

## REDISTRIBUCIÓN DE CARGAS MÉTODO DE LA ESTRUCTURA VIRTUAL

G. Scarpin

Departamento de Ingeniería Aeroespacial – UNDEF – CRUC - IUA  
Av. Fuerza Aérea Argentina 6500, (X5010JMX) - Córdoba – Argentina  
Email: gscarpin@iua.edu.ar

### RESUMEN

*En el cálculo estructural de aeronaves, es común que los puntos de aplicación de las cargas en el modelo estructural no coincidan con la ubicación de las cargas aerodinámicas obtenidas mediante otros modelos, como por ejemplo red de vórtices. Este problema puede afectar la precisión del análisis y diseño de la estructura. En este informe, se presenta un método de redistribución de cargas que permite transferir las cargas aerodinámicas al modelo estructural mientras se conservan los esfuerzos seccionales de corte, momento flector y momento torsor que soporta la estructura. El método consiste en crear una estructura virtual de vigas que conecta cada coordenada de los puntos de carga aerodinámica con cada uno de los puntos de entrada de carga en la estructura. Aunque se desarrolló para aplicaciones en superficies planas como alas o empenajes, se demostró que este método también puede aplicarse a cuerpos tridimensionales como los fuselajes, bajo ciertas restricciones. Los resultados obtenidos muestran que este método de redistribución de cargas mejora significativamente la precisión del análisis estructural de aeronaves.*

**Palabras clave:** CARGAS, ESTRUCTURAS, REDISTRIBUCIÓN

### INTRODUCCIÓN

En este informe se presenta un método general para la redistribución de fuerzas de un sistema a otro distinto, con el objetivo de lograr efectos equivalentes a los del sistema original. Este enfoque es especialmente relevante en el campo de la ingeniería aeronáutica, donde se requiere transferir las cargas aerodinámicas obtenidas de modelos como redes de vórtices o paneles a modelos de cálculo estructural, como NASTRAN o ANSYS.

La principal dificultad radica en que los puntos de aplicación de las fuerzas aerodinámicas no coinciden con los nodos de entrada de carga en la estructura. Para resolver este problema, se propone la creación de una estructura virtual, o estructura equivalente, que permita transferir las cargas del modelo aerodinámico al modelo estructural, conservando los esfuerzos seccionales de corte, momento flector y torsor del sistema original. Esto se logra mediante una matriz de transformación simple pero efectiva. La metodología que presentamos en este informe se basa en trabajos previos realizados por Schmitt en 1956<sup>(1)</sup> y Rodden en 1959<sup>(2)</sup>, quienes desarrollaron este enfoque para aplicaciones de aeroelasticidad. Posteriormente, en la década de 1970, esta metodología fue incorporada al software NASTRAN en un trabajo de Rodden, Harder y Bellinger titulado "Aeroelastic Addition to NASTRAN" en 1979<sup>(3)</sup>, y se denominó "Theory for linear Splines". Desde entonces hasta la actualidad, esta metodología ha continuado siendo utilizada en las diversas versiones de NASTRAN, incluyendo aquellas desarrolladas por Siemens y Hexagon.<sup>(4)</sup>

En este informe se presenta una versión del método que fue desarrollada en la FMA en 1989 para el programa CBA-123. Desde entonces, ha sido ampliamente aplicada en numerosos desarrollos aeronáuticos nacionales a lo largo de las últimas tres décadas.

### METODOLOGÍA

#### Relación entre las fuerzas de ambos sistemas

La condición de equivalencia de dos sistemas de carga que actúan sobre un mismo objetivo consiste en lograr que produzcan los mismos efectos sobre dicho objetivo. Una manera de lograr este resultado es planteando la condición de equilibrio de una estructura ficticia que vincule ambos sistemas. Las fuerzas

desconocidas son las reacciones generadas cuando actúa la fuerza del primer sistema. En el contexto de cálculos aerodinámicos y estructurales, es necesario transferir la carga entre los modelos geométricos utilizados. Siguiendo el procedimiento descrito, los puntos de aplicación de las fuerzas y momentos en un modelo de carga se relacionan con los nodos de un modelo de estructura mediante elementos prismáticos. Esta vinculación asegura que cada punto de aplicación de las cargas se conecte con cada uno de los nodos de la estructura, generando así una estructura virtual en forma de marco rígido tridimensional en el caso más general. Esta vinculación entre los dos modelos sirve para encontrar la influencia de cada carga dato sobre cada carga incógnita, es decir, una función de redistribución que transforma un sistema en el otro.

Sea el sistema de carga  $F_a$ , asociado al modelo de cargas aerodinámicas,  $a$ , y el sistema de cargas  $F_e$ , asociado al modelo de estructuras,  $e$ , se tiene:

$$\{F_a\} = [K_{aa}] \{\Delta_a\} \quad (1)$$

$$\{F_e\} = [K_{ea}] \{\Delta_a\} \quad (2)$$

Siendo  $K_{aa}$  y  $K_{ea}$  las matrices de rigidez que relacionan los desplazamientos en los puntos de aplicación de las cargas aerodinámicas,  $\Delta_a$ , con las fuerzas en ambos sistemas. Con la condición de que ambas deformaciones sean iguales, se tiene:

$$\{F_e\} = [K_{ea}] [K_{aa}]^{-1} \{F_a\} \quad (3)$$

Llamando

$$[C] = [K_{ea}] [K_{aa}]^{-1} \quad (4)$$

La ec. (3) puede ser expresada como:

$$\{F_e\} = [C] \{F_a\} \quad (5)$$

Siendo  $C$  la matriz de redistribución buscada que relaciona las fuerzas de ambos modelos.

### Obtención de la matriz de redistribución

Para obtener la matriz  $C$  que relaciona las fuerzas del sistema aerodinámico con las fuerzas estructurales, se propone crear una estructura virtual en forma de marco rígido plano o tridimensional. Esta estructura estará conformada por vigas que conectan cada punto de aplicación de fuerza del sistema aerodinámico con cada uno de los puntos de entrada de carga de la estructura.

La estructura esqueleto propuesta presenta las siguientes características:

- Los nodos del modelo de estructura se consideran como apoyos empotrados, por lo tanto, en los mismos actuarán las reacciones  $\{F_e\}$ .
- Las uniones de los elementos que concurren los puntos de aplicación de las cargas  $\{F_a\}$  se consideran rígidas.
- Se asume que el comportamiento elástico de esta estructura virtual depende de las vigas que la componen.

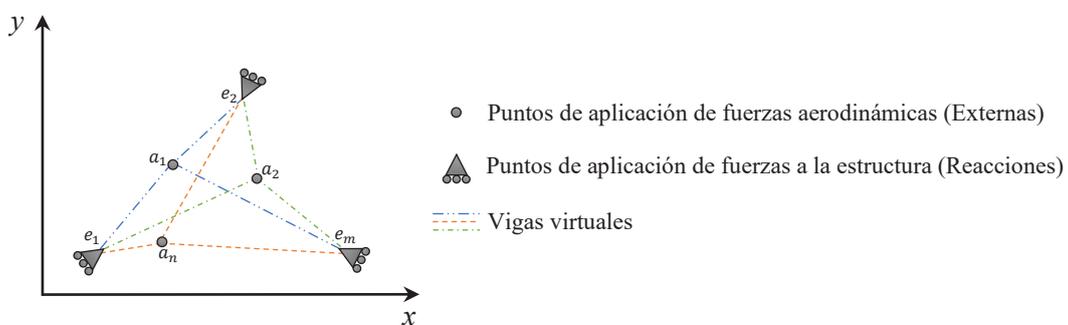


Figura 1: Modelo de estructura virtual

Una estructura virtual así definida es susceptible de ser tratada con la teoría de la elasticidad, siendo las matrices de rigidez de las vigas en coordenadas globales:

$$K_{ii}^j = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} EI_y & -\frac{6s}{l^2} EI_y & \frac{6c}{l^2} EI_y \\ & \frac{c^2}{l} GJ + \frac{4s^2}{l} EI_y & \frac{sc}{l} GJ - \frac{4sc}{l} EI_y \\ Sim & & \frac{s^2}{l} GJ + \frac{4c^2}{l} EI_y \end{bmatrix} \quad K_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{l^3} EI_y & -\frac{6s}{l^2} EI_y & \frac{6c}{l^2} EI_y \\ \frac{6s}{l^2} EI_y & -\frac{c^2}{l} GJ + \frac{2s^2}{l} EI_y & -\frac{sc}{l} GJ - \frac{2sc}{l} EI_y \\ -\frac{6c}{l^2} EI_y & -\frac{sc}{l} GJ - \frac{2sc}{l} EI_y & -\frac{s^2}{l} GJ + \frac{2c^2}{l} EI_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

siendo los cosenos directores:  $c = \frac{x_i - x_j}{L}$  y  $s = \frac{y_i - y_j}{L}$

De las matrices de rigideces en coordenadas globales, (6), cada fila representa, respectivamente, la fuerza de corte, momento en  $x$  y momento en  $y$ . Al ensamblar toda la estructura se tiene:

$$\begin{Bmatrix} F_{z_i} \\ M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ F_{z_j} \\ M_{x_j} \\ M_{y_j} \\ \vdots \\ F_{z_n} \\ M_{x_n} \\ M_{y_n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ia} & \dots & K_{in} \\ & K_{jj} & K_{ja} & \dots & K_{jn} \\ Sim & & & \dots & \\ & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{z_i} \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \Delta_{z_j} \\ \theta_{x_j} \\ \theta_{y_j} \\ \vdots \\ \Delta_{z_n} \\ \theta_{x_n} \\ \theta_{y_n} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

La particularidad de la ecuación matricial anterior es la de poseer cantidades conocidas e incógnitas en ambos miembros. El vector de la izquierda no solo incluye las fuerzas y momentos aplicado en los nodos, sino también las reacciones en los apoyos. Análogamente el vector de la derecha contiene también desplazamientos conocidos (nulos en los apoyos) y los desplazamientos desconocidos en los nudos libres. La matriz  $K$  representa la matriz virtual que vincula a ambos vectores.

Reordenando la matriz anterior según el modelo de estructura virtual, Figura 1, y agrupando las distintas fuerzas y momentos, se puede escribir en forma simplificada como:

$$\begin{Bmatrix} F_e \\ F_a \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ Sim & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_a \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Siendo:

$F_e$  : Fuerzas de reacción  $F_z$  de la estructura virtual. Representa las fuerzas redistribuidas que ingresan a la estructura real cambiadas de signo. (Incógnita)

$F_a$  : Fuerzas exteriores  $F_z$  de la estructura virtual. Representa las fuerzas aerodinámicas a redistribuir. (Dato)

$M$  : Momentos exteriores y actuantes en los apoyos, siendo todos nulos. (Dato)

$\Delta_e$  : Desplazamiento en la dirección  $z$  en los apoyos, siendo los mismos nulos. (Dato)

$\Delta_a$  : Desplazamiento en la dirección  $z$  en los puntos de aplicación de carga. (Incógnita)

$\theta$  : Rotaciones en  $x$  e  $y$ , tanto en los puntos de aplicación de carga como en los apoyos. (Incógnita)

La matriz (8) puede ser subdividida en dos como se muestra a continuación:

$$\{F_e\} = [K_{ab}] \begin{Bmatrix} \Delta_a \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_{bb}] \begin{Bmatrix} \Delta_a \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Se observa que  $K_{bb}$  es una matriz cuadrada simétrica. Premultiplicando por su inversa en ambos miembros de la ec. (10) se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_a \\ \theta \end{Bmatrix} = [K_{bb}]^{-1} \begin{Bmatrix} F_a \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Siendo  $m$  el número de nodos de estructura,  $e$ , y  $n$  el número de nodos de aerodinámica,  $a$ , la matriz  $K_{bb}$ , y su inversa, tienen dimensiones de  $(2 \cdot m + 3 \cdot n) \times (2 \cdot m + 3 \cdot n)$ . Debido a que los momentos del vector

de la derecha son nulos, la inversa de la matriz  $K_{bb}$  puede ser reducida a una matriz de tamaño  $(2 \cdot m + 3 \cdot n) \times (n)$ . Con la matriz reducida  $[k_{bb}]^{-1}$ , la ec. (11) se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_a \\ \theta \end{Bmatrix} = [k_{bb}]^{-1} \{F_a\} \quad (12)$$

Volviendo a la ec. (9) se observa que la matriz  $K_{ab}$  es de dimensiones  $(m) \times (2 \cdot m + 3 \cdot n)$ . Cómo los desplazamientos de la estructura virtual  $\begin{Bmatrix} \Delta_a \\ \theta \end{Bmatrix}$  son los mismos en (9) y (12), reemplazando en (9):

$$\{F_e\} = [K_{ab}] [k_{bb}]^{-1} \{F_a\} \quad (13)$$

Llamando:

$$[C] = [K_{ab}] [k_{bb}]^{-1} \quad (14)$$

Siendo C una matriz de  $(m) \times (n)$ , la ecuación (13) queda finalmente expresada como:

$$\{F_e\} = [C] \{F_a\} \quad (15)$$

La matriz C representa la función de redistribución buscada y se la puede definir como una matriz de transformación de un sistema de carga a otro. Se debe notar que esta solución al problema planteado implica que cuando ambos sistemas de fuerzas solicitan la estructura virtual, ésta se encuentra en equilibrio. Esto significa que  $F_a$  y  $F_e$  tiene la misma resultante con signo opuesto. Luego las fuerzas distribuidas finales se obtienen cambiando de signo a las reacciones  $F_e$ . Cuando estas cargas sean aplicadas a la estructura real producirán el mismo efecto que el sistema de fuerza original.

Originalmente, este método fue desarrollado para estudios sobre aeroelasticidad, donde el conocimiento de las deformaciones resulta esencial. Por tal motivo, una vez que la estructura es conocida, se pueden obtener las matrices de rigidez mediante una interpolación spline de superficie<sup>(3)</sup>.

Sin embargo, surge un problema en la etapa inicial del cálculo estructural estático, ya que la rigidez estructural aún no es conocida. No obstante, resulta necesario estimar las cargas que actúan en los nodos de la estructura. En este contexto, se propone asumir que tanto EI como GJ, es decir, las rigideces a flexión y torsión de cada barra son unitarias. Con esta suposición, se logra que las relaciones entre ambos sistemas de fuerza dependan únicamente de la ubicación relativa de sus puntos de aplicación.

## RESULTADOS

En la Figura 2 se muestra una redistribución de cargas en el que la fuerza original de 100 [N] se encuentra en el origen,  $y = 0$  [m], redistribuidos en 10 puntos desde -1 a 1 con paso 0.2. Se observa que los puntos más cercanos toman un alto porcentaje de la carga, disminuyendo la misma en forma exponencial con la distancia.

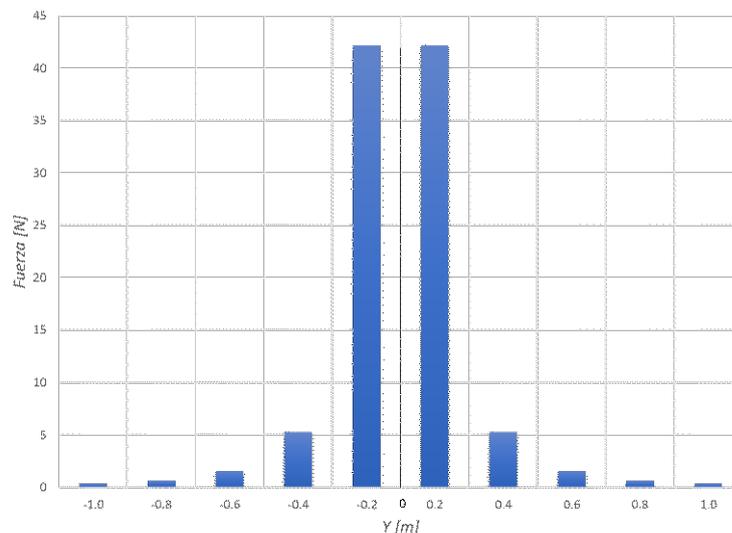
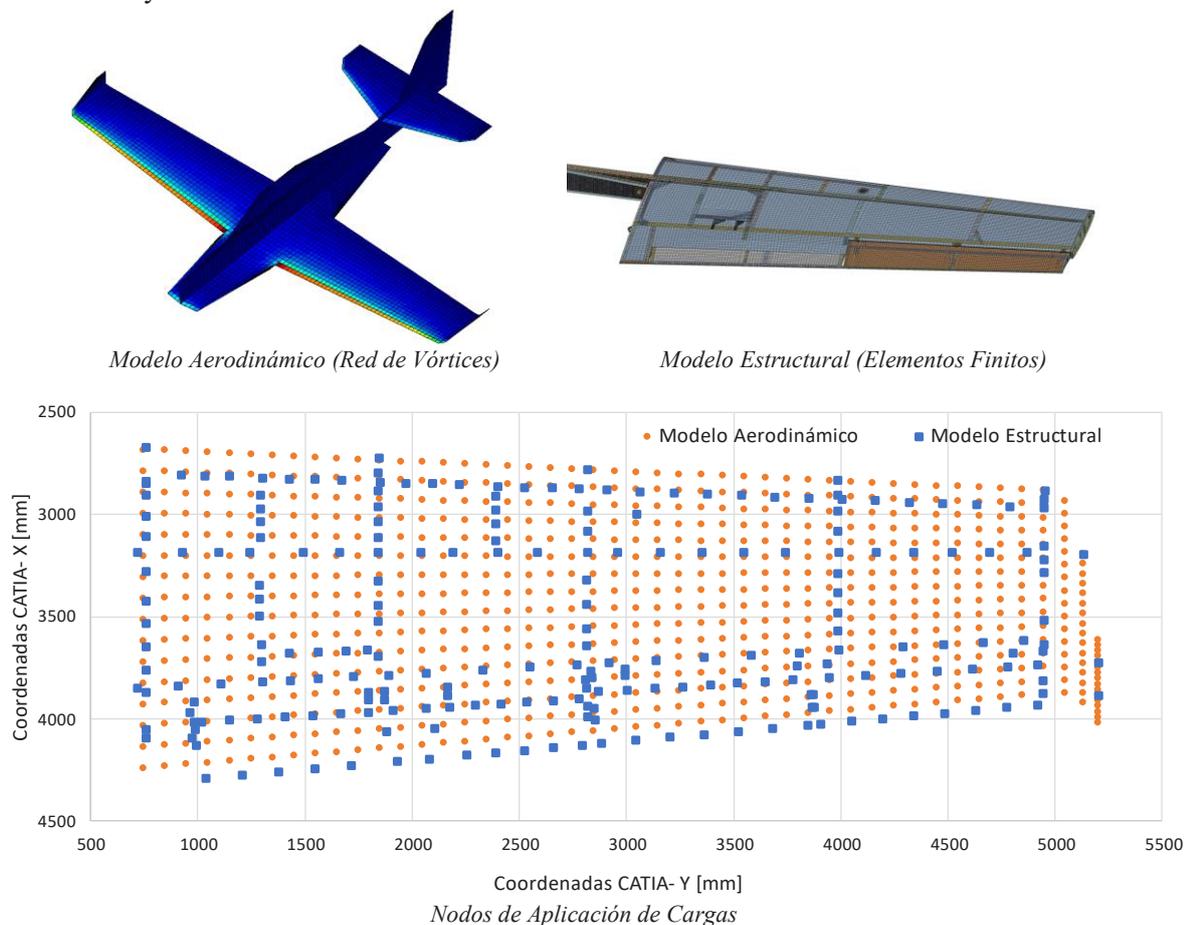


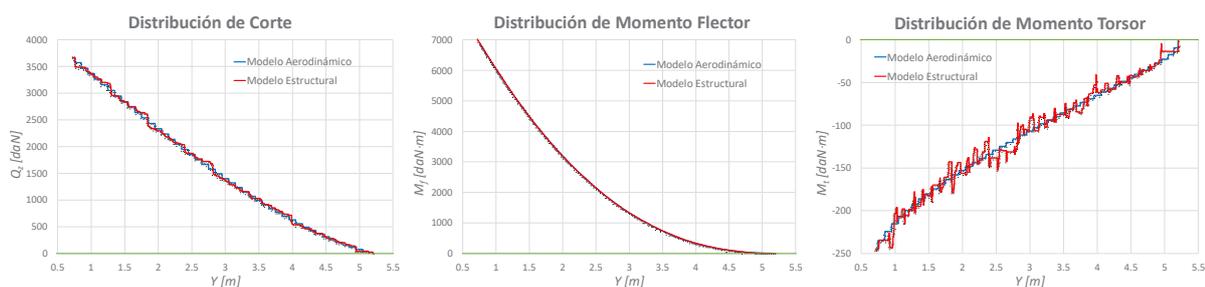
Figura 2: Redistribución de Carga de 100 [N] aplicada en  $y = 0$  [m]

En otro ejemplo, en la Figura 3, se presentan los puntos de aplicación de cargas de los modelos aerodinámico y estructural del ala de una aeronave.



**Figura 3:** Redistribución de Cargas sobre el ala de una aeronave – Geometría

En la Figura 4 se presentan los esfuerzos integrados de corte, momento flector y momento torsor original (modelo aerodinámico) y redistribuido (modelo estructural). Se observa una excelente concordancia entre los mismos.



**Figura 4:** Redistribución de Cargas sobre el ala de una aeronave – Esfuerzos Integrados

## CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha presentado un método matricial general para la redistribución de cargas, empleando estructuras virtuales. El enfoque propuesto se demuestra como una solución versátil aplicable en diversas situaciones, particularmente como interfaz entre fenómenos fluidos y elásticos.

El ejemplo de aplicación ilustra que, a pesar de la aparente simplicidad del método, se pueden lograr resultados numéricos de alta calidad. La combinación de esto con el bajo tiempo de CPU requerido por cada caso de redistribución de carga, consolida su eficacia como una herramienta altamente eficiente para su implementación en la industria.

**REFERENCIAS**

1. Schmitt, Alfred F. *A Least Squares Matrix Interpolation of Flexibility Influence Coefficients*. Ryan Aeronautical Company. San Diego, California : Journal of the Aeronautical Sciences - October, 1956, 1956. pág. 980.
2. Rodden, William P. *Further Remarks on Matrix Interpolation of Flexibility Influence Coefficients*. North American Aviation, Inc., Los Angeles, Calif. Los Angeles, California : Journal of the Aero/Space Sciences - November, 1959, 1959. págs. 760-761.
3. Rodden, William P., Harder, Robert L. y Bellinger, E. Dean. *Aeroelastic Addition to NASTRAN*. Los Angeles, California : MacNeal-Schwendler Corporation, NASA Contractor Report 3094, 1979.
4. Hexagon. *MSC Nastran 2022.4 - Aeroelastic Analysis User's Guide*. s.l. : Hexagon AB, 2022.