\frac{1}{q-1}} d^\nu P d^\nu Q \quad (\text{D.1})$$

Donde  $P^2 = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_\nu^2$  y  $Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + \dots + Q_\nu^2$ . Para resolver la integral usamos coordenadas hipersféricas y encontramos que

$$Z = \frac{2\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty S^{2\nu-1} [1 + (1 - q)\beta S^2]^{\frac{1}{q-1}} dS \quad (\text{D.2})$$

Con  $S^2 = P^2 + Q^2$ . Efectuando el cambio de variables  $S^2 = x$  obtenemos

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} [1 + (1 - q)\beta x]^{\frac{1}{q-1}} dx \quad (\text{D.3})$$

O

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{[1 + (1 - q)\beta x]^{\frac{1}{1-q}}} dx \quad (\text{D.4})$$

Para evaluar esta integral miramos a la ecuación (A.28):

$$\frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1 + \gamma x)^v} dx = \gamma^{-\mu} B(\mu, v - \mu) \quad (\text{D.5})$$

Donde  $B(\mu, \nu - \mu)$  es la función Beta de Euler. Comparando (D.4) con (D.5) nos encontramos que  $\mu = \nu$ ,  $\nu = \frac{1}{1-q}$ ,  $\gamma = (1-q)\beta$ , y entonces

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} [\beta(1-q)]^{-\nu} B\left(\nu, \frac{1}{1-q} - \nu\right) \quad (\text{D.6})$$

Vemos que cuando  $q = \frac{2}{3}$  y  $\nu = 3$ , la ecuación (D.6) diverge ya que

$$B\left(\nu, \frac{1}{1-q} - \nu\right) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \quad (\text{D.7})$$

Con  $\Gamma(z)$  siendo la función Gamma de Euler, que exhibe polos en  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ . A partir de la ecuación (D.7) se sigue que

$$Z = \frac{\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} [\beta(1-q)]^{-\nu} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \quad (\text{D.8})$$

O

$$Z = \left[\frac{\pi}{\beta(1-q)}\right]^\nu \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} - \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)} \quad (\text{D.9})$$

Eligiendo  $q = \frac{2}{3}$  en la ecuación (D.9) se encuentra

$$Z = \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^\nu \frac{\Gamma(3-\nu)}{\Gamma(3)} \quad (\text{D.10})$$

Como  $\Gamma(3) = 2$ , lleva a

$$Z = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^\nu \Gamma(3-\nu) \quad (\text{D.11})$$

Notar que para  $\nu = 3$ ,  $Z$  diverge. El enfoque de DR de Bollini y Giambiagi consiste en realizar el desarrollo de Laurent de  $Z$  alrededor de  $\nu = 3$  y seleccionar, como el resultado físico de  $Z$ , el término  $\nu - 3$ -independiente de la serie. La justificación para este procedimiento es claramente explicado en [101]. Para proseguir definimos

$$f(\nu) = \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^\nu \quad (\text{D.12})$$

Cuyo desarrollo de Taylor es

$$f(\nu) = \left(\frac{3\pi}{\beta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \ln^n \left(\frac{3\pi}{\beta}\right) \frac{(\nu-3)^n}{n!} \quad (\text{D.13})$$

El desarrollo de la función Gamma es

$$\Gamma(3-\nu) = \frac{1}{3-\nu} - \mathbf{C} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (3-\nu)^m \quad (\text{D.14})$$



Donde  $C$  es la constante de Euler. Multiplicando las dos series obtenemos

$$f(\nu)\Gamma(3-\nu) = \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^3 \frac{1}{3-\nu} + \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^3 C - \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^3 \ln\left(\frac{3\pi}{\beta}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (3-\nu)^m \quad (\text{D.15})$$

Y en consecuencia  $Z$  es

$$Z = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{\beta}\right)^3 \left[ C - \ln\left(\frac{3\pi}{\beta}\right) \right] \quad (\text{D.16})$$

O

$$Z = \frac{1}{2} (3\pi k_B T)^3 [C - \ln(3\pi k_B T)] \quad (\text{D.17})$$

Como uno exige que  $Z > 0$ ,  $T$  debe cumplir

$$0 < T < \frac{e^C}{3\pi k_B} \quad (\text{D.18})$$

Implicando que existe una cota máxima para  $T$ , típico del formalismo de Tsallis (ver [138]).



# Bibliografía

- [1] D.J. Zamora et al. “Perturbative Treatment of the Non-Linear  $q$ -Schrödinger and  $q$ -Klein–Gordon Equations”. *Entropy* 19.1 (2016), pág. 21.
- [2] A. Plastino et al. “ $q$ -Gamow states for intermediate energies”. *Nuclear Physics A* 955 (2016), págs. 16-26.
- [3] D.J. Zamora et al. “ $q$ -Path entropy phenomenology for phase-space curves”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 490 (2018), págs. 1522-1531.
- [4] D.J. Zamora et al. “Verlinde’s emergent gravity in an  $n$ -dimensional, non-additive Tsallis’ scenario”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 506 (2018), págs. 1050-1059.
- [5] D.J. Zamora et al. “Dimensionally regularized Tsallis’ statistical mechanics and two-body Newton’s gravitation”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 497 (2018), págs. 310-318.
- [6] D.J. Zamora et al. “Dimensionally regularized Boltzmann–Gibbs statistical mechanics and two-body Newton’s gravitation”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 503 (2018), págs. 793-799.
- [7] G.L. Ferri et al. “A first order Tsallis theory”. *The European Physical Journal B* 90.3 (2017).
- [8] Brian Cowan. *Topics in Statistical Mechanics (Imperial College Press Advanced Physics Texts)*. Imperial College Pr, 2005.
- [9] S. Carnot. “Réflexions sur la puissance motrice du feu” (1824).
- [10] R. Clausius. “Über die Wärmeleitung gasförmiger Körper”. *Annalen der Physik* 125 (1865), págs. 353-400.
- [11] J. C. Maxwell. *Theory of heat*. Ed. por Longmans Green Co. 1871.
- [12] L. Boltzmann. “Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen”. *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften* 66 (1872), págs. 275-370.
- [13] J. W. Gibbs. *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. Cambridge University Press, 1902.
- [14] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Dover Publications Inc., 1956. 160 págs.

- [15] C.E. Shannon. “A mathematical theory of communication”. *Bell System Technical Journal* 27 (1948), págs. 379-423.
- [16] E. T. Jaynes. “Information Theory and Statistical Mechanics”. *Physical Review* 106.4 (1957), págs. 620-630.
- [17] John Archibald Wheeler. “Information, Physics, Quantum: The Search for Links”. *Feynman and Computation*. CRC Press, 1989, págs. 309-336.
- [18] A. D. Wissner-Gross y C. E. Freer. “Causal Entropic Forces”. *Physical Review Letters* 110.16 (2013).
- [19] Erik Verlinde. “On the origin of gravity and the laws of Newton”. *Journal of High Energy Physics* 2011.4 (2011).
- [20] Roderick Dewar. “Information theory explanation of the fluctuation theorem, maximum entropy production and self-organized criticality in non-equilibrium stationary states”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36.3 (2003), págs. 631-641.
- [21] M. Rocca, A. Plastino y G.L. Ferri. “Statistical mechanics of phase-space curves”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 393 (2014), págs. 244-255.
- [22] A. Plastino, M.C. Rocca y G.L. Ferri. “3D effects of the entropic force”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 420 (2015), págs. 212-220.
- [23] Constantino Tsallis. “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”. *Journal of Statistical Physics* 52.1-2 (1988), págs. 479-487.
- [24] Constantino Tsallis. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*. Springer New York, 2009.
- [25] M. GellMann y C. Tsallis. *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications (Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity)*. Oxford University Press, 2004.
- [26] G. Baris Bagci y Thomas Oikonomou. “Tsallis power laws and finite baths with negative heat capacity”. *Physical Review E* 88.4 (2013).
- [27] Daniel O'Malley, Velimir V. Vesselinov y John H. Cushman. “Diffusive mixing and Tsallis entropy”. *Physical Review E* 91.4 (2015).
- [28] G. Baris Bagci y Thomas Oikonomou. “Validity of the third law of thermodynamics for the Tsallis entropy”. *Physical Review E* 93.2 (2016).
- [29] M. Ponmurugan. “Tsallis statistics generalization of nonequilibrium work relations”. *Physical Review E* 93.3 (2016).
- [30] Petr Jizba, Jan Korbel y Václav Zatloukal. “Tsallis thermostatics as a statistical physics of random chains”. *Physical Review E* 95.2 (2017).

- [31] L. S. F. Olavo. “Possible physical meaning of the Tsallis entropy parameter”. *Physical Review E* 64.3 (2001).
- [32] I.S. Oliveira. “Some metallic properties in the framework of Tsallis generalized statistics”. *The European Physical Journal B* 14.1 (2000), págs. 43-46.
- [33] E.K. Lenzi y R.S. Mendes. “Collisionless Boltzmann equation for systems obeying Tsallis distribution”. *The European Physical Journal B* 21.3 (2001), págs. 401-406.
- [34] C. Tsallis. “Nonadditive entropy: The concept and its use”. *The European Physical Journal A* 40.3 (2009).
- [35] P. H. Chavanis. “Lynden-Bell and Tsallis distributions for the HMF model”. *The European Physical Journal B* 53.4 (2006), págs. 487-501.
- [36] G. Ruiz y C. Tsallis. “Nonextensivity at the edge of chaos of a new universality class of one-dimensional unimodal dissipative maps”. *The European Physical Journal B* 67.4 (2009), págs. 577-584.
- [37] P.-H. Chavanis y A. Campa. “Inhomogeneous Tsallis distributions in the HMF model”. *The European Physical Journal B* 76.4 (2010), págs. 581-611.
- [38] Nikos Kalogeropoulos. “Long-range interactions, doubling measures and Tsallis entropy”. *The European Physical Journal B* 87.3 (2014).
- [39] Nikos Kalogeropoulos. “Extensive limit of a non-extensive entanglement entropy”. *The European Physical Journal B* 87.6 (2014).
- [40] Aleksejus Kononovicius y Julius Ruseckas. “Continuous transition from the extensive to the non-extensive statistics in an agent-based herding model”. *The European Physical Journal B* 87.8 (2014).
- [41] A.R. Plastino y A. Plastino. “Stellar polytropes and Tsallis entropy”. *Physics Letters A* 174.5-6 (1993), págs. 384-386.
- [42] P.H. Chavanis y C. Sire. “On the interpretations of Tsallis functional in connection with Vlasov-Poisson and related systems: Dynamics vs thermodynamics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 356.2-4 (2005), págs. 419-446.
- [43] Pierre-Henri Chavanis. “On the coarse-grained evolution of collisionless stellar systems”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 300.4 (1998), págs. 981-991.
- [44] D. LyndenBell y R. M. LyndenBell. “On the negative specific heat paradox”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 181.3 (1977), págs. 405-419.
- [45] A.C.P. Rosa, J.C.O. de Jesus y M.A. Moret. “Nonextensivity and entropy of astrophysical sources”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.23 (2013), págs. 6079-6083.

- [46] Francesco Barile. “Light-flavour hadron production in pp and Pb-Pb collisions in the ALICE experiment at the LHC”. *EPJ Web of Conferences* 60 (2013). Ed. por M. Bosman et al., pág. 13012.
- [47] Yu. V. Kharlov. “Physics with the ALICE experiment”. *Physics of Atomic Nuclei* 76.12 (2013), págs. 1497-1506.
- [48] V. Khachatryan et al. “Strange particle production in pp collisions at 7 TeV”. *Journal of High Energy Physics* 2011.5 (2011).
- [49] G. Wilk y Z. Włodarczyk. “Application of nonextensive statistics to particle and nuclear physics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 305.1-2 (2002), págs. 227-233.
- [50] R. M. Pickup et al. “Generalized Spin-Glass Relaxation”. *Physical Review Letters* 102.9 (2009).
- [51] Eric Lutz y Ferruccio Renzoni. “Beyond Boltzmann–Gibbs statistical mechanics in optical lattices”. *Nature Physics* 9.10 (2013), págs. 615-619.
- [52] Ralph G. DeVoe. “Power-Law Distributions for a Trapped Ion Interacting with a Classical Buffer Gas”. *Physical Review Letters* 102.6 (2009).
- [53] Zhifu Huang et al. “Self-similar motion for modeling anomalous diffusion and nonextensive statistical distributions”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2010.05 (2010), pág. L05001.
- [54] Janett Prehl, Christopher Essex y Karl Heinz Hoffmann. “Tsallis Relative Entropy and Anomalous Diffusion”. *Entropy* 14.4 (2012), págs. 701-716.
- [55] Bin Liu y J. Goree. “Superdiffusion and Non-Gaussian Statistics in a Driven-Dissipative 2D Dusty Plasma”. *Physical Review Letters* 100.5 (2008).
- [56] Ozgur Afsar y Ugur Tirnakli. “Generalized Huberman-Rudnick scaling law and robustness of q-Gaussian probability distributions”. *EPL (Europhysics Letters)* 101.2 (2013), pág. 20003.
- [57] Ugur Tirnakli, Constantino Tsallis y Christian Beck. “Closer look at time averages of the logistic map at the edge of chaos”. *Physical Review E* 79.5 (2009).
- [58] G. Ruiz, T. Bountis y C. Tsallis. “Time evolving statistics of chaotic orbits of conservative maps in the context of the central limit theorem”. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22.09 (2012), pág. 1250208.
- [59] Christian Beck y Shihan Miah. “Statistics of Lagrangian quantum turbulence”. *Physical Review E* 87.3 (2013).
- [60] G. Wilk y Z. Włodarczyk. “Interpretation of the Nonextensivity Parameter  $q$  in Some Applications of Tsallis Statistics and Lévy Distributions”. *Physical Review Letters* 84.13 (2000), págs. 2770-2773.

- [61] Sumiyoshi Abe. “Why q-Expectation Values Must Be Used In Nonextensive Statistical Mechanics”. *Astrophysics and Space Science* 305.3 (2006), págs. 241-245.
- [62] S. Picoli et al. “q-distributions in complex systems: a brief review”. *Brazilian Journal of Physics* 39.2a (2009), págs. 468-474.
- [63] O Penrose. *Foundations of statistical mechanics;: A deductive treatment, (International series of monographs in natural philosophy)*. Pergamon Press, 1969.
- [64] S. Curilef, A.R. Plastino y A. Plastino. “Tsallis’ maximum entropy ansatz leading to exact analytical time dependent wave packet solutions of a nonlinear Schrödinger equation”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.11 (2013), págs. 2631-2642.
- [65] A. Plastino y M. C. Rocca. “Possible divergences in Tsallis thermostatics”. *EPL (Europhysics Letters)* 104.6 (2013), pág. 60003.
- [66] L.F. Burlaga y A.F. Viñas. “Triangle for the entropic index q of non-extensive statistical mechanics observed by Voyager 1 in the distant heliosphere”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 356.2-4 (2005), págs. 375-384.
- [67] Mario Rocca, Angel Plastino y Gustavo Ferri. “Physical peculiarities of divergences emerging in q-deformed statistics”. *The European Physical Journal B* 89.6 (2016).
- [68] A.R. Plastino y A. Plastino. “From Gibbs microcanonical ensemble to Tsallis generalized canonical distribution”. *Physics Letters A* 193.2 (1994), págs. 140-143.
- [69] J.J. Binney y Scott Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton Univers. Press, 2008. 920 págs.
- [70] David Berenstein y Alexandra Miller. “Conformal perturbation theory, dimensional regularization, and AdS/CFT correspondence”. *Physical Review D* 90.8 (2014).
- [71] Damiano Anselmi. “Weighted power counting and chiral dimensional regularization”. *Physical Review D* 89.12 (2014).
- [72] Piotr Jaranowski y Gerhard Schäfer. “Dimensional regularization of local singularities in the fourth post-Newtonian two-point-mass Hamiltonian”. *Physical Review D* 87.8 (2013).
- [73] T. Inagaki et al. “Phase diagram of Nambu–Jona-Lasinio model with dimensional regularization”. *Physical Review D* 86.11 (2012).
- [74] J. Qiu. “Dimensional regularization and dimensional reduction in the light cone”. *Physical Review D* 77.12 (2008).
- [75] Luc Blanchet et al. “Dimensional regularization of the third post-Newtonian gravitational wave generation from two point masses”. *Physical Review D* 71.12 (2005).

- [76] Fiorenzo Bastianelli, Olindo Corradini y Andrea Zirotti. “Dimensional regularization for  $N=1$  supersymmetric sigma models and the worldline formalism”. *Physical Review D* 67.10 (2003).
- [77] Dirk Lehmann y Gary Prezeau. “Effective field theory dimensional regularization”. *Physical Review D* 65.1 (2001).
- [78] A. P. Scarpelli, M. Sampaio y M. C. Nemes. “Consistency relations for an implicit  $n$ -dimensional regularization scheme”. *Physical Review D* 63.4 (2001).
- [79] J. Smith y W. L. van Neerven. “The difference between  $n$ -dimensional regularization and  $n$ -dimensional reduction in QCD”. *The European Physical Journal C* 40.2 (2005), págs. 199-203.
- [80] Jonathan F. Schonfeld. “Physical model of dimensional regularization”. *The European Physical Journal C* 76.12 (2016).
- [81] N.C. Tsamis y R.P. Woodard. “Dimensionally regulated graviton 1-point function in de Sitter”. *Annals of Physics* 321.4 (2006), págs. 875-893.
- [82] S. Teber y A. V. Kotikov. “Interaction corrections to the minimal conductivity of graphene via dimensional regularization”. *EPL (Europhysics Letters)* 107.5 (2014), pág. 57001.
- [83] H Fujisaki. “Dimensional Regularization of the Closed Bosonic Thermal String”. *Europhysics Letters (EPL)* 28.9 (1994), págs. 623-627.
- [84] M. W. Kalinowski, M. Seweryński y L. Szymanowski. “On the dimensional regularization procedure for massless Feynman integrals”. *Journal of Mathematical Physics* 24.2 (1983), págs. 375-376.
- [85] Michael Dütsch et al. “Dimensional regularization in position space and a Forest Formula for Epstein-Glaser renormalization”. *Journal of Mathematical Physics* 55.12 (2014), pág. 122303.
- [86] Joseph Ben Geloun y Reiko Toriumi. “Parametric representation of rank-tensorial group field theory: Abelian models with kinetic term”. *Journal of Mathematical Physics* 56.9 (2015), pág. 093503.
- [87] B Mutet, P Grange y E Werner. “Taylor-Lagrange renormalization and gauge theories in four dimensions”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.31 (2012), pág. 315401.
- [88] Silke Falk, Rainer Haussling y Florian Scheck. “Renormalization in quantum field theory: an improved rigorous method”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43.3 (2009), pág. 035401.
- [89] A Khare. “Dimensional regularization and gauge invariance of the photon-photon scattering amplitude”. *Journal of Physics G: Nuclear Physics* 3.8 (1977), págs. 1019-1023.



- [90] James V. Steele y R.J. Furnstahl. “Regularization methods for nucleon-nucleon effective field theory”. *Nuclear Physics A* 637.1 (1998), págs. 46-62.
- [91] Erik Panzer. “On the analytic computation of massless propagators in dimensional regularization”. *Nuclear Physics B* 874.2 (2013), págs. 567-593.
- [92] J.M. Campbell, E.W.N. Glover y D.J. Miller. “One-loop tensor integrals in dimensional regularisation”. *Nuclear Physics B* 498.1-2 (1997), págs. 397-442.
- [93] C. G. Bollini, T. Escobar y M.C. Rocca. “Convolution of ultradistributions and field theory”. *International Journal of Theoretical Physics* 38.9 (1999), págs. 2315-2332.
- [94] C. G. Bollini y M. C. Rocca. “Convolution of n-Dimensional Tempered Ultradistributions and Field Theory”. *International Journal of Theoretical Physics* 43.1 (2004), págs. 59-76.
- [95] C. G. Bollini y M. C. Rocca. “Convolution of Lorentz Invariant Ultradistributions and Field Theory”. *International Journal of Theoretical Physics* 43.4 (2004), págs. 1019-1051.
- [96] C. G. Bollini, P. Marchiano y M. C. Rocca. “Convolution of Ultradistributions, Field Theory, Lorentz Invariance and Resonances”. *International Journal of Theoretical Physics* 46.12 (2007), págs. 3030-3059.
- [97] J. Sebastiao e Silva. “Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel.” *Mathematische Annalen* 136 (1958), págs. 58-96.
- [98] C. G. Bollini y J. J. Giambiagi. “Dimensional regularization in configuration space”. *Physical Review D* 53.10 (1996), págs. 5761-5764.
- [99] I. M. Gelfand y G. E. Shilov. *Generalized functions Vol.1*. ACADEMIC PRESS, 1964.
- [100] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Editions Hermann, 1966.
- [101] A Plastino y M C Rocca. “Quantum field theory, Feynman-, Wheeler propagators, dimensional regularization in configuration space and convolution of Lorentz Invariant Tempered Distributions”. *Journal of Physics Communications* 2.11 (2018), pág. 115029.
- [102] Flavia Pennini et al. “A Review of the Classical Canonical Ensemble Treatment of Newton’s Gravitation”. *Entropy* 21.7 (2019), pág. 677.
- [103] A. Plastino y M.C. Rocca. “Non-relativistic quantum field theory of Verlinde’s emergent entropic gravity”. *Annals of Physics* 412 (2020), pág. 168013.
- [104] A Plastino y M C Rocca. “Gupta-Feynman based Quantum Field Theory of Einstein’s Gravity”. *Journal of Physics Communications* 4.3 (2020), pág. 035014.

- [105] A. Plastino y M. C. Rocca. “Generalization via Ultrahyperfunctions of a Gupta-Feynman Based Quantum Field Theory of Einstein’s Gravity”. *Journal of Modern Physics* 11.03 (2020), págs. 378-394.
- [106] A. Plastino y M. C. Rocca. “Approximate Reformulation a Recent Non-Renormalizable QFT’s Methodology and Einstein’s Gravity”. *Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology* 06.02 (2020), págs. 298-311.
- [107] Wolfgang Bietenholz y Lilian Prado. “Revolutionary physics in reactionary Argentina”. *Physics Today* 67.2 (2014), págs. 38-43.
- [108] D. Lynden-Bell. “Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 263.1-4 (1999), págs. 293-304.
- [109] Arthur Stanley Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. Cambridge University Press, 1987. 424 págs.
- [110] Jacob D. Bekenstein. “Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics”. *Physical Review D* 9.12 (1974), págs. 3292-3300.
- [111] S. W. HAWKING. “Black hole explosions?”. *Nature* 248.5443 (1974), págs. 30-31.
- [112] S. W. Hawking. “Black holes and thermodynamics”. *Physical Review D* 13.2 (1976), págs. 191-197.
- [113] W. Thirring. “Systems with negative specific heat”. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei* 235.4 (1970), págs. 339-352.
- [114] V. A. Antonov. *Solution of the problem of stability of stellar system Emden’s density law and the spherical distribution of velocities*. 1962.
- [115] Malomed Boris. *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Ed. por Scott Alwyn. Routledge, 2005.
- [116] F. D. Nobre, M. A. Rego-Monteiro y C. Tsallis. “Nonlinear Relativistic and Quantum Equations with a Common Type of Solution”. *Physical Review Letters* 106.14 (2011).
- [117] A. Plastino y M.C. Rocca. “From the hypergeometric differential equation to a non-linear Schrödinger one”. *Physics Letters A* 379 (2015), págs. 2690-2693.
- [118] A. Plastino y M.C. Rocca. “q-Gamow states as continuous linear functionals on analytical test functions”. *Nuclear Physics A* 948 (2016), págs. 19-27.
- [119] N Michel et al. “Shell model in the complex energy plane”. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 36.1 (2008), pág. 013101.
- [120] Tore Berggren. “On the use of resonant states in eigenfunction expansions of scattering and reaction amplitudes”. *Nuclear Physics A* 109.2 (1968), págs. 265-287.
- [121] C.G. Bollini et al. “Physical representations of Gamow states in a rigged Hilbert space”. *Physics Letters B* 382.3 (1996), págs. 205-208.

- [122] O. Civitarese, A.L. De Paoli y M.C. Rocca. “Resonant states in the thermo field dynamics”. *Nuclear Physics A* 642.3-4 (1998), págs. 531-542.
- [123] C. Vignat y A. Plastino. “Why is the detection of q-Gaussian behavior such a common occurrence?” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 388.5 (2009), págs. 601-608.
- [124] Nino Boccara. *Modeling Complex Systems*. Springer New York, 2010.
- [125] A. R. Plastino y C. Tsallis. “Nonlinear Schroedinger equation in the presence of uniform acceleration”. *Journal of Mathematical Physics* 54.4 (2013), pág. 041505.
- [126] A. R. Plastino et al. “Stationary and uniformly accelerated states in nonlinear quantum mechanics”. *Physical Review A* 90.6 (2014).
- [127] Tassos Bountis y Fernando D. Nobre. “Travelling-wave and separated variable solutions of a nonlinear Schroedinger equation”. *Journal of Mathematical Physics* 57.8 (2016), pág. 082106.
- [128] A. Plastino y M.C. Rocca. “Hypergeometric connotations of quantum equations”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 450 (2016), págs. 435-443.
- [129] Hendrick W. de Haan y Gary W. Slater. “Translocation of a polymer through a nanopore across a viscosity gradient”. *Physical Review E* 87.4 (2013).
- [130] Mohammad F. Maghrebi, Yacov Kantor y Mehran Kardar. “Polymer-mediated entropic forces between scale-free objects”. *Physical Review E* 86.6 (2012).
- [131] Roderick Dewar. “Maximum Entropy Production as an Inference Algorithm that Translates Physical Assumptions into Macroscopic Predictions: Don’t Shoot the Messenger”. *Entropy* 11.4 (2009), págs. 931-944.
- [132] Matt Visser. “Status of Horava gravity: A personal perspective”. *Journal of Physics: Conference Series* 314 (2011), pág. 012002.
- [133] Tower Wang. “Coulomb force as an entropic force”. *Physical Review D* 81.10 (2010).
- [134] S. H. Hendi y A. Sheykhi. “Entropic Corrections to Coulomb’s Law”. *International Journal of Theoretical Physics* 51.4 (2011), págs. 1125-1136.
- [135] E. T. Jaynes. *Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics*. Springer, 1983. 458 págs.
- [136] Leon Brillouin. *Science and Information Theory*. Academic Press, 1956.
- [137] I.S. Gradshteyn e I.M. Rizhik. *Table of Integrals Series and Products*. Academic Press, 1965.
- [138] A R Plastino, A Plastino y C Tsallis. “The classical N-body problem within a generalized statistical mechanics”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 27.17 (1994), págs. 5707-5714.

- [139] M. K. Fung. “The kepler problem and the isotropic harmonic oscillator”. English. *Chinese Journal of Physics* 50.5 (2012), págs. 713-219.
- [140] Laurence G. Taff. *Celestial Mechanics: A Computational Guide for the Practitioner*. Wiley-VCH, 1985.
- [141] C.G. Bollini y J.J. Giambiagi. “Lowest order divergent graphs in v-dimensional space”. *Physics Letters B* 40.5 (1972), págs. 566-568.
- [142] C. G. Bollini y J. J. Giambiagi. “Dimensional renormalization : The number of dimensions as a regularizing parameter”. *Il Nuovo Cimento B* 12.1 (1972), págs. 20-26.
- [143] T. Padmanabhan. “Statistical mechanics of gravitating systems”. *Physics Reports* 188.5 (1990), págs. 285-362.
- [144] T. Padmanabhan. “Statistical Mechanics of gravitating systems in static and cosmological backgrounds” (2002).
- [145] T. Padmanabhan. *Theoretical Astrophysics*. Cambridge University Press, 2000.
- [146] T. Padmanabhan. “Statistical mechanics of gravitating systems: An Overview” (2008).
- [147] T Dauxois. *Dynamics and thermodynamics of systems with long-range interactions*. Berlin New York: Springer, 2002.
- [148] A. Plastino y M. C. Rocca. “Classical and quantum field-theoretical approach to the non-linear q-Klein-Gordon equation”. *EPL (Europhysics Letters)* 116.4 (2016), pág. 41001.
- [149] A. Plastino y M. C. Rocca. “Quantum q-field theory: q-Schrödinger and q-Klein-Gordon fields”. *EPL (Europhysics Letters)* 118.6 (2017), pág. 61004.
- [150] K. F. Ogorodnikov. *Dynamics of stellar systems*. Oxford,New York: Pergamon Press, 1965.
- [151] P. H. Chavanis. “Phase Transitions in Self-Gravitating Systems”. *International Journal of Modern Physics B* 20.22 (2006), págs. 3113-3198.
- [152] P. H. Chavanis, J. Vatteville y F. Bouchet. “Dynamics and thermodynamics of a simple model similar to self-gravitating systems: the HMF model”. *The European Physical Journal B* 46.1 (2005), págs. 61-99.
- [153] R. H. Miller. “On the ”thermodynamics.of Self-Gravitating N-Body Systems”. *The Astrophysical Journal* 180 (1973), pág. 759.
- [154] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Pr., 1984.
- [155] Yongfeng Guo, Yajun Shen y Jianguo Tan. “Stochastic resonance in a piecewise nonlinear model driven by multiplicative non-Gaussian noise and additive white noise”. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 38 (2016), págs. 257-266.

- [156] Qin Guo, Zhongkui Sun y Wei Xu. “The properties of the anti-tumor model with coupling non-Gaussian noise and Gaussian colored noise”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 449 (2016), págs. 43-52.
- [157] Pei Liu y Li Juan Ning. “Transitions induced by cross-correlated bounded noises and time delay in a genotype selection model”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 441 (2016), págs. 32-39.
- [158] Fei Long, Wei Guo y Dong-Cheng Mei. “Stochastic resonance induced by bounded noise and periodic signal in an asymmetric bistable system”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 391.22 (2012), págs. 5305-5310.
- [159] Yubing Gong, Bo Xu y Li Wang. “Coherence resonance by either internal noise or external non-gaussian noise in intracellular calcium oscillations”. *Fluctuation and Noise Letters* 11.02 (2012), pág. 1250008.
- [160] Li Dong Xi et al. “Mean First-Passage Time of an Asymmetric Kinetic Model Driven by Two Different Kinds of Colored Noises”. *Communications in Theoretical Physics* 49.3 (2008), págs. 689-695.
- [161] Dan Wu, Xiaoqin Luo y Shiqun Zhu. “Stochastic system with coupling between non-Gaussian and Gaussian noise terms”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 373 (2007), págs. 203-214.
- [162] Horacio S. Wio y Raúl Toral. “Effect of non-Gaussian noise sources in a noise-induced transition”. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 193.1-4 (2004), págs. 161-168.
- [163] R.M. Todaro. *Stratospheric Ozone*. NASA’s Goddard Space Flight Center Atmospheric Chemistry y Dynamics Branch.
- [164] Constantino Tsallis. “Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 340.1-3 (2004), págs. 1-10.
- [165] G.L. Ferri, M.F. Reynoso Savio y A. Plastino. “Tsallis’ -triplet and the ozone layer”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389.9 (2010), págs. 1829-1833.
- [166] C. Beck y E.G.D. Cohen. “Superstatistics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 322 (2003), págs. 267-275.
- [167] P. T. Landsberg. “Entropies Galore!” *Brazilian Journal of Physics* 29.1 (1999), págs. 46-49.
- [168] G.Y. Shilov. *Mathematical Analysis*. Pergamon Press, 1965.
- [169] A. Plastino y M.C. Rocca. “MaxEnt, second variation, and generalized statistics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 436 (2015), págs. 572-581.
- [170] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov y O. I. Marichev. *Integrals and Series*. Gordon y Breach, 1992. 640 págs.
- [171] Arthur Erdelyi. *Tables of Integral Transforms, Vol. 2*. McGraw Hill Text, 1954.