

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICO-PEDAGÓGICA EN EL AULA

Fornaro Pedro

Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales LEICI – UNLP-CONICET. 48 y 116 s/n, La Plata (1900), Buenos Aires, Argentina.
e-mail: pedro.fornaro@ing.unlp.edu.ar

1. INTRODUCCIÓN

La modelización de sistemas dinámicos es un aspecto fundamental en las ingenierías, y en particular el uso de herramientas de matematización para caracterizar el comportamiento de sistemas dinámicos es un tema central en el área del control. Teniendo este último aspecto en consideración, en el presente documento, se aborda la presentación de una actividad propuesta y desarrollada en la Cátedra Teoría de Control (TdC), la cual se dicta en el cuarto año de la carrera Ingeniería en Sistemas de la Información de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) Facultad regional La Plata (FRLP). Dicha actividad, se encuentra orientada a aportar en la formación de estudiantes en los procesos de aprendizaje, las habilidades propias de la comprensión matemática, aplicadas a la realidad por medio de los procesos de matematización y modelización.

Un modelo matemático es el resultado de la interacción entre saberes, el cual nace en un intento de dar una explicación matemática a un determinado proceso. De esta forma, el modelo vincula el mundo cognitivo de quién lo crea (el mundo de las ideas), con el mundo real (Corbalán 2015, Blomhøj 2021). Queda en evidencia entonces el estado transitivo de los modelos, así como de los procesos llevados a cabo para obtenerlos, puesto que mediante los mismos se intenta dar una explicación a fenómenos (intra o extra-matemáticos), sin necesariamente abordar a un resultado cerrado.

Cuando en particular, se intentan desarrollar herramientas matemáticas para su uso en ramas de la ingeniería, los casos de modelización extra-matemática tienen una fundamental relevancia. Por un lado, debido a que permite introducir el concepto de que no todos los problemas poseen una solución cerrada, y por otro lado y en conjugación con esto último, el proceso de modelización mediante el cual se aborda un problema de modelado matemático es sumamente rico en términos didácticos y educativos (Rodríguez & Barreiro 2018).

Adicionalmente, según (Peña & Morales 2016) la inclusión de problemas de modelización matemática en el aula puede aportar a la formación de estudiantes con actitud proactiva hacia la resolución de problemas. Esto último, puesto que es posible abordar situaciones que resultan del ámbito de interés de los estudiantes: situaciones de trabajo o de la vida cotidiana (Gómez 2015). Como resultado, es posible incluso aportar a la formación de ciudadanos críticos (Biembengut & Hein 2004, Pochulu & Aparisi 2013, Ole 2010).

La matematización requerida para llevar a cabo tareas de modelización matemática requiere de múltiples pasos, presentados por diferentes autor(e)s como una serie de etapas las cuales son abordadas recursivamente y de forma no-lineal (ver Figura 1). Sucintamente:

- En primer lugar, se debe identificar el problema en cuestión. Esto se realiza mediante la abstracción cognitiva, para delimitar los aspectos relevantes y fundamentales del problema. Debe notarse en este punto, que se simplifica la realidad para llevar el problema a términos matemáticos abordables con las herramientas disponibles.

- Una segunda etapa, involucra el uso de los saberes previos, para plantear hipótesis y la información disponible, mediante el empleo de lenguaje formal y simbólico matemático, el cual da lugar al entendimiento del problema. Este *descubrimiento* del potencial de las herramientas matemáticas disponibles permite profundizar la comprensión de las relaciones entre el problema en términos matemáticos, y el problema “real”. Es decir, colabora con entender el uso de las matemáticas como una herramienta útil para desenvolverse profesionalmente.
- A partir de los ítems anteriores, los cuales no ocurren de forma lineal, sino que se interpelan sinérgicamente, se culmina con la formalización de un modelo. Este último es perfectible, susceptible al cambio constante en tanto se evalúa su desempeño e identifican más precisamente sus falencias y virtudes.

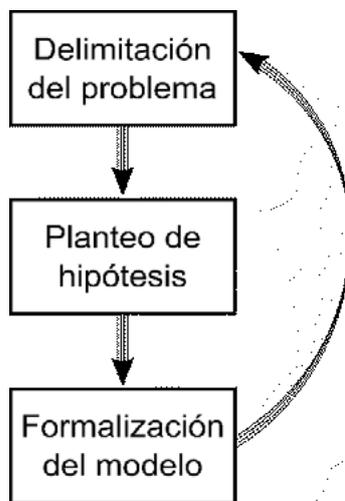


Figura 1. Pasos de un proceso de modelización.

En vista de que el modelado no es un proceso cerrado, los puntos anteriores pueden desarrollarse repetidamente, y dar lugar a nuevos modelos y situaciones de estudio a partir de la expansión de las fronteras que inicialmente delimitaban al problema. De una u otra forma, en esta experiencia desarrollada por quien lleva a cabo un proceso de modelización, se debe reflexionar exhaustivamente y realizar una toma consciente de decisiones, las cuales se orientan a fortalecer conocimientos previos y colaborar en el desarrollo de nuevos conocimientos. Podría decirse entonces, que lo valioso del aprendizaje por medio de la resolución de problemas de modelización matemática, es el proceso llevado a cabo, y no el resultado en sí mismo. En otras palabras, la modelización fomenta el pensamiento lógico matemático, lo que repercute en una mayor capacidad para conceptualizar, brindando simultáneamente las habilidades requeridas para resolver esta clase de problemas.

Por lo tanto, la serie de herramientas que se adquieren para llevar a cabo el modelado, no se circunscriben a un único problema. Por el contrario, son extrapolables a cualquier situación, y ayudan a promover la construcción de conocimientos aplicables a una amplia variedad de disciplinas y no sólo a las matemáticas. Lo que es más aún, a partir de las consideraciones previamente mencionadas, queda en evidencia el potencial que posee la inclusión de problemas de modelización para el desarrollo de competencias no sólo relacionadas con aspectos específicos de las ingenierías, sino también con los genéricos y actitudinales (Blum & Niss 1991).

En particular, la competencia de modelización matemática es adquirida paulatinamente a lo largo de la formación profesional. Comienza a desarrollarse durante los primeros años de las carreras de ingeniería, y es respaldada y consolidada en asignaturas de años superiores. Teniendo esto en consideración, a continuación, es presentada una actividad desarrollada para ser llevada a cabo en el segundo módulo de la asignatura TdC. En la tarea presentada a continuación, se entiende a la modelización matemática como una estrategia didáctica y pedagógica, por lo cual como ha sido mencionado, el foco se encuentra en el proceso llevado a cabo por el estudiantado, pero dirigiendo la atención a las necesidades de aprendizaje impuestas por el temario de la cátedra en cuestión.

2. DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD PROPUESTA

En esta sección es presentada una de las actividades desarrolladas e implementadas como herramienta en las clases del ciclo lectivo 2022, en la cátedra TdC de la carrera Ingeniería en Sistemas de la Información de la UTN - FRLP. Luego son presentados los lineamientos generales requeridos para desarrollar dicha tarea.

2.1. Objetivos

En términos generales, los objetivos perseguidos se vinculan con el desarrollo de la competencia de la modelización matemática, así como con lograr una multiplicidad de aspectos ya explicitados previamente, los cuales son listados de forma concisa a continuación:

- Aplicar herramientas de matematización para la resolución de problemas de modelización intra y extra-matemática.
- Integración de múltiples conceptos y conocimientos matemáticos para la resolución de problemas de control.
- Estimular funciones cognitivas relacionadas con la conceptualización, formulación y resolución de problemas.
- Fomentar la actitud proactiva hacia la resolución de problemas.

Por otro lado en términos específicos, y en lo que respecta al empleo de actividades de modelización matemática para la cátedra TdC, pueden plantearse los siguientes objetivos particulares:

- Diferenciar entre: sistemas discretos y continuos, lineales y no lineales, variantes e invariantes en el tiempo, causales y no causales, con y sin memoria.
- Relacionar las ecuaciones íntegro-diferenciales con los procesos de intercambio de energía en sistemas dinámicos.
- Vincular las variables físicas de los sistemas dinámicos estudiados, con los requerimientos de calidad para un sistema de control.
- Afianzar los conocimientos relacionados con la resolución de ecuaciones diferenciales de alto orden.
- Construir y evaluar modelos para sistemas lineales invariantes en el tiempo.
- Fomentar el trabajo y la actividad grupal.
- Introducirse en el empleo de herramientas de simulación para sistemas dinámicos.

Estos objetivos, son requeridos para avanzar en los contenidos de TdC. Como es posible evidenciar (a excepción de los últimos dos ítems), los objetivos se encuentran listados en orden de dificultad, y culminan con la obtención de un modelo. Por lo tanto, puede esperarse que sean abordadas todas las etapas relacionadas con el proceso de modelización matemática descritas en la introducción y detalladas en (Blomhøj 2021, Rodríguez & Barreiro 2018) entre otras.

2.2. Saberes previos requeridos

Los objetivos particulares presentados son mayoritariamente conceptuales, pero requieren de una comprensión básica de elementos y contenidos de cátedras previas. Por ejemplo, en lo respecta a contenidos matemáticos se requieren conocimientos de ecuaciones diferenciales de orden superior, transformadas de Laplace y Z, entre otros, así como también son requeridos conocimientos de otras disciplinas (física o química).

Adicionalmente, en vista de que la cátedra es dictada en el cuarto año de la carrera, es deseable que se encuentren familiarizados con conceptos de optimización en la toma de decisiones, y que posean una actitud positiva hacia el abordaje de situaciones de

modelización y resolución de problemas. Si esto no fuera así, se espera que la dinámica adoptada y las actividades desarrolladas colabore en estos aspectos de la formación profesional. Similarmente, las actividades de modelización podrían ser desarrolladas grupalmente, lo cual resultaría en el aporte a las competencias actitudinales.

2.3. Enunciado de la actividad propuesta

Controlar un determinado proceso o fenómeno físico es inherente a nuestra naturaleza. Tan sólo imagine caminar con los ojos cerrados... Es evidente que en este proceso se toma información del medio circundante para tomar decisiones in situ, tendientes a mantenernos de pie, sentarnos, tomar un objeto con nuestras manos (o pies), o bien realizar cualquier acción que requiera vincularnos con nuestros alrededores.

En el control de sistemas dinámicos en la industria, se regula el funcionamiento de complejos procesos. Para comenzar con el diseño de controladores y para aplicar las herramientas de la teoría de control, es necesario contar con información acerca de cómo es el comportamiento del sistema a controlar y de las variables de interés en dichos sistemas.

Para adentrarse en algunas de las problemáticas del control en procesos industriales, se propone hallar el rango de funcionamiento dentro del cual el sistema presentado en la imagen se comporta linealmente.

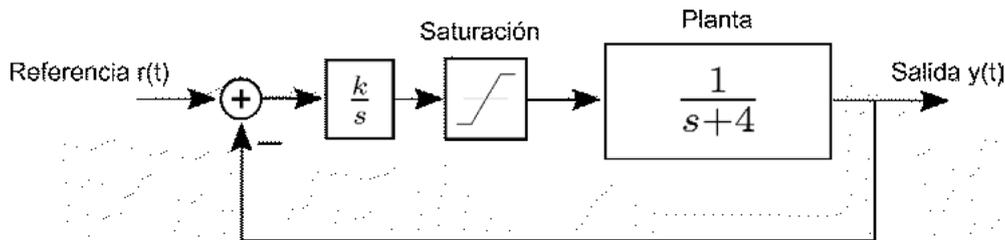


Figura 2. Esquema del lazo de control bajo estudio.

Para esto debería identificar claramente las variables involucradas, así como establecer lineamientos claros para los requerimientos de control y la referencia del sistema. Por último, evalúe cómo podría solucionar el inconveniente presentado por la saturación del actuador.

2.4. Lineamientos para la resolución de la tarea propuesta

La actividad propuesta debe ser resuelta de forma grupal, en grupos de no más de 3 estudiantes. La tarea debe entregarse en un plazo de tres semanas, y se disponen de 3 clases prácticas para realizar consultas al respecto. Simultáneamente, podrán consultar en los foros de la cátedra, y podrá contarse con los desarrollos realizados en las clases teóricas, los cuales servirán como complemento para el desarrollo de la actividad propuesta.

3. EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS

En esta sección, se detallan y comparan los resultados esperados y obtenidos de la utilización del problema descrito en la sección anterior. Para esto en primer lugar se detallan los resultados esperados, enumerando los ejes temáticos que atraviesa la actividad propuesta. Luego, es presentado el balance de los resultados obtenidos junto con las limitaciones más comunes encontradas para la aplicación de esta estrategia didáctico-pedagógica.

3.1. Resultados esperados

Al abordar la resolución de la tarea propuesta, deben tratarse una amplia multiplicidad de aspectos relacionados con la teoría de control, siendo el objetivo principal el modelado del efecto de la saturación en el lazo de control. Las estrategias para el abordaje de este problema se dejan a criterio del estudiantado, pudiendo incluso proveerse de herramientas y materiales

externos y de simulación, tales como programas dedicados (Por ejemplo, Matlab - Simulink). Al finalizar la tarea presentada, deberían haberse abordado aspectos relacionados con el álgebra de bloques, y con la resolución de ecuaciones dinámicas. Esto debería brindarles una noción acerca de los requerimientos de un sistema de control, y simultáneamente proveerles de un mayor entendimiento de algunas limitaciones presentes en sistemas reales.

Como en todo problema de modelado, la respuesta final no es única. Por ejemplo, en este caso, el efecto de saturación no depende únicamente de los requerimientos del sistema de control, y del valor brindado a la ganancia k del lazo, sino también de las condiciones iniciales y de la función de referencia utilizada.

Dado que esta tarea podría desarrollarse en simultáneo con las clases teóricas, los estudiantes podrían incorporar paulatinamente algunos conceptos presentados en las clases. Por ejemplo: los procesos para la determinación de las variables físicas más relevantes de un sistema y la importancia de estas variables desde el punto de vista del control de sistemas, o bien algunas propiedades numéricas y matemáticas de la transformada de Laplace, sólo por mencionar algunos conceptos.

Las comisiones de estudiantes que actualmente cursan la cátedra TdC, no poseen gran experiencia en la modelización de sistemas. Es por este motivo, que es esperable que trabajar con estos problemas colabore en el abordaje de problemas reales de ingeniería, puesto que una adecuada modelización, conceptualización y entendimiento de los sistemas físicos y sus limitaciones, es el primer paso requerido para la solución de problemas más complejos en el área del control de sistemas.

3.2. Resultados obtenidos

En términos generales, el estudiantado se mostró receptivo con la problemática propuesta. Fueron conformados 13 grupos, 10 de los cuales abordaron a diferentes respuestas posibles. Adicionalmente, 2 grupos realizaron investigaciones complementarias, las cuales fueron empleadas para solucionar el efecto del *windup* producto de la saturación del actuador y del control integral utilizado.

Entre las problemáticas más comunes, se encontraron:

- Falta de disparadores iniciales. Para evitar la inacción en la resolución del problema, es fundamental utilizar preguntas disparadoras, que permitan incorporar herramientas de modelado. Por ejemplo, estudiar y comprender en detalle el sistema SIN la saturación, para luego incorporar este efecto.
- Inconvenientes y fallas para la resolución de problemas matemáticos básicos. A pesar de estos inconvenientes, un aspecto notorio en este sentido es cómo el uso de la resolución de problemas de modelado colabora en el desarrollo de habilidades de matematización. Este marco (de resolución de problemas de modelado) sirve como mediador para el desarrollo y fortalecimiento de sus habilidades cognitivas y matemáticas.
- Inconvenientes para la redacción de los resultados obtenidos. El desarrollo de un modelo matemático requiere, no sólo de las habilidades para obtenerlo, sino también de un conjunto de herramientas específicas comunicacionales para realizar una presentación acorde a lo esperado en el cuarto año de una carrera de ingeniería. Por lo tanto, esta actividad, así como otras actividades desarrolladas, colaboran en el desarrollo de estos saberes.
- Falta de experiencia en el uso de los programas de simulación.
- Limitaciones del personal docente de la cátedra. Para mediar eficazmente a todo el estudiantado, se podría llegar a requerir de un número de docentes considerable. Esto depende en última instancia, de la problemática estudiada y del número de estudiantes de cada comisión. Dado que es fundamental la presencia de ayudantes y profesores para

guiar el proceso cognitivo, deben considerarse ejercicios de modelado que no comprometan la calidad de esta experiencia.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo ha sido abordado el desarrollo de una actividad de modelización matemática, propuesta para ser empleada en la cátedra TdC. Para esto en primer lugar, fue presentado de forma amplia el marco teórico que sustenta la utilización de la modelización como una herramienta didáctico-pedagógica para el desarrollo de múltiples aptitudes y competencias. Luego fue presentada una actividad propuesta, la cual consta de realizar un proceso complejo de modelado. Este debería realizarse desde cero: estudiar por su cuenta el problema planteado, y aplicar de forma consciente y autónoma, las herramientas que tengan a disposición, tanto matemáticas como de otras tecnologías de información y comunicación.

Los resultados obtenidos, indican que esta clase de técnica de enseñanza-aprendizaje basada en la modelización matemática, es una potente herramienta para utilizar en el aula. Al implementar estas técnicas, se espera que se concluya el proceso de modelado con una adecuada comprensión fenomenológica de los sistemas evaluados, pero fundamentalmente, que se apliquen de forma consciente los pasos de modelización matemática. Esto último, porque el proceso de modelado realizado por el estudiantado colabora con los procesos cognitivos requeridos para reforzar la competencia de modelización matemática y de resolución de problemas, así como también competencias relacionadas con aspectos comunicacionales y de trabajo en grupo.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Biembengut, M. S., y Hein, N. (2004, agosto). *Modelización matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática, 16 (2), 105–125.
- Blomhøj, M. (2021, agosto). Modelización matemática - una teoría para la práctica. Revista de Educación Matemática, 23 (2).
- Blum, W., y Niss, M. (1991). *Argumentos y obstáculos para la inclusión de tareas de modelización en el aula*. Educational Studies in Mathematics (22), 37–68.
- Corbalán, F. (2015, julio)., Modelización matemática - una teoría para la práctica. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas (69).
- Gómez, R. P. (2015, julio). *Resolución de problemas y modelización matemática para la clase*. Modelización matemática - una teoría para la práctica. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas (69).
- Ole, S. (2010, octubre). Mathematics: A critical rationality? Philosophy of Mathematics Education Journal - Special Issue on Critical Mathematics Education, 25 , 1–24.
- Peña-Páez, L. M., y Morales-García, J. F. (2016, marzo). *La modelización matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva*. Revista educación en ingeniería, 11 (21), 64–71.
- Pochulu, M. D., y Aparisi, L. A. (2013). *Obstáculos y desafíos que enfrentan los profesores en escenarios de modelización*. Matemática Educativa: La formación de profesores, 251–266.
- Rodríguez, M., y Barreiro, P. (2018). *Modelización y resolución de problemas*. Matemática Educativa: La formación de profesores, 17–26.