



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

Un estudio sobre estructuras hemi-implicativas

Tesista:

Hector Federico Mallea

Director:

José Luis Castiglioni

Codirectores:

Hernán Javier San Martín

Víctor Leandro Fernández

Año: 2023

Índice general

Índice de figuras	II
Índice de tablas	III
Introducción general	1
1. Preliminares	4
1.1. Retículos, álgebras de Heyting y álgebras de Hilbert.	4
1.2. Retículos subresiduados	11
1.3. Estructuras hemi-implicativas	12
1.4. Filtros, filtros implicativos y congruencias	14
2. Subreductos y generalizaciones de los retículos subresiduados	20
2.1. Preliminares	20
2.2. Subreductos de retículos subresiduados	24
2.2.1. Los $\{\rightarrow\}$ -subreductos de retículos subresiduados	24
2.2.2. Los $\{\wedge, \rightarrow\}$ -subreductos de retículos subresiduados . .	33
2.3. Una generalización de los retículos subresiduados	38
2.4. Retículos y semi-retículos de sub-Hilbert	41
3. Retículos de Sub-Hilbert	49
3.1. sHL -ternas	49
3.2. Retículos de sub-Hilbert como sHL -ternas	54
3.3. Congruencias de retículos de sub-Hilbert	57
4. Sobre una nueva variedad de semi-retículos hemi-implicativos	63
4.1. Preliminares	63
4.2. La variedad ShIS	66
4.3. Representación para la variedad ShIS	72
4.4. ShIS como reducto	76

5. Un poco de lógica	79
5.1. Preliminares	79
5.2. La lógica L_1	82
5.3. Expansiones de L_1	88
Bibliografía	98
Índice de acrónimos, definiciones y símbolos	101

Índice de figuras

1.1. Retículo distributivo de cuatro elementos	15
2.1. Retículo subresiduado de tres elementos	24
2.2. Los diagramas de Hasse del retículo no modular con cinco elementos, N y el retículo modular no distributivo con cinco elementos, M	39
3.1. Ejemplo de HL -par	50
3.2. Retículo subresiduado de seis elementos	53
3.3. Retículo no distributivo de cinco elementos	53
4.1. Suma ordinal entre el álgebra booleana de cuatro elementos y el conjunto ordenado de los números naturales con el orden opuesto.	64
4.2. Ejemplo de álgebra de ShIS	69
4.3. Subvariedades de hIS	70
4.4. Subvariedades de hIL	77

Índice de tablas

2.1.	Ejemplo de retículo subresiduado en el sentido amplio	39
2.2.	Ejemplo de retículo subresiduado en el sentido amplio	39
4.1.	Ejemplo de álgebra de RWHIS que no pertenece a sHS	65
4.2.	Ejemplo de álgebra de hIS que no pertenece a ShIS	66

Agradecimientos

A José Luis Castiglioni y a Hernán San Martín, quienes sin conocerme depositaron su confianza en mí y me orientaron durante el desarrollo de esta tesis con sabiduría, paciencia, humildad y honestidad. Su ayuda fue determinante para que este trabajo llegara a concretarse.

A Víctor Fernández por su guía, consejos, enseñanzas y por haber sido fundamental para mi formación académica durante los últimos años. Por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo, pero principalmente le agradezco por haber estado a mi lado siempre que fue necesario.

A Belén por apoyarme incondicionalmente en todo lo que fuera necesario. Por estar conmigo en las buenas y en las malas, y junto a Emma y Lucía brindarme su amor desinteresado.

A mis padres y a mis suegros por su apoyo, cariño y su buena predisposición como abuelos, lo cual permitió que pudiera invertir más tiempo en mi trabajo.

A CONICET y a la Universidad Nacional de San Juan, por otorgarme la beca que me permitió realizar el doctorado.

A la Universidad Nacional de la Plata, al Departamento de matemática de la FFHA y al ICB por el apoyo institucional que me brindaron durante el transcurso de mi doctorado.

Introducción general

El término hemi-residuo proviene de “debilitar” en cierto sentido la condición que caracteriza a un tipo de estructuras, llamadas residuadas. Esto es, una estructura que tiene como reducto a un monoide residuado, es decir: un monoide conmutativo ordenado $\mathbf{M} = (M, \leq, \cdot, e)$ ¹ dotado con una operación binaria $\rightarrow$ tal que para todo $a, b, c \in M$,

$$a \cdot b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \rightarrow c.$$

Esta última es usualmente llamada condición de residuación, y es equivalente a la conjunción de los siguientes condicionales:

(*r*) Para todo $a, b, c \in M$, $a \cdot b \leq c$ implica $a \leq b \rightarrow c$.

(*l*) Para todo $a, b, c \in M$, $a \leq b \rightarrow c$ implica $a \cdot b \leq c$.

Una estructura se dice *r*-hemi-residuada o *l*-hemi-residuada, si verifica la condición (*r*) ó (*l*), respectivamente. Claramente, una estructura que sea a la vez *l* y *r*-hemi-residuada será residuada. Es interesante notar que la condición de *l*-hemi-residuación es equivalente a la siguiente:

$$\text{Para todo } a, b \in M \text{ se cumple que } a \cdot (a \rightarrow b) \leq b.$$

En esta tesis estamos interesados en una clase particular de estructuras *l*-hemi-residuadas, la formada por aquellas cuya operación de monoide es idempotente; es decir, cuando el monoide es un semi-retículo inferior. En tal caso, el orden es el del semi-retículo.

Diremos que un álgebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \rightarrow, 1)$ de tipo (2,2,0) es *l*-hemi-implicativa (de ahora en adelante hemi-implicativa) si además, para cada $a \in A$, verifica que $a \rightarrow a = 1$.

¹Una estructura $(M, \leq, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo ordenado si $(M, \leq)$ es un conjunto ordenado, $(M, \cdot, e)$ es un monoide conmutativo y para cada $a, b, c \in M$ si $a \leq b$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Las estructuras hemi-implicativas fueron presentadas en [24]. En ese trabajo se estudiaron los semi-retículos y los retículos hemi-implicativos bajo el nombre de semi-retículos y retículos implicativos débiles, respectivamente. Posteriormente, en [5] se realizó un estudio más detallado de los semi-retículos hemi-implicativos.

Cabe mencionar que la clase de álgebras hemi-implicativas es una variedad. Nuestro objetivo principal en este trabajo es estudiar en detalle las subvariedades de la variedad de semi-retículos y la de los retículos hemi-implicativos. La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera: comenzamos presentando las variedades de retículos y semi-retículos hemi-implicativos, y mencionamos algunos ejemplos conocidos en la literatura de este tipo de estructuras. Entre estos ejemplos se destacan:

- Los semi-retículos implicativos [21].
- Las *RWH*-álgebras [11].
- Los retículos subresiduados [16].
- Las álgebras de semi-Heyting [22].
- Las álgebras de Hilbert con ínfimo [17].

Por otro lado, la clase de las álgebras de Hilbert, estudiadas en [15], forman una variedad que coincide con la de los $\{\rightarrow, 1\}$ -subreductos de las álgebras de Heyting. Esto nos motivó a investigar sobre una posible caracterización tanto para la clase de los $\{\rightarrow\}$ -subreductos, como para la clase de los $\{\rightarrow, \wedge\}$ -subreductos de los retículos subresiduados; este problema se aborda en la primera parte del Capítulo 2. Posteriormente, estudiamos una generalización de los retículos subresiduados. Por último, presentamos una variedad que generaliza tanto a la variedad de las álgebras de Hilbert como a la de las álgebras de Hilbert con ínfimo, cuyos miembros llamamos semi-retículos de sub-Hilbert.

En el Capítulo 3, mostramos que tanto la variedad de los retículos subresiduados, como la de los retículos de Hilbert comparten la propiedad de que pueden representarse mediante ciertas inmersiones. Este hecho nos motivó para hallar un teorema de representación para la variedad de los retículos de sub-Hilbert. En lo que resta del capítulo realizamos un breve estudio de las congruencias sobre los retículos de sub-Hilbert.

En el Capítulo 4 introducimos una subvariedad propia de semi-retículos hemi-implicativos que contiene propiamente a cada una de las subvariedades estudiadas en esta tesis. Además, damos un teorema de representación para la variedad hallada.

Por último, el hecho de que Epstein y Horn presentaran en [16] un cálculo proposicional asociado a la variedad de los retículos subresiduados nos motivó al desarrollo del Capítulo 5, en el cual realizamos un breve estudio de algunas lógicas proposicionales algebrizables, cuyas semánticas algebraicas coinciden con las clases de álgebras de los subreductos de los retículos subresiduados, dadas en el Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones, propiedades y notaciones que se usarán a lo largo de esta tesis. Comenzamos dando los conceptos previos necesarios para presentar el tema principal de este trabajo, que es el de las estructuras hemi-implicativas. Por último, exponemos nociones básicas sobre filtros, filtros implicativos y congruencias.

1.1. Retículos, álgebras de Heyting y álgebras de Hilbert.

Semi-retículos

Un conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq)$, de ahora en adelante poset, es un **semi-retículo inferior** si para cada $a, b \in M$, existe el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$, el cual denotamos como $a \wedge b$.

El concepto dual de semi-retículo inferior se denomina **semi-retículo superior**, esto es: un poset $(J, \leq)$ tal que para cada $a, b \in J$, existe el supremo del conjunto $\{a, b\}$, al cual denotamos como $a \vee b$.

De ahora en adelante trabajamos, principalmente, con el concepto de semi-retículo inferior y hacemos referencia a este como semi-retículo.

Dado un semi-retículo $(M, \leq)$, podemos definir la operación ínfimo $\wedge : M \times M \rightarrow M$. Notar que $\wedge$ es una función que preserva el orden en ambos argumentos y es claro que para cada $a, b \in M$, $a \leq b$, si y sólo si, $a \wedge b = a$.

Por esto último, podemos definir un semi-retículo como una estructura algebraica, de la siguiente manera: un álgebra $(M, \wedge)$ de tipo 2 es un semi-retículo si se verifican las siguientes identidades:

- $a \wedge a = a,$

- $a \wedge b = b \wedge a$,
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

Decimos que $(M, \wedge)$ es **acotado superiormente** si existe $1 \in M$, tal que, para cada $a \in M$ se verifica $a \wedge 1 = a$. De esto se deduce que M tiene último elemento; en ese caso escribimos $(M, \wedge, 1)$, donde 1 es el último elemento de $(M, \leq)$.

La clase cuyos elementos son los semi-retículos acotados superiormente constituyen una variedad.

A continuación presentamos dos resultados que serán de gran utilidad en secciones posteriores.

Lema 1. Sean $(A, \wedge, 1)$ un semi-retículo acotado superiormente y $\rightarrow$ una operación binaria tal que $x \leq y$, si y sólo si, $x \rightarrow y = 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Si $x \leq y$ entonces $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$ para cada $x, y, z \in A$,
- (ii) $x \rightarrow (y \wedge z) \leq (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$ para cada $x, y, z \in A$,
- (iii) $x \rightarrow (y \wedge z) \leq x \rightarrow y$ para cada $x, y, z \in A$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sabemos que $y \wedge z \leq y$ e $y \wedge z \leq z$. Luego, aplicando (i) resulta $x \rightarrow (y \wedge z) \leq x \rightarrow y$ y $x \rightarrow (y \wedge z) \leq x \rightarrow z$. Entonces $x \rightarrow (y \wedge z) \leq (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$, como queríamos demostrar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es consecuencia de (ii) y de que $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) \leq x \rightarrow y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si $x \leq y$ entonces $x \wedge y = x$. Además, por (iii) tenemos que $z \rightarrow (x \wedge y) \leq z \rightarrow y$. Por lo tanto $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$. $\square$

Lema 2. Sea $(A, \wedge, 1)$ un semi-retículo acotado superiormente y $\rightarrow$ una operación binaria tal que $x \leq y$, si y sólo si, $x \rightarrow y = 1$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Si $x \leq y$ entonces $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$ para cada $x, y, z \in A$,
- (ii) $x \rightarrow y \leq (x \wedge z) \rightarrow y$ para cada $x, y, z \in A$,
- (iii) $(x \vee y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$ para cada $x, y, z \in A$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sabemos que $x \wedge z \leq x$, luego aplicando (i) resulta $x \rightarrow y \leq (x \wedge z) \rightarrow y$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Aplicando (ii) tenemos $(x \vee y) \rightarrow z \leq ((x \vee y) \wedge x) \rightarrow z$ y

$(x \vee y) \rightarrow z \leq ((x \vee y) \wedge y) \rightarrow z$; esto es equivalente a $(x \vee y) \rightarrow z \leq x \rightarrow z$ y $(x \vee y) \rightarrow z \leq y \rightarrow z$. Luego $(x \vee y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si $x \leq y$ entonces $x \vee y = y$. Además, por (iii) tenemos que $(x \vee y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$. Luego $y \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$, como queríamos demostrar. $\square$

Retículos

Un **retículo** es un poset $(L, \leq)$ tal que para cada $a, b \in L$ existen $a \wedge b$ y $a \vee b$. Los retículos también pueden definirse como estructuras algebraicas, de la siguiente manera: un álgebra $(L, \wedge, \vee)$ de tipo (2,2) es un retículo si se cumplen las siguientes identidades:

- $a \wedge a = a, a \vee a = a$;
- $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$;
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;
- $a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$.

Notar que:

$$a \leq b, \text{ si y sólo si, } a = a \wedge b, \text{ si y sólo si, } b = a \vee b$$

De ahora en adelante, si no hay lugar a confusión, un retículo $(L, \wedge, \vee)$ será denotado directamente por su conjunto universo L .

Decimos que un retículo L es acotado si existen elementos $0, 1 \in L$ tales que se satisfacen las siguientes identidades:

- $a \wedge 0 = 0$,
- $a \vee 1 = 1$.

De esto último se deduce que 0 y 1 son el primer y último elemento de L , respectivamente.

Un retículo L es **completo** si para cada subconjunto A de L , el ínfimo y supremo de A existen en L . Esto es, para cada $A \subseteq L$, existen $x, y \in L$ tal que x es el ínfimo del conjunto A , esto lo denotamos como $x = \bigwedge A$, e y es el supremo, esto es $y = \bigvee A$. Todo retículo completo es acotado, donde $0 = \bigvee \emptyset$ y $1 = \bigwedge \emptyset$.

Un retículo L se dice **distributivo** si para cada $a, b, c \in L$ satisface cualquiera de las siguientes leyes distributivas equivalentes:

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Álgebras de Heyting

Las álgebras de Heyting constituyen una de las generalizaciones de las álgebras de Boole más estudiadas y corresponden a la semántica algebraica de la lógica intuicionista.

Un **álgebra de Heyting** es un álgebra $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado, y verifica las siguientes identidades:

- $x \rightarrow x = 1,$
- $(x \rightarrow y) \wedge y = y,$
- $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y,$
- $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z),$
- $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z).$

Las álgebras de Heyting forman una variedad, la cual denotamos con **Hey**.

WH-álgebras y RWH-álgebras

Las álgebras de Heyting débiles fueron presentadas en [3, 11]. Estas estructuras generalizan naturalmente a las álgebras de Heyting. Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ es un **álgebra de Heyting débil** [11], o **WH-álgebra** en forma abreviada, si $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y verifica las siguientes identidades:

- 1) $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) = a \rightarrow (b \wedge c),$
- 2) $(a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) = (a \vee b) \rightarrow c,$
- 3) $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c,$
- 4) $a \rightarrow a = 1.$

Indicamos con **WH** a la variedad formada por estas álgebras.

Sea A una WH-álgebra. Se siguen de [11, Proposición 3.2] las siguientes propiedades:

- (M1) Para cada $x, y, z \in A$, si $x \leq y$ entonces $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.
- (M2) Para cada $x, y, z \in A$, si $x \leq y$ entonces $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$.

Definición 1. Una **RWH-álgebra** A es una **WH-álgebra** tal que para cada $a, b \in A$ satisface la desigualdad

$$(R) \quad a \wedge (a \rightarrow b) \leq b.$$

Las **RWH-álgebras** fueron presentadas en [11]. Indicamos con **RWH** a la variedad formada por estas álgebras.

Observación 3. Notar que en toda **RWH-álgebra** se verifica que $x \leq y$, si y sólo si, $x \rightarrow y = 1$. En efecto, si $x \leq y$, por **(M2)**, resulta $x \rightarrow x \leq x \rightarrow y$. Como $x \rightarrow x = 1$, se tiene $x \rightarrow y = 1$.

Recíprocamente, si $x \rightarrow y = 1$ entonces $y \geq x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge 1 = x$.

Todo retículo distributivo acotado puede dotarse de al menos una estructura de **RWH-álgebra**, como puede observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Sean A un retículo distributivo acotado, $\rightarrow$ la operación binaria definida de la siguiente manera:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{si } x \not\leq y \end{cases}$$

Una prueba directa muestra que A , dotado con esta operación, es una **RWH-álgebra**.

Álgebras de Hilbert

Las álgebras de Hilbert son la contraparte algebraica del fragmento implicativo de la lógica proposicional intuicionista. Todo lo expuesto sobre las álgebras de Hilbert en esta sección se puede consultar en [15].

Definición 2. Un álgebra $(A, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 0)$ es un **álgebra de Hilbert** si satisface las siguientes condiciones para cada $a, b, c \in A$:

- 1) $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$,
- 2) $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))) = 1$,
- 3) $a \rightarrow b = b \rightarrow a = 1$ implica $a = b$.

En [15] se probó que la clase de las álgebras de Hilbert es una variedad, a la que denotamos como **H**. En toda álgebra de Hilbert tenemos un orden parcial, $\leq$, definido como $a \leq b$, si y sólo si $a \rightarrow b = 1$, llamado *orden natural*. En relación con este orden, 1 es el último elemento. Notar que en todo conjunto ordenado con último elemento podemos definir al menos una estructura de álgebra de Hilbert, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Sea $(A, \leq, 1)$ un poset con último elemento. Se muestra en [15], que la operación binaria $\rightarrow$, dada por

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x \not\leq y \end{cases}$$

hace de $(A, \rightarrow, 1)$ un álgebra de Hilbert.

En el siguiente lema exponemos algunas identidades válidas en las álgebras de Hilbert, que serán de utilidad en capítulos posteriores. Puede consultarse la prueba en [15].

Lema 6. Sean A un álgebra de Hilbert y $a, b, c \in A$. Se satisfacen las siguientes condiciones:

- 1) $a \leq b \rightarrow a$,
- 2) $a \rightarrow a = 1$,
- 3) $1 \rightarrow a = a$,
- 4) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$,
- 5) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$,
- 6) $a \leq b$ implica $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ y $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$,
- 7) $a \rightarrow b \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$.

Álgebras de Hilbert con ínfimo

Como se mencionó en esta sección, toda álgebra de Hilbert tiene un orden natural, que viene dado por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a \rightarrow b = 1.$$

Como consecuencia, toda álgebra de Hilbert es un conjunto ordenado. Por lo tanto, tiene sentido considerar la clase de aquellas álgebras de Hilbert cuyo conjunto ordenado subyacente es un semi-retículo.

Definición 3. Un **álgebra de Hilbert con ínfimo** es un álgebra $(A, \rightarrow, \wedge, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo con último elemento 1, $(A, \rightarrow, 1)$ es un álgebra de Hilbert y para cada $a, b \in A$ se verifica

$$a \wedge b = a, \text{ si y sólo si, } a \rightarrow b = 1. \quad (1.1)$$

La clase de álgebras de Hilbert con ínfimo fueron estudiadas extensivamente en [17].

Observación 7. *Las álgebras de Hilbert con ínfimo se pueden definir equivalentemente como un álgebra $(A, \rightarrow, \wedge, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo con último elemento 1, $(A, \rightarrow, 1)$ es un álgebra de Hilbert y verifica las siguientes identidades:*

$$HS1. \ a \wedge (a \rightarrow b) \leq b,$$

$$HS2. \ c \rightarrow (a \wedge b) \leq (c \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow b).$$

En efecto, sean $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ un álgebra de Hilbert con ínfimo y $a, b, c \in A$. Dado que $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b$ entonces por hipótesis y (5) del Lema 6, resulta

$$\begin{aligned} 1 &= (a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) \\ &= ((a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow a) \rightarrow ((a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Además $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a$, en consecuencia

$$(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow a = 1. \quad (1.3)$$

Por (1.2) y (1.3), tenemos que $1 \rightarrow ((a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b) = 1$. Aplicando (3) del Lema 6, resulta $(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b = 1$. Por lo tanto $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$.

Probemos ahora HS2., como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, entonces por 6) del Lema 6, tenemos que $c \rightarrow (a \wedge b) \leq c \rightarrow a$ y $c \rightarrow (a \wedge b) \leq c \rightarrow b$, en consecuencia $c \rightarrow (a \wedge b) \leq (c \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow b)$. Recíprocamente, sea $a \wedge b = a$, luego usando $c = a$ en HS2., tenemos que $a \rightarrow a \leq (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b)$, luego $1 \leq a \rightarrow b$, en consecuencia $a \rightarrow b = 1$. Supongamos ahora que $a \rightarrow b = 1$, entonces usando HS1., resulta que $a \leq b$, por lo tanto $a \wedge b = a$.

Como consecuencia de la Observación 7, la clase de las álgebras de Hilbert con ínfimo es una variedad, a la cual denotamos con $\mathbf{Hil}^\wedge$.

Ejemplo 8. *Si consideramos un semi-retículo acotado superiormente A y lo dotamos con la operación definida en el Ejemplo 5 obtenemos un álgebra de Hilbert con ínfimo.*

Retículos de Hilbert

Definición 4. *Un **retículo de Hilbert** es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ es un álgebra de Hilbert con ínfimo y $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo (no necesariamente distributivo).*

Por la Observación 7 podemos afirmar que la clase de los retículos de Hilbert es una variedad, a la que denotamos como **HL**. Otra caracterización bien conocida de las álgebras de Hilbert [4, 15, 6] es como $\{\rightarrow, 1\}$ -subreductos de las álgebras de Heyting.

Ejemplo 9. Si consideramos un retículo acotado A y lo dotamos con la operación definida en el Ejemplo 5 obtenemos un retículo de Hilbert.

1.2. Retículos subresiduados

Los retículos subresiduados fueron presentados y estudiados por Epstein y Horn en [16].

Definición 5. Un **retículo subresiduado** es un par (A, D) , tal que A es un retículo distributivo acotado y D es un subretículo acotado de A tal que para cada $a, b \in A$ el conjunto

$$E_{ab} := \{d \in D \mid d \wedge a \leq b\}$$

tiene elemento máximo. En este caso definimos la operación binaria $\rightarrow$ como sigue

$$a \rightarrow b := \max E_{ab}$$

Observación 10. ■ Notar que $D = \{a \in A : 1 \rightarrow a = a\}$.

- Si (A, D) es un retículo subresiduado entonces $(D, \rightarrow)$ es un álgebra de Heyting, que es una subálgebra del retículo subresiduado $(A, \rightarrow)$ [16].

Los retículos subresiduados también se pueden definir como una estructura algebraica, de la siguiente manera:

Definición 6. Un **retículo subresiduado** es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$, tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y satisface las siguientes ecuaciones:

$$(A1) \quad x \rightarrow x = 1,$$

$$(A2) \quad x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y),$$

$$(A3) \quad x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$$

$$(A4) \quad z \rightarrow (x \wedge y) = (z \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y),$$

$$(A5) \quad (x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z),$$

$$(A6) \quad (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow z).$$

Como consecuencia de esta definición tenemos que la clase de los retículos subresiduados es una variedad, a la cual denotamos con **SRL**.

Observación 11. En [11], Celani y Jansana realizaron un breve estudio de los retículos subresiduados, donde se presenta a **SRL** como una subvariedad de **RWH**.

1.3. Estructuras hemi-implicativas

Las estructuras hemi-implicativas fueron estudiadas en [24] y [5]. Estas constituyen el tema central de esta tesis. En particular, estudiamos los semi-retículos y retículos hemi-implicativos, y la relación de estos con diversas clases de álgebras conocidas en la literatura.

Semi-retículos hemi-implicativos

Definición 7. Un álgebra $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ es un **semi-retículo hemi-implicativo** si $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente y para cada $a, b, c \in A$ se verifican las siguientes condiciones:

- (1) $a \rightarrow a = 1$,
- (2) $a \leq b \rightarrow c$ implica $a \wedge b \leq c$.

La siguiente observación es de gran importancia en el estudio de las estructuras hemi-implicativas.

Observación 12. Es importante mencionar que la condición (2) de la definición de semi-retículo hemi-implicativo podemos reemplazarla por la siguiente: $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ para cada $a, b \in A$. En efecto, si se verifica (2), dado que $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$, resulta $(a \rightarrow b) \wedge a \leq b$. Recíprocamente si $a \leq b \rightarrow c$ entonces $b \wedge a \leq b \wedge (b \rightarrow c)$, además como $b \wedge (b \rightarrow c) \leq c$, resulta $b \wedge a \leq c$.

Por la Observación 12 podemos deducir que la clase cuyos elementos son los semi-retículos hemi-implicativos es una variedad; la cual indicamos con la sigla **hIS**. A continuación mencionamos algunas subvariedades de **hIS**.

- (S1) Los semi-retículos implicativos fueron presentados y estudiados por Némitz en [21]. Un **semi-retículo implicativo** es un álgebra $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente, y para cada $a, b, c \in A$ se verifica que $a \wedge b \leq c$, si y sólo si,

$a \leq b \rightarrow c$. La clase de los semi-retículos implicativos es una variedad, a la que denotamos con **IS**.

En todo semi-retículo implicativo se verifica la ecuación $x \rightarrow x = 1$ [ver Lema 2.1, [21]]. En consecuencia, todo semi-retículo implicativo es un semi-retículo hemi-implicativo, es decir **IS** es una subvariedad de **hIS**.

- (S2) La variedad de las álgebras de Hilbert con ínfimo **Hil**[^], es una subvariedad de **hIS**. En consecuencia, el Ejemplo 8, es también un ejemplo de un álgebra de **hIS**.

Retículos hemi-implicativos

Definición 8. *Un **retículo hemi-implicativo**¹ es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que*

- (1) $(A, \wedge, \vee, 1)$ es un retículo con último elemento 1,
- (2) $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ es un semi-retículo hemi-implicativo.

La clase cuyos elementos son los retículos hemi-implicativos es una variedad, a la que denotamos como **hIL**.

A continuación mencionamos algunas subvariedades conocidas de retículos hemi-implicativos.

- (S3) Es consecuencia de la Definición 1 que **RWH** es una subvariedad de **hIL**. Por esto, el retículo dado en el Ejemplo 4, es hemi-implicativo.
- (S4) La variedad **SRL**, de los retículos subresiduados, es una subvariedad de **hIL**.
- (S5) Un **álgebra de semi-Heyting** es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo acotado, y se verifican las siguientes identidades:

- $a \rightarrow a = 1$,
- $c \wedge (a \rightarrow b) = c \wedge [(a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)]$,
- $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.

¹En [20] la terminología “retículo hemi-implicativo” fue utilizada en un sentido diferente al empleado en el presente trabajo: un retículo hemi-implicativo es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y para cada $a, b \in A$, $a \rightarrow a = 1$ y $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$.

Las álgebras de semi-Heyting fueron introducidas por Sankappanavar en [22] como una posible generalización de las álgebras de Heyting. La clase de las álgebras de semi-Heyting es una variedad, a la que denotamos como **SH**. De la última ecuación de la definición tenemos que $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$; y como consecuencia, resulta que **SH** es una subvariedad de **hIL**.

(S6) La variedad de los retículos de Hilbert **HL**, es una subvariedad de **hIL**.

1.4. Filtros, filtros implicativos y congruencias

Los filtros y filtros implicativos juegan un rol importante en la teoría de representación de algunas subvariedades de **hIS** y **hIL**. También en el desarrollo de sus respectivas congruencias.

Sean $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $U \subseteq X$. Decimos que U es un *conjunto creciente* si para cada $x, y \in X$ tal que $x \leq y$ y $x \in U$ vale que $y \in U$.

Escribimos X^+ para indicar al conjunto ordenado por $\subseteq$, cuyos elementos son los subconjuntos crecientes de X . Esto es

$$X^+ := \{U \subseteq X : U \text{ es creciente}\}.$$

Dado $U \subseteq X$ escribimos $\uparrow U$ para indicar al creciente generado por U , es decir,

$$\uparrow U := \{x \in X : y \leq x \text{ para algún } y \in U\}.$$

Si $U = \{u\}$ escribimos $\uparrow u$ en lugar de $\uparrow \{u\}$. Notar que

$$\uparrow u = \{y \in X : y \geq u\}.$$

Definición 9. Sean A un semi-retículo acotado superiormente y $F \subseteq A$. Decimos que F es un **filtro** si cumple las siguientes condiciones:

- a) $1 \in F$,
- b) F es un creciente,
- c) $a \wedge b \in F$ siempre que $a, b \in F$.

Escribimos $\text{Fil}(A)$ para indicar al conjunto de filtros de A .

Definición 10. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro implicativo** si cumple las siguientes condiciones:

a) $1 \in F$ y

b) para cada $a, b \in A$, si $a, a \rightarrow b \in F$ entonces $b \in F$.

Escribimos $\text{IFil}(A)$ para indicar al conjunto de filtros implicativos de A .

Observación 13. ■ Si $A \in \mathbf{hIS}$ y $X \subseteq A$, indicamos con $\langle X \rangle$ al filtro implicativo generado por X ; esto es el menor de los filtros implicativos (según el orden de la inclusión) que contiene a X . Además, si $X = \{a\}$ con $a \in A$, entonces $\langle X \rangle = \uparrow a$.

■ Si $A \in \mathbf{hIS}$ y $X \subseteq A$, indicamos con $F(X)$ al filtro generado por X ; esto es el menor de los filtros (según el orden de la inclusión) que contiene a X . Además, si $X = \{a\}$ con $a \in A$, entonces $F(X) = \uparrow a$.

Lema 14. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Entonces $\text{Fil}(A) \subseteq \text{IFil}(A)$.

Demostración. Sean $F \in \text{Fil}(A)$ y $a, a \rightarrow b \in F$. Luego $a \wedge (a \rightarrow b) \in F$. Dado que $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$, resulta $b \in F$. $\square$

La inclusión opuesta del Lema 14 no vale en general, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15. Sea L un retículo distributivo acotado de cuatro elementos, cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:

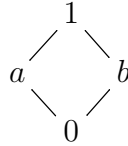


Figura 1.1: Retículo distributivo de cuatro elementos

Si consideramos el semi-retículo $(L, \wedge, \rightarrow, 1)$ cuya operación binaria $\rightarrow$ está definida de la siguiente manera

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{si } x \not\leq y \end{cases}$$

se puede comprobar que $F = \{a, b, 1\}$ es un filtro implicativo que no es un filtro, pues $a \wedge b = 0$ y $0 \notin F$.

Congruencias

Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Para cada $a, b, c \in A$ definimos $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ y $t(a, b, c) := (a \rightarrow b) \leftrightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$.

Definición 11. Sean $A \in \mathbf{hIS}$ y F un filtro de A . Se dice que F es **congruente** si para cada $a, b \in A$ y $f \in F$, $t(a, b, f) \in F$.

Sea $A \in \mathbf{hIS}$, denotamos con $\text{Con}(A)$ al conjunto de las congruencias definidas sobre A . Para $a \in A$ y $\theta \in \text{Con}(A)$ indicamos con a/θ a la clase de equivalencia de A asociada a la congruencia θ . Si F es un filtro de A , se define $\Theta(F)$ como el subconjunto de $A \times A$ dado por

$$(a, b) \in \Theta(F) \text{ si y sólo si existe } f \in F \text{ tal que } a \wedge f = b \wedge f.$$

La siguiente proposición es consecuencia del item (b) de [24, Lema 1] y [24, Teorema 3].

Proposición 16. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de filtros congruentes de A , que se establece mediante la asignación $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta(F)$.

Notar que si $A \in \mathbf{hIS}$ y F es un filtro congruente de A , entonces por la Proposición 16 y [24, Lema 5] tenemos que para cada $a, b \in A$,

$$(a, b) \in \theta(F) \text{ si y sólo si } a \leftrightarrow b \in F.$$

El siguiente resultado proporciona una caracterización de filtro congruente por medio del término $t(a, b, c)$.

Teorema 1. Sea $H \in \mathbf{hIL}$. Todo filtro de H es congruente, si y sólo si, $c \leq t(a, b, c)$ para toda $a, b, c \in H$.

Demostración. Sean $a, b, c \in H$ y el filtro $F = \uparrow c = \{x \in H : c \leq x\}$. Entonces, por hipótesis, F es congruente. Dado que $c \in F$ entonces $t(a, b, c) \in F$, es decir $c \leq t(a, b, c)$.

Recíprocamente, supongamos que $c \leq t(a, b, c)$ para cada $a, b, c \in A$. Sean F un filtro, $a, b \in H$ y $c \in F$. Como $c \leq t(a, b, c)$ y F es un conjunto creciente, entonces $t(a, b, c) \in F$. Luego, F es congruente. $\square$

A continuación presentamos un resultado que relaciona las álgebras de semi-Heyting con las congruencias en $\mathbf{hIL}$.

Teorema 2. Sea A un retículo acotado. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es un álgebra de semi-Heyting.

(ii) (a) $A \in \mathbf{hIL}$,

(b) $c \leq t(a, b, c)$, para todo $a, b, c \in A$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) El ítem (a) es consecuencia inmediata de (S5). Por otro lado, dados $a, b, c \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned} c \wedge ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))) &= c \wedge ((c \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow (c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)))) \\ &= c \wedge ((c \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow (c \wedge (a \rightarrow b))) \\ &= c \wedge 1 = c \end{aligned}$$

También se verifica que

$$\begin{aligned} c \wedge (((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) \rightarrow (a \rightarrow b)) &= c \wedge ((c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))) \rightarrow (c \wedge (a \rightarrow b))) \\ &= c \wedge ((c \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow (c \wedge (a \rightarrow b))) \\ &= c \wedge 1 = c \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c \leq (a \rightarrow b) \leftrightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) = t(a, b, c).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por la definición de álgebra de semi-Heyting (dada en (S5)), solo debemos probar que $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$ y $c \wedge (a \rightarrow b) = c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$. Dado que $c \leq t(a, b, c)$, para todo $a, b, c \in A$, entonces

$$\begin{aligned} c &\leq (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) \\ \text{y } c &\leq ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) \rightarrow (a \rightarrow b). \end{aligned}$$

Luego, por ser A un retículo hemi-implicativo, tenemos que

$$\begin{aligned} c \wedge (a \rightarrow b) &\leq ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)), \quad (1) \\ \text{y } c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) &\leq (a \rightarrow b) \quad (2) \end{aligned}$$

Considerando $c = a \wedge b$ en (2) obtenemos que $(a \wedge b) \wedge ((a \wedge b) \rightarrow (a \wedge b)) \leq a \rightarrow b$, entonces $a \wedge b \leq a \rightarrow b$. Luego $a \wedge b \leq a \wedge (a \rightarrow b)$.

Por otro lado, sabemos que $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$. Por lo tanto $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$. Además, usando (1) y (2), obtenemos

$$c \wedge (a \rightarrow b) \leq c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) \text{ y } c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c)) \leq c \wedge (a \rightarrow b).$$

Por lo tanto $c \wedge (a \rightarrow b) = c \wedge ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$.

□

El siguiente corolario es consecuencia de los Teoremas 1 y 2, y nos da una nueva caracterización de las álgebras de semi-Heyting por medio de las congruencias en **hIL**.

Corolario 17. *La variedad de las álgebras de semi-Heyting coincide con la clase de los retículos hemi-implicativos A , cuyo retículo de congruencias es isomorfo con el retículo de filtros de A .*

Capítulo 2

Subreductos y generalizaciones de los retículos subresiduados

En este capítulo realizaremos un breve estudio de algunos subreductos de los retículos subresiduados.¹

Como mencionamos en el Capítulo 1, la clase de los $\{\rightarrow\}$ -subreductos de las álgebras de Heyting es la variedad de las álgebras de Hilbert. Naturalmente surge la siguiente pregunta: ¿Puede caracterizarse la clase de los $\{\rightarrow\}$ -subreductos de los elementos en la variedad **SRL**? Dar la respuesta a esta pregunta es el primer objetivo de este capítulo.

Posteriormente, estudiaremos los $\{\rightarrow, \wedge\}$ -subreductos de los retículos subresiduados, y para finalizar presentaremos una generalización de los retículos subresiduados.

2.1. Preliminares

En esta sección exponemos algunas propiedades de los retículos subresiduados que utilizaremos en el resto del capítulo.

Definición 12. Sean (A, D) un retículo subresiduado y $a \in A$. Definimos $\Box a := 1 \rightarrow a$ y $\Box A := \{1 \rightarrow a : a \in A\}$.

Observación 18. Como consecuencia de la Definición 12, resulta que $D = \Box A$, es decir, $\Box A = \{a \in A : \Box a = a\}$. En efecto, sea $b \in \Box A$ luego $b = 1 \rightarrow a$, para algún $a \in A$. Por definición de $\rightarrow$, resulta que $1 \rightarrow a \in D$, es decir $b \in D$. Recíprocamente, supongamos que $b \in D$, entonces $b \in A$ y $1 \rightarrow b = b$. Luego $b \in \Box A$.

¹Entendemos como subreducto de un álgebra A , a toda imagen isomorfa de una subálgebra del reducto correspondiente de A

Lema 19. Sean (A, D) un retículo subresiduado, $a, b \in A$ y $d \in \Box A$. Entonces $a \wedge d \leq b$ si y sólo si $d \leq a \rightarrow b$.

Demostración. Sean $a, b \in A$ y $d \in \Box A$. Supongamos que $a \wedge d \leq b$, por definición de $\rightarrow$, tenemos que $d \leq a \rightarrow b$. Recíprocamente, sea $d \leq a \rightarrow b$ luego $a \wedge d \leq a \wedge (a \rightarrow b)$. Además, como $a \rightarrow b \in E_{ab}$ entonces $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$. Por lo tanto $a \wedge d \leq b$. $\square$

Lema 20. Sea $A \in \mathbf{SRL}$. Para cada $x \in A$ se verifica $\Box x \leq x$.

Demostración. Usando **(A3)** tenemos que $1 \wedge (1 \rightarrow x) \leq x$, luego $1 \rightarrow x \leq x$, es decir $\Box x \leq x$. $\square$

Corolario 21. Sean $A \in \mathbf{SRL}$ y $x, y \in A$. Entonces $x \rightarrow y \in \Box A$.

Demostración. Por el Lema 20 tenemos que $\Box(x \rightarrow y) \leq x \rightarrow y$. Por otro lado, usando **(A2)**, resulta $x \rightarrow y \leq 1 \rightarrow (x \rightarrow y)$, es decir $x \rightarrow y \leq \Box(x \rightarrow y)$. Por lo tanto

$$\Box(x \rightarrow y) = x \rightarrow y. \quad (2.1)$$

En consecuencia $x \rightarrow y \in \Box A$. $\square$

Observación 22. Dado que $\Box x \in \Box A$, resulta $\Box(1 \rightarrow x) = 1 \rightarrow x$, esto es $\Box(\Box x) = \Box x$ para cada $x \in A$.

Lema 23. Si $A \in \mathbf{SRL}$ y $x, y \in A$ entonces $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$. Además, las siguientes cuasi-ecuaciones se satisfacen en todo retículo subresiduado:

$$(I) \quad x \rightarrow x = 1,$$

$$(T) \quad x \rightarrow 1 = 1,$$

$$(A) \quad \text{si } x \rightarrow y = 1 \text{ y } y \rightarrow x = 1 \text{ entonces } x = y,$$

$$(B) \quad (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1,$$

$$(M1) \quad x \leq y \text{ implica } y \rightarrow z \leq x \rightarrow z,$$

$$(M2) \quad x \leq y \text{ implica } z \rightarrow x \leq z \rightarrow y.$$

$$(S1) \quad (x \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (x \rightarrow y)) = 1,$$

$$(S2) \quad (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \rightarrow [(w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z))] = 1.$$

Demostración. Sean $A \in \mathbf{SRL}$ y $x, y \in A$ tal que $x \leq y$. Luego $x \wedge 1 \leq y$ y como consecuencia del Lema 19, $1 \leq x \rightarrow y$. Por lo tanto $x \rightarrow y = 1$. Recíprocamente, si $x \rightarrow y = 1$, por **(A3)** resulta $y \geq x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge 1 = x$.

- (I) Es consecuencia de (A1).
- (T) Es consecuencia directa del hecho que $x \leq 1$, para cada $x \in A$.
- (A) Si $x \rightarrow y = 1 = y \rightarrow x$ entonces $x \leq y$ e $y \leq x$, luego $x = y$.
- (B) Por (A6), tenemos que $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$. Luego, como $x \rightarrow y \in \Box A$, por el Lema 19 resulta que $x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$. Por lo tanto $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$.
- (M1) y (M2) son consecuencia de la Definición 1 y Observación 11.
- (S1) Es consecuencia directa de (A2).
- (S2) Por (A3), $y \wedge (y \rightarrow z) \leq z$. Luego, aplicando (M2) tenemos que

$$x \rightarrow (y \wedge (y \rightarrow z)) \leq x \rightarrow z.$$

Entonces, usando (A4),

$$(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq x \rightarrow z.$$

Nuevamente, por (M2)

$$w \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \leq w \rightarrow (x \rightarrow z),$$

Aplicando (A4), tenemos

$$(w \rightarrow (x \rightarrow y)) \wedge (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \leq w \rightarrow (x \rightarrow z).$$

Usando (M2), implicando $w \rightarrow (x \rightarrow y)$, resulta

$$\begin{aligned} (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow ((w \rightarrow (x \rightarrow y)) \wedge (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)))) &\leq \\ &\leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por otro lado, una prueba directa muestra que

$$\begin{aligned} (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow ((w \rightarrow (x \rightarrow y)) \wedge (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)))) &= \\ &= (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Entonces, reemplazando (2.3) en (2.2), tenemos que

$$(w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z)). \quad (2.4)$$

También tenemos que

$$w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))). \quad (2.5)$$

Por lo tanto, como consecuencia de (2.4) y (2.5), y transitividad obtenemos que

$$w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z)),$$

Luego

$$(w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))) \rightarrow [(w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z))] = 1$$

como queríamos demostrar. □

Observación 24. *Notar que **(S1)** es también consecuencia de (2.1) y de **(M1)**. De hecho, como $z \leq 1$ entonces*

$$1 \rightarrow (x \rightarrow y) \leq z \rightarrow (x \rightarrow y).$$

*Dado que $1 \rightarrow (x \rightarrow y) = \Box(x \rightarrow y) = x \rightarrow y$ resulta **(S1)**.*

*Además, tomando $w = 1$ en **(S2)** tenemos que*

$$1 \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow [(1 \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow z))] = 1. \quad (2)$$

Luego, por (2.1) resulta

$$(\mathbf{S}) \quad (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = 1.$$

*Por otro lado, asumiendo **(S)** tenemos que*

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)]. \quad (3)$$

*Por la monotonía de $\rightarrow$ en la segunda coordenada, **(M2)**, que sigue de **(A4)**, obtenemos que*

$$w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq w \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)].$$

*Aplicando de nuevo **(S)**,*

$$w \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] \leq [w \rightarrow (x \rightarrow y)] \rightarrow [w \rightarrow (x \rightarrow z)],$$

de donde, por transitividad, se sigue que

$$w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq [w \rightarrow (x \rightarrow y)] \rightarrow [w \rightarrow (x \rightarrow z)],$$

*es decir, **(S2)**.*

*Por lo tanto, de (2) y (3) resulta que **(S)** y **(S2)** son equivalentes.*

2.2. Subreductos de retículos subresiduados

2.2.1. Los $\{\rightarrow\}$ -subreductos de retículos subresiduados

Comenzamos esta subsección probando que la clase de los $\{\rightarrow\}$ -subreductos² de los retículos subresiduados no es una variedad.

En el siguiente ejemplo mostramos que esta clase no es cerrada por imágenes homomórficas.

Ejemplo 25. Consideremos el $\{\rightarrow\}$ -reducto del retículo subresiduado (L, D) , donde L es la cadena de tres elementos, con $0 < m < 1$ y $D = \{0, 1\}$.

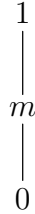


Figura 2.1: Retículo subresiduado de tres elementos

Por otro lado, sea $(A, \rightarrow, a)$ el álgebra de tipo $(2, 0)$, siendo su universo el conjunto $A = \{a, b\}$ y la operación binaria $\rightarrow$ definida como $x \rightarrow y = a$. Consideremos ahora la aplicación $f : L \rightarrow A$ dada por $f(0) = f(1) = a$ y $f(m) = b$. Una prueba directa muestra que f es un homomorfismo de álgebras de tipo $(2, 0)$ y que A no es un $\{\rightarrow\}$ -subreducto de un retículo subresiduado. Por lo tanto, la clase de los $\{\rightarrow\}$ -subreductos de los retículos subresiduados no es cerrada por imágenes homomórficas.

Escribimos $\mathcal{K}$ para indicar a la clase de $\{\rightarrow\}$ -subreductos de retículos subresiduados. El objetivo de esta sección es mostrar que $\mathcal{K}$ es una cuasi-variedad. Para probarlo introducimos a continuación una nueva cuasi-variedad. Luego, probaremos que esta cuasi-variedad coincide con $\mathcal{K}$.

Definición 13. Un **álgebra de sub-Hilbert** es un álgebra $(A, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 0)$ tal que satisface las siguientes cuasi-ecuaciones:

$$(B) \quad (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1,$$

$$(I) \quad x \rightarrow x = 1,$$

²Notar que todo $\{\rightarrow\}$ -subreducto de un retículo subresiduado siempre contiene a la constante $1 = x \rightarrow x$, y, por lo tanto, puede verse como un $\{\rightarrow, 1\}$ -subreducto de esta; es decir, como un álgebra de tipo $(2, 0)$.

$$(T) \quad x \rightarrow 1 = 1,$$

$$(A) \quad \text{si } x \rightarrow y = 1 \text{ y } y \rightarrow x = 1 \text{ entonces } x = y,$$

$$(S) \quad (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1.$$

Indicamos con **sHA** a la cuasi-variedad cuyos elementos son las álgebras de sub-Hilbert.

Lema 26. *Si $(A, \rightarrow, 1)$ es un álgebra de tipo $(2, 0)$ que verifica las cuasi-ecuaciones **(B)**, **(I)**, **(A)** y **(T)** de la Definición 13, entonces la relación $\leq$, dada por $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$, es un orden. Además, 1 es el último elemento con respecto a este orden.*

Demostración. La reflexividad y antisimetría de $\leq$ se siguen de **(I)** y **(A)**, respectivamente. Probemos la transitividad de esta relación.

Sean $x, y, z \in A$ tal que $x \leq y$ e $y \leq z$, luego $x \rightarrow y = 1$ e $y \rightarrow z = 1$. Usando **(B)** obtenemos

$$1 \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1.$$

Así, aplicando la definición de la relación $\leq$, resulta $1 \leq 1 \rightarrow (x \rightarrow z)$. En consecuencia

$$1 \rightarrow (x \rightarrow z) = 1.$$

Realizando un procedimiento similar llegamos a $x \rightarrow z = 1$, en consecuencia $x \leq z$; luego la relación es transitiva.

Finalmente, de **(T)** resulta que 1 es el último elemento con respecto a este orden. $\square$

En lo que sigue, hacemos referencia a este orden como “el orden natural dado por la implicación”.

A continuación daremos algunas propiedades que son válidas en **sHA**.

Lema 27. *Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x, y, z \in A$. Entonces*

$$(M1) \quad \text{Si } x \leq y \text{ entonces } y \rightarrow z \leq x \rightarrow z,$$

$$(M2) \quad \text{Si } x \leq y \text{ entonces } z \rightarrow x \leq z \rightarrow y.$$

Demostración. Primero, probamos **(M1)**. Supongamos que $x \leq y$, en consecuencia

$$x \rightarrow y = 1. \tag{2.6}$$

De **(B)** tenemos que

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1. \tag{2.7}$$

Es consecuencia de (2.6) y (2.7) que

$$1 \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1. \quad (2.8)$$

Por **(T)** tenemos que

$$((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \rightarrow 1 = 1. \quad (2.9)$$

Por (2.8), (2.9) y **(A)** obtenemos $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.

Finalmente veamos **(M2)**. Supongamos que $x \leq y$, entonces $x \rightarrow y = 1$. Por **(S)** tenemos que

$$(z \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)) = 1.$$

Luego

$$(z \rightarrow 1) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)) = 1.$$

Aplicando **(T)**, resulta

$$1 \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)) = 1$$

Luego $1 \leq (z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)$, en consecuencia $(z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y) = 1$

Por lo tanto $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$. □

Lema 28. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x, y, z \in A$. Entonces $x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y)$.

Demostración. Sean $x, y, z \in A$. Como $z \leq 1$, aplicando **(M1)** del Lema 27, tenemos que:

$$1 \rightarrow (x \rightarrow y) \leq z \rightarrow (x \rightarrow y). \quad (2.10)$$

Por otro lado, por **(B)** e **(I)**, tenemos que

$$x \rightarrow y \leq (y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1 \rightarrow (x \rightarrow y). \quad (2.11)$$

Luego, por (2.10) y (2.11) resulta

$$x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y).$$

□

Como en **SRL**, dados $A \in \mathbf{sHA}$ y $a \in A$ definimos $\Box a := 1 \rightarrow a$, y $\Box A := \{\Box a : a \in A\}$.

A continuación veremos algunas propiedades de $\Box a$ y $\Box A$.

Lema 29. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x \in A$. Entonces $\Box x \leq x$.

Demostración. Sea $x \in A$, de **(S)** se sigue que

$$\Box x \rightarrow (1 \rightarrow x) \leq (\Box x \rightarrow 1) \rightarrow (\Box x \rightarrow x).$$

Como $\Box x \rightarrow (1 \rightarrow x) = \Box x \rightarrow \Box x = 1$ entonces

$$1 \leq (\Box x \rightarrow 1) \rightarrow (\Box x \rightarrow x)$$

En consecuencia

$$\Box x \rightarrow 1 \leq \Box x \rightarrow x$$

Aplicando **(T)**, tenemos que

$$1 \leq \Box x \rightarrow x$$

Entonces $\Box x \rightarrow x = 1$, es decir, $\Box x \leq x$. □

Corolario 30. Sea $A \in \mathbf{sHA}$. Para cada $x, y \in A$ se verifican:

(a) $x \rightarrow y = \Box(x \rightarrow y)$,

(b) $\Box^2 y = \Box y$.

Demostración. (a) Como consecuencia del Lema 29 tenemos que

$$\Box(x \rightarrow y) \leq x \rightarrow y. \quad (2.12)$$

Por otro lado, por el Lema 28, tenemos que $x \rightarrow y \leq 1 \rightarrow (x \rightarrow y)$, es decir

$$x \rightarrow y \leq \Box(x \rightarrow y). \quad (2.13)$$

De (2.12) y (2.13), resulta $x \rightarrow y = \Box(x \rightarrow y)$, como queríamos demostrar.

(b) Si en el Lema 28 consideramos $z = x = 1$, obtenemos $1 \rightarrow y \leq 1 \rightarrow (1 \rightarrow y)$, esto es

$$\Box y \leq \Box^2 y$$

Además, por el Lema 29

$$\Box^2 y \leq \Box y$$

□

Considerando $z = x = 1$ en **(S1)** tenemos que

$$\Box y \leq \Box^2 y.$$

Una prueba directa basada en (b) del Corolario 30 muestra que

$$\Box A = \{x : \Box x = x\}.$$

Lema 31. *Si $A \in \mathbf{sHA}$ entonces $\Box A$ es un álgebra de Hilbert.*

Demostración. Probemos primero que $\Box A$ es una subálgebra de A . Sean $x, y \in \Box A$, luego por (a) del Corolario 30 tenemos que $\Box(x \rightarrow y) = x \rightarrow y$, entonces $x \rightarrow y \in \Box A$.

Además $1 \rightarrow 1 = 1$, luego $1 \in \Box A$. Por lo tanto $\Box A$ es una subálgebra de A , entonces en $\Box A$ se verifican **(A)** y **(S)** de la definición de álgebra de sub-Hilbert, esto es

$$\text{si } x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1 \text{ entonces } x = y, \text{ y} \quad (2.14)$$

$$(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1. \quad (2.15)$$

Por otro lado, aplicando el Lema 28, obtenemos $1 \rightarrow x \leq \Box y \rightarrow (1 \rightarrow x)$; esto es equivalente a

$$\Box x \leq \Box y \rightarrow \Box x. \quad (2.16)$$

En consecuencia, si $x, y \in \Box A$ entonces por (2.16), resulta

$$x \leq y \rightarrow x. \quad (2.17)$$

Finalmente, por (2.14), (2.15), (2.17) y la Definición 2, podemos concluir que $\Box A$ es un álgebra de Hilbert. $\square$

Corolario 32. *Sea $A \in \mathbf{sHA}$, para cada $x, y, z \in A$ se verifican*

$$1. \Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = (\Box x \rightarrow \Box y) \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z),$$

$$2. \Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow z) = \Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow z).$$

Demostración. La primera ecuación es consecuencia inmediata del Lema 31. Probemos 2. Como $\Box A$ es un álgebra de Hilbert tenemos que para cada $x, y, z \in A$,

$$\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = \Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z). \quad (2.18)$$

Además, para cada $y, z \in A$ tenemos que, por monotonía de $\rightarrow$ y la inecuación $\Box z \leq z$, que $\Box y \rightarrow \Box z \leq \Box y \rightarrow z$. Por otro lado

$$\Box y \rightarrow z = \Box(\Box y \rightarrow z) = 1 \rightarrow (\Box y \rightarrow z) \leq \Box^2 y \rightarrow \Box z = \Box y \rightarrow \Box z.$$

Entonces,

$$\Box y \rightarrow \Box z = \Box y \rightarrow z. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, se sigue de (2.19) que

$$\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = \Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow z), \quad (2.20)$$

Intercambiando los roles de x e y en los cálculos previos, obtenemos la siguiente igualdad

$$\Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z) = \Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow z). \quad (2.21)$$

Por (2.20), (2.21) y (2.18), obtenemos

$$\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow z) = \Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow z).$$

como queríamos demostrar. $\square$

Lema 33. $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{sHA}$.

Demostración. Es consecuencia del Lema 23 y (S), de la Observación 24. $\square$

En el resto de esta subsección daremos algunos resultados necesarios para mostrar que $\mathbf{sHA} \subseteq \mathcal{K}$.

Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $\varphi : A \rightarrow \text{IFil}(A)^+$ definida como sigue

$$\varphi(a) := \{F \in \text{IFil}(A) : a \in F\}.$$

Observación 34. Una prueba directa muestra que el conjunto de los filtros implicativos de un álgebra de sub-Hilbert A es cerrado por intersecciones arbitrarias, en consecuencia este es un retículo completo (ver [1]).

Lema 35. Sea $A \in \mathbf{sHA}$. Entonces φ es una inmersión de orden³.

Demostración. Probemos primero que φ es inyectiva. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $a, b \in A$. Supongamos que $a \neq b$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \not\leq b$. Como $\uparrow a \in \text{IFil}(A)$ entonces $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ ya que $\uparrow a \in \varphi(a)$ y $\uparrow a \notin \varphi(b)$. Luego, φ es inyectiva.

Probemos ahora que $a \leq b$, si y sólo si, $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. En efecto, si $a \leq b$ y $F \in \varphi(a)$ entonces $F \in \text{IFil}(A)$ tal que $a \in F$. Como F es creciente, resulta que $b \in F$, luego $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Recíprocamente, supongamos que $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, como $\uparrow a \in \varphi(a)$ entonces $\uparrow a \in \varphi(b)$; luego $b \in \uparrow(a)$, esto implica que $a \leq b$, como queríamos demostrar. Por lo tanto φ es una inmersión. $\square$

³Decimos que una función $f : (A, \leq_A) \rightarrow (B, \leq_B)$ es una inmersión de orden si es inyectiva y para cada $a, b \in A$ se verifica que $a \leq_A b$, si y sólo si, $f(a) \leq_B f(b)$.

Introducimos a continuación algunas notaciones y resultados útiles que se utilizarán posteriormente.

Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $a, x_1, \dots, x_{n+1} \in A$, definimos recursivamente

$$\begin{cases} [x_1, a] = x_1 \rightarrow a, \\ [x_{n+1}, \dots, x_1, a] = x_{n+1} \rightarrow [x_n, \dots, x_1, a] \end{cases} \quad (2.22)$$

Por ejemplo, $[x, y, z, a]$ es $[x, [y, [z, a]]] = x \rightarrow (y \rightarrow (z \rightarrow a))$.

Lema 36. Sean $A \in \mathbf{sHA}$, $x_1, \dots, x_n \in \Box A$, $a \in A$ y σ una permutación de $\{1, \dots, n\}$. Entonces,

$$[x_n, \dots, x_1, a] = [x_{\sigma(n)}, \dots, x_{\sigma(1)}, a].$$

Demostración. Se sigue por inducción usando el ítem 2 del Corolario 32. $\square$

Lema 37. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x_1, \dots, x_n, a, b \in A$. Si $a \leq b$ entonces

$$[x_n, \dots, x_1, a] \leq [x_n, \dots, x_1, b].$$

Demostración. Se sigue por inducción usando **(M2)**. $\square$

Lema 38. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x_1, \dots, x_n, a, b, c, d \in A$. Entonces

$$[x_n, \dots, x_1, a, b, c, d] \leq [x_n, \dots, x_1, [a, b, c], a, b, d].$$

Demostración. Sea $\alpha = [a, b, c, d] = a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d))$ y $\beta = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow d)) = [[a, b, c], a, b, d]$. Usando **(S)** y monotonía, obtenemos $\alpha \leq \beta$. Por Lema 37 tenemos que

$$[x_n, \dots, x_1, \alpha] \leq [x_n, \dots, x_1, \beta].$$

Luego,

$$\begin{aligned} [x_n, \dots, x_1, a, b, c, d] &= [x_n, \dots, x_1, [a, b, c, d]] \\ &\leq [x_n, \dots, x_1, [[a, b, c], a, b, d]] \\ &= [x_n, \dots, x_1, [a, b, c], a, b, d]. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 39. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x_1, \dots, x_n, a, b \in \Box A$. Entonces

$$[x_n, \dots, x_1, a, b] = [[x_n, \dots, x_1, a], x_n, \dots, x_1, b].$$

Demostración. Se sigue por inducción usando el ítem 1 del Corolario 32. $\square$

Lema 40. Sean $A \in \mathbf{sHA}$, $a \in A$ y $X \subseteq \Box A$ tal que $1 \in X$. Entonces,

$$\langle X \cup \{a\} \rangle = \{b \in A : \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ tal que } [x_1, \dots, x_n, a, b] = 1\}.$$

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHA}$, $a \in A$ y $X \subseteq \Box A$ con $1 \in X$. Consideremos el conjunto

$$G := \{b \in A : \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ tal que } [x_1, \dots, x_n, a, b] = 1\}.$$

Primero veamos que $X \cup \{a\} \subseteq G$. Sea $x \in X$, como $a \leq 1$ se tiene que $1 \rightarrow x \leq a \rightarrow x$. Por otro lado, $1 \rightarrow x = x$, así $x \leq a \rightarrow x$, es decir, $x \rightarrow (a \rightarrow x) = 1$. En consecuencia, $x \in G$. Además, $1 \rightarrow (a \rightarrow a) = 1$ y $1 \in X$, así $a \in G$. Luego, $X \cup \{a\} \subseteq G$.

Ahora veamos que G es un filtro implicativo. Como $1 \rightarrow (a \rightarrow 1) = 1$ se tiene que $1 \in G$. Sean $b, c \in A$ tales que $b, b \rightarrow c \in G$. Entonces existen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$ tales que

$$[x_1, \dots, x_n, a, b] = 1 \tag{2.23}$$

y

$$[y_1, \dots, y_m, a, b, c] = 1. \tag{2.24}$$

Así

$$\begin{aligned} 1 &= [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, a, b, c] && [\text{por (2.24)}] \\ &= [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, [a, b, c]] \\ &= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n, [a, b, c]] && [\text{por Lema 36}] \\ &= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n, a, b, c] \\ &\leq [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, b], x_n, a, c] && [\text{por Lema 38}] \\ &= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, b], [x_n, a, c]] \\ &= [y_1, \dots, y_m, [x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, b]], [x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, c]]] && [\text{por Lema 39}] \\ &= [y_1, \dots, y_m, [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, b], [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c]] \\ &= [y_1, \dots, y_m, 1, [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c]] && [\text{por (2.23)}] \\ &= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c] \end{aligned}$$

Luego,

$$[y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c] = 1,$$

así $c \in G$. Por lo tanto G es un filtro implicativo.

Finalmente, como H es un filtro implicativo tal que $X \cup \{a\} \subseteq H$, entonces $G \subseteq H$. Por lo tanto $G = \langle X \cup \{a\} \rangle$. $\square$

Lema 41. Sean $A \in \mathbf{sHA}$, $F \in \text{IFil}(A)$ y $a, b \in A$ con $a \rightarrow b \notin F$. Entonces existe $G \in \text{IFil}(A)$ tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$.

Demostración. Sea G el filtro implicativo generado por $(F \cap \Box A) \cup \{a\}$. En consecuencia $a \in G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$.

Supongamos que $b \in G$. Se sigue del Lema 40 que existen $x_1, \dots, x_n \in F \cap \Box A$ tal que

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, a, b] = 1.$$

Como $x_1, \dots, x_n \in F$ y $F \in \text{IFil}(A)$ entonces $a \rightarrow b \in F$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $b \notin G$. $\square$

Sea $A \in \mathbf{sHA}$. Indicamos con D al subretículo completo de $\text{IFil}(A)^+$ generado por $\varphi(\Box A)$. Una prueba directa muestra que este subretículo es distributivo.

Lema 42. Sean $A \in \mathbf{sHA}$, $F, G \in \text{IFil}(A)$ y $W \in D$ tal que $F \in W$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Entonces $G \in W$.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHA}$, $F, G \in \text{IFil}(A)$ y $W \in D$ tal que $F \in W$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Como $W \in D$, existe $\{a_{ik}\}_{i \in I, k \in K} \subseteq \Box A$ tal que

$$W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K} \varphi(a_{ik}).$$

Como $F \in W$ y $\{a_{ik}\}_{i \in I, k \in K} \subseteq \Box A$ tenemos que existe $l \in I$ tal que para cada $k \in K$, $a_{lk} \in F \cap \Box A$. Pero $F \cap \Box A \subseteq G$, por lo que $a_{lk} \in G$ para cada $k \in K$. Por lo tanto $G \in W$. $\square$

Sea $A \in \mathbf{sHA}$. Para cada $U, V \in \text{IFil}(A)^+$ existe el máximo del conjunto $\mathcal{B} = \{W \in D : W \cap U \subseteq V\}$. En efecto, dado que $\mathcal{B} \subseteq D$, por definición de D , existe el supremo de $\mathcal{B}$, que llamamos α , es decir, $\alpha = \bigcup_{W \in \mathcal{B}} W$. Luego $\alpha \in D$ y $\alpha \cap U = \bigcup_{W \in \mathcal{B}} (W \cap U) \subseteq V$. Por lo tanto α es el máximo de $\mathcal{B}$. Denotamos a este elemento con $U \Rightarrow V$.

Lema 43. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $a, b \in A$. Entonces

$$\varphi(a \rightarrow b) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b).$$

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $a, b \in A$. Consideremos el conjunto

$$E_{ab} = \{W \in D : W \cap \varphi(a) \subseteq \varphi(b)\}.$$

Una prueba directa muestra que $\varphi(a \rightarrow b) \cap \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, así $\varphi(a \rightarrow b) \in E_{ab}$. Ahora probemos que $\varphi(a \rightarrow b)$ es el máximo de E_{ab} . Para ver esto, sea

$W \in E_{ab}$, es decir, $W \in D$ y $W \cap \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Mostramos a continuación que $W \subseteq \varphi(a \rightarrow b)$. Sea $F \in \text{IFil}(A)$ y supongamos que $F \in W$ y $F \notin \varphi(a \rightarrow b)$. En particular, $a \rightarrow b \notin F$. Se sigue del Lema 41 que existe $G \in \text{IFil}(A)$ tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Además, se sigue del Lema 42 que $G \in W$, así $G \in W \cap \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$. Así $b \in G$, lo cual es una contradicción. Luego, $W \subseteq \varphi(a \rightarrow b)$. Por lo tanto, $\varphi(a \rightarrow b)$ es el máximo de E_{ab} , como queríamos demostrar. $\square$

El siguiente resultado es consecuencia del Lema 43.

Teorema 3. *Sea $A \in \mathbf{sHA}$. Entonces, $(\text{IFil}(A)^+, D)$ es un retículo subresiduado donde $\varphi(A)$ es isomorfo a A .*

Es consecuencia del Teorema 3 que toda álgebra de sub-Hilbert es un $\{\rightarrow\}$ -subreducto de un retículo subresiduado. Esto es,

Corolario 44. $\mathbf{sHA} \subseteq \mathcal{K}$.

Como consecuencia del Lema 33 y el Corolario 44 resulta

$$\mathcal{K} = \mathbf{sHA}.$$

Así, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 45. *La clase $\mathcal{K}$ es una cuasivariiedad.*

2.2.2. Los $\{\wedge, \rightarrow\}$ -subreductos de retículos subresiduados

En esta sección estudiamos la clase cuyos miembros son los $\{\wedge, \rightarrow\}$ -subreductos de los retículos subresiduados. Mostramos que esta clase es una variedad y damos una base ecuacional para la misma.

Definición 14. *Un álgebra $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ es un **semi-retículo subresiduado** si satisface las siguientes ecuaciones:*

$$(SL1) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$$

$$(SL2) \quad x \wedge y = y \wedge x,$$

$$(SL3) \quad x \wedge x = x,$$

$$(SL4) \quad x \wedge 1 = x.$$

$$(SR1) \quad (x \wedge y) \rightarrow y = 1,$$

$$(SR2) \quad x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y),$$

$$(SR3) \quad x \wedge (x \rightarrow y) \leq y,$$

$$(SR4) \quad z \rightarrow (x \wedge y) = (z \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y).$$

De manera equivalente, un álgebra $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2,2,0)$ es un semi-retículo subresiduado si $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente y las ecuaciones **(SR1)** a **(SR4)** se satisfacen. Escribimos **SRS** para indicar a la variedad cuyos elementos son semi-retículos subresiduados.

Observación 46. Como consecuencia de la Definición 14 y definición de la variedad **SRL** [ver Sección 1.2], obtenemos que todo $\{\wedge, \rightarrow\}$ -subreducto de un retículo subresiduado es un elemento de **SRS**.

Sean $A \in \mathbf{SRS}$ y $a \in A$. Como en el caso de los retículos subresiduados y las álgebras de sub-Hilbert, definimos $\Box a = 1 \rightarrow a$ y $\Box A := \{\Box a \mid a \in A\}$.

Lema 47. Sea $A \in \mathbf{SRS}$. Las siguientes condiciones se satisfacen para cada $x, y, z \in A$:

1. Si $x \leq y$ entonces $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$.
2. $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$.
3. $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$.
4. Si $x \leq y$ entonces $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.
5. $\Box(x \rightarrow y) = x \rightarrow y$.

Demostración. 1. Es consecuencia de **(SR4)**.

2. Sean $x, y, z \in A$. Notemos primero que la ecuación $x \rightarrow x = 1$ se cumple en **SRS**, esto es consecuencia de **(SR1)**. De **(SR3)** se sigue que $x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$ y $y \wedge (y \rightarrow z) \leq z$. Luego

$$x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq z.$$

Como consecuencia de 1. tenemos que

$$x \rightarrow [x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)] \leq x \rightarrow z. \quad (2.25)$$

Además, por **(SR1)**, **(SR2)** y **(SR4)**,

$$\begin{aligned} x \rightarrow [x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)] &= (x \rightarrow x) \wedge [x \rightarrow (x \rightarrow y)] \wedge [x \rightarrow (y \rightarrow z)] \\ &= [x \rightarrow (x \rightarrow y)] \wedge [x \rightarrow (y \rightarrow z)] \\ &\geq (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z). \end{aligned}$$

Luego,

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow [x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)]. \quad (2.26)$$

Así, por (2.25) y (2.26), resulta

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z.$$

3. Sean $x, y \in A$ tales que $x \leq y$. Por **(SR1)**, $x \rightarrow y = (x \wedge y) \rightarrow y = 1$, así $x \rightarrow y = 1$. Recíprocamente, asumamos que $x \rightarrow y = 1$, se sigue de **(SR3)** que $x = x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$, así $x \leq y$.
4. Sean $x, y \in A$ tal que $x \leq y$. Por 2. y 3.,

$$\begin{aligned} y \rightarrow z &= 1 \wedge (y \rightarrow z) \\ &= (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \\ &\leq x \rightarrow z. \end{aligned}$$

5. Es consecuencia de **(SR2)** y **(SR3)**.

□

Observación 48. *Notar que 1. y 4. del Lema 47 son **(M1)** y **(M2)**, respectivamente, nombradas anteriormente en este trabajo.*

Una prueba directa muestra que $\Box A = \{a \in A : \Box a = a\}$.

Lema 49. *Sea $A \in \mathbf{SRS}$. Entonces*

1. $\Box A$ es un semi-retículo acotado superiormente de A .
2. Para cada $a, b \in A$, $a \rightarrow b = \max\{d \in \Box A \mid d \wedge a \leq b\}$.

Demostración. 1. Primero notemos que $\Box 1 = 1$. Además, por **(SR4)**, $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$. Luego, $\Box A$ es semi-retículo acotado superiormente de A .

2. Sean $a, b \in A$ y definimos $E_{ab} := \{d \in \Box A \mid d \wedge a \leq b\}$; por 5. del Lema 47, $a \rightarrow b \in \Box A$. Además, por **(SR3)**, $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$. En consecuencia $a \rightarrow b \in E_{ab}$.

Sea ahora $d \in E_{ab}$, así $d \in \Box A$ y $a \wedge d \leq b$. Aplicando 1. del Lema 47, tenemos que $a \rightarrow (a \wedge d) \leq a \rightarrow b$. Además, por **(SR1)** y **(SR4)**,

$$a \rightarrow (a \wedge d) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow d) = a \rightarrow d.$$

En consecuencia,

$$a \rightarrow d \leq a \rightarrow b. \quad (2.27)$$

Por otro lado, como $a \leq 1$, por el Lema 47 obtenemos

$$1 \rightarrow d \leq a \rightarrow d. \quad (2.28)$$

Por (2.27), (2.28) y el hecho de que $d = \Box d$, deducimos que

$$d \leq a \rightarrow b.$$

Por lo tanto, $a \rightarrow b$ es el máximo de E_{ab} .

□

Observación 50. Como en el caso de **SRL**, se puede dar una definición de **SRS** como un par, de la siguiente manera:

Un semi-retículo subresiduado es un par (A, D) tal que A es un semi-retículo acotado superiormente y D es un semi-retículo acotado superiormente de A , tal que para cada $a, b \in A$ el conjunto $E_{ab} := \{d \in D \mid d \wedge a \leq b\}$ tiene elemento máximo.

A continuación daremos algunos resultados que nos permitirán probar que la variedad **SRS** coincide con la clase de los $\{\rightarrow, \wedge\}$ -subreductos de retículos subresiduados.

Consideremos el retículo acotado, distributivo y completo $\text{Fil}(A)^+$, y la aplicación $j : A \rightarrow \text{Fil}(A)^+$ dada por $j(a) := \{F \in \text{Fil}(A) \mid a \in F\}$.

Utilizando un razonamiento similar al usado en la prueba del Lema 35, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 51. Sea $A \in \mathbf{SRS}$. Entonces j es un inmersión de semi-retículos acotados superiormente.

Sea $A \in \mathbf{SRS}$. Definimos $T := j(\Box A)$, que es un subconjunto de $\text{Fil}(A)^+$. También definimos D como el subretículo completo de $\text{Fil}(A)^+$ generado por T . Siguiendo un razonamiento similar al empleado en la sección 2.2.1 es posible mostrar que el par $(\text{Fil}(A)^+, D)$ es un retículo subresiduado. Escribimos $\Rightarrow$ para la implicación en esta álgebra, es decir, para cada $U, V \in \text{Fil}(A)^+$, $U \Rightarrow V := \text{máx}\{W \in D : W \cap U \subseteq V\}$.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que $j(a \rightarrow b) = j(a) \Rightarrow j(b)$. Para demostrarlo necesitamos probar previamente los siguiente lemas.

Lema 52. Sean $A \in \mathbf{SRS}$, $F \in \text{Fil}(A)$ y $a, b \in A$ tal que $a \rightarrow b \notin F$. Entonces existe $G \in \text{Fil}(A)$ tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{SRS}$, $F \in \text{Fil}(A)$ y $a, b \in A$ tal que $a \rightarrow b \notin F$. Definimos G como el filtro generado por $(F \cap \Box A) \cup \{a\}$. Luego $a \in G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$.

Supongamos que $b \in G$, entonces existe $x \in (F \cap \Box A)$ tal que $x \wedge a \leq b$. Luego, se sigue del Lema 47, **(SR1)** y **(SR4)** que

$$\begin{aligned} a \rightarrow b &\geq a \rightarrow (a \wedge x) \\ &= (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow x) \\ &= a \rightarrow x, \end{aligned}$$

así

$$a \rightarrow x \leq a \rightarrow b. \quad (2.29)$$

Además, se sigue nuevamente del Lema 47 y la inecuación $a \leq 1$ que

$$1 \rightarrow x \leq a \rightarrow x. \quad (2.30)$$

Como $x \in \Box A$, se sigue de (2.29) y (2.30) que $x \leq a \rightarrow b$. Pero $x \in F$, en consecuencia $a \rightarrow b \in F$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $b \notin G$. $\square$

Lema 53. Sean $A \in \mathbf{SRS}$, $F, G \in \text{Fil}(A)$ y $W \in D$ con $F \in W$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Entonces $G \in W$.

Demostración. Análoga a la prueba del Lema 42. $\square$

Lema 54. Sea $A \in \mathbf{SRS}$ y $a, b \in A$. Entonces

$$j(a \rightarrow b) = j(a) \Rightarrow j(b).$$

Demostración. Sea $A \in \mathbf{SRS}$ y $a, b \in A$. Definimos el conjunto

$$E_{ab} := \{W \in D : W \cap j(a) \subseteq j(b)\}.$$

Una prueba directa muestra que $j(a \rightarrow b) \cap j(a) \subseteq j(b)$, así $j(a \rightarrow b) \in E_{ab}$. Ahora mostremos que $j(a \rightarrow b)$ es el máximo de E_{ab} . Para ver esto, tomemos $W \in E_{ab}$, es decir, $W \in D$ y $W \cap j(a) \subseteq j(b)$. Mostremos que $W \subseteq j(a \rightarrow b)$. Sea $F \in \text{Fil}(A)$ y supongamos que $F \in W$ y $F \not\subseteq j(a \rightarrow b)$. En particular, $a \rightarrow b \notin F$. Se sigue del Lema 52 que existe $G \in \text{Fil}(A)$ tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Además, se sigue del Lema 53 que $G \in W$, así $G \in W \cap j(a) \subseteq j(b)$. Luego, $b \in G$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $W \subseteq j(a \rightarrow b)$.

Por lo tanto, $j(a \rightarrow b)$ es el máximo E_{ab} , como queríamos demostrar. $\square$

Como consecuencia de los Lemas 51 y 54, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 55. *Sea $A \in \mathbf{SRS}$. Entonces j es una inmersión de A en el $\{\rightarrow, \wedge\}$ -reducto de $(\text{Fil}(A)^+, D)$.*

La Observación 46 y el Corolario 55 nos permiten concluir que la variedad **SRS** coincide con la clase de $\{\rightarrow, \wedge\}$ -subreductos de retículos subresiduados.

2.3. Una generalización de los retículos subresiduados

En esta sección presentamos una generalización de la variedad de los retículos subresiduados, en la cual el retículo subyacente no es necesariamente distributivo.

Definición 15. *Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ es un **retículo subresiduado en el sentido amplio** si $(A, \wedge, \rightarrow, 1) \in \mathbf{SRS}$ y $(A, \wedge, \vee, 0)$ es un retículo con primer elemento, 0. Escribimos $\mathbf{SRL}^*$ para indicar a la variedad de retículos subresiduados en el sentido amplio.*

A continuación, damos ejemplos interesantes de retículos subresiduados en el sentido amplio.

Ejemplo 56. *Sea L un retículo acotado (no necesariamente distributivo). Definimos en L una operación binaria $\rightarrow$, como sigue:*

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ 0 & \text{si } a \not\leq b \end{cases} \quad (2.31)$$

Llamamos a estas álgebras de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$, 2-retículos subresiduados.

Un cálculo directo muestra el siguiente resultado.

Lema 57. *Sea L un 2-retículo subresiduado. Entonces $(L, \rightarrow)$ es retículo subresiduado en el sentido amplio.*

Los siguientes diagramas serán de utilidad para los ejemplos posteriores.



Figura 2.2: Los diagramas de Hasse del retículo no modular con cinco elementos, N y el retículo modular no distributivo con cinco elementos, M .

Ejemplo 58. Sea $(M, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ el álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ cuya estructura de retículo subyacente es la representada en Figura 2.2 y cuya operación binaria $\rightarrow$ es presentada en la siguiente tabla.

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	b	1
b	0	0	1	0	1
c	b	b	b	1	1
1	0	0	b	0	1

Cuadro 2.1: Ejemplo de retículo subresiduado en el sentido amplio

Una prueba directa muestra que $(M, \rightarrow)$ es un retículo subresiduado en el sentido amplio.

Ejemplo 59. Sea $(N, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0, 0)$ cuya estructura de retículo subyacente es la representada en Figura 2.2 y cuya operación binaria $\rightarrow$ es presentada en la siguiente tabla.

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	0	0	1
b	a	a	1	a	1
c	0	a	0	1	1
1	0	a	0	a	1

Cuadro 2.2: Ejemplo de retículo subresiduado en el sentido amplio

Se puede probar que $(N, \rightarrow)$ es un retículo subresiduado en el sentido amplio.

Observación 60. *Los ejemplos anteriores implican que la variedad $\mathbf{SRL}^*$ tiene a $\mathbf{SRL}$ como subvariedad propia, ya que $A \in \mathbf{SRL}^*$ tiene una estructura de retículo subyacente que no es necesariamente distributivo. Esta es la diferencia esencial entre ambas variedades.*

A continuación daremos una descripción como pares retículo/subretículo a los elementos de $\mathbf{SRL}^*$.

Definición 16. *Un $\mathbf{SRL}^*$ -par es un par (L, D) tal que L es un retículo acotado, D es un subretículo acotado de L y para cada $a, b \in L$ existe el máximo del conjunto $\{d \in D : a \wedge d \leq b\}$, al que denotamos como $a \rightarrow b$.*

Para $A \in \mathbf{SRL}^*$ y $a \in A$ definimos $\Box a := 1 \rightarrow a$ y $\Box A := \{\Box a : a \in A\}$. Notar que $\Box A = \{a \in A : \Box a = a\}$.

Lema 61. *Si (L, D) es un $\mathbf{SRL}^*$ -par entonces $(L, \rightarrow) \in \mathbf{SRL}^*$*

Demostración. Comprobemos que $(L, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ satisface las ecuaciones que definen la variedad $\mathbf{SRS}$. Las ecuaciones **SL1-SL4** se cumplen porque L es un retículo acotado. Sean $x, y, z \in L$.

- (SR1) Como $1 \in D$ y $1 \wedge (x \wedge y) \leq y$, entonces $(x \wedge y) \rightarrow y = \max\{d \in D : d \wedge (x \wedge y) \leq y\} = 1$.
- (SR2) Dado que $(x \rightarrow y) \wedge z \leq x \rightarrow y$ y $x \rightarrow y \in D$, $x \rightarrow y \leq \max\{d \in D : d \wedge z \leq x \rightarrow y\}$; es decir, $x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y)$.
- (SR3) Como $x \rightarrow y = \max\{d \in D : d \wedge x \leq y\}$, se sigue que $x \rightarrow y \in \{d \in D : d \wedge x \leq y\}$ y así $(x \rightarrow y) \wedge x \leq y$.
- (SR4) Probemos que $z \rightarrow (x \wedge y) = (z \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y)$; es decir, que $z \rightarrow (x \wedge y) = \inf\{z \rightarrow x, z \rightarrow y\}$.
 - Como $z \rightarrow (x \wedge y) = \max\{d \in D : d \wedge z \leq x \wedge y\}$ y $(z \rightarrow (x \wedge y)) \wedge z \leq x \wedge y$ se tiene que $(z \rightarrow (x \wedge y)) \wedge z \leq x$ y $(z \rightarrow (x \wedge y)) \wedge z \leq y$. En consecuencia, $(z \rightarrow (x \wedge y)) \wedge z \leq z \rightarrow x$ y $(z \rightarrow (x \wedge y)) \wedge z \leq z \rightarrow y$. Luego, $z \rightarrow (x \wedge y)$ es una cota inferior del conjunto $\{z \rightarrow x, z \rightarrow y\}$.
 - Por otro lado, sea $t \in D$ tal que $t \leq z \rightarrow x$ y $t \leq z \rightarrow y$. Como $(z \rightarrow x) \wedge z \leq x$ y $(z \rightarrow y) \wedge z \leq y$, se sigue que $t \wedge z \leq x$ y $t \wedge z \leq y$. Luego, $t \wedge z \leq x \wedge y$ y consecuentemente, $t \leq z \rightarrow (x \wedge y)$.

□

Siguiendo un razonamiento similar al utilizado en [16, Teorema 1] se prueba que.

Lema 62. *Si $(L, \rightarrow) \in \mathbf{SRL}^*$ entonces $(L, \Box L)$ es un $\mathbf{SRL}^*$ -par.*

Observación 63. *Notar que si $(L, \rightarrow) \in \mathbf{SRL}^*$ entonces $\Box L$ es un álgebra de Heyting y por lo tanto, $\Box L$ es un retículo distributivo acotado. Los dos Lemas anteriores resultan ser una generalización de [16, Teorema 1].*

2.4. Retículos y semi-retículos de sub-Hilbert

En esta sección presentaremos una generalización de la variedad **SRS**. Notar que en toda álgebra de Hilbert se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{SH1}) \quad x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \quad y$$

$$(\mathbf{SH2}) \quad x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z).$$

Además, en toda álgebra de Hilbert con ínfimo se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{SR1}) \quad (x \wedge y) \rightarrow y = 1,$$

$$(\mathbf{SR3}) \quad x \wedge (x \rightarrow y) \leq y,$$

Esto motivó la siguiente definición.

Definición 17. *Un álgebra $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 0)$ es un **semi-retículo de sub-Hilbert** si:*

1. $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente.

2. Se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$(\mathbf{SR1}) \quad (x \wedge y) \rightarrow y = 1,$$

$$(\mathbf{SR3}) \quad x \wedge (x \rightarrow y) \leq y,$$

$$(\mathbf{SH1}) \quad x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z) \quad y$$

$$(\mathbf{SH2}) \quad x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z).$$

Indicamos con **sHS** a la variedad de semi-retículos de sub-Hilbert.

Lema 64. *La variedad **SRS** es una subvariedad de **sHS**.*

Demostración. Sea $A \in \mathbf{SRS}$, teniendo en cuenta la definición de las variedades $\mathbf{SRS}$ y $\mathbf{sHS}$, solo queda probar que en A se verifican **(SH1)** y **(SH2)**.

(SH1) Por 1. y 2. del Lema 47, tenemos que

$$(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z). \quad (2.32)$$

Además, por **(SR4)** y la ecuación $x \rightarrow x = 1$ válida en $\mathbf{SRS}$, se verifica que

$$(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) = (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y). \quad (2.33)$$

Por (2.32) y (2.33), se cumple

$$(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z). \quad (2.34)$$

Luego, por **(SR2)** y (2.34), resulta que

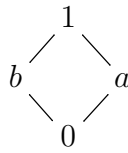
$$x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z).$$

(SH2) Es consecuencia del Lema 23, **(B)**.

□

A continuación damos un ejemplo de un álgebra de $\mathbf{sHS}$ que no está en $\mathbf{SRS}$.

Ejemplo 65. Consideremos el retículo B , visto como un semi-retículo acotado superiormente, cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



Dotémoslo con la operación binaria $\rightarrow$ definida como sigue.

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y, \\ y, & \text{si } x \not\leq y \end{cases}$$

Una prueba directa muestra que B , con esta implicación, es un semi-retículo de sub-Hilbert.

Además, no satisface la condición **(SR4)** de la Definición 14, es decir $a \rightarrow (a \wedge b) \neq (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b)$, pues $a \rightarrow (a \wedge b) = a \rightarrow 0 = 0$ y $(a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) = 1 \wedge b = b$. Por lo tanto, no es un semi-retículo subresiduado. Así, hemos probado el siguiente resultado.

Corolario 66. *La variedad SRS es una subvariedad propia de sHS.*

Las siguientes propiedades son compartidas por todos los elementos de sHS.

Lema 67. *Si $A \in \mathbf{sHS}$ y $x, y \in A$ entonces $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$. Además, las siguientes cuasi-ecuaciones se satisfacen en todo semi-retículo de sub-Hilbert:*

(M1) *Si $x \leq y$ entonces $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.*

(M2) *Si $x \leq y$ entonces $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$.*

Demostración. Sea $A \in \mathbf{sHS}$ y $x, y \in A$ tales que $x \rightarrow y = 1$, luego $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$. Por otro lado, si $x \leq y$, entonces $x \wedge y = x$ y por lo tanto, $x \rightarrow y = (x \wedge y) \rightarrow y = 1$.

(M1) Sean $x, y \in A$ tales que $x \leq y$. Luego usando (SH1), obtenemos que $1 \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$; es decir, $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.

(M2) Se sigue de (SH2), ya que si $x \leq y$ (y por lo tanto $x \rightarrow y = 1$) tenemos que $1 = z \rightarrow 1 = z \rightarrow (x \rightarrow y) \leq (z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)$. Luego, $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$.

□

Corolario 68. *Sea $A \in \mathbf{sHS}$, para cada $x, y, z \in A$ se verifican las siguientes ecuaciones:*

$$(i) \quad x \rightarrow (y \wedge z) \leq (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z).$$

$$(ii) \quad (x \vee y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z).$$

Demostración. Es consecuencia de los Lemas 67, 1 y 2. □

Sea $A \in \mathbf{sHS}$ y $a \in A$. Como en el caso de retículos subresiduados, definimos $\Box a = 1 \rightarrow a$ y $\Box A = \{\Box a : a \in A\}$.

Observación 69. ■ *De forma similar a lo visto en subsecciones anteriores, en sHS es posible caracterizar al conjunto $\Box A$ de la siguiente manera $\Box A = \{a \in A : \Box a = a\}$.*

- *Para cada $a, b \in A$, se tiene que $\Box(a \rightarrow b) = a \rightarrow b$. En efecto, por (SH1), se verifica $a \rightarrow b \leq (b \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)$, luego $a \rightarrow b \leq 1 \rightarrow (a \rightarrow b) = \Box(a \rightarrow b)$.*

Por otro lado, usando (SR3), obtenemos $1 \wedge (1 \rightarrow (a \rightarrow b)) \leq a \rightarrow b$, así $1 \rightarrow (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b$, es decir $\Box(a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b$.

Lema 70. Sea $A \in \mathbf{sHS}$. Entonces $(\Box A, \rightarrow, 1)$ es un álgebra de Hilbert.

Demostración. Como $\Box y \leq 1$, usando **(M1)**, se obtiene $1 \rightarrow (1 \rightarrow x) \leq \Box y \rightarrow (1 \rightarrow x)$, así

$$\Box(1 \rightarrow x) \leq \Box y \rightarrow \Box x. \quad (2.35)$$

Además por la Observación 69 se verifica que

$$\Box(1 \rightarrow x) = 1 \rightarrow x. \quad (2.36)$$

Luego, por (2.35) y (2.36) resulta que $1 \rightarrow x \leq \Box y \rightarrow \Box x$, esto es $\Box x \leq \Box y \rightarrow \Box x$.

Por otro lado, si $\Box x \rightarrow \Box y = 1 = \Box y \rightarrow \Box x$, por el Lema 67, tenemos que $\Box x \leq \Box y$ y $\Box y \leq \Box x$, luego $\Box x = \Box y$.

Por último, como consecuencia de **(SH2)** obtenemos la ecuación $\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) \leq (\Box x \rightarrow \Box y) \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z)$.

Por lo tanto $(\Box A, \rightarrow, 1)$ es un álgebra de Hilbert. □

A continuación presentamos una nueva variedad.

Definición 18. Un *retículo de sub-Hilbert* es un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo y $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ es un semi-retículo de sub-Hilbert.

Indicamos con **sHL** a la variedad cuyos elementos son los retículos de sub-Hilbert.

La siguiente es una caracterización de los retículos de sub-Hilbert.

Teorema 4. Sea $A \in \mathbf{hIL}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \in \mathbf{sHL}$.

(b) Para cada $x, y, z \in A$ se cumplen las siguientes ecuaciones:

- 1) $x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y)$,
- 2) $(x \vee y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$,
- 3) $x \rightarrow (y \wedge z) \leq (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,
- 4) $w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z))$,
- 5) $\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = \Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z)$.
- 6) $\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = (\Box x \rightarrow \Box y) \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z)$.

Demostración. Sea $A \in \mathbf{sHL}$, como consecuencia del Corolario 68 y del Lema 70, solamente queda probar las ecuaciones 1) y 4).

- 1) Por **(SH1)**, tenemos que $(x \rightarrow y) \leq (y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1 \rightarrow (x \rightarrow y)$. Además, como $z \leq 1$, usando **(M1)**, tenemos que $1 \rightarrow (x \rightarrow y) \leq z \rightarrow (x \rightarrow y)$. Por lo tanto $x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y)$.
- 4) Por **(SH2)** tenemos que $x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$. Luego, usando **(M2)**, obtenemos

$$w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq w \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)). \quad (2.37)$$

Por **(SH2)** tenemos que

$$w \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z)). \quad (2.38)$$

Por (2.37) y (2.38), resulta que

$$w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z)).$$

Recíprocamente, sea $A \in \mathbf{hIL}$ tal que para cada $x, y, z \in A$ se verifican las ecuaciones 1)-6). En consecuencia $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente. Probemos el resto de las condiciones de la Definición 17.

En primer lugar, notar que en A se verifican **(M1)** y **(M2)**, esto es consecuencia de 2), 3) y los Lemas 1 y 2.

(SR1) Usando 2), tenemos que

$$((x \wedge y) \vee y) \rightarrow y \leq ((x \wedge y) \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow y). \quad (2.39)$$

Como $x \wedge y \leq y$ entonces $(x \wedge y) \vee y = y$. Luego

$$((x \wedge y) \vee y) \rightarrow y = y \rightarrow y. \quad (2.40)$$

Por (2.39) y (2.40), tenemos que

$$y \rightarrow y \leq ((x \wedge y) \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow y).$$

Además, como $A \in \mathbf{hIS}$, se tiene que $y \rightarrow y = 1$. En consecuencia

$$1 \leq (x \wedge y) \rightarrow y.$$

En consecuencia $(x \wedge y) \rightarrow y = 1$.

(SR3) Es consecuencia del hecho que $A \in \mathbf{hIS}$.

(SH1) En primer lugar notar que $1 \rightarrow (x \rightarrow y) = x \rightarrow y$, para todo $x, y \in A$; es decir $\Box(x \rightarrow y) = x \rightarrow y$. En efecto, por 1) tenemos que $x \rightarrow y \leq 1 \rightarrow (x \rightarrow y)$. Además, como $1 \wedge (1 \rightarrow (x \rightarrow y)) \leq x \rightarrow y$ resulta

$1 \rightarrow (x \rightarrow y) \leq x \rightarrow y$. Por lo tanto $1 \rightarrow (x \rightarrow y) = x \rightarrow y$.

Retomando la prueba de **(SH1)**, si consideramos $w = 1$ en (4) resulta

$$1 \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (1 \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (1 \rightarrow (x \rightarrow z)).$$

En consecuencia

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

Aplicando (M2), obtenemos

$$(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)). \quad (2.41)$$

Por 1), tenemos que

$$(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) = 1. \quad (2.42)$$

De (2.41) y (2.42), obtenemos

$$(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1. \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) se puede escribir de manera equivalente, como sigue:

$$\Box(y \rightarrow z) \rightarrow (\Box(x \rightarrow y) \rightarrow \Box(x \rightarrow z)) = 1.$$

Por 5) obtenemos que

$$\Box(x \rightarrow y) \rightarrow (\Box(y \rightarrow z) \rightarrow \Box(x \rightarrow z)) = 1.$$

Lo que es equivalente a

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1. \quad (2.44)$$

Además, como $A \in \mathbf{hIS}$, tenemos que

$$(x \rightarrow y) \wedge ((x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))) \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z). \quad (2.45)$$

Finalmente, por (2.44) y (2.45), resulta que

$$x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z).$$

(SH2) Se prueba de manera directa, tomando $w = 1$ en (4).

□

Observación 71. Como consecuencia el Teorema 4, es posible definir alternativamente a los retículos de sub-Hilbert de la siguiente manera⁴:

Un álgebra $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ es un **retículo de sub-Hilbert** si $(A, \wedge, \vee, 1)$ es un retículo, $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ es un semi-retículo hemi-implicativo y para cada $x, y, z, w \in A$, se satisfacen las siguientes desigualdades:

- 1) $x \rightarrow y \leq z \rightarrow (x \rightarrow y)$,
- 2) $(x \vee y) \rightarrow z \leq (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$,
- 3) $x \rightarrow (y \wedge z) \leq (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$,
- 4) $w \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leq (w \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (w \rightarrow (x \rightarrow z))$,
- 5) $\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = \Box y \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z)$.
- 6) $\Box x \rightarrow (\Box y \rightarrow \Box z) = (\Box x \rightarrow \Box y) \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box z)$.

⁴Esta definición coincide con la dada en [7]

Capítulo 3

Retículos de Sub-Hilbert

En este capítulo estudiamos en detalle la variedad de los retículos de sub-Hilbert, presentada en el capítulo anterior. En primer lugar mostramos que toda álgebra en esta variedad está determinada (bajo isomorfismo) por una terna (L, D, S) que satisface las siguientes condiciones:

1. L es un retículo distributivo acotado,
2. D es un subretículo de L que contiene 0, 1 y tal que para cada $a, b \in L$ existe un elemento $c \in D$ con la propiedad que para todo $d \in D$, $a \wedge d \leq b$ si y sólo si $d \leq c$ (escribimos $a \rightarrow_D b$ para el elemento c), y
3. S es un subconjunto no vacío de L tal que
 - I. S es cerrado por $\rightarrow_D$ y
 - II. S , con este orden heredado, es un retículo en sí mismo.

Luego estudiamos las congruencias de las álgebras de esta variedad. En particular, mostramos que existe un isomorfismo de orden entre el poset de las congruencias de cada retículo de sub-Hilbert A y el poset de cierta clase de filtros de A , que aquí llamamos **filtros $\vee$ -absorbentes**.

Los temas desarrollados en este capítulo se encuentran publicados en [7].

3.1. sHL-ternas

Como una consecuencia del Corolario 66 tenemos que la variedad de los retículos subresiduos es subvariedad propia de **sHL**. Además, una prueba directa muestra que la variedad de los retículos de Hilbert es también una subvariedad de **sHL**.

Por la definición de **SRL** [ver Sección 1.2] sabemos que todo retículo subresiduado puede representarse como un par.

Por otro lado, todo retículo de Hilbert es un $\{\rightarrow, 1\}$ -subreducto de algún álgebra de Heyting; uno que es un retículo con respecto al orden heredado. Esta observación motiva la siguiente definición.

Definición 19. Un **HL-par** es un par (H, S) , donde H es un álgebra de Heyting y S es un subconjunto no vacío de H que es cerrado por $\rightarrow$ y que es un retículo con respecto al orden heredado de H .

Ejemplo 72. Consideremos el álgebra de Heyting de universo $H = \{0, c, a, b, 1\}$ cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:

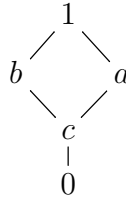


Figura 3.1: Ejemplo de **HL-par**

y sea $S = \{0, a, b, 1\} \subseteq H$. El par (H, S) es un **HL-par**.

Observación 73. Notar que todo **HL-par** (H, S) define un retículo de Hilbert $(S, \triangle, \nabla, \rightarrow, 1)$; donde $\triangle$ y ∇ son el ínfimo y supremo en el poset S .

Por otro lado, dado que todo retículo de Hilbert S , se puede sumergir en el álgebra de Hilbert subyacente de un álgebra de Heyting H , siendo $\alpha : S \rightarrow H$ esta inmersión, podemos asociar a S un **HL-par** $(H, \alpha(S))$.

De esta manera, tanto la variedad de los retículos subresiduados, como la de los retículos de Hilbert comparten la propiedad de que pueden representarse mediante inmersiones adecuadas de álgebras en ciertas variedades. Podemos imitar la representación para retículos de Hilbert como **HL-pares**, reemplazando el componente de álgebra de Heyting por un retículo subresiduado (L, D) de la siguiente manera.

Definición 20. Una **sHL-terna** es una de la forma (L, D, S) tal que

1. (L, D) es un retículo subresiduado y
2. S es un subconjunto no vacío de L tal que
 - I. S es cerrado por $\rightarrow_D$ y

II. S , con el orden heredado, es en sí mismo un retículo.

Como S es un retículo pero no necesariamente un subretículo de L se usarán diferentes símbolos para su ínfimo y supremo, digamos $(S, \underline{\Delta}, \underline{\nabla})$, con último elemento 1. De la Definición 20 se deduce la siguiente observación.

- Observación 74.** ■ Dado que S es cerrado por $\rightarrow_D$, obtenemos que $(S, \underline{\Delta}, \underline{\nabla}, \rightarrow_D, 1)$ es un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0)$. En consecuencia, asociada a toda **sHL**-terna (L, D, S) tenemos un álgebra $(S, \underline{\Delta}, \underline{\nabla}, \rightarrow_D, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$.
- Si $L = D$, S es un retículo de Hilbert, y si $S = L$, S es un retículo subresiduado.
 - Como para cada $a, b \in S$, $a \rightarrow_D b \in S \cap D$. Por lo tanto, $(S \cap D, \rightarrow_D, 1)$ es un álgebra de Hilbert (subálgebra del álgebra de Hilbert subyacente de D).

Por la Definición 20 tenemos que toda ecuación y cuasi-ecuación que involucra solo la operación binaria $\rightarrow_D$ y la constante 1 que es válida en **SRL** también es válida en S . Como consecuencia inmediata, obtenemos el siguiente lema.

Lema 75. Sea (L, D, S) una **sHL**-terna y $(S, \underline{\Delta}, \underline{\nabla}, \rightarrow, 1)$ como fue definido anteriormente (aquí escribimos $\rightarrow$ en lugar de $\rightarrow_D$). Para cada $a, b, c \in S$, las siguientes condiciones son válidas en S :

1. $a \leq b$ si y sólo si $a \rightarrow b = 1$, en particular, $a \rightarrow a = 1$;
2. $a \rightarrow b \leq c \rightarrow (a \rightarrow b)$;
3. si $a \leq b$, entonces $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ y $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$; y
4. $d \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq (d \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (d \rightarrow (a \rightarrow c))$.

Además, dado que $(S \cap D, \rightarrow_D, 1)$ es un álgebra de Hilbert, y en toda álgebra de Hilbert se verifican las ecuaciones $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$ y $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$, entonces para cada $a, b, c \in S$,

$$\Box a \rightarrow (\Box b \rightarrow \Box c) = \Box b \rightarrow (\Box a \rightarrow \Box c) \quad (3.1)$$

y

$$\Box a \rightarrow (\Box b \rightarrow \Box c) = (\Box a \rightarrow \Box b) \rightarrow (\Box a \rightarrow \Box c). \quad (3.2)$$

Por otro lado, como $S \subseteq L$, tenemos que el ínfimo y supremo en S y en L están relacionados de la siguiente manera,

$$a \triangle b \leq a \wedge b \leq a \vee b \leq a \underline{\vee} b.$$

Las siguientes desigualdades en S , son consecuencia de las dadas en L .

Lema 76. *Sea (L, D, S) una **sHL**-terna y $(S, \triangle, \underline{\vee}, \rightarrow, 1)$ como se definió antes. Para cada $a, b, c \in S$, las siguientes desigualdades son válidas en S :*

1. $a \triangle (a \rightarrow b) \leq b$,
2. $a \rightarrow (b \triangle c) \leq (a \rightarrow b) \triangle (a \rightarrow c)$,
3. $(a \underline{\vee} b) \rightarrow c \leq (a \rightarrow c) \triangle (b \rightarrow c)$,
4. $(a \rightarrow b) \triangle (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$.

Demostración. Sean $a, b, c \in S$, luego $a, b, c \in L$; en consecuencia los elementos a, b, c verifican todas las ecuaciones válidas en el retículo subresiduado (L, D) .

1. Es consecuencia de las ecuaciones $a \triangle (a \rightarrow b) \leq a \wedge (a \rightarrow b)$ y $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$.
2. Se sigue de que $b \triangle c \leq b, c$ y el ítem 3. del Lema 75.
3. Se sigue de que $a, b \leq a \underline{\vee} b$ y el ítem 3. del Lema 75.
4. Es consecuencia de las ecuaciones $(a \rightarrow b) \triangle (b \rightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)$ y $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$.

□

De las ecuaciones (3.1) y (3.2), y las propiedades de los Lemas 75 y 76, resulta el siguiente Lema.

Lema 77. *Si (L, D, S) es una **sHL**-terna, el álgebra $(S, \triangle, \underline{\vee}, \rightarrow, 1)$, asociada a esta terna es un retículo de sub-Hilbert.*

Como consecuencia del Lema 77, es posible asociar a toda **sHL**-terna un retículo de sub-Hilbert. A continuación, ilustramos este hecho con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 78. Sea L el retículo cuyo poset subyacente está dado por el siguiente diagrama de Hasse:

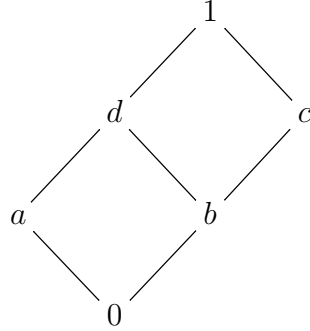


Figura 3.2: Retículo subresiduado de seis elementos

Consideremos terna (L, D, S) con $D = \{0, 1\}$ y $S = \{0, a, c, d, 1\}$. Se puede verificar que (L, D) es un retículo subresiduado y S es cerrado por $\rightarrow$. Además, el poset subyacente de S tiene el siguiente diagrama de Hasse.

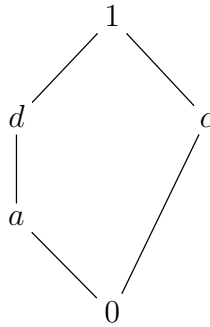


Figura 3.3: Retículo no distributivo de cinco elementos

Así, S es un retículo, y como consecuencia, (L, D, S) es una **sHL**-terna. Luego, podemos ver a S como un retículo de sub-Hilbert.

Notar que el retículo subyacente de S no es distributivo, luego S no es un retículo subresiduado. Además, dado que, $a \rightarrow (d \rightarrow a) = 0 \neq 1$, S no es un retículo de Hilbert. Luego, S es un retículo de sub-Hilbert que no pertenece a las variedades **SRL** y **HL**.

3.2. Retículos de sub-Hilbert como sHL-ternas

En esta sección probamos que todo retículo de sub-Hilbert es isomorfo a uno que proviene de una sHL-terna. Para ello, dado todo retículo de sub-Hilbert A , construimos explícitamente un retículo subresiduado y una inmersión de A en este retículo.

Sea $A \in \mathbf{sHL}$, consideremos el retículo acotado, distributivo y completo $\mathbf{IFil}(A)^+$ y la aplicación $j : A \rightarrow \mathbf{IFil}(A)^+$ dada por

$$j(a) := \{F \in \mathbf{IFil}(A) : a \in F\}.$$

La prueba del siguiente lema es similar a la prueba del Lema 35.

Lema 79. *Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Para cada $a, b \in A$, $a \leq b$ si y sólo si $j(a) \subseteq j(b)$. En particular, j es una inmersión de orden.*

Se presentan ahora algunas notaciones y resultados útiles que se utilizarán más adelante.

Sean $A \in \mathbf{hIL}$ y $a \in A$. Para $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$, definimos recursivamente los siguientes elementos en A :

$$\begin{cases} [x_1, a] = x_1 \rightarrow a, \\ [x_{n+1}, \dots, x_1, a] = x_{n+1} \rightarrow [x_n, \dots, x_1, a] \end{cases} \quad (3.3)$$

Por ejemplo, $[x, y, z, a]$ es la abreviatura de $x \rightarrow (y \rightarrow (z \rightarrow a))$.

Lema 80. *Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $x_1, \dots, x_n, a \in \Box A$ y σ una permutación de $\{1, \dots, n\}$. Entonces,*

$$[x_n, \dots, x_1, a] = [x_{\sigma(n)}, \dots, x_{\sigma(1)}, a].$$

Demostración. Es consecuencia de aplicar inducción en n y la ecuación 5) de la Observación 71. $\square$

Lema 81. *Sean $A \in \mathbf{sHL}$ y $x_1, \dots, x_n, a, b \in A$. Si $a \leq b$, entonces*

$$[x_n, \dots, x_1, a] \leq [x_n, \dots, x_1, b].$$

Demostración. Es consecuencia de aplicar inducción en n y la monotonía de $\rightarrow$ en la segunda coordenada. $\square$

Lema 82. *Sean $A \in \mathbf{sHL}$ y $x_1, \dots, x_n, a, b, c, d \in A$. Entonces,*

$$[x_n, \dots, x_1, a, b, c, d] \leq [x_n, \dots, x_1, [a, b, c], a, b, d].$$

Demostración. Tomando $\alpha = [a, b, c, d] = a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d))$ y $\beta = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow d)) = [[a, b, c], a, b, d]$. En particular, $\alpha \leq \beta$. Por Lema 81 tenemos que

$$[x_n, \dots, x_1, \alpha] \leq [x_n, \dots, x_1, \beta].$$

Es decir,

$$\begin{aligned} [x_n, \dots, x_1, a, b, c, d] &= [x_n, \dots, x_1, [a, b, c, d]] \\ &\leq [x_n, \dots, x_1, [[a, b, c], a, b, d]] \\ &= [x_n, \dots, x_1, [a, b, c], a, b, d]. \end{aligned}$$

□

Lema 83. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $x_1, \dots, x_n, a, b \in \Box A$. Entonces,

$$[x_n, \dots, x_1, a, b] = [[x_n, \dots, x_1, a], x_n, \dots, x_1, b].$$

Demostración. Es consecuencia de aplicar inducción en n y la ecuación 6) de la Observación 71. □

Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Si $X \subseteq A$ escribimos $\langle X \rangle$ para indicar el filtro implicativo generado por X .

Lema 84. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $a \in A$ y $X \subseteq \Box A$ tal que $1 \in X$. Entonces

$$\langle X \cup \{a\} \rangle = \{b \in A : \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ tal que } [x_1, \dots, x_n, a, b] = 1\}.$$

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $a \in A$ y $X \subseteq \Box A$ tal que $1 \in X$. Consideremos el conjunto

$$G = \{b \in A : \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ tal que } [x_1, \dots, x_n, a, b] = 1\}.$$

En primer lugar probemos que $X \cup \{a\} \subseteq G$. Sea $x \in X$. Como $a \leq 1$ se tiene que $1 \rightarrow x \leq a \rightarrow x$. Sin embargo $1 \rightarrow x = x$, luego $x \leq a \rightarrow x$, es decir, $x \rightarrow (a \rightarrow x) = 1$. Por lo tanto, $x \in G$. Además, $1 \rightarrow (a \rightarrow a) = 1$ y $1 \in X$, así $a \in G$. En consecuencia, $X \cup \{a\} \subseteq G$.

Ahora probamos que G es un filtro implicativo. Como $1 \rightarrow (a \rightarrow 1) = 1$ entonces $1 \in G$. Sean $b, c \in A$ tal que $b, b \rightarrow c \in G$. Luego, existe $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$ tal que

$$[x_1, \dots, x_n, a, b] = 1 \tag{3.4}$$

y

$$[y_1, \dots, y_m, a, b, c] = 1. \tag{3.5}$$

Así

$$\begin{aligned}
1 &= [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, a, b, c] && \text{por Ec. (3.5)} \\
&= [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, [a, b, c]] \\
&= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n, [a, b, c]] && \text{por Lema 80} \\
&= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n, a, b, c] \\
&\leq [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, b], x_n, a, c] && \text{por Lema 82} \\
&= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, b], [x_n, a, c]] \\
&= [y_1, \dots, y_m, [x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, b]], [x_1, \dots, x_{n-1}, [x_n, a, c]]] && \text{por Lema 83} \\
&= [y_1, \dots, y_m, [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, b], [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c]] \\
&= [y_1, \dots, y_m, 1, [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c]] && \text{por Ec. (3.4)} \\
&= [y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, a, c]
\end{aligned}$$

Luego,

$$[y_1, \dots, y_m, x_1, a, c] = 1,$$

así $c \in G$. Por lo tanto, G es un filtro implicativo.

Finalmente, sea H un filtro implicativo tal que $X \cup \{a\} \subseteq H$. Una prueba directa muestra que $G \subseteq H$. Por lo tanto, $G = \langle X \cup \{a\} \rangle$. $\square$

Lema 85. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $F \in \text{IFil}(A)$ y $a, b \in A$ tal que $a \rightarrow b \notin F$. Entonces, existe $G \in \text{IFil}(A)$ tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $F \in \text{IFil}(A)$ y $a, b \in A$ tal que $a \rightarrow b \notin F$. Sea G el filtro implicativo generado por $(F \cap \Box A) \cup \{a\}$. Es claro que $a \in G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$.

Es consecuencia del Lema 84 que existe $x_1, \dots, x_n \in F \cap \Box A$ tal que

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, a, b] = 1.$$

Como $x_1, \dots, x_n \in F$ y $F \in \text{IFil}(A)$ resulta $a \rightarrow b \in F$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $b \notin G$. $\square$

Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Indicamos con D al subretículo completo de $\text{IFil}(A)^+$ generado por $j(\Box A)$. Notar que este subretículo es distributivo.

Lema 86. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $F, G \in \text{IFil}(A)$ y $W \in D$ tal que $F \in W$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Entonces $G \in W$.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $F, G \in \text{IFil}(A)$ y $W \in D$ tal que $F \in W$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Dado que $W \in D$, se tiene que existe $\{a_{ik}\}_{i \in I, k \in K} \subseteq \Box A$ tal que

$$W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K} j(a_{ik}).$$

Como $F \in W$ y $\{a_{ik}\}_{i \in I, k \in K} \subseteq \Box A$ tenemos que existe $l \in I$ tal que para todo $k \in K$, $a_{lk} \in F \cap \Box A$. Pero $F \cap \Box A \subseteq G$, luego $a_{lk} \in G$ para todo $k \in K$. Por lo tanto, $G \in W$. $\square$

Observación 87. Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Para cada $U, V \in \text{IFil}(A)^+$ existe el máximo del conjunto $\mathcal{B} = \{W \in D : W \cap U \subseteq V\}$. En efecto, como $\mathcal{B} \subseteq D$, por definición de D , existe el supremo de $\mathcal{B}$, que llamamos α , es decir, $\alpha = \bigcup_{W \in \mathcal{B}} W$. Así, $\alpha \in D$ y $\alpha \cap U = \bigcup_{W \in \mathcal{B}} (W \cap U) \subseteq V$. Por lo tanto, α es el máximo de $\mathcal{B}$. Este máximo lo indicamos con $U \Rightarrow V$. Luego, $(\text{IFil}(A)^+, D)$ es un retículo subresiduado.

Lema 88. Sean $A \in \mathbf{sHL}$ y $a, b \in A$. Entonces

$$j(a \rightarrow b) = j(a) \Rightarrow j(b).$$

Demostración. Sean $A \in \mathbf{sHL}$, $a, b \in A$ y el conjunto

$$E_{ab} = \{W \in D : W \cap j(a) \subseteq j(b)\}.$$

Una prueba directa muestra que $j(a \rightarrow b) \cap j(a) \subseteq j(b)$, luego $j(a \rightarrow b) \in E_{ab}$. Ahora probemos que $j(a \rightarrow b)$ es el máximo de E_{ab} . Para ver esto, tomemos $W \in E_{ab}$, es decir, $W \in D$ y $W \cap j(a) \subseteq j(b)$. Probemos que $W \subseteq j(a \rightarrow b)$. Sea $F \in \text{IFil}(A)$ y supongamos que $F \in W$ y $F \not\subseteq j(a \rightarrow b)$. En particular, $a \rightarrow b \notin F$. Es consecuencia del Lema 85 que existe $G \in \text{IFil}(A)$ tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \cap \Box A \subseteq G$. Además, por Lema 86 tenemos que $G \in W$, así $G \in W \cap j(a) \subseteq j(b)$. Luego, $b \in G$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $W \subseteq j(a \rightarrow b)$. Por lo tanto, $j(a \rightarrow b)$ es el máximo de E_{ab} , como queríamos demostrar. $\square$

Por el Lema 88 tenemos que $j(A)$ es cerrado por $\Rightarrow$. Además, con el orden heredado de $\text{IFil}(A)^+$, $j(A)$ es un retículo en si mismo. Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 5. Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Entonces, $(\text{IFil}(A)^+, D, j(A))$ con $\text{IFil}(A)^+$, D y $j(A)$ como se definieron anteriormente es una $\mathbf{sHL}$ -terna con $j(A)$ isomorfa a A .

Como consecuencia del Teorema 5, resulta que cualquier retículo de sub-Hilbert es, salvo isomorfismo, el retículo de sub-Hilbert asociado a alguna $\mathbf{sHL}$ -terna. En particular, su $\{\rightarrow, 1\}$ -reducto se sumerge en un retículo subresiduado.

3.3. Congruencias de retículos de sub-Hilbert

Esta sección está dedicada al estudio de las congruencias en retículos de sub-Hilbert. Mostramos que están en correspondencia con una clase particular de filtros, que llamamos filtros $\vee$ -absorbentes.

Definición 21. Sean $A \in \mathbf{hIS}$ y F un filtro de A . Se dice que F es **absorbente** si para cada $a \in A$ y $f \in F$, $a \rightarrow (a \wedge f) \in F$.

Lema 89. Sean $A \in \mathbf{hIS}$ y F un filtro de A . Si F es congruente entonces F es absorbente.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{hIS}$ y F un filtro congruente de A . Sean $a \in A$ y $f \in F$. En particular, $t(a, a \wedge f, f) \in F$. De manera directa se puede probar que $t(a, a \wedge f, f) = a \rightarrow (a \wedge f)$, así F es absorbente. $\square$

Lema 90. Sean $A \in \mathbf{hIL}$ y F un filtro congruente. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) Para cada $a, b, c \in A$, $a \leftrightarrow b \in F$ implica $(a \vee c) \leftrightarrow (b \vee c) \in F$.
- 2) Para cada $a, b \in A$ y $f \in F$, $((a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b)) \in F$.

Demostración. Sean $A \in \mathbf{hIL}$ y F un filtro congruente. Supongamos que la condición 1) se satisface. Sean $a, b \in A$ y $f \in F$. Notar que $(a \wedge f) \rightarrow a = 1 \in F$. Además, es consecuencia del Lema 89 que F es absorbente, así $a \rightarrow (a \wedge f) \in F$. Luego, $a \leftrightarrow (a \wedge f) \in F$. Por hipótesis obtenemos que $((a \vee b) \leftrightarrow ((a \wedge f) \vee b)) \in F$. En particular,

$$((a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b)) \in F.$$

Recíprocamente, supongamos que la condición 2) se satisface. Sean $a, b, c \in A$ y supongamos que $a \leftrightarrow b \in F$. Consideremos $f = a \leftrightarrow b$. Por hipótesis tenemos que

$$(a \vee c) \leftrightarrow ((a \wedge f) \vee c) \in F,$$

$$(b \vee c) \leftrightarrow ((b \wedge f) \vee c) \in F.$$

Dado que $a \wedge f = b \wedge f$, entonces $(a \vee c) \leftrightarrow ((a \wedge f) \vee c) \in F$ y $(b \vee c) \leftrightarrow ((a \wedge f) \vee c) \in F$. Una prueba directa muestra que

$$[(a \vee c) \leftrightarrow ((a \wedge f) \vee c)] \wedge [(b \vee c) \leftrightarrow ((a \wedge f) \vee c)] \leq (a \vee c) \leftrightarrow (b \vee c),$$

luego $(a \vee c) \leftrightarrow (b \vee c) \in F$, como queríamos demostrar. $\square$

Motivados por el Lema 90 introducimos la siguiente definición.

Definición 22. Sean $A \in \mathbf{hIL}$ y F un filtro de A .

- 1) Se dice que F es **$\vee$ -congruente** si es congruente y para cada $a, b \in A$ y $f \in F$, $(a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b) \in F$.

- 2) Se dice que F es $\vee$ -**absorbente** si es absorbente y para cada $a, b \in A$ y $f \in F$, $(a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b) \in F$.

Con una prueba directa, basada en el Lema 90, puede demostrarse el siguiente resultado.

Proposición 91. Sea $A \in \mathbf{hIL}$. Existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de filtros $\vee$ -congruentes de A , establecido mediante la asignación $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta(F)$.

En el siguiente resultado presentamos algunas condiciones bajo las cuales los filtros congruentes de retículos hemi-implicativos son $\vee$ -congruentes.

Proposición 92. Sea $A \in \mathbf{hIL}$ y supongamos que una de las siguientes condiciones se satisface:

- 1) El retículo subyacente de A es distributivo.
- 2) Para cada $a, b, c \in A$, $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$.

Entonces todo filtro congruente de A es $\vee$ -congruente.

Demostración. Supongamos que la condición 1) se satisface. Sea F un filtro congruente de A , $a, b \in A$ y $f \in F$. Tenemos que $(a \wedge f) \vee (b \wedge f) \leq (a \wedge f) \vee b$, es decir, $(a \vee b) \wedge f \leq (a \wedge f) \vee b$. Esto implica que

$$(a \vee b) \rightarrow ((a \vee b) \wedge f) \leq (a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b).$$

Sin embargo, es consecuencia del Lema 89 que F es absorbente. Luego, $(a \vee b) \rightarrow ((a \vee b) \wedge f) \in F$ y, en consecuencia, $(a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b) \in F$. Por lo tanto, F es $\vee$ -congruente.

Finalmente asuma que la condición 2) se satisface. Sea F un filtro congruente de A . Tomemos $a, b \in A$ y $f \in F$. Luego

$$\begin{aligned} a \rightarrow (a \wedge f) &\leq a \rightarrow ((a \wedge f) \vee b) \\ &\leq [a \rightarrow ((a \wedge f) \vee b)] \wedge [b \rightarrow ((a \wedge f) \vee b)] \\ &= (a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b). \end{aligned}$$

Es consecuencia del Lema 89 que F es absorbente. Así $a \rightarrow (a \wedge f) \in F$, así $(a \vee b) \rightarrow ((a \wedge f) \vee b) \in F$. Luego, F es $\vee$ -congruente. $\square$

Observación 93. 1) Sea $L \in \mathbf{SRL}$. Un subconjunto F de L se dice un filtro abierto si es un filtro tal que $\Box f \in F$ cuando $f \in F$. Notar que el conjunto de filtros congruentes de L coincide con el conjunto de filtros absorbentes de L . En efecto, si F es un filtro congruente y $f \in F$ entonces

$\Box f = 1 \rightarrow (1 \wedge f) \in F$, así F es abierto. Recíprocamente, si F es abierto, $a \in L$ y $f \in F$ entonces $\Box f \in F$ y $\Box f \leq a \rightarrow f = a \rightarrow (a \wedge f)$, luego $a \rightarrow (a \wedge f) \in F$, es decir, F es absorbente. Por lo tanto, como el retículo subyacente de L es distributivo, se sigue de las Proposiciones 91 y 92 que existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de L y el retículo de filtros abiertos de L , que se establece mediante la asignación $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta(F)$.

- 2) Sea $A \in \mathbf{HL}$. Observar que la condición 2) de la Proposición 92 se satisface. En efecto, sea $a, b, c \in A$. Se puede probar de manera directa que $(a \vee b) \rightarrow c$ es una cota inferior de $\{a \rightarrow c, b \rightarrow c\}$. Por otro lado, sea d una cota inferior de $\{a \rightarrow c, b \rightarrow c\}$, es decir, $d \leq a \rightarrow c$ y $d \leq b \rightarrow c$. Así, $a \leq d \rightarrow c$ y $b \leq d \rightarrow c$, es decir, $a \vee b \leq d \rightarrow c$, que es equivalente a $d \leq (a \vee b) \rightarrow c$. Luego, $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$. Por lo tanto, es consecuencia de las proposiciones 91 y 92 que existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de filtros absorbentes de A , que se establece mediante la asignación $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta(F)$.

En lo que sigue caracterizamos las congruencias de retículos de sub-Hilbert en términos de algunos de estos filtros.

Lema 94. Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Un filtro F de A es congruente si y sólo si F es absorbente.

Demostración. Sea $A \in \mathbf{sHL}$ y F un filtro de A . Es consecuencia del Lema 89 que si F es congruente entonces F es absorbente.

Recíprocamente, supongamos que F es absorbente y sean $a, b \in A$ y $f \in F$. Luego

$$\begin{aligned} b \rightarrow (b \wedge f) &\leq a \rightarrow ((b \rightarrow (b \wedge f))) \\ &\leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge f)) \\ &\leq (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)). \end{aligned}$$

Como $b \rightarrow (b \wedge f) \in F$ y

$$b \rightarrow (b \wedge f) \leq (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f))$$

resulta

$$(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)) \in F. \quad (3.6)$$

Finalmente probemos que $((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b) \in F$. Primero notar que dado

$(a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f) \leq (a \wedge f) \rightarrow b$ y $(a \wedge f) \rightarrow b \leq a \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow b)$
se tiene $(a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f) \leq a \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow b)$, es decir,

$$1 = [(a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)] \rightarrow [a \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow b)]. \quad (3.7)$$

Además,

$$a \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow b) \leq ((a \rightarrow (a \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b)). \quad (3.8)$$

Luego, por (3.7) y (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= [(a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)] \rightarrow [a \rightarrow ((a \wedge f) \rightarrow b)] \\ &\leq [(a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)] \rightarrow [(a \rightarrow (a \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b)] \\ &= (a \rightarrow (a \wedge f)) \rightarrow [((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b)], \end{aligned}$$

así $1 = (a \rightarrow (a \wedge f)) \rightarrow [((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b)]$, es decir,

$$a \rightarrow (a \wedge f) \leq ((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b).$$

Sin embargo $a \rightarrow (a \wedge f) \in F$, luego

$$((a \wedge f) \rightarrow (b \wedge f)) \rightarrow (a \rightarrow b) \in F. \quad (3.9)$$

Luego, por (3.6) y (3.9) tenemos que $t(a, b, f) \in F$. Por lo tanto, F es congruente. $\square$

El siguiente resultado, que es el segundo objetivo de este capítulo, se sigue de la Proposición 91 y del Lema 94.

Teorema 6. *Sea $A \in \mathbf{sHL}$. Existe un isomorfismo de orden entre el retículo de congruencias de A y el retículo de filtros $\vee$ -absorbentes de A , que se establece mediante la asignación $\theta \mapsto 1/\theta$ y $F \mapsto \theta(F)$.*

Capítulo 4

Sobre una nueva variedad de semi-retículos hemi-implicativos

En este capítulo introducimos y estudiamos una subvariedad de la variedad de los semi-retículos hemi-implicativos, a la que llamamos **ShIS**. Como primer objetivo mostramos que esta nueva variedad es una subvariedad propia de **hIS** y contiene a todas las subvariedades de **hIS** trabajadas en esta tesis. En particular, mostramos que **ShIS** contiene propiamente a las variedades **sHS** y a la variedad generada por los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de las *RWH*-álgebras (las cuales son incomparables).

Algunas de las construcciones y propiedades desarrolladas en este capítulo fueron inspiradas por [12, 11]. Como segundo objetivo damos un teorema de representación para **ShIS**. Más precisamente, probamos que toda álgebra de **ShIS** es isomorfa a una subálgebra de un miembro de **ShIS**, cuyo semi-retículo subyacente es el de los crecientes de un poset. Parte de los resultados que exponemos en este capítulo fueron publicados en [8]

4.1. Preliminares

Como se vio en la Sección 1.1, la clase cuyos elementos son las *RWH*-álgebras es una variedad, sin embargo la clase de los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de estas álgebras no lo es. El siguiente ejemplo ilustra lo mencionado.

Ejemplo 95. Sean $\oplus$ la suma ordinal de conjuntos ordenados [2] y $A = B \oplus \mathbb{N}^{op}$, donde B es el álgebra booleana de cuatro elementos (con a y b sus átomos) y $\mathbb{N}^{op}$ es el conjunto ordenado de los números naturales con el orden opuesto.

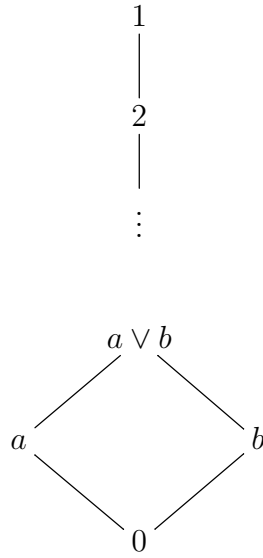
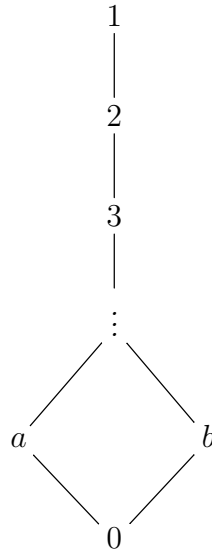


Figura 4.1: Suma ordinal entre el álgebra booleana de cuatro elementos y el conjunto ordenado de los números naturales con el orden opuesto.

Tenemos que A dotada con la operación binaria dada en el Ejemplo 4 es una RWH-álgebra, por lo que puede verse como un álgebra de la clase de los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos.

Consideremos $C = A - \{a \vee b\}$, luego C es una subálgebra de A (con respecto a $\wedge, \rightarrow$ y la constante dada por el mayor elemento de A).



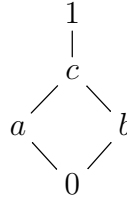
Por otro lado, C no es un $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reducto de ninguna RWH-álgebra. Lue-

go, la clase no es cerrada por subálgebras, luego no es una variedad.

En este capítulo trabajamos con la variedad generada por la clase de los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de las *RWH*-álgebras, la cual indicamos con **RWHIS**. Como consecuencia de (S3) de la Sección 1.3, tenemos que **RWHIS** es una subvariedad de **hIS**. También trabajamos con la variedad **sHS**, definida en la Sección 2.4.

A continuación mostramos que las variedades mencionadas son incomparables, para ello, damos ejemplos de elementos que pertenecen a una variedad y no a la otra.

Ejemplo 96. Por un lado, consideremos $A_1 = \{0, a, b, c, 1\}$, cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



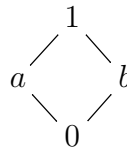
y definimos en A_1 la operación binaria dada por la siguiente tabla:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	a	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	0	0	0	1

Cuadro 4.1: Ejemplo de álgebra de **RWHIS** que no pertenece a **sHS**

Puede comprobarse que $A_1 \in \mathbf{RWHIS}$. Sin embargo $A_1 \notin \mathbf{sHS}$, pues $b = a \rightarrow 0 \not\leq 1 \rightarrow (a \rightarrow 0) = 0$.

Por otro lado, consideremos el retículo booleano $A_2 = \{0, a, b, 1\}$ con átomos a y b , cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



Tenemos que A_2 , dotada de la operación binaria dada por

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x \not\leq y \end{cases}$$

Entonces, por el Ejemplo 8 tenemos que $A_2 \in \mathbf{Hil}^\wedge$, y en consecuencia, es un elemento de $\mathbf{sHS}$. Además $0 = a \rightarrow (a \wedge b) \neq (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) = b$, luego A_2 no pertenece a la clase de los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de las RWH -álgebras; en consecuencia $A_2 \notin \mathbf{RWHIS}$.

4.2. La variedad $\mathbf{ShIS}$

En esta sección introducimos una nueva variedad, la cual es una subvariedad propia de $\mathbf{hIS}$ y contiene propiamente a las variedades $\mathbf{RWHIS}$ y $\mathbf{sHS}$. También damos algunos resultados que involucran filtros y filtros implicativos que usamos en la siguiente sección.

Definición 23. Sea $\mathbf{ShIS}$ la subvariedad de $\mathbf{hIS}$ cuyas álgebras satisfacen las siguientes ecuaciones:

- 1) $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$,
- 2) $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq a \rightarrow c$,
- 3) $a \rightarrow b \leq (a \wedge c) \rightarrow b$,
- 4) $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow c$.

Tenemos que $\mathbf{ShIS}$ es una subvariedad propia de $\mathbf{hIS}$, como se puede ver con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 97. Sea $A = \{0, a, 1\}$ la cadena de tres elementos, con $0 < a < 1$. Consideremos la siguiente operación binaria en A , dada por:

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	a	1
a	0	1	0
1	0	a	1

Cuadro 4.2: Ejemplo de álgebra de $\mathbf{hIS}$ que no pertenece a $\mathbf{ShIS}$.

Tenemos que A dotado con la operación binaria $\rightarrow$ es un álgebra de $\mathbf{hIS}$ (ver [24, Ejemplo 1]). Sin embargo, $A \notin \mathbf{ShIS}$ porque $a \rightarrow a = 1$ y $(a \wedge 0) \rightarrow a = 0 \rightarrow a = a$ luego $a \rightarrow a \not\leq (a \wedge 0) \rightarrow a$.

Lema 98. *Las variedades **RWHIS** y **sHS** son subvariedades de **ShIS**.*

Demostración. Comenzamos probando que la clase de los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de la variedad de las *RWH*-álgebras está contenida en **ShIS**.

Sean A un $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reducto de una *RWH*-álgebra y $a, b, c \in A$; como en A se verifican todas las ecuaciones de **RWH** que involucran los conectivos $\wedge$ y $\rightarrow$, tenemos que A verifica 1) de la Definición 23.

2) Dado que $b \wedge (b \rightarrow c) \leq c$, aplicando **(M2)**, tenemos

$$a \rightarrow (b \wedge (b \rightarrow c)) \leq a \rightarrow c. \quad (4.1)$$

Por otro lado

$$(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)) = a \rightarrow (b \wedge (b \rightarrow c)). \quad (4.2)$$

Luego, de (4.1) y (4.2), resulta que $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq a \rightarrow c$.

3) La inecuación $a \rightarrow b \leq (a \wedge c) \rightarrow b$ es consecuencia de $a \wedge c \leq a$ y **(M2)**.

4) Como $a \wedge b \leq a$, por **(M2)**

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c). \quad (4.3)$$

Además, por la condición 2), ya probada, tenemos que

$$[(a \wedge b) \rightarrow b] \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c)] \leq (a \wedge b) \rightarrow c. \quad (4.4)$$

Por lo tanto,

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c) \quad \text{Ec. (4.3)}$$

$$\begin{aligned} &= [(a \wedge b) \rightarrow b] \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c)] \\ &\leq (a \wedge b) \rightarrow c. \quad \text{Ec. (4.4)} \end{aligned}$$

En consecuencia, $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow c$.

Así, $A \in \mathbf{ShIS}$. Por lo tanto **RWHIS** $\subseteq$ **ShIS**.

Ahora veamos que **sHS** es una subvariedad de **ShIS**.

Sean $A \in \mathbf{sHS}$ y $a, b, c \in A$.

1) Sabemos que en **sHS** se verifica que $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$.
Luego

$$(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq (a \rightarrow b) \wedge ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)). \quad (4.5)$$

Además, sabemos que

$$(a \rightarrow b) \wedge ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \leq a \rightarrow c. \quad (4.6)$$

De (4.5) y (4.6) , resulta que

$$(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq a \rightarrow c. \quad (4.7)$$

Por otro lado, sabemos que $b \rightarrow c \leq a \rightarrow (b \rightarrow c)$, entonces

$$(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)). \quad (4.8)$$

Por lo tanto, de (4.7) y (4.8), resulta $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$.

2) Se probó en (4.7).

3) Es consecuencia de $a \wedge c \leq a$ y **(M2)**.

4) Como $a \wedge b \leq a$, por **(M2)**

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c). \quad (4.9)$$

Además, por la condición 2), ya probada, tenemos que

$$[(a \wedge b) \rightarrow b] \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c)] \leq (a \wedge b) \rightarrow c. \quad (4.10)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \rightarrow c) &\leq (a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c) && \text{(Ec. 4.9)} \\ &= [(a \wedge b) \rightarrow b] \wedge [(a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c)] \\ &\leq (a \wedge b) \rightarrow c && \text{(Ec. 4.10)} \end{aligned}$$

En consecuencia, $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow c$.

Por lo tanto, $A \in \mathbf{ShIS}$. □

A continuación mostramos que las variedades **RWHIS** y **sHS** son sub-variedades propias de **ShIS**. Para ello damos un ejemplo de un elemento de la variedad **ShIS** que no está en **RWHIS** ni en **sHS**.

Ejemplo 99. Sean A_1 y A_2 las álgebras consideradas en la Ejemplo 96. Dado que **ShIS** es una variedad y $A_1, A_2 \in \mathbf{ShIS}$ entonces $A = A_1 \times A_2 \in \mathbf{ShIS}$.

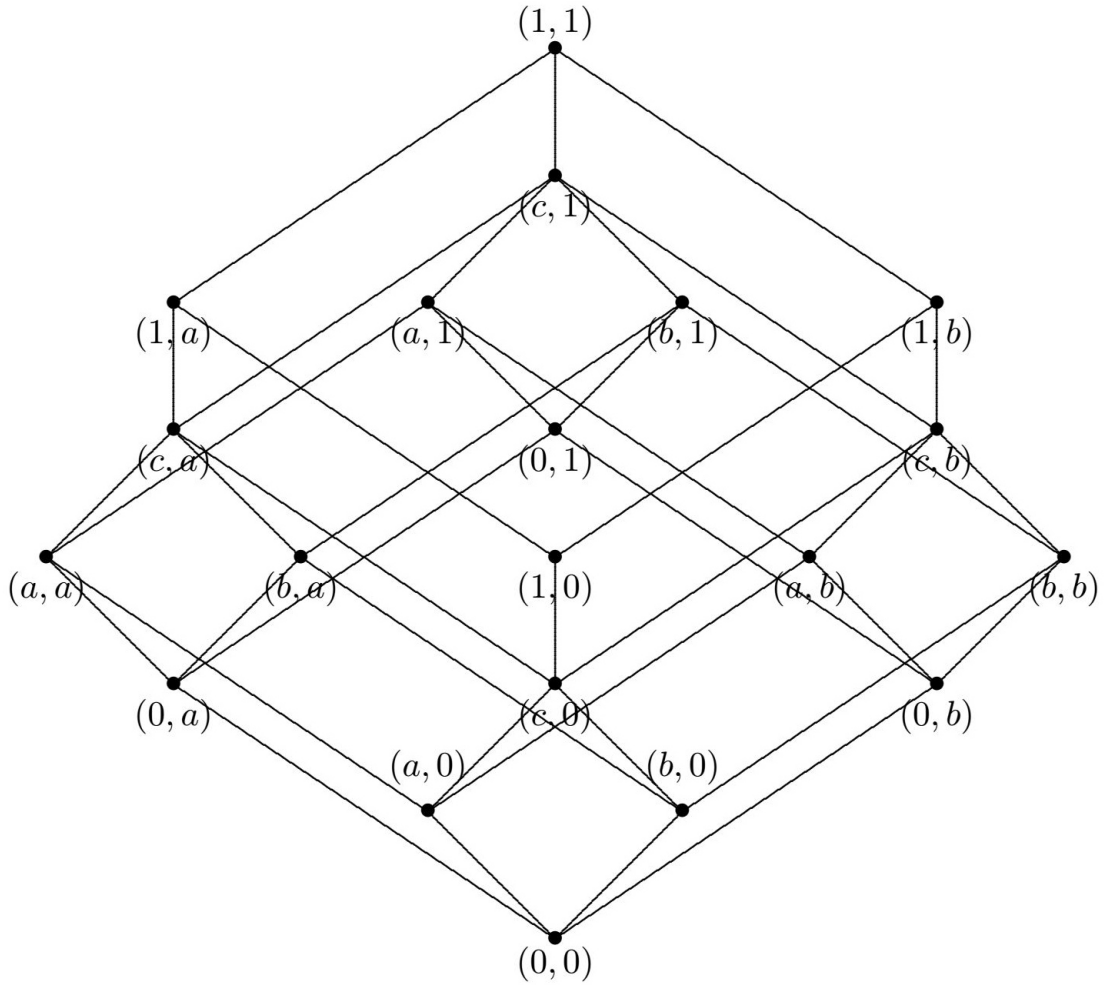


Figura 4.2: Ejemplo de álgebra de **ShIS**

Notar que $A \notin \mathbf{RWHIS}$ pues no verifica la ecuación $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$, válida en toda álgebra de **RWHIS**. En efecto, sean $(0, a), (0, b) \in A_1 \times A_2$ luego

$$(0, a) \rightarrow ((0, a) \wedge (0, b)) = (0, a) \rightarrow (0, 0) = (1, 0)$$

Además

$$((0, a) \rightarrow (0, a)) \wedge ((0, a) \rightarrow (0, b)) = (1, 1) \wedge (1, b) = (1, b)$$

Por lo tanto

$$(0, a) \rightarrow ((0, a) \wedge (0, b)) \neq ((0, a) \rightarrow (0, a)) \wedge ((0, a) \rightarrow (0, b))$$

Por otro lado $A \notin \mathbf{sHS}$ porque no verifica la inecuación $x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$ de la Definición 17. En efecto, sean $(a, 1), (0, 1), (0, b) \in A_1 \times A_2$, luego

$$(a, 1) \rightarrow (0, 1) = (b, 1)$$

Además

$$((0, 1) \rightarrow (0, b)) \rightarrow ((a, 1) \rightarrow (0, b)) = (1, b) \rightarrow (b, b) = (0, 1)$$

Por lo tanto $(a, 1) \rightarrow (0, 1) \not\leq ((0, 1) \rightarrow (0, b)) \rightarrow ((a, 1) \rightarrow (0, b))$.

El siguiente gráfico ilustra el orden de las subvariedades de **hIS** estudiadas en esta tesis, con respecto a la inclusión.¹

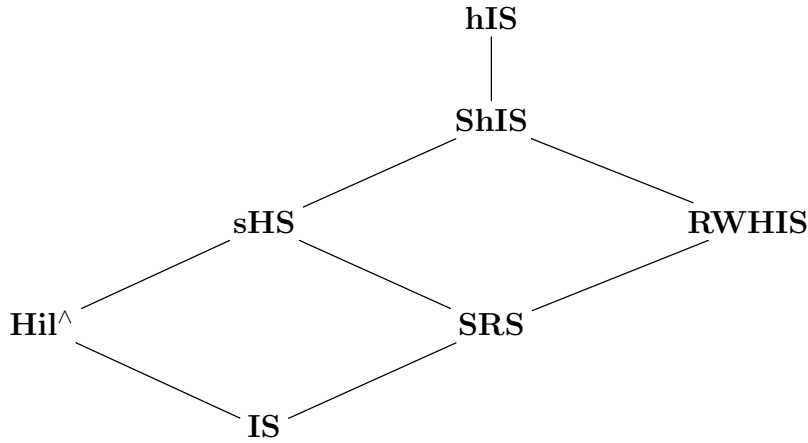


Figura 4.3: Subvariedades de **hIS**

A continuación presentamos algunas propiedades válidas en **ShIS**.

Lema 100. Sean $A \in \mathbf{ShIS}$ y $a, b, c \in A$. Se verifican:

- 1) $a \rightarrow 1 = 1$,
- 2) $a \leq b$, si y sólo si, $a \rightarrow b = 1$, y
- 3) $a \leq b$ implica $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ y $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$.

¹No descartamos la existencia de otras subvariedades que puedan incluirse en el gráfico.

Demostración. 1) $1 = 1 \rightarrow 1 \leq (1 \wedge a) \rightarrow 1 = a \rightarrow 1$, así $a \rightarrow 1 = 1$.

2) Dado que $A \in \mathbf{hIS}$, tenemos que $a \rightarrow b = 1$ esto implica $a \leq b$. Recíprocamente, supongamos que $a \leq b$, luego $a \rightarrow b = (a \wedge b) \rightarrow b \geq a \rightarrow (b \rightarrow b) = a \rightarrow 1$. Se sigue de 1) que $a \rightarrow 1 = 1$, luego $a \rightarrow b = 1$.

3) Sea $a \leq b$, es decir, $a = a \wedge b$. En consecuencia $b \rightarrow c \leq (b \wedge a) \rightarrow c = a \rightarrow c$, luego $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$. Por otro lado, se sigue de 2) que $a \rightarrow b = 1$. Luego $c \rightarrow a = (c \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) \leq c \rightarrow b$. Por lo tanto, $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$. $\square$

En el siguiente lema probamos que los filtros implicativos de álgebras en **ShIS** son conjuntos crecientes.

Lema 101. *Sean $A \in \mathbf{ShIS}$ y $F \in \text{IFil}(A)$. Entonces F es un conjunto creciente.*

Demostración. Sean F un filtro implicativo de A y $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y $a \in F$. Del Lema 100, se sigue que $a \rightarrow b = 1$, entonces $a \rightarrow b \in F$. Además, como $a \in F$, entonces $b \in F$. $\square$

Observación 102. *Notar que el Lema 101 no es necesariamente válido para semi-retículos hemi-implicativos. En efecto, consideremos el semi-retículo hemi-implicativo A considerado en el Ejemplo 97, que no es un álgebra de **ShIS**. Tenemos que $\{0, 1\}$ es un filtro implicativo de A que no es un conjunto creciente.*

Definición 24. *Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Definimos la relación binaria R_A en $\text{IFil}(A)$ de la siguiente manera:*

$(F, G) \in R_A$ si, y sólo si, para cada $a, b \in A$, si $a \rightarrow b \in F$ y $a \in G$ entonces $b \in G$.

Para $F \in \text{Fil}(A)$ y $G \in \text{IFil}(A)$ también definimos

$$D_F(G) = \{x \in A : (g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) \rightarrow x \in F \text{ para algún } g_1, \dots, g_n \in G\}.$$

Las definiciones de R_A y $D_F(G)$ aquí presentadas están inspiradas por las dadas en [11] en el marco de las WH-álgebras.

El siguiente lema será de gran importancia en la siguiente sección. Para demostrarlo utilizamos el Lema 100.

Lema 103. *Sean $A \in \mathbf{ShIS}$, F un filtro de A y G un filtro implicativo de A . Se cumplen las siguientes condiciones:*

- 1) $D_F(G)$ es un filtro implicativo de A .
- 2) $G \subseteq D_F(G)$.

3) $(F, D_F(G)) \in R_A$.

Demostración. 1) Dado que $1 \in G$ y $1 \rightarrow 1 = 1 \in F$ luego $1 \in D_F(G)$. Sean $a, a \rightarrow b \in D_F(G)$. Entonces $m_1 \rightarrow a \in F$ y $m_2 \rightarrow (a \rightarrow b) \in F$, para algún m_1 y m_2 que son ínfimos finitos de elementos de G .

Sea $m = m_1 \wedge m_2$. Dado que $m \leq m_1$ y $m \leq m_2$ se tiene que $m_1 \rightarrow a \leq m \rightarrow a$ y $m_2 \rightarrow (a \rightarrow b) \leq m \rightarrow (a \rightarrow b)$, así $m \rightarrow a \in F$ y $m \rightarrow (a \rightarrow b) \in F$. Como $(m \rightarrow a) \wedge (m \rightarrow (a \rightarrow b)) \in F$ y $(m \rightarrow a) \wedge (m \rightarrow (a \rightarrow b)) \leq m \rightarrow b$, $m \rightarrow b \in F$. Luego, $b \in D_F(G)$.

Por lo tanto, $D_F(G)$ es un filtro implicativo.

2) Sea $x \in G$. Como $x \rightarrow x = 1 \in F$, $x \in D_F(G)$. Luego $G \subseteq D_F(G)$.

3) Sean $a \rightarrow b \in F$ y $a \in D_F(G)$. Entonces $m \rightarrow a \in F$ para algún m que es ínfimo finito de elementos de G . Dado que $(m \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) \leq m \rightarrow b$ y $(m \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) \in F$, $m \rightarrow b \in F$. Luego, $b \in D_F(G)$. Por lo tanto, $(F, D_F(G)) \in R_A$. $\square$

4.3. Representación para la variedad ShIS

En esta sección definimos un tipo de estructuras a las que llamamos **ShIS**-frames y demostramos que es posible asignar un álgebra de **ShIS** a cada **ShIS**-frame. También demostramos que cada álgebra de **ShIS** es isomorfa a una subálgebra de un miembro de **ShIS** cuyo semi-retículo subyacente es el de crecientes de un poset.

Sea X un conjunto, para una relación binaria $R \subseteq X \times X$ definimos $R(x) := \{y \in X : (x, y) \in R\}$. Dado un poset $(X, \leq)$ y $R \subseteq X \times X$, definimos $\leq \circ R \subseteq X \times X$ de la siguiente manera: $(x, z) \in (\leq \circ R)$, si y sólo si, existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ y $(y, z) \in R$.

La siguiente definición coincide con la Definición 3.9 dada en [11].

Definición 25. Un **WH-frame** es una estructura $(X, \leq, R)$, donde $(X, \leq)$ es un poset y R es una relación binaria en X tal que $(\leq \circ R) \subseteq R$.

Sea $(X, \leq)$ un poset y R una relación binaria en X . Decimos que R es antimonótona si para cada $x, y \in X$ vale que $x \leq y$ implica $R(y) \subseteq R(x)$.

Lema 104. Sea $(X, \leq)$ un poset y R una relación binaria en X . Entonces $(X, \leq, R)$ es un WH-frame, si y sólo si, R es antimonótona.

Demostración. Sea $(X, \leq, R)$ un WH-frame y $x, y \in X$ tal que $x \leq y$. Vemos que $R(y) \subseteq R(x)$. Sea $z \in R(y)$, es decir, $(y, z) \in R$. Dado que $(\leq \circ R) \subseteq R$ entonces $(x, z) \in R$. Luego, $z \in R(x)$ y, en consecuencia, $R(y) \subseteq R(x)$.

Recíprocamente, supongamos que R es antimonótona. Probemos que $(X, \leq, R)$ es un WH-frame. Sea $x, y, z \in X$ tal que $x \leq y$ y $(y, z) \in R$. Entonces, $R(y) \subseteq R(x)$. Dado que $z \in R(y)$ entonces $z \in R(x)$, es decir, $(x, z) \in R$. Luego $(\leq \circ R) \subseteq R$. $\square$

Sea $(X, \leq, R)$ un WH-frame. Para cada $U, V \subseteq X$ definimos

$$U \Rightarrow_R V = \{x \in X : R(x) \cap U \subseteq V\}.$$

Se sigue de [11, Lema 3.10] que si $U, V \in X^+$ entonces $U \Rightarrow_R V \in X^+$.

Lema 105. *Sea $(X, R, \leq)$ un WH-frame. Entonces $(X^+, \cap, \cup, \Rightarrow_R, \emptyset, X)$ es una WH-álgebra. Además, si R es reflexiva entonces $(X^+, \cap, \cup, \Rightarrow_R, \emptyset, X)$ es una RWH-álgebra.*

Demostración. Sea $(X, R, \leq)$ un WH-frame. De [11, Proposición 3.11] tenemos que $(X^+, \cap, \cup, \Rightarrow_R, \emptyset, X)$ es una WH-álgebra. Finalmente supongamos que R es reflexiva. Para mostrar que $(X^+, \cap, \cup, \Rightarrow_R, \emptyset, X)$ es una RWH-álgebra, tomemos $x \in U \cap (U \Rightarrow_R V)$. Luego, $x \in U$ and $R(x) \cap U \subseteq V$. Dado que $x \in R(x) \cap U$ se tiene $x \in V$, así $U \cap (U \Rightarrow_R V) \subseteq V$. $\square$

La siguiente definición se utilizará para construir álgebras de **ShIS**.

Definición 26. *Un **ShIS-frame** es una estructura $(X, \hat{X}, \leq, R)$ tal que $(X, \leq, R)$ es un WH-frame, R es reflexiva y $\hat{X} \subseteq X$.*

Sea $(X, \hat{X}, \leq, R)$ un **ShIS-frame**. Notar que, dado un poset $(X, \leq)$, $(\hat{X}, \leq)$ también un poset.

Sea $i : \hat{X}^+ \rightarrow X^+$ para $i(U) = \uparrow U$ y $s : X^+ \rightarrow \hat{X}^+$ para $s(V) = V \cap \hat{X}$. Para $U, V \in \hat{X}^+$ consideramos una operación binaria $\rightarrow_R$ en $\hat{X}^+$ dada por $U \rightarrow_R V = s(i(U) \Rightarrow_R i(V))$, es decir,

$$U \rightarrow_R V = \{x \in \hat{X} : R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow V\}.$$

Lema 106. *Sea $(X, \hat{X}, \leq, R)$ un **ShIS-frame**. Entonces, $(\hat{X}^+, \cap, \rightarrow_R, \hat{X}) \in \mathbf{ShIS}$.*

Demostración. Sean $U, V, W \in \hat{X}^+$. En primer lugar notar que $U \rightarrow_R U = \hat{X}$.

Ahora vemos que $U \cap (U \rightarrow_R V) \subseteq V$. Sea $x \in U \cap (U \rightarrow_R V)$, así $x \in U$ y $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow V$. Dado que R es reflexiva y $x \leq x$, obtenemos que $x \in R(x) \cap \uparrow U$, así $x \in \uparrow V$. Luego, existe $v \in V$ tal que $v \leq x$. Además, dado $x, v \in \hat{X}$ y $V \in \hat{X}^+$, $x \in V$. Hemos probado que $(\hat{X}^+, \cap, \rightarrow_R, \hat{X}) \in \mathbf{hIS}$.

Ahora probemos que se verifican las ecuaciones de la Definición 23.

- 1) $(U \rightarrow_R V) \cap (V \rightarrow_R W) \subseteq U \rightarrow_R W$.
 Sea $x \in (U \rightarrow_R V) \cap (V \rightarrow_R W)$. Luego $x \in \hat{X}$, $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow V$ y $R(x) \cap \uparrow V \subseteq \uparrow W$. Dado que $R(x) \cap \uparrow U \subseteq R(x) \cap \uparrow V$, $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow W$. En consecuencia, $x \in U \rightarrow_R W$.
- 2) $(U \rightarrow_R V) \cap (U \rightarrow_R (V \rightarrow_R W)) \subseteq U \rightarrow_R W$.
 Sea $x \in (U \rightarrow_R V) \cap (U \rightarrow_R (V \rightarrow_R W))$. Luego $x \in \hat{X}$, $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow V$ y $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow(V \rightarrow_R W)$. Probemos que $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow W$.
 Sea $z \in R(x) \cap \uparrow U$, así $z \in \uparrow V$ y $z \in \uparrow(V \rightarrow_R W)$. Entonces existe $y \in V \rightarrow_R W$ tal que $y \leq z$. En particular, $y \in \hat{X}$ y $R(y) \cap \uparrow V \subseteq \uparrow W$. Dado que R es antimonótona y reflexiva, $z \in R(z) \subseteq R(y)$. Así, $z \in R(y) \cap \uparrow V$ y, en consecuencia $z \in \uparrow W$. Luego, $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow W$. Por lo tanto, $x \in U \rightarrow_R W$.
- 3) La ecuación $U \rightarrow_R V \subseteq (U \cap W) \rightarrow_R V$ es consecuencia de que $\uparrow(U \cap W) \subseteq \uparrow U$.
- 4) $U \rightarrow_R (V \rightarrow_R W) \subseteq (U \cap V) \rightarrow_R W$.
 Sea $x \in U \rightarrow_R (V \rightarrow_R W)$, es decir, $x \in \hat{X}$ y $R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow(V \rightarrow_R W)$. Debemos mostrar que $x \in (U \cap V) \rightarrow_R W$, es decir, que $R(x) \cap \uparrow(U \cap V) \subseteq \uparrow W$. Sea $y \in R(x) \cap \uparrow(U \cap V)$, luego $y \in R(x) \cap \uparrow U \subseteq \uparrow(V \rightarrow_R W)$ y $y \in \uparrow V$. En particular, existe $z \in V \rightarrow_R W$ tal que $y \geq z$. Luego, $z \in \hat{X}$ y $R(z) \cap \uparrow V \subseteq \uparrow W$. Dado que $y \geq z$, se tiene $R(y) \subseteq R(z)$. Pero $y \in R(y)$, entonces $y \in R(z)$. Luego, $y \in R(z) \cap \uparrow V \subseteq \uparrow W$. En consecuencia, $y \in \uparrow W$. Por lo tanto, $R(x) \cap \uparrow(U \cap V) \subseteq \uparrow W$, como queríamos demostrar.

□

Lema 107. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Entonces $(\text{IFil}(A), \text{Fil}(A), \subseteq, R_A)$ es un **ShIS-frame**.

Demostración. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Por el Lema 14 tenemos que $\text{Fil}(A) \subseteq \text{IFil}(A)$. Además la reflexividad de R_A es consecuencia de la definición de filtro implicativo.

Veamos que R_A es antimonótona. Sea $F, G \in \text{IFil}(A)$ tal que $F \subseteq G$. Sean $Z \in R(G)$ y $a, b \in A$ tal que $a \rightarrow b \in F$ y $a \in Z$, luego $a \rightarrow b \in G$. Dado que $(G, Z) \in R$ se tiene que $b \in Z$. Luego, $Z \in R(F)$. Por lo tanto, $R(G) \subseteq R(F)$. □

El siguiente corolario es consecuencia de los Lemas 106 y 107.

Corolario 108. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Entonces $(\text{Fil}(A)^+, \cap, \rightarrow_{R_A}, \text{Fil}(A)) \in \mathbf{ShIS}$.

Sea A un semi-retículo hemi-implicativo. Escribimos φ para denotar la función de A en $(\text{Fil}(A)^+, \cap, \rightarrow_{R_A}, \text{Fil}(A))$ definida por

$$\varphi(a) = \{F \in \text{Fil}(A) : a \in F\}.$$

Notar que φ es un monomorfismo de semi-retículos acotados superiormente.

Observación 109. Sean A un semi-retículo hemi-implicativo, $G \in \text{IFil}(A)$ y $a \in A$. Una prueba directa muestra que $G \in \uparrow\varphi(a)$ si y sólo si $a \in G$.

En lo que sigue probamos que si $A \in \mathbf{ShIS}$ entonces φ es un monomorfismo.

Teorema 7. Sea $A \in \mathbf{ShIS}$. Entonces $\varphi : A \rightarrow (\text{Fil}(A)^+, \cap, \rightarrow_{R_A}, \text{Fil}(A))$ es un monomorfismo en $\mathbf{ShIS}$. Además, A es isomorfo a una subálgebra de $(\text{Fil}(A)^+, \cap, \rightarrow_{R_A}, \text{Fil}(A))$.

Demostración. Sean $a, b \in A$. Veamos primero que $\varphi(a \rightarrow b) \subseteq \varphi(a) \rightarrow_R \varphi(b)$.

Sea $F \in \varphi(a \rightarrow b)$, es decir, $F \in \text{Fil}(A)$ y $a \rightarrow b \in F$. Mostremos que $R_A(F) \cap \uparrow\varphi(a) \subseteq \uparrow\varphi(b)$.

Sea $G \in \text{IFil}(A)$ tal que $G \in R_A(F) \cap \uparrow\varphi(a)$, luego $(F, G) \in R_A$ y $a \in G$. Como $a \rightarrow b \in F$ tenemos que $b \in G$, así $G \in \uparrow\varphi(b)$. En consecuencia, $\varphi(a \rightarrow b) \subseteq \varphi(a) \rightarrow_R \varphi(b)$.

Probemos ahora la inclusión $\varphi(a) \rightarrow_R \varphi(b) \subseteq \varphi(a \rightarrow b)$. Sea $F \in \text{Fil}(A)$ y supongamos que $a \rightarrow b \notin F$. Se sigue del Lema 103 que $D_F(\uparrow a) \in \text{IFil}(A)$, $a \in D_F(\uparrow a)$ y $(F, D_F(\uparrow a)) \in R_A$. De esto último y la observación 109, $D_F(\uparrow a) \in \uparrow\varphi(a)$. Queremos mostrar que $D_F(\uparrow a) \notin \uparrow\varphi(b)$. Supongamos que $D_F(\uparrow a) \in \uparrow\varphi(b)$, es decir, $b \in D_F(\uparrow a)$. Entonces existe $c \geq a$ tal que $c \rightarrow b \in F$. Como $a \leq c$ se sigue que $c \rightarrow b \leq a \rightarrow b$. Luego, $a \rightarrow b \in F$, lo cual es una contradicción. Entonces $D_F(\uparrow a) \notin \uparrow\varphi(b)$. Hemos probado que $D_F(\uparrow a) \in R_A(F) \cap \uparrow\varphi(a)$ y $D_F(\uparrow a) \notin \uparrow\varphi(b)$, en consecuencia $R_A(F) \cap \uparrow\varphi(a) \not\subseteq \uparrow\varphi(b)$. Por lo tanto, $F \notin \varphi(a) \rightarrow_R \varphi(b)$. $\square$

Por el Lema 106, el Lema 107 y el Teorema 7 tenemos que toda álgebra de $\mathbf{ShIS}$ es isomorfa a una subálgebra de un miembro de $\mathbf{ShIS}$ cuyo semi-retículo subyacente es el semi-retículo de crecientes de un conjunto ordenado.

Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Escribimos $\hat{R}_A$ para indicar a la restricción de R_A en $\text{Fil}(A)$. El siguiente lema involucra las construcciones desarrolladas a lo largo de esta sección.

Lema 110. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Entonces $(\text{IFil}(A)^+, \cup, \cap, \Rightarrow_{R_A}, \emptyset, \text{IFil}(A))$ y $(\text{Fil}(A)^+, \cup, \cap, \Rightarrow_{\hat{R}_A}, \emptyset, \text{Fil}(A))$ son *RWH-álgebras*.

Demostración. Sea $A \in \mathbf{hIS}$. Por cálculos directos basados en el Lema 105 y el Lema 107 tenemos que $(\text{IFil}(A)^+, \cup, \cap, \Rightarrow_{R_A}, \emptyset, \text{IFil}(A)) \in \mathbf{RWH}$. Un argumento similar muestra que $(\text{Fil}(A)^+, \cup, \cap, \Rightarrow_{\hat{R}_A}, \emptyset, \text{Fil}(A)) \in \mathbf{RWH}$. $\square$

4.4. ShIS como reducto

En esta última sección presentamos una nueva variedad, que es una subvariedad propia de $\mathbf{hIL}$ y contiene propiamente a las variedades $\mathbf{RWH}$ y $\mathbf{sHL}$. También mostramos que coincide con la variedad generada por clase de $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de las álgebras de $\mathbf{ShIS}$.

Definición 27. Sea $\mathbf{ShIL}$ la subvariedad de $\mathbf{hIL}$ cuyas álgebras satisfacen las siguientes ecuaciones:

- 1) $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$,
- 2) $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \leq a \rightarrow c$,
- 3) $a \rightarrow (b \rightarrow c) \leq (a \wedge b) \rightarrow c$,
- 4) $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$.

Observación 111. Sean $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1) \in \mathbf{ShIL}$ y $a, b, c \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} (a \rightarrow b) \wedge ((a \wedge c) \rightarrow b) &= [(a \vee (a \wedge c)) \rightarrow b] \\ &= a \rightarrow b, \end{aligned}$$

es decir, $a \rightarrow b \leq (a \wedge c) \rightarrow b$.

El siguiente lema es consecuencia directa de las Definiciones 23, 27 y la Observación 111.

Lema 112. Sea $A \in \mathbf{ShIL}$. El $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reducto de A es un álgebra de $\mathbf{ShIS}$.

Tenemos que $\mathbf{ShIL}$ es una subvariedad propia de $\mathbf{hIL}$ ya que el álgebra dada en el Ejemplo 97 está en $\mathbf{hIL}$ y no está en $\mathbf{ShIL}$.

Proposición 113. Las variedades $\mathbf{RWH}$ y $\mathbf{sHL}$ son subvariedades de $\mathbf{ShIL}$.

Demostración. Se sigue del Lema 98 que $\mathbf{RWH}$ es una subvariedad de $\mathbf{ShIL}$; y de la Observación 71 que $\mathbf{sHL}$ es una subvariedad de $\mathbf{ShIL}$. $\square$

Observación 114. Si dotamos con estructura de retículos a las álgebras A_1 y A_2 dadas en el Ejemplo 96 obtenemos que $A_1 \in \mathbf{RWH}$ y $A_2 \in \mathbf{sHL}$. Además $A_1 \notin \mathbf{sHL}$ y $A_2 \notin \mathbf{RWH}$. Lo que implica que son variedades incomparables, en consecuencia ambas son subvariedades propias de $\mathbf{ShIL}$.

Lema 115. Sea $(X, \hat{X}, \leq, R)$ un $\mathbf{ShIS}$ -frame. Entonces, $(\hat{X}^+, \cap, \cup, \rightarrow_R, \emptyset, \hat{X}) \in \mathbf{ShIL}$.

Demostración. Sean $U, V, W \in \hat{X}^+$. Por cálculos directos basados en el hecho de que $\uparrow(U \cup V) = \uparrow U \cup \uparrow V$ se puede mostrar que

$$(U \cup V) \rightarrow_R W = (U \rightarrow_R W) \cap (V \rightarrow_R W).$$

Por lo tanto, se sigue del Lema 106 que $(\hat{X}^+, \cap, \cup, \rightarrow_R, \emptyset, \hat{X}) \in \mathbf{ShIL}$. $\square$

Proposición 116. Toda álgebra de $\mathbf{ShIS}$ es isomorfa a una subálgebra de un $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reducto de una álgebra de $\mathbf{ShIL}$. Además, la variedad $\mathbf{ShIS}$ coincide con la variedad generada por los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de los miembros de $\mathbf{ShIL}$.

Demostración. Se sigue del Teorema 7, Lema 107 y Lema 115 que toda álgebra de $\mathbf{ShIS}$ es isomorfa a una subálgebra de un $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reducto de un álgebra de $\mathbf{ShIL}$. Por esto y el Lema 112 tenemos que $\mathbf{ShIS}$ es la variedad generada por los $\{\wedge, \rightarrow, 1\}$ -reductos de las álgebras de $\mathbf{ShIL}$. $\square$

El siguiente gráfico ilustra el orden de las subvariedades de $\mathbf{hIL}$ estudiadas en esta tesis, con respecto a la inclusión.

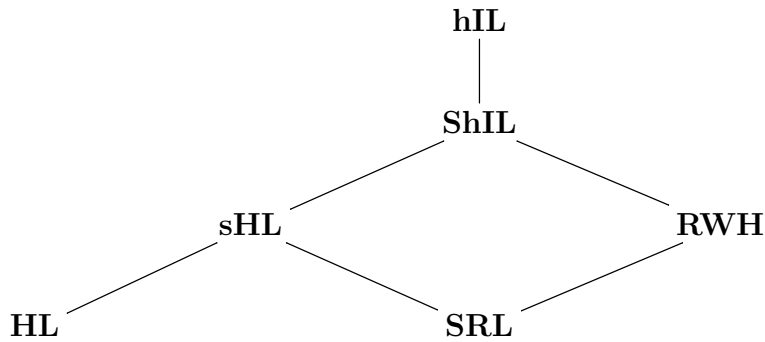


Figura 4.4: Subvariedades de $\mathbf{hIL}$

Capítulo 5

Un poco de lógica

El objetivo de este capítulo es proponer una lógica proposicional algebraizable cuya semántica algebraica coincida con la clase de álgebras de sub-Hilbert. También exploramos varias expansiones de esta lógica, cuyas semánticas algebraicas coinciden con algunas de las clases de álgebras estudiadas en el Capítulo 2.

De ahora en adelante, para simplificar la notación, siempre que la lógica sea clara en el contexto, escribimos $\vdash$ para indicar a su relación de consecuencia. Cuando pueda surgir alguna confusión, utilizamos un subíndice.

5.1. Preliminares

El álgebra de las fórmulas

En este capítulo indicamos con las letras x, y, z, t, u, v, etc a las variables, con las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, etc$ a las fórmulas y con Γ, Δ, etc a los conjuntos de fórmulas. Lo mencionado en esta sección se encuentra desarrollado en detalle en el Capítulo 2 de [19].

Definición 28. *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y un conjunto infinito contable V tal que $V \cap \mathcal{L} = \emptyset$ y ninguno de los objetos en $V \cup \mathcal{L}$ es una secuencia finita de otros objetos en el mismo conjunto, llamamos a los miembros de V fórmulas atómicas.*

Considerando el conjunto de secuencias finitas de elementos de $V \cup \mathcal{L}$, damos la siguiente definición recursiva:

Definición 29. Definimos el conjunto de fórmulas, al que indicamos con Fm , como el conjunto que verifica lo siguiente:

- (a) $V \subseteq Fm$,
- (b) $L_0 \subseteq Fm$, con $L_0 = \{\lambda \in \mathcal{L} : aridad(\lambda) = 0\}$,
- (c) $\lambda\alpha_1\ldots\alpha_n \in Fm$, para cada $\lambda \in \mathcal{L}$ y $\alpha_i \in Fm$, con $aridad(\lambda) = n \geq 1$.
- (d) Fm está totalmente determinada por (a), (b) y (c).

Lógicas implicativas

Las lógicas que presentamos en este capítulo son llamadas implicativas. Estas lógicas fueron presentadas y estudiadas por Rasiowa. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje algebraico que tiene $\rightarrow$ como operación binaria.

Definición 30. Una lógica L en el lenguaje $\mathcal{L}$ es **implicativa** si satisface las siguientes condiciones:

- (IL1) $\vdash_L x \rightarrow x$,
- (IL2) $x \rightarrow y, y \rightarrow z \vdash_L x \rightarrow z$,
- (IL3) $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow y_1, \dots, x_n \rightarrow y_n \\ y_1 \rightarrow x_1, \dots, y_n \rightarrow x_n \end{array} \right\} \vdash_L \lambda x_1 \dots x_n \rightarrow \lambda y_1 \dots y_n$, para cada $\lambda \in \mathcal{L}$ con $aridad\ n \geq 1$,
- (IL4) $x, x \rightarrow y \vdash_L y$,
- (IL5) $x \vdash_L y \rightarrow x$.

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en la Sección 1.1 del Capítulo 1 de [19].

Definición 31. Un álgebra de tipo de **similaridad $\mathcal{L}$ o $\mathcal{L}$ -álgebra** es un par $(A, \{\lambda^A : \lambda \in \mathcal{L}\})$ tal que $A \neq \emptyset$ es un conjunto y para cada $\lambda \in \mathcal{L}$, con $n = aridad(\lambda)$, $\lambda^A : A^n \rightarrow A$ es una función a la que usualmente se le denomina operación n -aria.

Definición 32. Sean A y B dos álgebras de mismo tipo de similaridad $\mathcal{L}$. Un **homomorfismo** de A en B es una función $h : A \rightarrow B$ tal que para todo $\lambda \in \mathcal{L}$, con $n = aridad(\lambda)$, y $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ se verifica $h(\lambda^A(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \lambda^B(h(a_1), h(a_2), \dots, h(a_n))$. Al conjunto de homomorfismos de A en B se lo denota como $Hom(A, B)$.

La siguiente definición coincide con la Definición 2.5 del Capítulo 2 de [19].

Definición 33. Sea L una lógica implicativa en el lenguaje $\mathcal{L}$. Una L -álgebra es un álgebra del tipo de similaridad $\mathcal{L}$ que tiene un elemento 1 con las siguientes propiedades:

- (i) Para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$ y cada $h \in Hom(Fm, A)$, si $\Gamma \vdash \varphi$ y $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$ entonces $h(\varphi) = 1$.
- (ii) Para todo $a, b \in A$, si $a \rightarrow b = 1$ y $b \rightarrow a = 1$ entonces $a = b$.

Indicamos con Alg_L^* a la clase de las L -álgebras.

Las pruebas de los siguientes resultados se pueden encontrar en [19].

Lema 117. Si L una lógica implicativa entonces la clase Alg_L^* es una cuasivariación.

Teorema 8. (teorema de completitud) Si L una lógica implicativa entonces L es completa con respecto a la clase Alg_L^* en el siguiente sentido:

Para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$, $h \in Hom(Fm, A)$ y $A \in Alg_L^*$, $\Gamma \vdash \varphi$, si y sólo si, $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$ implica $h(\varphi) = 1$

A continuación definimos una clase de álgebras que comparte propiedades con las L -álgebras. La siguiente definición coincide con la Definición 2.13 de [19].

Definición 34. Un **álgebra implicativa** es un álgebra $(A, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 0)$ donde se cumplen las siguientes ecuaciones y cuasi-ecuaciones:

- (IA1) $y \rightarrow y = 1$,
- (IA2) $x \rightarrow y = y \rightarrow z = 1$ implica que $x \rightarrow z = 1$,
- (IA3) $x \rightarrow 1 = 1$,
- (IA4) $x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1$ implica que $x = y$.

El cálculo R4

Comenzamos introduciendo un sistema de estilo tipo Hilbert en el lenguaje $\mathcal{L} = \{\rightarrow\}$. En [16] se presentó y estudió el cálculo R4, asociado a la clase de los retículos subresiduados. Dicho cálculo está caracterizado por los operadores binarios $\wedge$ y $\vee$, a los que llamamos conjunción y disyunción, respectivamente; y el operador unario $\neg$ al que llamamos negación, que verifican los siguientes esquemas de axiomas y regla:

Esquemas de axiomas:

- (A1) $\alpha \rightarrow \alpha$,
- (A2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$
- (A3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$.
- (A4) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$.
- (A5) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$.
- (A6) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)))$.
- (A7) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$.
- (A8) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$.
- (A9) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$.
- (A10) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$.
- (A11) $\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.
- (A12) $(\alpha \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow \neg \alpha$.

Regla:

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

La regla anterior se denomina “modus ponens”, también se la reconoce por la sigla **MP**.

Utilizamos $\Box \alpha$ como abreviatura de $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.

5.2. La lógica L_1

Sea L_1 la lógica definida por los siguientes esquemas de axiomas y reglas de inferencia.

Esquemas de axiomas:

- (Ax1) $\alpha \rightarrow \alpha$,

(Ax2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$ y

(Ax3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)).$

Reglas:

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \text{ (MP)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha} \text{ (T)}$$

A continuación estudiamos algunas propiedades la lógica L_1 que serán de utilidad para abordar el estudio del fragmento implicativo de R4.

Lema 118. Sean α , β y γ fórmulas arbitrarias en el lenguaje $\mathcal{L}$. Las siguientes son reglas derivadas para L_1 :

1. $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \delta \vdash_{L_1} \alpha \rightarrow \delta,$
2. $\vdash_{L_1} \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta),$
3. $\vdash_{L_1} ((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$ y
4. $\vdash_{L_1} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)).$

Demostración.

1. Supongamos que $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \delta$. La siguiente es una prueba en L_1 de $\alpha \rightarrow \delta$.

- | | | |
|----|---|----------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | por hipótesis |
| 2. | $\beta \rightarrow \delta$ | por hipótesis |
| 3. | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$ | por (Ax2) |
| 4. | $(\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$ | por (MP) de 1. y 3. |
| 5. | $\alpha \rightarrow \delta$ | por (MP) de 2. y 4. |

Podemos concluir que

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \delta\} \vdash \alpha \rightarrow \delta.$$

2. Es consecuencia de **(Ax1)** y la regla **(T)**. Además, obtenemos que $\alpha \rightarrow \alpha \dashv\vdash_{L_1} \beta \rightarrow \beta^1$, para cada fórmula α y β .

3. Sean α , β y δ fórmulas, entonces,

- | | | |
|----|---|----------------------------|
| 1. | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)) \rightarrow (((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$ | por (Ax2) |
| 2. | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$ | por ítem 2 |
| 3. | $((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$ | por (MP) de 1. y 2. |

¹Para cada fórmula α, β escribimos que $\alpha \dashv\vdash \beta$ cuando $\alpha \vdash \beta$ y $\beta \vdash \alpha$, en simultáneo.

4. Sean α β y δ fórmulas, entonces,

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ por **(Ax2)**
2. $((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ por ítem 3. □
3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ por 1. y 2. por ítem 1

Notar que el esquema $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ del ítem 4. del lema previo coincide con el axioma **(A2)** de la lógica R4. Como consecuencia, obtenemos que toda deducción en el fragmento implicativo de R4 es válida en L_1 .

Vemos ahora que **(Ax2)** es un teorema en el fragmento implicativo de R4² y, por lo tanto, toda deducción en L_1 que no involucre el uso de la regla **(T)** es válida en el fragmento implicativo de R4. Llamamos IR4 al fragmento implicativo de R4; es decir, el cálculo que satisface los siguientes esquemas de axiomas:

(A1) $\alpha \rightarrow \alpha$,

(A2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ y

(A3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$,

cuya única regla es modus ponens.

La siguiente versión débil del teorema de la deducción para IR4 simplifica las pruebas en L_1 .

Lema 119 ([16], página 202.). Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash_{IR4} \beta$ y para $i = 1, \dots, n - 1$, $\alpha_i = \delta_i \rightarrow \eta_i$ para alguna fórmula δ_i, η_i , entonces $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \vdash_{IR4} \alpha_n \rightarrow \beta$. En particular, si $\alpha \vdash_{IR4} \beta$, entonces $\vdash_{IR4} \alpha \rightarrow \beta$.

Como una aplicación del Lema 119, podemos dar la siguiente prueba simple de **(Ax2)** de L_1 dentro del sistema IR4:

1. α por hipótesis
2. $\alpha \rightarrow \beta$ por hipótesis
3. $\beta \rightarrow \delta$ por hipótesis
4. β de 1. y 2. por **(MP)**
5. δ de 3. y 4. por **(MP)**

Así, tenemos que $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \delta, \alpha\} \vdash_{IR4} \delta$. Aplicando el Lema 119, obtenemos $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \delta\} \vdash_{IR4} \alpha \rightarrow \delta$.

²La ecuación (17) en la página 202 de [16]; ver también el párrafo posterior al Corolario 120.

Finalmente, aplicando nuevamente el Lema 119, obtenemos

$$\vdash_{IRA} (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)).$$

Como una consecuencia del Lema 119 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 120. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash_{L_1} \beta$ tal que la prueba de β no requiere el uso de la regla **(T)** y supongamos que para $i = 1, \dots, n-1$, $\alpha_i = \delta_i \rightarrow \eta_i$ para algunas fórmulas δ_i, η_i , entonces $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \vdash_{L_1} \alpha_n \rightarrow \beta$. En particular, si $\alpha \vdash_{L_1} \beta$, y la prueba de β no requiere el uso de la regla **(T)**, entonces $\vdash_{L_1} \alpha \rightarrow \beta$.

Vemos ahora que L_1 es una lógica implicativa.

(IL1) Por **(Ax1)**, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$.

(IL2) Esta es la regla 1. de Lema 118.

(IL3) Probemos que

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \delta\} \vdash (\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta).$$

Para probarlo primero vemos la validez de las siguientes deducciones en L_1 .

$$\textbf{(IL3}_1\textbf{)} \quad \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\} \vdash (\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$$

$$\textbf{(IL3}_2\textbf{)} \quad \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\} \vdash (\delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\delta \rightarrow \beta)$$

Se debe tener en cuenta que los roles de α y de β son intercambiables en las expresiones anteriores. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Lema 121. Si L_1 satisface **(IL3₁)** y **(IL3₂)**, entonces satisface **(IL3)**.

Demostración. Supongamos que $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \eta$ y $\eta \rightarrow \delta$. Por **(IL3₁)**,

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\} \vdash (\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta). \quad (5.1)$$

Por **(IL3₂)**,

$$\{\delta \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \delta\} \vdash (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta). \quad (5.2)$$

La siguiente es una prueba en L_1 :

1. $\alpha \rightarrow \beta$ por hipótesis
2. $\beta \rightarrow \alpha$ por hipótesis
3. $\delta \rightarrow \eta$ por hipótesis
4. $\eta \rightarrow \delta$ por hipótesis
5. $(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$ de 1. y 2., aplicando la ecuación (5.1)
6. $(\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta)$ de 3. y 4., aplicando la ecuación (5.2)
7. $(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta)$ por **(IL2)**, de 5. y 6.

Así, concluimos que

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \eta, \eta \rightarrow \delta\} \vdash (\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta). \quad (5.3)$$

Intercambiando convenientemente los roles de α y β , y los de η y δ , de (5.3) se obtiene que **(IL3)**. $\square$

Por lo tanto, basta con dar pruebas de **(IL3₁)** y **(IL3₂)** en L_1 .

Comencemos con **(IL3₁)**:

- | | | |
|----|---|----------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | por hipótesis |
| 2. | $\beta \rightarrow \alpha$ | por hipótesis |
| 3. | $(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta))$ | (Ax2) |
| 4. | $(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$ | por (MP) de 2. y 3. |

Por lo tanto, se tiene **(IL3₁)**.

Probemos ahora **(IL3₂)**:

- | | | |
|----|---|-----------------------------|
| 1. | $\delta \rightarrow \eta$ | por hipótesis |
| 2. | $\eta \rightarrow \delta$ | por hipótesis |
| 3. | $\beta \rightarrow (\delta \rightarrow \eta)$ | de 1., por regla (T) |
| 4. | $(\beta \rightarrow (\delta \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta))$ | (Ax3) |
| 7. | $(\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \eta)$ | by (MP) de 3. y 4. |

Entonces, se tiene **(IL3₂)**.

(IL4) Es Modus Ponens.

(IL5) Es la regla **(T)**.

Dado que el sistema L_1 satisface las propiedades **(IL1)** a **(IL5)**, es una lógica implicativa.

La siguiente metapropiedad es consecuencia del Teorema 8.

Teorema 9 (Teorema de completitud). *La lógica L_1 es completa con respecto a la clase $Alg_{L_1}^*$.*

Además, L_1 es algebrizable en el sentido de Blok y Pigozzi³.

Lema 122. $Alg_{L_1}^* = \mathbf{sHA}$.

Demostración. Es consecuencia de [19, Proposición 2.7] que $Alg_{L_1}^*$ es una cuasivariiedad cuyas álgebras satisfacen **(I)**, **(B)**, **(S)** y **(T)** de la Definición 13, y la siguiente cuasi-ecuación: si $1 \rightarrow x = 1$ entonces $x = 1$. Además,

³Ver Definición 3.39 de [19].

es consecuencia de [19, Proposición 2.15] que toda álgebra de $Alg_{L_1}^*$ es un álgebra implicativa, así toda álgebra de $Alg_{L_1}^*$ satisface (A) de la Definición 13. Entonces, $Alg_{L_1}^* \subseteq \mathbf{sHA}$. Recíprocamente, sean $A \in \mathbf{sHA}$ y $x \in A$ tal que $1 \rightarrow x = 1$. Por (T), tenemos que $x \rightarrow 1 = 1$, luego aplicando (A) resulta que $x = 1$. Así, $A \in Alg_{L_1}^*$ y en consecuencia $\mathbf{sHA} \subseteq Alg_{L_1}^*$. Por lo tanto, $Alg_{L_1}^* = \mathbf{sHA}$. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 9 y Lema 122 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 123. *Para cada $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \text{Fm}_{L_1}$, $\Gamma \vdash \alpha$ si y sólo si para cada $A \in \mathbf{sHA}$ y todo $h \in \text{Hom}(\text{Fm}_{L_1}, A)$, $h(\Gamma) \subseteq \{1\}$ implica $h(\alpha) = 1$.*

Concluimos esta sección mostrando que la lógica L_1 tiene la propiedad de los modelos finitos (FMP para abreviar). Para ello, usamos que toda álgebra de sub-Hilbert A , es sumergible en un retículo subresiduado, que indicamos $\hat{A}$, mediante la inmersión $\varphi : A \rightarrow \hat{A}$, considerada en la Subsección 2.2.1.

Lema 124. *Sean L un retículo distributivo finito acotado y D un subretículo acotado de L . El par (L, D) es un retículo subresiduado.*

Demostración. Sean $a, b \in L$, y consideremos el conjunto $E_{ab} := \{d \in D : d \wedge a \leq b\}$. Dado que $0 \wedge a = 0 \leq b$, $E_{ab} \neq \emptyset$. Como D es finito, existe $\bigvee E_{ab}$, al que indicamos con u . Como L es distributivo, $a \wedge u = a \wedge \bigvee \{d : d \in E_{ab}\} = \bigvee \{a \wedge d : d \in E_{ab}\} \leq b$, porque $a \wedge d \leq b$ para todo $d \in E_{ab}$. En consecuencia, $u \in E_{ab}$, y luego $u = \max E_{ab}$. $\square$

Sea α una fórmula en el language $\mathcal{L} = \{\rightarrow\}$, y supongamos que $\not\models_{L_1} \alpha$. Entonces, en $\mathbf{sHA} \not\models \alpha$; es decir, existe $A \in \mathbf{sHA}$ y un homomorfismo $v : \text{Fm}_{\mathcal{L}} \rightarrow A$, tal que $v(\alpha) \neq 1$.

Considerando el monomorfismo $\varphi : A \rightarrow \hat{A}$ podemos extender v a un homomorfismo $w : \text{Fm}_{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{A}$, tal que $w(\alpha) \neq 1$ ($w = \varphi \circ v$).

Indicamos con $\text{Sub}(\alpha)$ al conjunto de subfórmulas de α . Por construcción, $\text{Sub}(\alpha)$ es un conjunto finito. Sea $X := w(\text{Sub}(\alpha))$, es decir $X = \{w(\beta) : \beta \in \text{Sub}(\alpha)\} \subseteq \hat{A}$. Sea B el subretículo de $\hat{A}$ generado por $X \cup \{0, 1\}$. Como $\hat{A}$ es distributivo y X es finito, B es finito. Sea $D := B \cap \square \hat{A} \subseteq B$. Por el Lema 124, el par (B, D) define un retículo subresiduado cuyo reducto implicativo será denotado por $(B, \rightsquigarrow)$.

Lema 125. Sean A, α, X y B como fueron definidos en el párrafo anterior. Entonces, para $a, b \in X$, si $a \rightarrow b \in X$ entonces $a \rightsquigarrow b = a \rightarrow b$.

Demostración. En primer lugar, notar que $a \rightarrow b = \max\{d \in \Box\hat{A} : d \wedge a \leq b\}$ y $a \rightsquigarrow b = \max\{d \in D : d \wedge a \leq b\}$.

Luego, como φ es una inmersión y $D \subseteq \Box\hat{A}$, entonces $a \rightarrow b \geq a \rightsquigarrow b$. Por otro lado, como $a \rightarrow b \in D$, entonces $a \rightarrow b \leq a \rightsquigarrow b$. Entonces, $a \rightarrow b = a \rightsquigarrow b$. $\square$

Como consecuencia del Lema 125, existe un homomorfismo $v' : Fm_{\mathcal{L}} \rightarrow B$ tal que $v'(\alpha) = w(\alpha) = \varphi(v(\alpha)) \neq 1$. Entonces concluimos que α tiene un contramodelo finito. De esta manera obtuvimos una demostración del siguiente resultado.

Proposición 126. La lógica L_1 tiene la propiedad de los modelos finitos con respecto a su semántica algebraica.

5.3. Expansiones de L_1

En esta sección exploramos algunas expansiones axiomáticas del sistema L_1 agregando nuevos conectivos en el lenguaje. En cada caso, analizamos la existencia de una semántica algebraica para cada nuevo cálculo. En lo que sigue escribimos $L_1^\wedge$, $L_1^{\wedge, \neg}$ y $L_1^{\wedge, \neg, \vee}$ para las expansiones sucesivas de L_1 con conectores $\wedge$, $\neg$, $\vee$, etc.

La expansión $L_1^\wedge$

Definición 35. El sistema $L_1^\wedge$ es la expansión de L_1 al lenguaje $\{\rightarrow, \wedge\}$ (siendo $\wedge$ un conector de aridad 2, que llamamos 'conjunción') cumpliendo los esquemas y reglas de L_1 , además de los siguientes esquemas de axiomas:

$$(C1) \quad (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha,$$

$$(C2) \quad (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta \quad y$$

$$(C3) \quad (\delta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\delta \rightarrow \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))).$$

Notar que el siguiente esquema, que llamamos (C4), también se cumple en $L_1^\wedge$.

$$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$$

Para probar esto, damos una prueba de $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \vdash \beta$ en $L_1^\wedge$ y aplicamos el Corolario 120:

- | | | |
|----|---|-----------------------------|
| 1. | $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$ | por hipótesis |
| 2. | $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \alpha$ | por (C1) |
| 3. | $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ | por (C2) |
| 4. | $\alpha \rightarrow \beta$ | de 1. y 3., por (MP) |
| 5. | α | de 1. y 2., por (MP) |
| 6. | β | de 5. y 4., por (MP) |

Esta expansión es una lógica implicativa, para comprobarlo basta con probar la siguiente propiedad:

$$(\mathbf{IL3}_\wedge) \quad \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\} \vdash_{L_1^\wedge} (\alpha \wedge \delta) \rightarrow (\beta \wedge \delta).$$

Sea α, β y δ fórmulas de $L_1^\wedge$ y supongamos que $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha$. Entonces,

- | | | |
|----|---|------------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | por hipótesis |
| 2. | $\beta \rightarrow \alpha$ | por hipótesis |
| 3. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \alpha$ | (C1) |
| 4. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \beta$ | de 1. y 3. por (IL2) |
| 5. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \delta$ | (C2) |
| 6. | $((\alpha \wedge \delta) \rightarrow \beta) \rightarrow [((\alpha \wedge \delta) \rightarrow \delta) \rightarrow ((\alpha \wedge \delta) \rightarrow (\beta \wedge \delta))]$ | (C3) |
| 7. | $((\alpha \wedge \delta) \rightarrow \delta) \rightarrow ((\alpha \wedge \delta) \rightarrow (\beta \wedge \delta))$ | por (MP) , de 4. y 6. |
| 8. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow (\beta \wedge \delta)$ | por (MP) , de 5. y 7. |

Como $L_1^\wedge$ es una lógica implicativa, tenemos que su semántica algebraica es la cuasivariedad $\text{Alg}_\wedge^*$, la cual tiene reducto en **sHA** y una operación binaria nueva que satisface las ecuaciones:

$$(\mathbf{EC1}) \quad (x \wedge y) \rightarrow x = 1,$$

$$(\mathbf{EC2}) \quad (x \wedge y) \rightarrow y = 1 \quad y$$

$$(\mathbf{EC3}) \quad (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y))) = 1.$$

Dado que **(C4)** se cumple en $L_1^\wedge$ y $\text{Alg}_\wedge^*$ es la semántica algebraica de esta lógica, tenemos que la siguiente ecuación se cumple en $\text{Alg}_\wedge^*$.

$$(\mathbf{EC4}) \quad (x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y = 1.$$

Lema 127. *Sea $A \in \text{Alg}_\wedge^*$. Entonces $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente.*

Demostración. Sea $\leq$ el orden natural de A , dado por la implicación. Por **(EC1)**, $x \wedge y \leq x$ y **(EC2)**, $x \wedge y \leq y$.

Supongamos que $z \leq x, y$. Entonces, $z \rightarrow x = z \rightarrow y = 1$. Por **(EC3)**, tenemos que $1 \rightarrow (1 \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y))) = 1$. Sin embargo, $1 \rightarrow (1 \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y))) = z \rightarrow (x \wedge y)$ y, en consecuencia, $z \leq x \wedge y$; es decir, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Además, por **(T)**, tenemos que para todo $x \in A$, $x \leq 1$. $\square$

Lema 128. *Las clases **SRS** y $\text{Alg}_\wedge^*$ son iguales.*

Demostración. Por el Lema 127, todo elemento de $\text{Alg}_\wedge^*$ es un semi-retículo acotado superiormente y, por lo tanto, **(SL1)** a **(SL4)** se satisfacen.

Por otro lado, **(SR1)** coincide con **(EC1)**. Como **(SR2)** se cumple en **sHA**, también vale en $\text{Alg}_\wedge^*$, además **(SR3)** es una consecuencia directa de **(EC4)**. Finalmente, por **(EC3)**, tenemos que $z \rightarrow x \leq (z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y))$ luego aplicando **(EC4)**, resulta

$$(z \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y) \leq (z \rightarrow y) \wedge ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y))) \leq z \rightarrow (x \wedge y).$$

La otra desigualdad de **(SR4)** es directa.

Hemos visto que $\text{Alg}_\wedge^* \subseteq \text{SRS}$.

La recíproca es consecuencia de aplicar los Lemas 47 y 49. $\square$

Adaptando la prueba de la Proposición 126 y usando que $A \in \text{SRS}$ se puede sumergir en un retículo subresiduado (como se vio en la Sección 2.2.2) puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 129. *La lógica $L_1^\wedge$ tiene la propiedad de los modelos finitos con respecto a su semántica algebraica.*

La expansión L_1^-

Definición 36. *El sistema L_1^- es la expansión de L_1 al lenguaje $\{\rightarrow, \neg\}$ (siendo $\neg$ un conectivo unario, al que llamamos 'negación') scumpliando los esquemas y reglas de L_1 , además de los siguientes esquemas de axiomas:*

$$(N1) \quad \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta), \quad y$$

$$(N2) \quad (\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow \neg\beta.$$

Tanto en L_1^- como en cualquier expansión, escribimos 1 como abreviatura de $x \rightarrow x$, siendo x una variable proposicional fijada, y 0 como abreviatura de $\neg 1$. Luego, para cualquier fórmula β :

$$\vdash 0 \rightarrow \beta \quad y$$

$$\neg\beta \Vdash \beta \rightarrow 0^4.$$

⁴Decimos que $\alpha \Vdash \beta$ si y sólo si $\alpha \vdash \beta$ y $\beta \vdash \alpha$, en simultáneo

Primero demostremos que $\vdash 0 \rightarrow \beta$:

1. $0 \rightarrow (1 \rightarrow \beta)$ **(N1)**
2. $(1 \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ **(C4)**
3. $0 \rightarrow \beta$ por **(IL2)**, 1. y 2.

Ahora, vemos $\neg\beta \vdash \beta \rightarrow 0$:

1. $\neg\beta$ por hipótesis
2. $\neg\beta \rightarrow (\beta \rightarrow 0)$ **(N1)**
3. $\beta \rightarrow 0$ por **(MP)**, 1. y 2.

Vemos finalmente que $\beta \rightarrow 0 \vdash \neg\beta$:

1. $\beta \rightarrow 0$ hipótesis
2. $(\beta \rightarrow 0) \rightarrow \neg\beta$ **(N2)**
3. $\neg\beta$ por **(MP)**, 1. y 2.

Esta expansión también es una lógica implicativa, para comprobarlo basta con probar la siguiente propiedad:

(IL3_¬) $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\} \vdash_{L_1^-} \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$.

Sean α y β fórmulas en L_1^- .

1. $\alpha \rightarrow \beta$ hipótesis
2. $\beta \rightarrow \alpha$ hipótesis
3. $(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta)))$ **(Ax2)**
4. $(\alpha \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta)) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta))$ por **(MP)**, de 2. y 3.
5. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta))$ **(N1)**
6. $\neg\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta))$ de 5. y 4. por **(IL2)**
7. $(\beta \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \delta)) \rightarrow \neg\beta$ **(N2)**
8. $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ de 6. y 7. por **(IL2)**

Así, obtenemos que L_1^- es una lógica implicativa y como consecuencia tiene a $\text{Alg}_{\neg}^*$ como semántica algebraica equivalente.

Lema 130. *La cuasivariiedad $\text{Alg}_{\neg}^*$ es equivalente por términos con la clase de álgebras de sub-Hilbert con primer elemento, $0 := \neg 1$ y que define la operación unaria $\neg$ como $\neg x := x \rightarrow 0$.*

Corolario 131. *La cuasivariiedad $\text{Alg}_{\wedge, \neg}^*$ es equivalente por términos con la variedad SRS_0 cuyos miembros son las álgebras $(A, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$, tal que $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ es un semi-retículo subresiduado con primer elemento, 0.*

La expansión $L_1^\vee$

Definición 37. El sistema $L_1^\vee$ es la expansión de L_1 al lenguaje $\{\rightarrow, \vee\}$ (siendo $\vee$ un conectivo binario llamado 'disyunción') que satisface, además de los esquemas y reglas de L_1 , los siguientes esquemas de axiomas:

- (D1) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$,
 (D2) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ y
 (D3) $(\alpha \rightarrow \delta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \delta) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \delta))$.

Esta expansión también es una lógica implicativa, para comprobarlo basta con probar la siguiente propiedad:

$$(\mathbf{IL3}_\vee) \quad \{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha\} \vdash_{L_1^\vee} (\alpha \vee \delta) \rightarrow (\beta \vee \delta).$$

Sean α, β y δ fórmulas en $L_1^\vee$, supongamos que $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \alpha$. La siguiente es una demostración en $L_1^\vee$.

- | | | |
|----|---|----------------------|
| 1. | $\beta \rightarrow \alpha$ | por hipótesis |
| 2. | $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \delta)$ | (D1) |
| 3. | $\beta \rightarrow (\alpha \vee \delta)$ | por 1. y 2. por (D2) |
| 4. | $\delta \rightarrow (\alpha \vee \delta)$ | (D2) |
| 5. | $(\beta \rightarrow (\alpha \vee \delta)) \rightarrow ((\delta \rightarrow (\alpha \vee \delta)) \rightarrow ((\beta \vee \delta) \rightarrow (\alpha \vee \delta)))$ | (D3) |
| 6. | $(\delta \rightarrow (\alpha \vee \delta)) \rightarrow ((\beta \vee \delta) \rightarrow (\alpha \vee \delta))$ | por (MP) de 3. y 5. |
| 7. | $(\beta \vee \delta) \rightarrow (\alpha \vee \delta)$ | por (MP) de 4. y 6. |

Como $L_1^\vee$ es una lógica implicativa, tenemos que su semántica algebraica es la cuasi-variedad $\text{Alg}_\vee^*$, la cual tiene reducto en **sHA** y una operación binaria nueva $\vee$ que satisface las siguientes ecuaciones:

- (ED1) $x \rightarrow (x \vee y) = 1$,
 (ED2) $y \rightarrow (x \vee y) = 1$, y
 (ED3) $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z)) = 1$.

La prueba del siguiente resultado es similar a la del Lema 127.

Lema 132. Sea $A \in \text{Alg}_\vee^*$, entonces $(A, \vee, 1)$ es un semi-retículo, con $x \vee y = \sup\{x, y\}$, donde se toma el supremo con respecto al orden en A asociado a $\rightarrow$.

Corolario 133. La cuasivariiedad $\text{Alg}_{\wedge, \vee}^*$ coincide con la variedad $\mathbf{SRS}^\vee$ cuyos miembros son las álgebras $(A, \wedge, \vee, \rightarrow, 1)$ de tipo $(2, 2, 2, 0)$ tal que $(A, \wedge, \rightarrow, 1)$ es un semiretículo subresiduo y $(A, \wedge, \vee)$ es un retículo.

Observación 134. *La expansión de L_1 con los tres conectivos lógicos $\wedge, \vee$ y $\neg$ difiere con el sistema $R4$ de [16]. Se diferencian en que la validez de la regla (T) no se pide en [16] y el hecho de que el esquema axiomático (A10) de [16] no se pide en L_1 . La extensión axiomática de L_1 por el esquema (10) de [16] tiene como semántica algebraica equivalente la variedad **SRL**. Las lógicas $L_1^{\wedge, \vee, \neg} + (A10)$ y $R4$ tienen los mismos teoremas, aunque no coinciden como sistemas deductivos.*

Terminamos esta sección probando la validez de la propiedad de los modelos finitos para las lógicas $R4$ y $L_1^{\wedge, \vee, \neg}$.

La prueba de que $R4$ tiene la FMP es directa. Sea φ una fórmula tal que $\not\models \varphi$. Entonces, existen $A \in \mathbf{SRL}$ y $v : Fm_{R4} \rightarrow A$, un homomorfismo tal que $v(\varphi) \neq 1$. Sean $Sub(\varphi)$ el conjunto de subfórmulas de φ , y $X = \{v(\alpha) : \alpha \in Sub(\varphi)\}$, luego X es un subconjunto finito de A .

Sean L el subretículo acotado de A generado por X , y D el subretículo acotado de A (y por lo tanto de $\Box A$) generado por $\Box X = X \cap \Box A$. Como consecuencia tenemos que D es un subretículo acotado de L , que es finito, porque X es finito y A es un retículo distributivo. Dado que L es distributivo y finito, el par (L, D) define un retículo subresiduado A' . Indicamos con $\rightsquigarrow$ a la implicación en A' . De manera similar a la prueba realizada para el Lema 125 tenemos el siguiente resultado.

Lema 135. *Sean A y A' como se definieron en el párrafo anterior. Entonces, si $a, b, a \rightarrow b \in X$, tenemos que $a \rightsquigarrow b = a \rightarrow b$.*

Como consecuencia del Lema 135 existe único homomorfismo $v' : Fm \rightarrow A'$ tal que $v'(x) = v(x)$ para cada variable en $Sub(\varphi)$, luego $v'(\varphi) = v(\varphi) \neq 1$. Entonces concluimos que φ tiene un contramodelo finito. De esta manera obtuvimos una demostración del siguiente resultado.

Proposición 136. *La lógica $R4$ tiene la propiedad de los modelos finitos con respecto a su semántica algebraica.*

En el caso de $L_1^{\wedge, \vee, \neg}$, tenemos como obstáculo para aplicar el argumento anterior que, en general, las álgebras de su semántica algebraica no son distributivas.

Sea φ una fórmula tal que $\not\models \varphi$. Entonces existen A y $v : Fm_{L_1^{\wedge, \vee, \neg}} \rightarrow A$, tal que $v(\varphi) \neq 1$.

Sean $Sub(\varphi)$ el conjunto de subfórmulas de φ y el conjunto $X_0 := \{v(\alpha) : \alpha \in Sub(\varphi)\}$, luego X_0 es un subconjunto finito de A . Consideremos $X_1 = X_0 \cup \{0, 1\}$, $X_1^\Box = X_1 \cap \Box A \subseteq \Box A$ y D , el subretículo de $\Box A$ (y por lo tanto de A) generado por $X_1^\Box$. Dado que $X_1^\Box$ es finito y $\Box A$ es distributivo, D es

finito. Entonces, $X := X_0 \cup D \subseteq A$ también es finito.

Sea A' el semi-retículo de A generado por X . Dado que la variedad de semi-retículos es localmente finita y X es finito, A' es finito y, en consecuencia, acotado superiormente. Entonces, A' es un retículo (aunque no necesariamente un subretículo de A).

Indicamos con $\underline{\vee}$ al supremo en A' . Además, D es una subretículo acotado y distributivo de A' .

Para cada $a, b \in A'$, escribimos $E'_{ab} := \{d \in D : d \wedge a \leq b\}$. Como A' es finito, $u = \underline{\vee} E'_{ab}$ existe. Además, como $E'_{ab} \subseteq D$, $u = \underline{\vee} E'_{ab} = \underline{\vee} E_{ab}$. Como $D \subseteq \Box A$, $\overline{E'_{ab}} \subseteq E_{ab} = \{d \in \Box A : d \wedge a \leq b\}$. Luego,

$$\underline{\vee} E'_{ab} = \underline{\vee} E_{ab} \leq \underline{\vee} E_{ab} = \text{máx } E_{ab} = a \rightarrow b. \quad (5.4)$$

Por la ecuación (5.4), $a \wedge u \leq a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$; es decir, $u = \text{máx } E'_{ab}$. Definimos en A' una operación binaria $\rightsquigarrow$ por $a \rightsquigarrow b := \text{máx } E'_{ab}$. Por el Lema 61, $(A', \rightsquigarrow) \in \text{Alg}_{\wedge, \vee, \neg}^*$.

Proposición 137. *Sean A y A' como se indicaron en párrafos anteriores. Entonces,*

1. si $a, b, a \rightarrow b \in A'$, entonces $a \rightsquigarrow b = a \rightarrow b$ y
2. si $a, b, a \vee b \in A'$, entonces $a \underline{\vee} b = a \vee b$.

Demostración. Como ya se mencionó, $a \rightsquigarrow b = \underline{\vee} E'_{ab} \leq \underline{\vee} E_{ab} = a \rightarrow b$. Por otro lado, dado que $a \rightarrow b \in \underline{\vee} E'_{ab}$, $a \rightarrow b \leq a \rightsquigarrow b$.

Dado $a, b \in A'$, $a \underline{\vee} b = \bigwedge \{z \in A' \mid a \leq z, b \leq z\} = \text{mín} \{z \in A' \mid a \leq z, b \leq z\} \geq \text{mín} \{z \in A \mid a \leq z, b \leq z\} = a \vee b$. Además, $a \vee b \in \{z \in A' \mid a \leq z, b \leq z\}$ y, en consecuencia, $a \underline{\vee} b \leq a \vee b$. $\square$

Como una consecuencia de Proposición 137, obtenemos que si consideramos el homomorfismo $v' : Fm \rightarrow A'$, inducido por v , entonces $v'(\varphi) = v(\varphi) \neq 1$. Por lo tanto, existe un contramodelo finito para φ .

Finalmente, por las Proposiciones 135 y 137, tenemos que $L_1^{\wedge, \vee, \neg}$ tiene la propiedad de los modelos finitos.

Una expansión alternativa de L_1

En la sección anterior, hemos expandido L_1 con una “conjunción”, mediante los axiomas (C1), (C2) y (C3), con (C1) a (C3) los axiomas intuicionistas usuales para la conjunción. Alternativamente, podríamos haber definido el conectivo $\wedge$ por medio de los axiomas (C1), (C2) y una regla (más débil) en lugar del axioma (C3).

Definición 38. El sistema L_1^+ es la expansión de L_1 en el lenguaje $\{\rightarrow, \wedge\}$ (con $\wedge$ un conectivo binario que llamamos ‘conjunción débil’) tal que además de los axiomas y reglas de L_1 , satisface los siguientes esquemas de axiomas:

$$(W1) (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha,$$

$$(W2) (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$$

y la regla

$$\frac{\delta \rightarrow \alpha, \delta \rightarrow \beta}{\delta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)} \quad (C)$$

Notar que (C3) implica la regla (C). Es por eso que el sistema L_1^+ es, en principio, un debilitamiento del sistema $L_1^\wedge$. El objetivo de esta sección es el estudio del sistema L_1^+ .

Notar que el siguiente esquema, que llamamos (W4), también se cumple en L_1^+ .

$$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$$

Para probar esto, damos una prueba de $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \vdash \beta$ en L_1^+ y aplicamos el Corolario 120:

- | | | |
|----|---|----------------------|
| 1. | $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$ | por hipótesis |
| 2. | $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \alpha$ | por (W1) |
| 3. | $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ | por (W2) |
| 4. | $\alpha \rightarrow \beta$ | de 1. y 3., por (MP) |
| 5. | α | de 1. y 2., por (MP) |
| 6. | β | de 5. y 4., por (MP) |

A continuación comprobamos que la lógica L_1^+ también es implicativa y, por tanto, algebrizable. Para ello, comprobamos que (IL3) se satisface para L_1^+ .

Sean α y β fórmulas tales que se verifican $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \alpha$.

- | | | |
|----|--|-------------------------------|
| 1. | $\alpha \rightarrow \beta$ | Por hipótesis |
| 2. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \alpha$ | por (W1) |
| 3. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \delta$ | por (W2) |
| 4. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow \beta$ | de 2. y 1., por (IL2) |
| 5. | $(\alpha \wedge \delta) \rightarrow (\beta \wedge \delta)$ | de 3. y 4., por la regla (C). |

Entonces, L_1^+ es algebrizable y su cuasivariiedad asociada, Alg_+^* , tiene como cuasi-ecuaciones (B), (I), (A), (T), (S) y

$$(EW1) (x \wedge y) \rightarrow x = 1,$$

(EW2) $(x \wedge y) \rightarrow y = 1 \quad y$

(QW3) Si $z \rightarrow x = 1$ y $z \rightarrow y = 1$, entonces $z \rightarrow (x \wedge y) = 1$.

En esta cuasivariiedad $\wedge$ sigue siendo el ínfimo con respecto al orden inducido por $\rightarrow$. En efecto, por **(EW1)** y **(EW2)**, tenemos que $x \wedge y \leq x, y$. Por otro lado, si $z \leq x, y$, entonces $z \rightarrow x = z \rightarrow y = 1$. Por **(QW3)**, obtenemos que $z \rightarrow (x \wedge y)$; es decir, $z \leq x \wedge y$.

Además también se cumple en Alg_+^*

(EW4) $(x \wedge (x \rightarrow y)) \rightarrow y = 1$.

Puede escribirse alternativamente como $x \wedge (x \rightarrow y) \leq y$.

Teorema 10. *Las cuasi-variedades **sHS** y Alg_+^* coinciden.*

Demostración. Sea $A \in \text{Alg}_+^*$. Notar que $(A, \wedge, 1)$ es un semi-retículo acotado superiormente. Las ecuaciones **(SR1)** y **(SR3)** coinciden con **(EW1)** y **(EW4)**, respectivamente. Las ecuaciones **(SH3)** y **(SH4)** se cumplen en toda álgebra de sub-Hilbert y A es una de estas. Por lo tanto, obtenemos que $A \in \text{sHS}$.

Recíprocamente, supongamos que $A \in \text{sHS}$. Comprobemos que la ecuación y las cuasi-ecuaciones que definen a Alg_+^* se cumplen en A .

Primero, notar que **(EW1)** es **(SR1)** y **(I)** y **(T)** son consecuencia de **(SR1)** junto con el hecho de que $x \wedge x = x$ y $x \wedge 1 = x$. La ecuación **(EW2)** se sigue de **(SR1)** y del hecho que $x \wedge y = y \wedge x$.

La validez de **(A)** se sigue del hecho de que $A \in \text{sHS}$ y $x \leq y$ si y sólo si $x \rightarrow y = 1$.

La ecuación **(B)** se sigue de **(SH1)**.

La ecuación **(S)** es la ecuación **(SH3)**.

Finalmente, supongamos que $z \rightarrow x = z \rightarrow y = 1$; es decir, que $z \leq x, y$. Como $\wedge$ es el ínfimo en A , $z \leq x \wedge y$; es decir, **(QW3)** se cumple en A . $\square$

Por el Corolario 66 podemos afirmar que **sHS** $\neq$ **SRS**. Entonces, debido a la corrección y completitud de las lógicas L_1^+ y $L_1^\wedge$ con respecto a estas semánticas algebraicas, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 138. *Los sistemas L_1^+ y $L_1^\wedge$ presentan diferentes lógicas.*

Bibliografía

- [1] Burris S. and Sankappanavar H.P., *A course in Universal Algebra*. Springer-Verlag (1980).
- [2] Balbes R and Dwinger P., *Distributive lattices*. University of Missouri Press, Columbia (1974)
- [3] Bezhanishvili N. and Gehrke M., *Finitely generated free Heyting algebras via Birkhoff duality and coalgebra*. Logical Methods in Computer Science 7, 1–24 (2011).
- [4] Cabrer L.M., Celani S.A. and Montangie D., *Representation and duality for Hilbert algebras*. Central European Journal of Mathematics 7(3), 463–478 (2009).
- [5] Castiglioni J.L. and San Martín H.J., *l-Hemi-Implicative Semilattices*. Studia Logica 106, 675–690 (2018).
- [6] Castiglioni J.L. and San Martín H.J., *Variations of the free implicative semilattice extension of a Hilbert algebra*. Soft Computing, vol. 23, no. 13, 4633–4641 (2019).
- [7] Castiglioni, J. L., Fernández, V., Mallea, F. & San Martín, H., *Sub-Hilbert Lattices*. *Studia Logica* (2023). <https://doi.org/10.1007/s11225-022-10020-7>.
- [8] Castiglioni, J.L., Fernández, V., Mallea, H.F. & San Martín, H., *On a variety of hemi-implicative semilattices*. Soft Computing 26 (7), 3187–3195 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00500-022-06807-4>.
- [9] Castiglioni, J.L., Fernández, V., Mallea, H.F. & San Martín, H., *On subreducts of subresiduated lattices and some related logics*, Journal of Logic and Computation, 2023;, exad042, <https://doi.org/10.1093/logcom/exad042>.

- [10] Castiglioni, J. L. & San Martín, H., *On Hilbert algebras generated by the order*. Arch. Math. Logic, published online (2021). <https://doi.org/10.1007/s00153-021-00777-4>.
- [11] Celani S.A. and Jansana R., *Bounded distributive lattices with strict implication*. Mathematical Logic Quarterly 51, 219–246, (2005).
- [12] Celani S.A. and Esteban M., *Spectral-like duality for distributive Hilbert algebras with infimum*. Algebra Universalis 78, 193–213 (2017).
- [13] Celani S. and Jansana R., *A Closer Look at Some Subintuitionistic Logics*, Notre Dame Journal of Formal Logic 42 (4), 225–255 (2001).
- [14] Cirulis J., *Weak relative pseudocomplements in semilattices*. Demonstratio Mathematica 44(4), 651–672 (2011).
- [15] Diego A., *Sobre Algebras de Hilbert*. Notas de Lógica Matemática. Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1965).
- [16] Epstein G. and Horn A., *Logics which are characterized by subresiduated lattices*. Z. Math. Logik Grundlagen Math. 22, 199–210 (1976).
- [17] Figallo A.V., Ramón G. and Saad S., *A note on the Hilbert algebras with infimum*. Math. Contemp. 24, 23–37 (2003).
- [18] Font, J. M., *On semilattice-based logics with an algebraizable assertional companion*. Reports on Mathematical Logic 46: 109–132, 2011
- [19] Font, J. M., *Abstract Algebraic Logic. An introductory Textbook*. Studies in Logic 60, College Publ. (2016)
- [20] Jansana R. and San Martín H.J., *On Kalman’s functor for bounded hemi-implicative semilattices and hemi-implicative lattices*. Logic Journal of the IGPL, vol. 26, no. 1, 47–82 (2018).
- [21] Nemitz W., *Implicative semi-lattices*. Transactions of the American Mathematical Society 117, 128–142 (1965).
- [22] Sankappanavar H.P., *Semi-Heyting algebras: an abstraction from Heyting algebras*. Actas del IX Congreso A. R. Monteiro, Bahía Blanca (2007).
- [23] Sankappanavar H.P., *Expansions of semi-heyting algebras I: discriminator varieties*, Studia Logica 98, 27–81 (2011).

- [24] San Martín H.J., *On congruences in weak implicative semi-lattices*. Soft Computing, vol. 21, no. 12, 3167–3176 (2017).

Índice de acrónimos, definiciones y símbolos

Alg_L^* , 81	hIS , 12
$Con(A)$, 16	HL , 11
$D_F(G)$, 71	HL-par , 50
Fm , 80	$\langle X \rangle$, 15
$Hom(A, B)$, 80	$\mathcal{L}$ -álgebra, 80
L -álgebra , 81	sHA , 25
L_1 , 82	sHL , 44
L_1^+ , 95	sHL-terna , 50
L_1^- , 90	sHS , 41
$L_1^\vee$, 92	$\Box A$, 20
$L_1^\wedge$, 88	$\Box a$, 20
$L_1^{\wedge, \vee, \neg}$, 93	SRL , 12
$Sub(\alpha)$, 87	SRL* , 38
X^+ , 14	SRL*-par , 40
$Fil(A)$, 14	SRS , 34
Hey , 7	SRS$^\vee$, 92
H , 8	SRS$_0$, 91
Hil$^\wedge$, 10	MP , 82
$IFil(A)$, 15	$\vdash$, 79
IS , 13	$\vee$, 4
R_A , 71	$\wedge$, 4
RWH , 8	$t(a, b, c)$, 16
RWHIS , 65	$\uparrow u$, 14
SH , 14	$\uparrow U$, 14
ShIL , 76	álgebra implicativa, 81
ShIS , 66	álgebras
$\Theta(F)$, 16	de Heyting débil, 7
WH , 7	de sub-Hilbert, 24
hIL , 13	de Heyting, 7

- de Hilbert, 8
 - de Hilbert con ínfimo, 9
 - de semi-Heyting, 13
- RWH-algebra*, 8
- WH-álgebra*, 7
- congruencia, 16
- creciente, 14
- fórmulas atómicas, 79
- filtro, 14
 - $\vee$ -**absorbente**, 59
 - $\vee$ -**congruente**, 58
 - absorbente, 58
 - congruente, 16
 - generado, 15
 - implicativo, 14
 - implicativo generado, 15
- FMP, 87
- inmersión de orden, 29
- IR4, 84
- Lógica implicativa, 80
- lenguaje, 79
- R4, 81
- retículo, 6
 - acotado, 6
 - completo, 6
 - de Hilbert, 10
 - de sub-Hilbert, 44
 - distributivo, 6
 - hemi-implicativo, 13
 - subresiduado, 11
 - subresiduado en el sentido amplio, 38
- semi-retículo
 - implicativo, 12
 - acotado superiormente, 5
 - de sub-Hilbert, 41
 - hemi-implicativo, 12
- inferior, 4
- subresiduado, 33
- superior, 4
- ShIS-frame, 73
- similaridad, 80
- subreductos, 20
- teorema de completitud, 81
- WH-frame, 72