

# Problema de programación lineal entera para un tratamiento de aguas industriales

Ardenghi, Juan I.<sup>1,2</sup>, Buffo, Flavia E.<sup>1,2</sup>, and Vidal, Marta C.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> UTN-FRBB, 11 de Abril al 461, Bahía Blanca

<sup>2</sup> UNS, Depto. de Matemática, Alem 1253, Bahía Blanca  
{ardenghi,flabuffo,mcvidal}@frbb.utn.edu.ar

**Resumen** La contaminación de fuentes hídricas por el vertido, sin un tratamiento adecuado, de efluentes de la actividad industrial, agrícola o doméstica constituye un problema de fuerte impacto ambiental. Debido a la diferencia de la calidad de las aguas residuales no es posible considerar una sola tecnología de tratamiento, reciclado y reutilización que cumpla los estándares ambientales y las legislaciones de cada región. Una alternativa es recurrir a opciones naturales de bajo costo y de fácil manejo como son los humedales artificiales, que convierten las aguas de producción en un recurso con potencial para ser reutilizado. Estos humedales pueden tener diferentes diseños, con diferentes especies vegetales y sustratos. Cada una de estas combinaciones difiere tanto en el tiempo de retención hidráulica como en los porcentajes de remoción de los contaminantes para alcanzar la calidad de agua demandada. En este trabajo se plantea el problema de diseñar un humedal artificial para el tratamiento de las aguas residuales provenientes de una empresa ganadera. El objetivo principal es minimizar el tiempo de retención hidráulica satisfaciendo las especificaciones requeridas por los estándares ambientales correspondientes. Se modela matemáticamente el problema como un problema de programación lineal entera y se exponen los resultados preliminares obtenidos.

**Keywords:** Aguas residuales · Humedales artificiales · Optimización.

## 1 Introducción

Las aguas residuales domésticas o de efluentes industriales no tratadas producen un impacto ambiental negativo. Sin duda alguna una estrategia fundamental es el tratamiento de las mismas, tanto para ser volcadas a cursos de agua o para ser reutilizadas. Esto permite conservar los recursos hídricos, especialmente en zonas de escasez de agua. El nivel de tratamiento del agua difiere según el uso específico requerido; para consumo humano debe cumplir estándares restrictivos por lo que se debe someter a un tratamiento que involucre varios niveles de reducción de contaminantes: preliminar, primario, secundario, terciario y desinfección [4]. En cambio, para verter a cursos de agua o para riego, dependiendo de la legislación vigente, es posible que sólo se requiera el tratamiento secundario [11]. Debido a la

diferencia de la calidad de las aguas residuales no es posible considerar una sola tecnología de tratamiento, reciclado y reutilización que cumpla los estándares ambientales y las legislaciones de cada región. La selección de los tratamientos de estas aguas conlleva en muchos casos un alto costo operativo e involucra procesos físico-químico-biológicos, algunos de los cuales producen subproductos como lodos o barros, que además requieren un manejo adecuado y sustentable. Una alternativa para abordar este problema es recurrir a opciones naturales, de bajo costo y de fácil manejo. En tal sentido los humedales artificiales constituyen una tecnología con costos de implementación, operación y mantenimiento menores en comparación con los sistemas tradicionales de tratamiento de aguas residuales ya que tienen la capacidad de depurar el agua a partir de la propiedad que poseen algunas especies vegetales de soportar grandes concentraciones de cargas orgánicas y metales pesados [7, 3, 9]. Los humedales artificiales (HA) son sistemas que se caracterizan por tener tres componentes típicos: presencia de agua, suelos característicos y vegetación, y consisten en un lecho de poca profundidad que se siembra con especies vegetales aptas para vivir en suelos saturados [6, 2]. Su diseño se orienta a aumentar las capacidades depuradoras de la vegetación y con ello la eficacia del sistema, al optimizar los procesos que ocurren en los ecosistemas de humedales naturales [5, 12]. Constituyen zonas de transición entre el medio ambiente terrestre y acuático y sirven como enlace dinámico entre los dos. El agua que se mueve arriba y abajo del gradiente de humedad, asimila una variedad de constituyentes químicos y físicos en solución, y estos a su vez se transforman y transportan a los alrededores del paisaje. Lo que se obtiene es agua de buena calidad apta para ser usada en el riego agrícola debido a que elimina microorganismos patógenos [6, 2]. Estos humedales artificiales presentan importantes ventajas sobre tratamientos convencionales de aguas residuales ya que sus requerimientos energéticos de operación son mínimos, dado que la conducción del agua es prácticamente por gravedad. Además, debido a las características en su construcción, es difícil que los humedales tengan desequilibrios por el cambio en las concentraciones de los contaminantes o la oscilación en su afluente [8]. El ajuste en las variables de diseño permite adecuar el accionar del humedal a ciertos requerimientos específicos. En este trabajo se busca minimizar el tiempo de retención hidráulica, es decir, minimizar el tiempo necesario para la remoción de contaminantes requerida en un cierto caudal de agua residual. En la siguiente sección se reseña el proceso de tratamiento de aguas con los distintos diseños de humedales, en la sección 3 se presenta el caso de estudio junto al modelo matemático, la sección 4 exhibe los resultados obtenidos y finalmente en la sección 5 se establecen las conclusiones.

## 2 El proceso industrial de tratamiento de aguas

En el proceso de tratamiento de agua se destacan cuatro etapas fundamentales: la etapa preliminar, primaria, secundaria y terciaria, y el diseño operativo de cada una de estas depende del uso posterior que tendrá el agua tratada. El tratamiento preliminar sirve para quitar sólidos grandes de la corriente que pueden causar

problemas operacionales al avanzar el proceso. Pasado este primer tamiz, la corriente ingresa a la cámara de arena donde se retiene otro material pesado demasiado pequeño como para ser atrapado por el tamiz anterior. Los desechos recogidos en esta parte del proceso son depositados en un relleno sanitario. El tratamiento primario también sirve para eliminar sólidos, aceites y grasas, y en este se utilizan los tanques de sedimentación, donde las partículas sólidas se depositan en el fondo y aceites y grasas flotan en la parte superior.

La etapa de tratamiento secundario es usualmente una etapa biológica destinada a la eliminación de contaminantes disueltos por oxidación y asentamiento de la biomasa producida. Se utilizan bacterias y/o protozoos para el tratamiento y la corriente pasa por filtros biológicos o tanques de lodo activo, dependiendo de la cantidad de agua a tratar, y estanques de aireación. Para esta etapa se usan reactores de procesos aeróbicos, utilizando bacterias que crecen naturalmente en el medio. Las plantas actúan como esos filtros biológicos mencionados, que descomponen los contaminantes y estabilizan las sustancias metálicas presentes en el suelo y agua al fijarlos en sus raíces y tallos, o metabolizándolos tal como lo hacen los microorganismos para finalmente convertirlos en compuestos menos peligrosos y más estables, como dióxido de carbono, agua y sales minerales [10]. Las aguas residuales del tanque de sedimentación fluyen por gravedad hacia un tanque de ventilación y el oxígeno consume la materia orgánica remanente como alimento de microorganismos.

El tratamiento terciario consiste en la eliminación de bajas concentraciones de sólidos tóxicos en suspensión mediante separación física haciendo pasar la corriente por filtros de gravedad compuestos por arena o carbón. Si el agua fuese para consumo humano entonces se aplica una desinfección como tratamiento. El flujo del agua en la etapa secundaria determina las características del humedal. Entonces entre los tipos de humedales podemos encontrar los llamados humedales de flujo libre (FL) o superficial, donde los estanques están expuestos a la atmósfera con plantas enraizadas de libre flotación, y los humedales de flujo subsuperficiales (FSS), donde en los estanques se coloca un sustrato poroso, que puede ser arena, grava o cualquier tipo de suelo de textura gruesa del cual emerge vegetación, y el agua fluye por debajo de la superficie. A su vez, estos humedales de flujo subsuperficiales, se dividen, de acuerdo con la forma de suministro del afluente al humedal, en sistemas de flujo vertical (FSSV) y de flujo horizontal (FSSH). En los primeros, las aguas pretratadas se distribuyen de manera uniforme e intermitente sobre la superficie del lecho filtrante y luego percolan hacia la zona de recolección, mientras que en los de flujo horizontal las aguas residuales fluyen lentamente desde la zona de distribución en una trayectoria horizontal a través del lecho filtrante hasta la superficie de recolección del efluente.

Una de las ventajas del modelo de humedal FSSH, donde el agua fluye por debajo de la superficie del medio, es que no se presentan problemas con el desarrollo de mosquitos ni se despiden olores, e incluso proporcionan protección térmica al sistema (vegetación, sustrato y agua), lo que hace posible la implementación de humedales artificiales en lugares donde ocurren grandes heladas [6]. Y otra de sus ventajas es que se puede construir con una estructura modular,

lo que permite adicionar nuevas unidades o celdas de acuerdo con la demanda de calidad del agua pretendida al final del proceso. Considerando que los lechos de material poroso se pueden combinar con diferentes tipos de plantas, estas combinaciones crean celdas con diferentes capacidades de remoción de los distintos contaminantes y, por consiguiente diferentes tiempos de retención hidráulica. Esto establece una relación funcional entre el vector de números enteros que representa la cantidad de celdas de cada tipo de combinación y un valor de tiempo de retención hidráulica. La pregunta que plantea este trabajo es qué combinación de estas celdas minimiza el tiempo de retención hidráulica, es decir, minimiza el tiempo necesario para la remoción de contaminantes requerida para un determinado caudal de agua residual.

### 3 El caso de estudio

Se considera la implementación de un sistema de humedales artificiales para el tratamiento de las aguas residuales de una unidad productiva de animales. Las aguas residuales están formadas por heces fecales y orina mezcladas con el material utilizado como cama, residuos de alimento, polvo, otras partículas y una cantidad variable de agua proveniente de las labores de limpieza y por pérdidas desde los bebederos. En [1] se presenta el desarrollo del diseño de un sistema piloto de fitorremediación con humedales artificiales para la remoción de contaminantes de estas aguas. Se experimentó con diferentes especies nativas y fueron seleccionadas aquellas plantas que se caracterizaron por tener mayor adaptabilidad al ambiente y a este tipo de agua residual. Cada una de estas plantas determina un tipo de celda.

**Tabla 1.** Numeración de los tipos de celda desde los nombres de las especies de plantas utilizadas.

NOMBRE VULGAR	FAMILIA	GÉNERO	ESPECIE
<b>(Tipo 1)</b> Matandrea	Zingyberaceae	Hedychium	Montana
<b>(Tipo 2)</b> Pasto pará	Gramineae	Brachiaria	Mutica
<b>(Tipo 3)</b> Pasto taner	Gramineae	Brachiaria	Arrecta

Los medios filtrantes deben ser inertes y poseer condiciones que no aporten nutrientes, color o cambios en los parámetros fisicoquímicos de las aguas tratadas. Los mejores medios filtrantes seleccionados fueron la vermiculita y la arena; entre las ventajas que presentan estos medios se considera una mayor capacidad de retención hidráulica, mayor remoción de la demanda biológica de oxígeno (DBO), donde las plantas muestran mejor adaptación y desarrollo de raíz, tallo y hojas, una mayor retención y sedimentación de sólidos totales gracias a la porosidad y el diámetro de los materiales filtrantes [1].

Cada proceso piloto tiene tres sistemas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  de cada uno diferentes especies vegetales y diferentes tipos de lechos por celda (eventualmente puede

ser el mismo lecho en las tres celdas). Por cada sistema se repite el proceso de filtrado  $n_t$  veces antes de pasar al sistema  $t + 1$ , es decir, el diseño cuenta con  $n_t$  celdas de tipo  $t$ .

**Tabla 2.** Numeración de las componentes a remover.

j	Componente	Abreviatura
1	Sólidos totales	ST
2	Sólidos suspendidos	SS
3	Demanda biológica de oxígeno	DBO
4	Demanda química de oxígeno	DQO
5	Nitrógeno total	N
6	Fósforo	P
7	Sulfatos	SO4

Los porcentajes de reducción de cada contaminante por cada sistema, obtenidos experimentalmente para cada conjunto de lechos filtrantes, se resume en la tabla 3.

**Tabla 3.** Porcentaje de reducción de cada contaminante por cada tipo de celda y lecho filtrante.

	Celda de tipo 1		Celda de tipo 2		Celda de tipo 3	
	Arena	Vermiculita	Arena	Vermiculita	Arena	Vermiculita
ST	71.9	70.9	71.1	67.1	78.9	64.0
SS	97.4	80.4	87.6	86.2	90.2	83.3
DBO	43.8	24.2	26.0	25.0	22.0	15.3
DQO	16.8	76.5	31.6	74.6	13.1	70.6
N	96.8	90.1	97.1	97.1	97.3	97.7
P	92.1	94.3	89.5	92.3	92.2	92.1
SO4	58.1	58.7	58.7	55.5	61.8	54.4

Si llamamos  $C_k^j(t)$  al caudal del componente  $j$  a remover, en el  $k$ -ésimo sistema de tipo  $t$ , entonces  $C_0^j(t)$  es el caudal inicial del componente  $j$  en el sistema de tipo  $t$ . Si  $R_t^j$  es el porcentaje del componente  $j$  que deja sin remover una celda de tipo  $t$  y  $N_k^j(t)$  es la cantidad eliminada del componente  $j$  en la  $k$ -ésima celda de tipo  $t$  que no ingresará en la  $k + 1$ -ésima celda de tipo  $t$ , entonces si el balance de masa en la primer celda de tipo  $t$  es:

$$C_0^j(t) = C_0^j(t) * R_t^j + N_0^j(t) \quad t = 1, ..3, \quad j = 1, ..7$$

el balance de masa para la celda  $k$  es

$$C_{k-1}^j(t) = C_0^j(t) * (R_t^j)^k + N_{k-1}^j(t) \quad t = 1, ..3, \quad j = 1, ..7$$

El effluente  $E_t$  del conjunto de  $n_t$  celdas de tipo  $t$  es un vector de 7 componentes (los 7 contaminantes a remover) donde cada componente es

$$E_t(j) = C_0^j(t) * (R_t^j)^{n_t}$$

Teniendo en cuenta que este effluente del conjunto de celdas de tipo  $t$  es el affluente de entrada del conjunto de celdas de tipo  $t + 1$ , entonces el effluente final por componente es

$$Ef(j) = C_0^j(t) * (R_1^j)^{n_1} * (R_2^j)^{n_2} * (R_3^j)^{n_3}$$

Esta expresión, puede linealizarse respecto a sus variables enteras  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  aplicando el logaritmo natural:

$$\ln(Ef(j)) = \ln(C_0^j(t)) + n_1 * \ln(R_1^j) + n_2 * \ln(R_2^j) + n_3 * \ln(R_3^j)$$

Si  $Q$  es el vector cuya componente  $j$  indica el valor umbral de la cantidad de contaminante  $j$  que puede haber en el agua en función de la calidad requerida, entonces las restricciones del problema vienen dadas por las inecuaciones lineales

$$\ln(Ef(j)) \leq \ln(Q(j)) \quad j = 1, ..7$$

Considerando el diseño y la construcción de la unidad piloto según el modelo de Sherwood C. y Reed [5], siguiendo el nomenclador de variables de la tabla 4 se obtiene el tiempo de retención hidráulica (TRH) en cada celda:

**Tabla 4.** Nomenclador de variables

<p><math>kT</math>: Constante de reacción de primer orden dependiente de la temperatura.  <math>T</math>: Temperatura.  <math>DBO_e</math>: Concentración DBO a la entrada al sistema.  <math>DBO_s</math>: Concentración DBO a la salida al sistema.  <math>C_k^j(t)</math>: Caudal de la componente <math>j</math> a remover, en la <math>k</math>-ésima celda de tipo <math>t</math>  <math>m</math>: Pendiente  <math>y</math>: Profundidad del humedal  <math>n</math>: Porosidad.  <math>w</math>: Ancho.  <math>L</math>: Largo.  <math>As</math>: Área superficial.</p>
---

La constante  $kT$  se calcula a través de la expresión

$$kT = 1.104 * (1.6)^{T-20}$$

y el área superficial de determina como

$$As = \frac{C_{med}(\ln DBO_e - \ln DBO_s)}{kT * y * n}$$

donde  $C_{med}$  es el caudal promedio diario que ingresa al humedal.

El tiempo de retención hidráulica de la  $k$ -ésima celda del sistema  $t$  es

$$TRH_k(t) = \frac{As * y * n}{C_k(t)}$$

El problema de optimización que se obtiene es :

$$\begin{aligned} \min_{n_1, n_2, n_3} & \sum_{j=1}^7 \left( \sum_{k=1}^{n_1} TRH_k^j(1) + \sum_{k=1}^{n_2} TRH_k^j(2) + \sum_{k=1}^{n_3} TRH_k^j(3) \right) \\ \text{s.a.} & \begin{cases} \ln(Ef(j)) \leq \ln(Q(j)) & j = 1, ..7 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Si el caudal que atraviesa el humedal considerado es un valor promedio diario entonces se simplifica la expresión del tiempo de retención hidráulica y el problema de optimización deviene en la formulación:

$$\begin{aligned} \min_{n_1, n_2, n_3} & n_1 TRH(1) + n_2 TRH(2) + n_3 TRH(3) \\ \text{s.a.} & \begin{cases} \ln(Ef(j)) \leq \ln(Q(j)) & j = 1, ..7 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N} \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

lo que constituye un problema de programación lineal entero.

#### 4 Resultados numéricos

En este trabajo se utilizó la función *glpk* del software libre GNU Octave, versión 4.2.2 para resolver el problema de programación lineal entero 2. Los resultados que se reportan se obtuvieron en una computadora con procesador Intel(R) Core(TM) i5-7200U CPU@2.50 GHZ 2.7 GHZ a partir de los datos iniciales que se presentan en la tabla 5.

**Tabla 5.** Valores iniciales de los datos.

ST	SS	DBO	DQO	N	P	SO4	T	m	y	n	w	L	$C_{med}$
7476	3444	116.1	377.5	392	116.2	619.2	22	0.001	0.15	0.35	0.35	0.65	60

Los valores del vector  $Q$ , es decir, los valores límite establecidos para cada componente a remover que garanticen la calidad de agua requerida son los que se muestran en la tabla 6 expresados en mg/litro.

Los experimentos numéricos se realizaron considerando los distintos tipos de celdas a partir de las combinaciones de lechos descriptas en la tabla 7.

La tabla 8 muestra los diferentes valores obtenidos para cada uno de los subsistemas de la unidad piloto de humedal artificial. Se puede observar el número

**Tabla 6.** Valores umbrales para cada componente.

ST	SS	DBO	DQO	N	P	SO4
100	100	30	125	200	100	200

**Tabla 7.** Valores iniciales de los datos.

Experimento n°	Lecho de la celda tipo 1	Lecho de la celda tipo 2	Lecho de la celda tipo 3
1	Arena	Arena	Arena
2	Vermiculita	Vermiculita	Vermiculita
3	Arena	Arena	Vermiculita
4	Arena	Vermiculita	Arena
5	Arena	Vermiculita	Vermiculita
6	Vermiculita	Arena	Arena
7	Vermiculita	Arena	Vermiculita
8	Vermiculita	Vermiculita	Arena

necesario de celdas de cada tipo para remover los contaminantes al nivel requerido y el tiempo total de retención hidráulica. Cada uno de estos tiempos es mínimo para cada experimento. Identificar las combinaciones de tipo de planta-lecho que arrojan los tiempos mínimos absolutos representa también información acerca de un diseño óptimo del humedal.

**Tabla 8.** Valores obtenidos como soluciones del problema 1.

Experimento n°	$n_1$	$n_2$	$n_3$	TRH(hs)
1	8	18	0	15.58
2	35	0	0	18.96
3	16	1	4	11.29
4	15	4	0	<b>10.62</b>
5	15	4	0	<b>10.62</b>
6	33	0	2	18.87
7	35	0	0	18.96
8	33	0	2	18.87

## 5 Conclusiones y trabajo futuro

La utilización de humedales artificiales representa una gran oportunidad para lograr la reutilización de aguas residuales. Al poder elegir los parámetros de diseño es posible replicar y optimizar las capacidades de los humedales naturales. Es en este punto donde la creación de modelos matemáticos y los desarrollos en el campo de la optimización numérica aparecen como instrumentos sustanciales para determinar dichos parámetros de diseño. Es claro que la investigación acerca de estos humedales sostiene una demanda constante de datos de campo que den



origen y validen los modelos matemáticos. En el caso de los sistemas descriptos en este trabajo, es menester considerar otros medios filtrantes para constituir los lechos, la experimentación con otras especies vegetales y el rendimiento de las celdas o unidades que pueden crearse a partir de estas nuevas combinaciones.

## Referencias

1. Arias Martínez, S. A et al.: Fitorremediación con humedales artificiales para el tratamiento de aguas residuales porcinas. *Informador Técnico* **74**, 12–22 (2010)
2. Arteaga-Cortez, V.M. et al.: Estado del arte: una revisión actual a los mecanismos que realizan los humedales artificiales para la remoción de nitrógeno y fósforo. *Tecnología y ciencias del agua*, **10**(5), 319–342 (2019)
3. Brown , K.S.: The green clean. *Bioscience* **45**, 579–582 (1995)
4. Buffo, F.E., Vidal, M.C.: Modelo matemático para un tratamiento de aguas industriales vía optimización. In: *Proceedings of VIII MACI 2021*, pp. 615–618. ASAMACI, Argentina (2021)
5. Lara-Borrero, J.A., Vera-Puerto, I.L.: Implantación y evolución de un humedal artificial de flujo subsuperficial en Cogua, Cundinamarca, Colombia. *Ingeniería y Universidad* **9**, 47–63 (2005)
6. Llagas, Ch., Wilmer A., Gómez, A.: Diseño de humedales artificiales para el tratamiento de aguas residuales en la UNMSM. *Revista del Instituto de Investigaciones FIGMMG* **15**(17), 85–96 (2006)
7. Ma, L.O., et al.: Phytoremediation of arsenic contaminated soil and waste. In: *Annual meetings abstracts. American Society of Agronomy, Minneapolis* (2000)
8. Miranda, M., Luna-Pabello, V.: Estado del arte y perspectivas de aplicación de los humedales artificiales de flujo horizontal en México. *Serie Tratamiento Biológica de Aguas Residuales. UNAM, México* (2001)
9. Ouyang, Y.: Phytoremediation: Modeling plant uptake and contaminant transport in the soil-plant-atmosphere continuum. *Journal of Hydrology* **266**, 66–82 (2002)
10. Peña, C. Toxicología ambiental: evaluación de riesgos y restauración ambiental, <http://superfund.pharmacy.arizona.edu/toxamb/c4-3-1-1.html>. Last update: 7 Jun 2001
11. Shpiner, R., Vathi, S., Stuckey, D.C.: Treatment of oil well "produced water" by waste stabilization ponds: Removal of heavy metals. *Water research* **43**, 4258–4268 (2009)
12. Vymazal, J., Brix, H.: *Constructed wetlands for waste treatment in Europe*. Backhuys Publishers, Leiden, Netherlands (1998)