



15, 16 Y 17 DE SEPTIEMBRE DE 2021

SIMULACIÓN NUMÉRICA Y CÁLCULO DE LOS FLUJOS DE CALOR EN LOS PUNTOS DE GAUSS EN PLACAS DE MATERIALES DE BAJA CONDUCTIVIDAD UTILIZANDO ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS BIDIMENSIONALES LINEALES.

Amado Marcos¹, Gutiérrez Fernando¹, Bosc Cristian¹, Martins Claudio¹, Arocas Martín¹, Díaz Gonzalo¹

¹ IAME-Departamento de Mecánica - Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de La Plata.

Av. 1 y 47, B1900 La Plata, Buenos Aires

correo-e: marcos.amado@ing.unlp.edu.ar, iame@ing.unlp.edu.ar

RESUMEN

El objetivo es validar un programa de simulación numérica (y continuar el desarrollo de programas más avanzados) por medio de la verificación y contrastación de resultados esperados en un caso de referencia cuyos resultados son conocidos.

El desarrollo parte de la ecuación de conservación de energía térmica en la cual se desprecia el término transitorio y el término de flujo volumétrico, a esta ecuación se le aplica el método de Galerkin y se discretiza el dominio utilizando elementos isoparamétricos bidimensionales lineales de 4 nodos. Las integrales de la matriz se resolvieron utilizando malla de 2 x 2 puntos de integración de Gauss. El modelo físico considerado es una placa de 15 cm de longitud, 10 cm de alto y 1 cm de espesor. El modelo de elementos finitos consiste de 3 elementos bidimensionales lineales y condiciones de contorno Dirichlet aplicadas (temperatura) en los nodos extremos, cuyos valores son: 0°C en un extremo izquierdo y 100°C en el derecho, a lo largo de la longitud.

Mediante el programa de simulación numérica por el método de elementos finitos desarrollado para este trabajo se calcularon los flujos de calor en los 4 puntos de Gauss de cada elemento y se comprobó que los mismos son iguales en los 4 puntos para los 3 elementos, también se verificó que solo existen flujos de calor en la dirección horizontal, es decir el vector de flujos de calor solo tiene componente en dirección x, dado que es en esta dirección donde se aplican las condiciones de contorno (temperatura), también se verificó que los flujos aumentan a medida que aumenta la conductividad térmica, y se verificó que el corcho resulta el mejor aislante, dado que tiene los menores valores de flujos de calor, ya que posee la menor conductividad térmica. Todos estos resultados esperados, permiten validar el programa de simulación numérica y continuar el desarrollo de programas más avanzados.

Palabras claves: *Problema térmico, Galerkin, elementos isoparamétricos bidimensionales.*

1. INTRODUCCIÓN

En el sector industrial, numerosos equipos como intercambiadores de calor, calderas, hornos, condensadores, baterías, calentadores, refrigeradores y paneles solares entre muchos otros están diseñados principalmente sobre la base del análisis de transferencia de calor.

La difusión de calor es el proceso físico de propagación de energía térmica en distintos medios, esta se produce siempre que exista un gradiente térmico o cuando dos sistemas con diferentes temperaturas se ponen en contacto, de modo tal que este proceso persiste hasta que se alcanza el equilibrio térmico.

Para conocer el comportamiento de un determinado material frente a las variaciones térmicas resulta necesario estudiar el comportamiento de los flujos de calor que tiene lugar en dicho material. El flujo de calor o flujo térmico se determina como la cantidad de energía por unidad de área y por unidad de tiempo, la energía variará dependiendo el caso particular de estudio y sus condiciones de borde.

Se utilizan simulaciones numéricas aplicando el método de elementos finitos para predecir el comportamiento térmico de placas. A partir de rutinas de cálculo basadas en la conservación de la energía térmica se determinan los resultados numéricos.

2. METODOLOGÍA

Se parte de la ecuación de conservación de energía térmica (1), despreciando el fenómeno de convección, el fenómeno transitorio, y considerando que no se tiene flujo volumétrico.

Por [1] y [4] Se aplica el método de Galerkin a la Ecuación (1), que consiste en pesar la ecuación con el vector de funciones de forma H del elemento, y luego integrar en todo el dominio material para obtener las Ecuaciones (15), (16) y (17).

Utilizando [1] las integrales de todas las ecuaciones se resuelven utilizando 2x2 puntos de Gauss para un elemento isoparamétrico bidimensional de 4 nodos, Figura 1.

El modelo físico considerado es una placa de 15 cm de longitud, 10 cm de alto y 1 cm de espesor. El modelo de elementos finitos consiste de 3 elementos bidimensionales lineales y condiciones de contorno aplicadas (Temperatura) en los nodos extremos, cuyos valores son: 0°C en el extremo izquierdo y 100°C en el extremo derecho, a lo largo de la longitud.

Empleando [3] se desarrolla un modelo computacional para 5 materiales de uso ablativo (Berilio, Níquel, Cuarzo fundido, Retak y Corcho), teniendo en cuenta la malla de la Figura 3, luego se calculan las temperaturas para los 8 nodos con la Ecuación (17), y posteriormente se determinan los flujos en los 12 puntos de Gauss, utilizando la Ecuación (26).

3. ECUACIONES

Las ecuaciones que se muestran a continuación se obtienen de [1] y [2] y son las empleadas para el desarrollo de este trabajo.

3.1. Conservación de la energía térmica

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \underline{V} \cdot \underline{\nabla} T = \underline{\nabla} \cdot (\underline{K} \cdot \underline{\nabla} T) + q_v \quad (1)$$

$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$: Término transitorio

$\rho C_p \underline{V} \cdot \underline{\nabla} T$: Término Convectivo

$\underline{\nabla} \cdot (\underline{K} \cdot \underline{\nabla} T)$: Término Difusivo

q_v : Flujo de calor volumétrico

ρ : Densidad

C_p : Calor específico

k : Conductividad térmica

3.2. Elemento isoparamétrico bidimensional utilizado

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó un elemento bidimensional lineal de 4 nodos, el cual se muestra en la Figura 1.

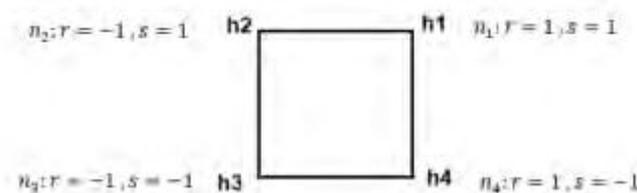


Figura 1: Nodos y coordenadas naturales del elemento.

Funciones de forma

A continuación se muestran las 4 funciones de forma que corresponden a cada nodo del elemento. Las funciones de forma valen 1 en su nodo correspondiente y 0 en los otros nodos.

$$h_1 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 + s) \quad (2)$$

$$h_2 = \frac{1}{4} (1 - r)(1 + s) \quad (3)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} (1 - r)(1 - s) \quad (4)$$

$$h_4 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 - s) \quad (5)$$

Vector elemental de funciones de forma

$$\underline{H}^{(e)} = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4] \quad (6)$$

Para el cálculo de la matriz Jacobina de la transformación del sistema de coordenadas cartesiano al sistema de coordenadas naturales del elemento isoparamétrico se necesita determinar las ecuaciones que resultan de multiplicar cada función de forma nodal por la coordenada nodal en el sistema cartesiano, luego derivar respecto a cada variable del sistema de coordenadas naturales y posteriormente construir la matriz Jacobiana. Este procedimiento se detalla a continuación:

Las funciones de forma de cada nodo se multiplican por su coordenada x.

$$X = \sum_{i=1}^4 h_i \hat{x}_i \quad (7)$$

Las funciones de forma de cada nodo se multiplican por la coordenada y.

$$Y = \sum_{i=1}^4 h_i \hat{y}_i \quad (8)$$

Derivadas respecto a las coordenadas naturales (r,s)

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} \hat{x}_i \quad (9)$$

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} \hat{x}_i \quad (10)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} \hat{y}_i \quad (11)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} \hat{y}_i \quad (12)$$

Expresión del Jacobiano del elemento

$$J^{(e)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Determinante del Jacobiano.

$$|J^{(e)}| = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial X}{\partial s} \quad (14)$$

La matriz Jacobiana y su determinante son iguales para los 3 elementos porque tienen las mismas dimensiones y la misma cantidad de nodos.

3.3. Matriz $\underline{\underline{K}}^{(e)}$ elemental

Cuando se utiliza un elemento isoparamétrico bidimensional lineal de cuatro nodos la matriz $\underline{\underline{K}}^{(e)}$ es de 4x4.

$$\underline{\underline{K}}^{(e)} = esp \iint_{-1}^1 \underline{\underline{B}}^{(e)T} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{B}}^{(e)} |J^{(e)}| dr ds \quad (15)$$

3.4. Vector de esfuerzos aplicados $\underline{R}^{(e)}$

Para un elemento isoparamétrico bidimensional de cuatro nodos el vector $\underline{R}^{(e)}$ es de 4x1

$$\underline{R}^{(e)} = esp \iint_{-1}^1 \underline{H}^T q_v |J^{(e)}| dr ds - esp \int_{-1}^1 [\underline{H}^T q ds] \quad (16)$$

$\underline{R}^{(e)}$ es el vector de esfuerzos, está compuesto por una parte que depende del flujo volumétrico y otra del flujo superficial aplicado.

3.5 Sistema global

$$\underline{\underline{K}}^{(g)} \hat{T} = \underline{R} \quad (17)$$

$\underline{\underline{K}}^{(g)}$, es la matriz de rigidez global de toda la malla, surge de ensamblar las matrices elementales.

\hat{T} : Es el vector de temperaturas nodales

\underline{R} : Es el vector global de esfuerzos aplicados

3.6. Desarrollo de la sumatoria para integrar utilizando 2x2 puntos de Gauss, para un elemento bidimensional de 4 nodos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r, s) dr ds = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) = \sum_{i=1}^2 [\alpha_i \alpha_1 F(r_i, s_1) + \alpha_i \alpha_2 F(r_i, s_2)] \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s) dr ds = \alpha_1 \alpha_1 F(r_1, s_1) + \alpha_2 \alpha_1 F(r_2, s_1) + \alpha_1 \alpha_2 F(r_1, s_2) + \alpha_2 \alpha_2 F(r_2, s_2) \quad (19)$$

Utilizando [1], para 2 x 2 puntos de Gauss se tienen los siguientes valores de los factores de integración:

$$\alpha_1 = 1 \quad (20)$$

$$\alpha_2 = 1 \quad (21)$$

$$r_1 = 1/\sqrt{3} \quad (22)$$

$$r_2 = -1/\sqrt{3} \quad (23)$$

$$s_1 = 1/\sqrt{3} \quad (24)$$

$$s_2 = -1/\sqrt{3} \quad (25)$$

3.7 Ecuación para determinar los flujos de calor en los puntos de Gauss

En la Tabla 1 y en la Figura 2 se muestran los valores y las posiciones de las coordenadas de los puntos de Gauss.

$$q|_{P_{yi}} = K \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\hat{T}}} \quad (26)$$

Donde

$\underline{\underline{B}}$ es la matriz B.

$\underline{\underline{\hat{T}}}$ son las temperaturas nodales calculadas para cada nodo del elemento correspondiente.

K es el coeficiente de conductividad térmica.

P_{yi} son los puntos de Gauss.

Tabla 1: Coordenadas de los puntos de Gauss.

Coordenadas de P_{y1}	$r = 1/\sqrt{3}$	$s = 1/\sqrt{3}$
Coordenadas de P_{y2}	$r = -1/\sqrt{3}$	$s = 1/\sqrt{3}$
Coordenadas de P_{y3}	$r = -1/\sqrt{3}$	$s = -1/\sqrt{3}$
Coordenadas de P_{y4}	$r = 1/\sqrt{3}$	$s = -1/\sqrt{3}$

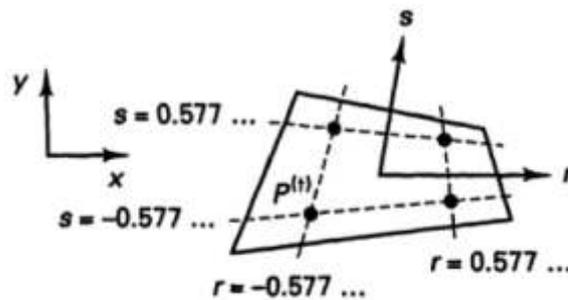


Figura 2. Coordenadas de los puntos de Gauss según [1].

4. MODELO FÍSICO Y MODELO COMPUTACIONAL

En la Figura 3 se muestran las dimensiones de la placa y en la Figura 4 se puede observar el mallado propuesto y las condiciones de borde.

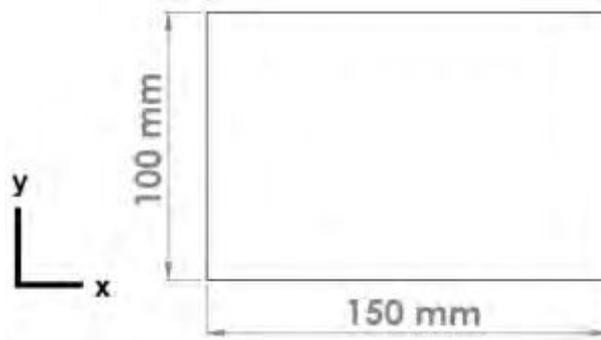


Figura 3: Dimensiones de la placa.

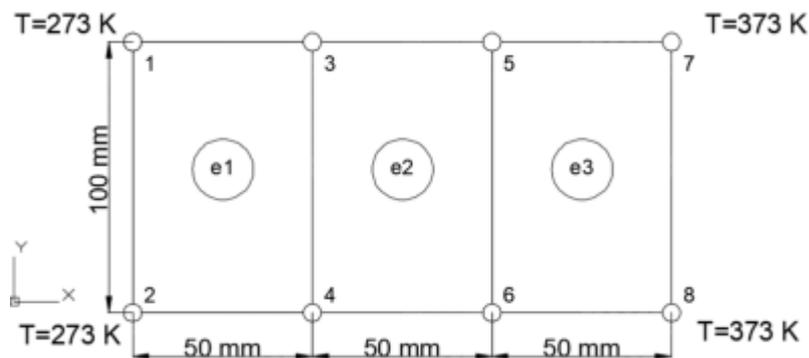


Figura 4: Malla y condiciones de contorno.

5. RESULTADOS

Para realizar el cálculo se evalúa la matriz $B^{(e)}$; $e = 1, e = 2, e = 3$, en las cuatro coordenadas de los puntos de Gauss de cada elemento. En la Tabla 2 se observan los flujos de calor obtenidos en los puntos de Gauss para los 5 materiales propuestos, como se puede observar, los flujos de calor son máximos para el berilio y mínimos para el corcho, este comportamiento

se debe a la diferencia de conductividades. El vector resultante de flujos en cada punto es de 2x1:

$$q|_{Pj} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad (27)$$

En este trabajo se demuestra que el vector de flujos de calor no tiene componente en la dirección y, por lo tanto se puede escribir como:

$$q|_{Pj} = \begin{bmatrix} q_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Los resultados obtenidos de los flujos de calor para cada punto de Gauss se muestran en la Tabla 2. Por ejemplo para el Berilio los flujos son:

$$q_{11} = \begin{bmatrix} 134000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La interpretación de este resultado es que solo hay flujo de calor en la dirección x, dado que existe un gradiente térmico aplicado a lo largo de esta dirección.

Tabla 2: Vector de flujos de calor en los puntos de Gauss

MATERIAL			BERILIO	NÍQUEL	CUARZO FUNDIDO	RETAK	CORCHO
Conductividad del material (W/mK)			201	90	1,46	0,12	0,04
Elemento 1	Vector de flujos de calor en los puntos de Gauss	q_{11}	$\begin{bmatrix} 134000 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60000 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 973.33 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 80 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 26.67 \\ 0 \end{bmatrix}$
Elemento 2		q_{12}	$\begin{bmatrix} 134000 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60000 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 973.33 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 80 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 26.67 \\ 0 \end{bmatrix}$
Elemento 3		q_{13}	$\begin{bmatrix} 134000 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60000 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 973.33 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 80 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 26.67 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dónde:

El vector de flujos de calor es igual en los 3 elementos, por lo tanto se puede escribir como q_{ij} , donde i representa el nodo y j el elemento.

Para el elemento 1 se tiene:

$$q_{11} = q_{21} = q_{31} = q_{41}$$

Para el elemento 2 se tiene:

$$q_{12} = q_{22} = q_{32} = q_{42}$$

Para el elemento 3 se tiene:

$$q_{13} = q_{23} = q_{33} = q_{43}$$

6. CONCLUSIONES

Los resultados que se obtuvieron fueron los flujos de calor en los 12 puntos de Gauss correspondiente a los 3 elementos. Se verificó la inexistencia de flujos en la coordenada y, estos resultados se muestran en el vector de flujo de la Tabla 2, esto se debe a la inexistencia de un gradiente térmico aplicado en esta dirección. Se verificó que los flujos decrecen con materiales de conductividad térmica menor y se pudo concluir que los menores flujos se obtienen en el corcho, debido a que posee la menor conductividad térmica. Con la simulación propuesta también se pudieron calcular las temperaturas en cada uno de los nodos de la malla. Se pudo validar el programa de simulación numérica desarrollado y por lo tanto se puede continuar con el desarrollo de programas más avanzados, que en nuestro caso son los estudios transitorios en placas de materiales de conductividad térmica variable con la temperatura, utilizando elementos bidimensionales de ocho nodos.

El modelo se puede utilizar con elementos de menores dimensiones, mayor cantidad de elementos y nodos, cuando se requiere mayor precisión en la búsqueda de la distribución de temperaturas.

El modelo desarrollado es útil para seleccionar aislantes, porque establece un criterio concreto de decisión. El modelo también se puede aplicar para determinar los espesores de aislantes.

REFERENCIAS

- [1]. Klaus-Jürgen Bathe, Finite element procedures, Watertown, USA, 2014.
- [2]. Yunus.A.Cengel., Afshin.J.Ghajar Transferencia de Calor y Masa, Mc Graw Hill, México, 2011.
- [3]. Vinay.K.Ingle., John G. Proakis, Digital Signal Processing using Matlab, Cengage Learning, 2012.
- [4]. Manuel Lopez Pellicer., Salvador Lopez Alfonso, Elementos finitos en fenómenos de transmisión, R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat, Vol. 105, N°. 1, pp 49-75, 2011.