



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis para obtener el grado académico de
Licenciado en Astronomía

TESTEANDO UN MODELO COSMOLÓGICO ALTERNATIVO
CON DATOS OBSERVACIONALES

Francisco Plaza

Directora: Dra. Lucila Kraiselburd

LA PLATA, ARGENTINA
- FEBRERO DE 2024 -

Resumen

En el contexto de la cosmología moderna y con el descubrimiento en 1998 de la expansión acelerada del universo, el Modelo Cosmológico Estándar (Λ_{CDM}) incluyó entre sus hipótesis a la famosa constante cosmológica, que permite no sólo obtener un modelo de universo en expansión acelerada, sino además estar concordancia con las observaciones.

Sin embargo, nunca quedó claro cuál es el referente físico de dicha constante cosmológica. Entre las alternativas están, que sea una componente de materia extra desconocida (una quinta esencia), energía de vacío de los campos cuánticos o ser un comportamiento aún no contemplado de la gravedad, que será la propuesta que nosotros hemos decidido investigar en el presente trabajo. Para ello, generalizamos las ecuaciones de campo de la Relatividad General, a partir de una modificación en la acción, reemplazándola por otra que nos lleva a unas nuevas ecuaciones de campo. Existen varias alternativas, entre las cuales, nosotros empleamos en la acción, la función $f(R)$ de Starobinsky, donde el escalar de Ricci es sustituido por una función del mismo obteniendo sus correspondientes ecuaciones de campo. Éstas admiten la solución cosmológica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), dando lugar a un modelo cosmológico alternativo al Modelo Cosmológico Estándar cuya viabilidad analizaremos.

A partir de la utilización de un método estadístico de cadenas de Markov-Monte Carlo, es posible estimar los valores óptimos de los parámetros libres de la teoría, en este caso se consideraron 4 sets de observables cosmológicos: Cronómetros Cósmicos (CC), Núcleos de Galaxias Activas (AGN), Supernovas Ia (SnIa), y Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO). Una vez obtenido el espacio de parámetros, estudiamos las implicancias de los valores determinados y las predicciones que este modelo cosmológico nos brinda, en vista de indagar si estas solucionan problemas abiertos en cosmología, como por ejemplo aliviar la tensión de Hubble, entre otros, como así también analizar la validez de la teoría alternativa de gravedad.

Prólogo y Agradecimientos

Siempre considere a la actividad científica, como aquella en la que los humanos intentamos describir algo, lo que fuere, aquello que despertó una profunda curiosidad en nosotros, de la manera más objetiva posible, dejando totalmente de lado nuestra subjetividad, creencias, e ideología. Este trabajo busca ser eso, si es que es posible, acaso, dejar la subjetividad de lado. Pero quería dejar un breve espacio a la subjetividad, plasmando mi opinión acerca de la situación actual de la ciencia argentina, la cual está siendo gravemente afectada y desfinanciada, a raíz de políticas cuestionables y poca valoración de la actividad científica.

Y es que desfinancian la búsqueda del conocimiento, que a lo largo de la historia no ha hecho más que brindarnos herramientas para mejorar la vida humana en innumerables aspectos.

Últimamente han planteado que no estamos en condiciones de invertir el ya bajo presupuesto destinado a esta actividad, argumentando que es un gasto que perjudica a sectores vulnerables. Pero jóvenes como nosotros, especialmente jujeños, que nunca hemos experimentado algo tal como, estabilidad económica, salimos adelante incertandonos en la educación e investigación que ellos buscan recortar. Abandonamos nuestras familias y nuestra tierra en busca de adquirir conocimientos, una profesión y un mejor futuro, para nosotros y para el país, con la educación pública y gratuita como principal herramienta.

Increíblemente esto se pone en tela de juicio nuevamente, y malas decisiones políticas provocan que, paradójicamente, hoy, hacer la carrera en término, poseer un buen promedio, y hacer las cosas “bien”, no evita que uno termine como un profesional desempleado, con mínimas posibilidades de ingresar a un, por ahora cerrado, sistema científico argentino, perjudicando tanto a jóvenes como al desarrollo científico-tecnológico del país. No noto ningún tipo de ayuda a las clases vulnerables con esas políticas.

Dicho esto, si algún lector coincide con esta opinión subjetiva pero real, ojala defienda activamente la ciencia argentina y entienda, que cualquier desarrollo científico que no va acompañado por buena divulgación del mismo, apoyo social y político, es estéril y está condenado a desaparecer. Termina por perderse algo que es parte invaluable de nuestra cultura, que con esfuerzo, dedicación y excelencia han construido investigadores/as por décadas.

Dejando de lado el mal trago que nos llevamos estos últimos meses, decir que no me arrepiento de haber sido fiel a mi pasión y curiosidad, y que desde 2018, no he hecho más que disfrutar del increíble conocimiento que circula por esta universidad, y me hizo muy feliz.

Solo queda agradecer infinitamente:

A mi madre, que me apoyo incansablemente, en todo sentido, y es una mujer increíble.

A mi padre, que ya no está para leer esto, pero me acompañó hasta el último momento.

A mis hermanos, por su lealtad y compañía.

A mis 5 sobrinitos, porque su mera existencia me provoca felicidad.

A mis amigos, tanto de Jujuy, como de Buenos Aires, por los buenos momentos.

A Lucila por su excelente dirección y por integrarme al grupo de Cosmología, que es espectacular.

0. Prólogo y Agradecimientos

Y a todos los docentes de esta universidad, por sus enseñanzas y su tiempo.

Francisco Plaza
Febrero, 2024

Índice general

Resumen	iii
Prólogo y Agradecimientos	v
Introducción y Contexto Histórico	xi
1. Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM}	1
1.1. Especies incluidas en el modelo Λ_{CDM}	3
1.1.1. Materia bariónica	3
1.1.2. Materia oscura	4
1.1.3. Energía oscura	4
1.2. Resumen del Modelo Λ_{CDM}	6
1.3. Estimación de parámetros cosmológicos con datos observacionales	8
1.4. Problemas abiertos del Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM}	13
1.4.1. Tensión de H_0	13
1.4.2. Problema del referente físico de la constante cosmológica	14
1.4.2.1. Energía de vacío de los campos cuánticos del Modelo Estándar de Partículas	14
1.4.2.2. Modelos con Energía oscura	17
1.4.2.3. Teorías de gravedad modificada	19
1.4.3. Problema de la unificación entre RG y MC:	20
1.5. Ventajas Ontológicas de la propuestas $f(R)$	21
2. Teorías $f(R)$	23
2.1. Obtención de ecuaciones de campo en teorías $f(R)$ - Gravedad Generalizada	23
2.2. Ecuaciones de Friedmann generalizadas	25
2.3. Elección de la función $f(R)$	26
2.4. Resolución del Sistema de Ecuaciones	29
2.5. Condiciones Iniciales	31
2.6. Aproximación para $b \rightarrow 0$	33
3. Datos observables	35
3.1. Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)	35
3.2. Cronómetros Cósmicos (CC)	38
3.3. Supernovas Ia (SnIa)	40
3.4. Núcleos Activos de Galaxias (AGNs)	42

ÍNDICE GENERAL

4. Análisis Estadístico	45
4.1. Marco Teórico	45
4.1.1. Teorema de Bayes	47
4.2. Métodos de Cadenas de Markov - Monte Carlo	48
4.3. Criterio de Convergencia	49
4.4. Intervalos de Confianza	50
5. Resultados	53
5.1. Análisis de resultados obtenidos con datos de CC, <i>Pantheon</i> , BAO y AGN	54
5.2. Análisis de resultados obtenidos con datos de CC+ <i>Pantheon</i> ⁽⁺⁾ +BAO+AGN	59
5.3. Comparación entre los resultados obtenidos y los publicados por otros autores	59
6. Conclusiones	63
Bibliografía	67

Acrónimos

Lista de acrónimos utilizados en esta tesis:

- RG: Relatividad General
- MC: Mecánica Cuántica
- QFT: Quantum Field Theory
- EH: Einstein-Hilbert
- CC: Constante Cosmológica
- CMB: Cosmic Microwave Background/FCR :Fondo Cósmico de Radiación
- ET: Espacio-Tiempo
- SnIa: Supernovas Ia
- BD: Brans-Dicke
- EAP: Espectro Angular de Potencias

Introducción y Contexto Histórico

La teoría de la Relatividad General de Albert Einstein (Einstein, 1915b) ha sido una de las teorías físicas más influyentes del siglo XX, revolucionando totalmente nuestra concepción de la interacción gravitatoria. Esta última es interpretada en esta teoría como una deformación del espacio-tiempo (ET) de acuerdo al contenido material en él y ya no como una fuerza de acción a distancia tal como la concebía Newton. Ha sido verificada empíricamente en múltiples ocasiones a lo largo de los últimos 100 años, y predicho con alta precisión experimentos observacionales, principalmente en el contexto del Sistema Solar, como ser el efecto Shapiro (Shapiro, 1964), la deflexión de la luz (Eddington, 1919), precesión del perihelio de la órbita de Mercurio (Einstein, 1915a), entre otros.

Fue el mismo Einstein el primero en emplear sus ecuaciones de campo en la formulación de un modelo teórico del universo como un todo, con su modelo de universo estático (Einstein, 1917) dando inicio de esa manera a la cosmología moderna. A pesar que su modelo fue refutado años después por Eddington, quien demostró que el mismo era inestable (Eddington, 1930), dejó un aporte invaluable: Dar inicio a la cosmología relativista. Aún incluso en un acto de equivocación, aportó de igual manera, dando a conocer la posibilidad de incluir la constante cosmológica en las ecuaciones de campo, la cual tomaría relevancia años más tarde.

De esa manera, esta teoría y su aplicación en el estudio del universo como un todo, cambió totalmente nuestra imagen del mismo, siendo ahora concebido como espacio-tiempo dinámico, con un cierto contenido material, a ser la totalidad de las estrellas, galaxias, planetas, etc; que definen la geometría y topología del ET, aunque por supuesto, alrededor del 1917, cuando Einstein formuló este primer modelo cosmológico (Einstein, 1917), no se sabía ni siquiera de la existencia de galaxias, y la creencia general era que el universo era estático y eterno, llevándolo a formular uno con estas características.

Como bien notaron los posteriores investigadores que se comprometieron en el campo, la teoría tendía a mostrar soluciones de universos dinámicos en expansión (Friedmann, 1922); (Lemaître, 1927) o en contracción y no estáticos, ni eternos como el universo de Einstein, quien para forzar a su modelo de universo a ser estático, tuvo que agregar el término de la constante cosmológica que mantenía la estabilidad del mismo, además de mostrar la forma más general de las ecuaciones de campo. Al poco tiempo, De Sitter propuso un modelo de universo vacío en expansión con constante cosmológica (de Sitter, 1917), modelo sumamente relevante hoy en día tanto en los estudios de universo temprano como tardío, siendo también un modelo íntimamente relacionado con la presente tesis, ya que fue el que mostró por primera vez indicios de que el mismo espacio-tiempo, vacío, y por pura interacción gravitatoria, podría estar en un estado de expansión sin una especie en el tensor energía-momento que la provoque. A pesar de que de Sitter interpretó este fenómeno de esa manera, años más tarde, la expansión acelerada del universo siempre fue atribuida a una componente extraña de materia incluida en el tensor energía-momento por la mayoría de los científicos.

Con todos estos antecedentes, tomaron relevancia los modelos dinámicos de Friedmann (Friedmann, 1922), Lemaitre (Lemaître, 1927), Robertson (Robertson, 1929), Walker (Wal-

ker, 1937), entre otros, iniciando un gran desarrollo de la cosmología relativista y permitiendo así, años más tarde, el desarrollo y conformación del actual Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM} , ampliamente aceptado por toda la comunidad científica, el cual será descrito cualitativa y analíticamente en el primer capítulo de esta tesis. Éste posee diversos problemas abiertos que se estudian activamente en la actualidad, tales como el problema del horizonte, el problema de la planitud, el problema de las semillas primordiales para la formación de estructura, el problema de la tensión de H_0 , y el problema del referente físico de la constante cosmológica, poniendo un mayor énfasis en los últimos 2 problemas mencionados, ya que poseen relación directa con la propuesta estudiada en esta tesis, y serán explicados con mayor detalle en el capítulo 1, dejando de lado los demás problemas mencionados, y tantos otros no mencionados. La propuesta seleccionada para el presente trabajo consiste en un modelo cosmológico formulado con una teoría de gravedad generalizada del tipo $f(R)$, la cual tiene la capacidad de explicar la expansión acelerada del universo, sin incluir materia exótica, e indagaremos también en la posibilidad de que la presente teoría alivie la conocida tensión de Hubble (H_0), aunque siendo conscientes de que no se podrá ser concluyente en este sentido ya que no se incluyen en el análisis estadístico datos del fondo cósmico de radiación.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera:

- Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM} : Presentación y descripción del modelo cosmológico más exitoso de la actualidad.
- Problemas abiertos del Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM} : Se exponen aquellos problemas abiertos de la cosmología actual que motivan el presente trabajo. También se describen algunas de las propuestas existentes para su posible resolución, y en particular describiremos y justificaremos la elección, entre ellas, de la propuesta estudiada en esta tesis.
- Teorías $f(R)$: Se presentará la formulación teórica completa de las teorías $f(R)$ como así también del modelo cosmológico alternativo formulado empleando dicha teoría.
- Observables: Presentación y descripción de los observables astronómicos empleados.
- Análisis Estadístico: Se detalla la teoría estadística empleada para relacionar teoría con observables.
- Resultados y discusión: Se presentan los resultados del análisis estadístico y se los compara con otros resultados de trabajos similares que se encuentran en la literatura.
- Conclusiones: Se presentan las conclusiones que se desprenden del estudio realizado y se plantean propuestas a futuro.

Capítulo 1

Modelo Cosmológico Estándar

Λ CDM

El Modelo Cosmológico Estándar se formula principalmente en el marco de la ya mencionada teoría de Relatividad General, la cual es una teoría fundamental, es decir que esta construida a partir de primeros principios, y no puede ser obtenida hasta el momento como derivación de una teoría más fundamental, a diferencia de la termodinámica, por ejemplo, que puede ser obtenida a partir de la mecánica estadística. Por lo tanto, es la teoría más profunda que tenemos hasta el momento para describir la gravedad, más específicamente, para describir una de las propiedades del espacio-tiempo, que es, *su curvatura*. La Relatividad General describe entonces la curvatura del espacio-tiempo de acuerdo con el contenido de materia en dicha región. La relación matemática entre dicha propiedad, la curvatura, y el contenido de materia en dicha región quedará determinada por las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, R el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico, $T_{\mu\nu}$ el tensor Energía-Momento, y Λ la Constante Cosmológica.

Estas ecuaciones admiten como solución la métrica de Friedman-Lemetre-Robertson-Walker, la cual constituye la solución cosmológica de la teoría, que permite estudiar modelos de universos dinámicos:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.2)$$

siendo $a(t)$ el factor de escala y k el parámetro de curvatura espacial.

Con dicha solución es posible calcular los símbolos de Christoffel, con índices 0,1,2 o 3 de acuerdo a la coordenada asociada t,r, θ o ϕ :

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}$$

$$\Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg \theta$$

siendo \dot{a} , la derivada temporal del factor de escala $a(t)$.

Como así también las componentes del tensor de Ricci:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{33} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta$$

Y por último el escalar de Ricci:

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right)$$

Reemplazando los resultados en las ecuaciones de campo, y definiendo la función de Hubble como $H = \frac{\dot{a}}{a}$, se obtienen las conocidas ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.3)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) \quad (1.4)$$

siendo \dot{H} , la derivada temporal de la función de Hubble H .

Estas expresiones pueden ser consideradas como las más importantes de la cosmología clásica. Permiten estudiar distintos modelos de universo, variando su contenido de materia, lo cual define la geometría, topología y evolución del mismo. Es útil reescribir la primer ecuación de Friedmann (1.3) del siguiente modo:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2} \quad (1.5)$$

siendo

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

donde Ω es llamado parámetro de densidad, y ρ_{crit} densidad crítica, siendo esta última denominada de ese modo debido a que es la densidad de referencia que determina si el modelo de

universo será abierto, cerrado o plano, de acuerdo a si su densidad total de materia es menor, mayor o igual a la densidad crítica, respectivamente. Se puede reescribir (1.5) teniendo en cuenta todas las especies existentes en el universo, definiendo parámetros de densidad actuales $\Omega_{i,0} = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}$ para cada especie (radiación, materia bariónica, materia oscura o constante cosmológica), y conociendo cómo evoluciona la densidad de cada especie con el factor de escala del siguiente modo:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} - k(aH_0)^{-2} \quad (1.6)$$

siendo H_0 la constante de Hubble asociada al ritmo de expansión actual del universo.

Esta expresión será útil en un análisis posterior de la evolución del universo durante las eras de dominio de las diferentes especies.

Definiendo al corrimiento al rojo (*redshift* z) como:

$$(1 + z) = \frac{a_0}{a} \quad (1.7)$$

siendo z una cantidad que cuantifica el fenómeno observado en el espectro de la luz proveniente de objetos astronómicos distantes, producido cuando la luz se desplaza hacia longitudes de onda mayores debido a la expansión del Universo, y a_0 es el factor de escala evaluado en la actualidad, y es igual a uno. Introduciendo la expresión (1.7) en (1.6) se obtiene:

$$\frac{H(z)^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \quad (1.8)$$

con $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{DM}$ es decir, el parámetro de densidad de materia total (Ω_m) es la suma del parámetro de densidad de materia bariónica (Ω_b) más el de materia oscura (Ω_{DM}). De esta manera, la ec. de Friedmann (1.8) queda en función de los parámetros de densidad y el parámetro de Hubble, todos correspondientes al instante actual, y asumiendo un universo espacialmente plano ($k = 0$), acorde a las observaciones, como reportan por ejemplo en (Planck Collaboration, 2020), con valores de $\Omega_r \approx 10^{-5}$, $\Omega_b \approx 0.05$, $\Omega_{DM} \approx 0.27$, $\Omega_{\Lambda} \approx 0.69$ y $k \approx 0$. De acuerdo a esto se asumirá también para el modelo cosmológico alternativo del presente trabajo $k = 0$.

1.1. Especies incluidas en el modelo Λ_{CDM}

A continuación se detallará la composición del universo según el modelo Λ_{CDM} y los motivos por los que se introdujo cada especie en el modelo.

1.1.1. Materia bariónica

No se precisa demasiada justificación para la inclusión de materia bariónica en el universo, ya que es la materia de la que está hecha nuestra galaxia (al menos en parte), nuestro Sistema Solar, y nosotros mismos. Los campos cuánticos del Modelo Estándar de Partículas permean todo el universo, y permiten la existencia de sus partículas asociadas, las cuales conforman aproximadamente el 5% del contenido material total de universo. Hasta el momento el Modelo Estándar de Partículas está conformado por 6 quarks, 6 leptones, y 6 bosones (Particle Data Group et al., 2022), que en simbiosis forman la materia bariónica tal como la conocemos en nuestra vida cotidiana, que se detecta en las observaciones astronómicas, y cuyas partículas son posibles de generar con los aceleradores de partículas.

1.1.2. Materia oscura

La materia oscura es una de las hipótesis que incluye el Modelo Cosmológico Estándar, y la gran mayoría de los modelos cosmológicos en desarrollo, debido a que, a pesar de su desconocida naturaleza, es indispensable para la descripción de múltiples sistemas astronómicos, tanto astrofísicos como cosmológicos. Hasta el momento, sin esta suposición no son posibles de describir correctamente fenómenos como: la rotación galáctica en galaxias espirales (Rubin & Ford, 1970), la dinámica de cúmulos de galaxias (Zwicky, 1933), las lentes gravitacionales, la predicción del Fondo Cósmico de Radiación (FCR) y las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) (Miller et al., 2001), formación de estructura a gran escala del universo (Ellis et al., 2012), colisión de galaxias, entre otros.

La implementación con éxito de dicha hipótesis en esta amplia variedad de fenómenos naturales, ha impulsado su amplia aceptación en la comunidad científica. Fue incluida en el Modelo Cosmológico Estándar, como su nombre indica con las siglas CDM, que significa “cold dark matter”, es decir, materia oscura fría, y con fría refiriéndose a no relativista.

Estimaciones tanto con datos del Fondo Cósmico de Radiación (Planck Collaboration, 2020), como con datos de velocidad de recesión de galaxias (Riess et al., 2018), o reportes del proyecto DES (Amon et al., 2022), reportan un porcentaje aproximado del 30 %, respecto al contenido material total del universo, para la suma de materia oscura y barionica; a su vez, siendo el porcentaje de materia barionica, solo el 5 % respecto al total.

Basados en observaciones astrofísicas y cosmológicas, las propiedades que se estiman que la materia oscura debe poseer son las siguientes (Matarrese et al., 2011):

- No interactúa electromagnéticamente.
- Su autointeracción debe ser muy débil.
- Debería interactuar débilmente con bariones. De no ser el caso, se formarían estructuras en forma de disco con los bariones, entrando en contradicción con las estructuras extendidas y de baja densidad en forma de halos que se infieren a partir de las observaciones.
- No está constituida por partículas del Modelo Estándar de Partículas.

1.1.3. Energía oscura

En 1998 Riess (Riess et al., 1998) y Perlmutter en 1999 (Perlmutter et al., 1999), descubrieron observacionalmente, midiendo el brillo de supernovas tipo Ia, que el universo no sólo se está expandiendo, como ya había observado Edwin Hubble (Hubble, 1929), sino que además, lo hace de forma acelerada. Esto llevo a incluir en el modelo cosmológico una última etapa evolutiva, en la que domina una componente desconocida del universo, que provoca dicha expansión acelerada. El fundamento de por qué necesariamente es una componente desconocida del universo se puede derivar a partir de las ecuaciones de Friedmann, ya que se ve que para que el universo experimente una expansión acelerada, es necesaria una componente material con presión efectiva negativa, y ninguna de las especies conocidas cumple con esas características. Seguidamente se obtendrá el ritmo de expansión provocado por las especies conocidas del universo para visualizar este problema y buscar una solución.

Para ello, se propone una ecuación para la presión, que será barotrópica. La presión para cada especie estará determinada por el parámetro ω del siguiente modo:

$$P = \omega_i \rho$$

Por otro lado, imponiendo la conservación de la energía, igualando a cero la derivada covariante del tensor energía-momento:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$$

cuya componente temporal nos da la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P)$$

Retomando la ecuación de Friedmann (1.8) en función de los parámetros de densidad (Ω_i) de cada especie, se puede describir la evolución del factor de escala en la era de dominio de cada especie de la siguiente forma:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_i} a^{-\frac{3}{2}(1+\omega_i)}$$

En la tabla 1.1 se encuentran resumidas las ecuaciones de continuidad y de evolución del factor de escala de acuerdo a la especie.

Especie Dominante	ω	$\rho(a)$	$a(t)$	$\dot{a}(t)$	$\ddot{a}(t)$
Radiación	$\frac{1}{3}$	a^{-4}	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$
Materia bariónica/oscura	0	a^{-3}	$t^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}$	$-\frac{2}{9}t^{-\frac{4}{3}}$

Tabla 1.1. Características evolutivas de las distintas especies del universo.

Se observa que en las eras presentadas se obtiene una expansión desacelerada del universo, tal que ninguna de las especies conocidas puede ser la responsable de la expansión acelerada del universo actual. Conocido esto fue que se reintrodujo en las ecuaciones de campo de Einstein la constante cosmológica, la cual domina la dinámica del universo cuando las densidades de materia y radiación bajan lo suficiente, hecho que ocurre en la última etapa evolutiva del universo, llegando en el futuro lejano a un estado tan diluido del universo que es muy bien descrito por el modelo de universo vacío de de Sitter con constante cosmológica.

Analíticamente, si se le asigna una relación también barotrópica para esta componente desconocida del universo, se observa que la evolución del universo estará descrita de la siguiente manera:

$$P = \omega_\Lambda \rho$$

$$\omega_\Lambda = -1$$

Entonces, la densidad de esta substancia desconocida escala como:

$$\rho(a) \equiv a^0 \equiv cte$$

Y el factor de escala, en la era donde esta substancia domine, evolucionará como:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad ; \text{ con } H \equiv cte$$

Y describe un universo acelerado exponencialmente:

$$\ddot{a}(t) \propto H^2 e^{Ht} > 0$$

Se observa que la misma genera una expansión acelerada de forma exponencial en el universo justamente como indican las observaciones, brindando así un modelo para dicha era.

Se verifica entonces que la inclusión de la constante cosmológica Λ es capaz de describir de manera muy precisa esta última etapa evolutiva del universo, y se la llamó “*Energía oscura*”, nombre que muchas veces genera confusión en el lector no especializado, ya que se suele malinterpretar que la energía puede existir por sí sola, y puede ser un ente ontológico material. Pero la energía es una propiedad conceptual de la materia, equivalente a la masa por la famosa ecuación de Einstein ($E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$), y es la propiedad más fundamental de los existentes. Sabiendo esto, se debate cuál es el referente físico, material, asociado a lo usualmente llamado “*Energía oscura*”. No está claro hasta el momento, pero existen diversas propuestas que serán expuestas en breve y por lo cual se trabaja activamente, ya que es la responsable de provocar la expansión acelerada del universo, y no es menor, ya que, asumiendo un universo plano, como indican las observaciones, y teniendo en cuenta los datos del ritmo de expansión en esta última era, se estima que esta especie conforma el 70% del contenido material del universo.

1.2. Resumen del Modelo Λ_{CDM}

En forma de resumen, el modelo Λ_{CDM} presenta un universo conformado por:

- Espacio-tiempo
- Campos cuánticos del Modelo Estándar de Partículas
- Materia oscura
- Constante cosmológica o Energía oscura

Incluyendo todas estas especies materiales, en el marco de la teoría de RG, por el momento asumiendo universo homogéneo e isótropo, y resolviendo las correspondientes ecuaciones de Friedmann, se obtiene un universo en expansión que, en el contexto de este modelo, evoluciona a lo largo de aproximadamente 13700 millones de años como se ilustra en la figura 1.1. Éste, estará primeramente dominado por radiación, posteriormente por materia bariónica y oscura, y por último, se encontrará en una etapa dominada por constante cosmológica, que domina en la época actual y provoca una expansión acelerada del universo.

Pilares Observacionales

Los observables más contundentes que son consistentes con las predicciones del Modelo Cosmológico Estándar son:

- Observaciones del Fondo Cósmico de Radiación (CMB son sus siglas en inglés).
- Mapeo de la estructura a gran escala del universo.
- Estimación de las abundancias químicas reliquia de la Nucleosíntesis Primordial.
- Medición de velocidad de recesión de galaxias debido a la expansión del universo.

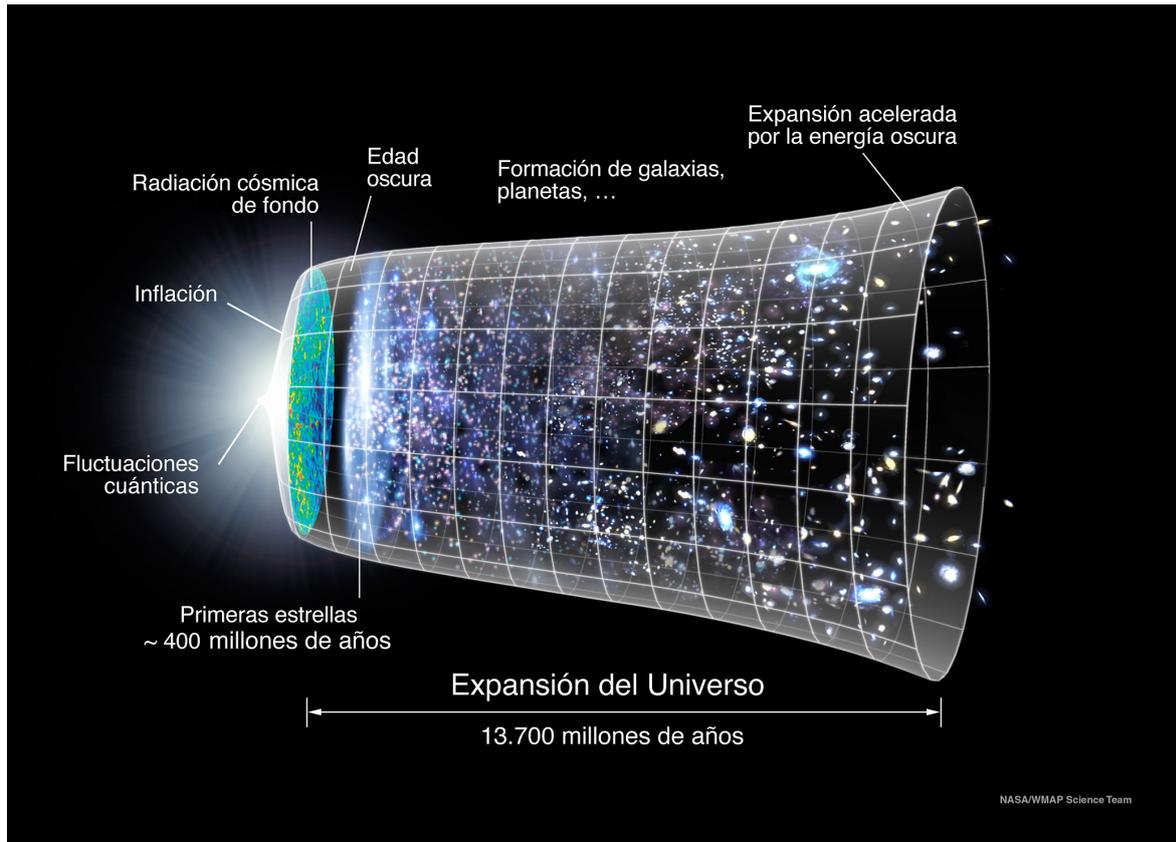


Figura 1.1. Esquema de evolución del universo de acuerdo al Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM} . Ilustración extraída de la [página de la NASA/WMAP Science Team](#).

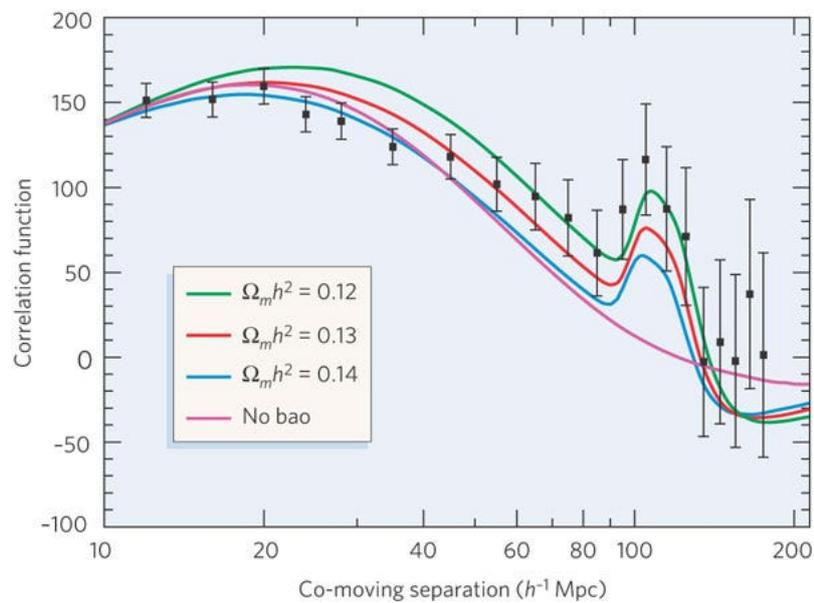


Figura 1.2. Función de Correlación de 2 puntos de la distribución a gran escala de la materia. Las distintas curvas, azul, roja y verde muestran la variación de dicha curva respecto a disminución del parámetro de densidad de materia. Se observa un exceso de probabilidad a los 150Mpc de separación comóvil, correspondiente a las BAO (Oscilaciones acústicas de bariones). La cantidad h es la constante de Hubble normalizada, adimensional y esta definida como $h = \frac{H_0}{100}$. Gráfica extraída de (Eisenstein et al., 2008)

La concordancia entre estos observables recién mencionados con las predicciones teóricas del modelo Λ_{CDM} lo consolidan como el modelo más apoyado por la comunidad científica. Sin embargo no está exento de problemas abiertos que se describirán en breve, que motivan a estudiar y formular modelos alternativos como el del presente trabajo, los cuales deberán predecir y ser consistentes con los observables que el Modelo Cosmológico Estándar predice con éxito, y más aún, solucionar algunos de los problemas abiertos del mismo.

Antes de empezar a detallar los problemas abiertos en cuestión, se describirá brevemente de qué manera se pueden estimar los parámetros libres del Modelo Cosmológico Estándar, como así también de modelos cosmológicos alternativos, lo cual es posible empleando datos de universo tardío, o empleando datos de CMB. Todo esto con el fin de comprender de donde surge la conocida *Tensión de H_0* , que será el primer problema que se abordará.

1.3. Estimación de parámetros cosmológicos con datos observacionales

El Modelo Cosmológico Estándar, como se explicó previamente, es capaz de predecir la función de Hubble $H(z)$, que dará cuenta del ritmo de expansión del universo a distintos corrimientos al rojo (*redshifts*), que es un alargamiento de la longitud de onda de los fotones emitidos por distintos objetos, provocada, no por su movimiento, sino por la expansión misma del universo. Dicha tasa de expansión dependerá de las densidades de las componentes materiales que conforman el universo. Esto implica, que si se mide en forma directa el ritmo de expansión del universo, a través de distintos métodos y sistemas físicos observados, es posible estimar los valores más probables para los parámetros libres del modelo cosmológico, acorde a los observables; empleando métodos estadísticos similares a los que se aplicarán en esta tesis. Estos espacios de parámetros determinados, dependerán del modelo cosmológico empleado, por lo tanto cualquier reporte de parámetros cosmológicos, debe ir acompañado de la aclaración del modelo cosmológico fiducial en cuestión. Esto se ha hecho a lo largo de los años, cada vez con mayor precisión, empleando diversos observables astronómicos como ser Supernovas Ia, Cefeidas, AGNs, BAOs, Cronómetros Cósmicos, "*Redshift-Space Distortions*" (RSD) medidos por el proyecyo "*Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*" (BOSS), entre otros. De esa manera se ajustan los parámetros cosmológicos con datos de universo tardío, asumiendo, por ejemplo, el Modelo Cosmológico Estándar.

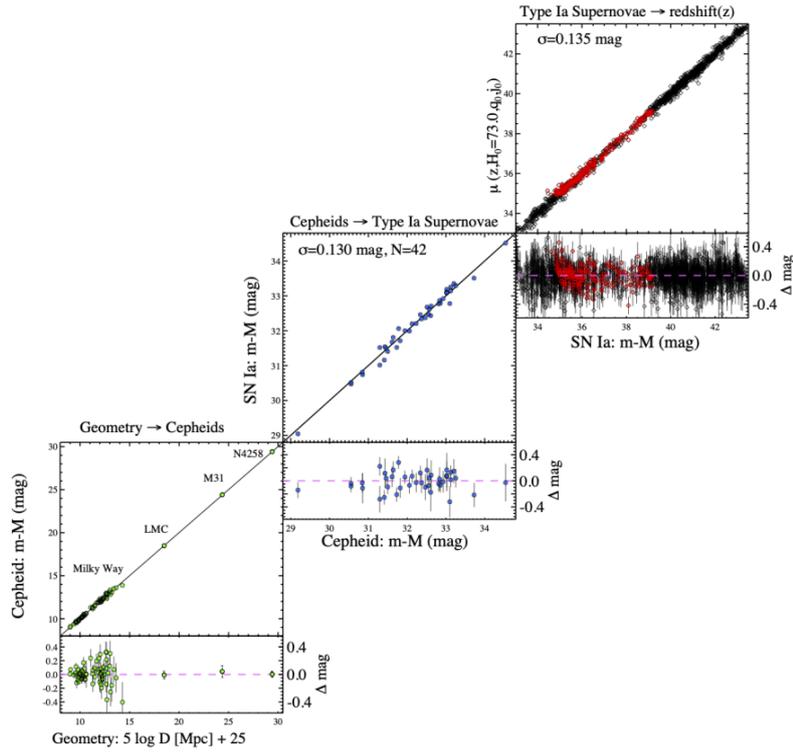


Figura 1.3. Diagrama de Hubble para la estimación del parámetro H_0 . Gráfica extraída de (Riess et al., 2022)

Otra manera de estimar parámetros cosmológicos, es empleando los datos del fondo cósmico de radiación (FCR o CMB), a partir de física post inflacionaria en el universo temprano. Se emplea un modelo del fluido foton-barion existente en el universo hasta el proceso de recombinación. Más precisamente, se obtiene una predicción para las anisotropías en temperatura de los fotones que componen el FCR y se emplea un método estadístico para compararlas con las mediciones de proyectos como Planck (Planck Collaboration, 2020). Es posible estimar valores para los parámetros cosmológicos más importantes, como ser:

- Ω_m : Parámetro de densidad de materia oscura mas bariónica.
- Ω_b : Parámetro de densidad de materia bariónica.
- Ω_r : Parámetro de densidad de radiación.
- Ω_Λ : Parametro de densidad de Energía Oscura.
- τ : profundidad óptica en época de recombinación
- radio característico de las BAO

- n_s : Índice espectral del espectro de potencias primordial de las fluctuaciones del campo inflatón.
- A_s : Amplitud del espectro de potencias primordial del campo inflatón.

siendo los primeros 6, los parámetros libres del Hot Big Bang clásico, mientras que los últimos 2 mencionados en la lista, A_s y n_s , son los parámetros asociados al espectro de potencias primordial del campo inflatón que proporciona una descripción estadística de las perturbaciones primordiales que introdujo el mismo. Se propone que este campo domina en una hipotética primera etapa del universo, provocando una expansión acelerada del universo temprano, previo a la era dominada por radiación y al proceso de reheating. Este proceso inflacionario es el mejor candidato para resolver simultáneamente problemas actuales en cosmología como el problema del horizonte, de la planitud, de los hipotéticos monopolos magnéticos, y sería el responsable de generar, por sus fluctuaciones cuánticas, las pequeñas inhomogeneidades primordiales que permitieron la formación de estructura cósmica a gran escala. Así también facilita una explicación a las pequeñas anisotropías en temperaturas observadas en el fondo cósmico de radiación, demostrando que este proceso inflacionario juega un papel crucial en el cálculo de la predicción del espectro angular de potencias del FCR, proporcionando las condiciones iniciales para la posterior evolución de las inhomogeneidades (Dodelson & Schmidt, 2020). Dichas anisotropías en temperatura en el FCR han sido medidas con alta precisión por satélites como COBE, WMAP y Planck, que nos permiten comparar modelo con observables de manera meticulosa, y así estimar el espacio de parámetros estadísticamente.

Para la predicción teórica se asume que el campo *inflatón* introduce las primeras inhomogeneidades en el universo temprano, por sus fluctuaciones cuánticas, que en un momento pasan a ser pequeñas perturbaciones clásicas. La información de estas se encuentra condensada en el llamado espectro primordial de potencias. Estas perturbaciones evolucionaron por procesos físicos post-inflacionarios en el fluido fotón-barión, y la función de transferencia contiene toda la información de este proceso de evolución, obtenida resolviendo las ecuaciones de Boltzmann correspondientes (Dodelson & Schmidt, 2020). De ese modo, las pequeñas perturbaciones primordiales, inducidas en las demás especies, evolucionan hasta el proceso de recombinación, en el cual, por la expansión del universo, el scattering que mantenía fuertemente acoplados electrones con fotones, se hace más ineficiente hasta que la radiación se desacopla de la materia bariónica. El camino libre medio de los fotones crece de tal manera que el FCR es emitido para luego llegar hasta nosotros prácticamente inalterados, recibiendo esa región el nombre de “*superficie de último scattering*”.

Los procesos físicos ocurridos entre los momentos del final de inflación y de recombinación, son muy sensibles a variaciones en los parámetros cosmológicos, permitiendo (asumiendo un modelo cosmológico fiducial, y calculando la predicción teórica del *espectro angular de potencias* (EAP) del FCR) estimar estadísticamente el espacio de parámetros libres asociados al modelo, comparando EAP teórico, con datos del EAP del FCR observado por las misiones. Los fotones que forman parte del FCR, contienen información de todos los procesos de los que formaron parte previo a su desacople con la materia bariónica. Esto se ve claramente en el EAP, que se puede ver en la figura 1.5, la cual es una gráfica de cómo varía la intensidad de las fluctuaciones en temperatura del FCR en función de la escala angular del cielo, identificada por un momento multipolar ℓ . Simplificadamente se puede separar el espectro en 3 regiones. Las escalas angulares grandes ($\ell < 100$) muestran el llamado Plateau de Sachs-Wolf. Corresponden a regiones del cielo que no pudieron haber estado nunca en contacto causal si no se introduce la etapa inflacionaria al modelo clásico de Hot Big Bang. Los modos (pertur-

baciones) asociados a estas escalas entraron al horizonte comóvil de Hubble mucho tiempo después, generando que la física post-inflacionaria prácticamente no afecte los observables asociados a estas escalas, lo que nos permite ver prácticamente inalteradas las fluctuaciones primordiales provocadas por el campo inflatón (mas allá del efecto Sach-Wolf por sobre y sub-densidades que generan efecto Doppler gravitacional, y domina a esas escalas (Scott & Smoot, 2004)). Este hecho nos permite estimar, con los datos asociados a estas escalas, los parámetros de amplitud (A_s) del espectro de potencias del inflatón, como así también el índice espectral del espectro de potencias primordial n_s , que marca cuanto se aparta el mismo respecto de un espectro totalmente invariante de escala (Dodelson & Schmidt, 2020).

Las escalas angulares medias reflejan el fenómeno de las oscilaciones acústicas de bariones. Dichas oscilaciones son muy sensibles a los parámetros, principalmente a la densidad de materia bariónica y oscura, ya que, analíticamente, se puede aproximar el fenómeno al de un oscilador armónico forzado, en el que una región del fluido se volvía "sobre densa", para luego ser diluida por la presión de radiación, pero la materia oscura, al no interactuar electromagnéticamente, permanecía "sobre densa", induciendo ese comportamiento forzado, que es posible observar en el espectro angular de potencias del FCR, más específicamente en la mayor altura de los picos pares con respecto a los impares. Mientras que escalas pequeñas (ℓ grandes) domina la microfísica, principalmente de efecto "damping", homogeneizando la temperatura a esas escalas por scattering (Dodelson & Schmidt, 2020).

Una vez determinado el espacio de parámetros cosmológicos, es posible derivar una predicción para la constante de Hubble H_0 , por ejemplo reportada por la colaboración Planck para el modelo Λ_{CDM} con datos del FCR, informando un valor de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Planck Collaboration, 2020).

Se ha demostrado que el conjunto de datos, tanto de universo temprano, como de universo tardío, son mutuamente compatibles y proporcionan restricciones muy ajustadas en los parámetros cosmológicos, reportando por ejemplo, en el ultimo informe de parámetros cosmológicos, combinando todos los observables mencionados en esta sección (DES, Planck, RSD de BOSS, Pantheon), y asumiendo el modelo Λ_{CDM} : $H_0 = 68.0^{+0.4}_{-0.3}$; $\Omega_m = 0.306^{+0.004}_{-0.005}$; $S_8 \equiv \sigma_8(\Omega_m/0.3)^{0.5} = 0.812 \pm 0.008$ (Alam et al., 2021a; Abbott et al., 2022). Siendo S_8 un parámetro que se emplea para caracterizar la estructura a gran escala en el universo, relacionado con σ_8 que es la amplitud de las fluctuaciones en densidad de materia en escala de 8 megapársecs.

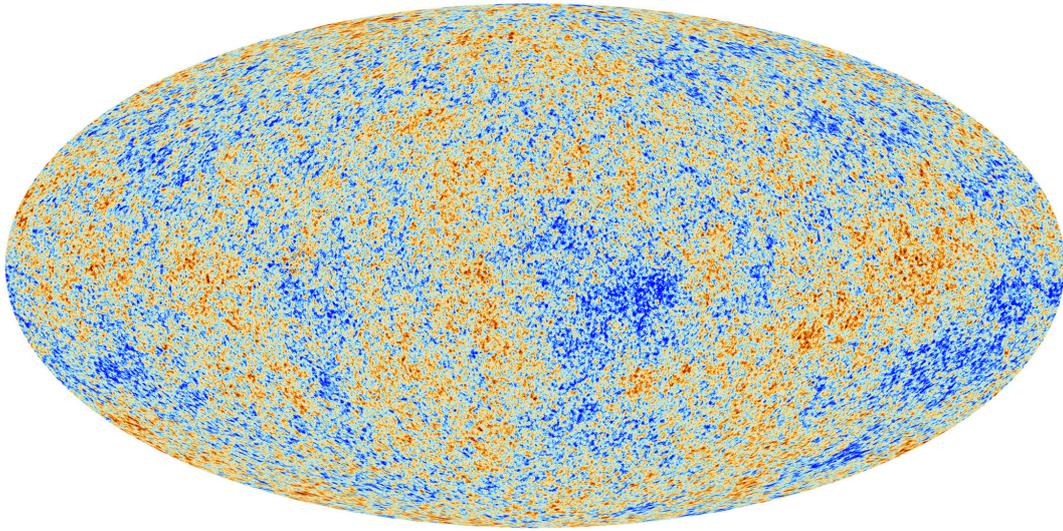


Figura 1.4. Fondo cósmico de radiación medido por el satélite espacial Planck. Créditos de la imagen a la Agencia Espacial Europea (ESA) y Planck Collaboration. Imagen obtenida de [la pagina oficial de la ESA](#).

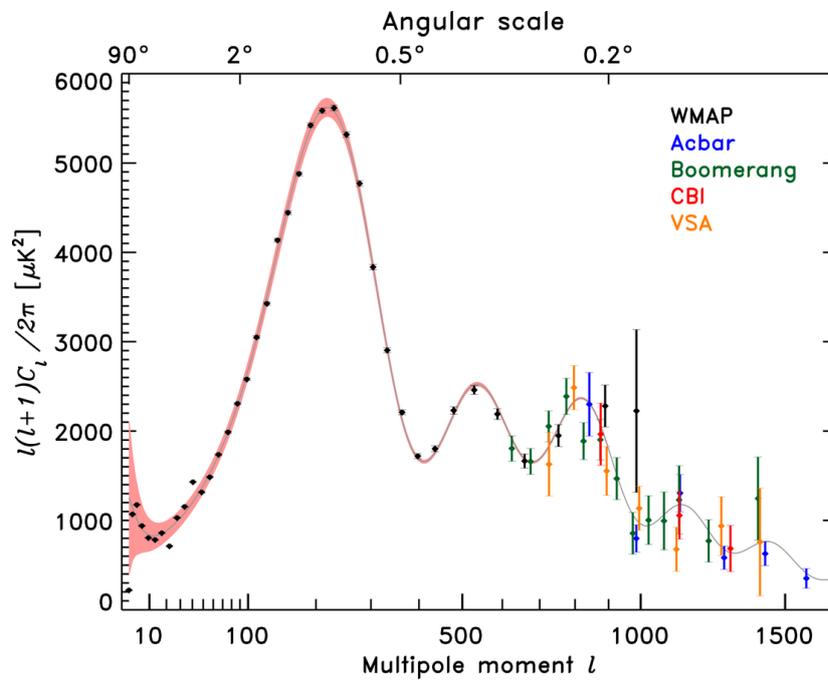


Figura 1.5. Espectro angular de potencias del CMB donde podemos ver la curva predicha por el modelo Λ_{CDM} y los datos de distintas misiones. Créditos de la gráfica a NASA/WMAP *Science Team*. extraída de ([Hinshaw et al., 2007](#))

1.4. Problemas abiertos del Modelo Cosmológico Estándar Λ_{CDM}

Problemas aún sin resolver en el marco del Modelo Cosmológico Estándar motivan a seguir investigando y planteando nuevas propuestas como la de la presente tesis. A continuación se presentaran algunos de los problemas aun abiertos en cosmología moderna, en especial aquellos problemas relacionados con la propuesta del presente trabajo, como son la Tensión de H_0 y el problema del referente de la Constante Cosmológica:

1.4.1. Tensión de H_0

Como se explico en la seccion *Estimación de parámetros cosmológicos* 1.3, es posible estimar el espacio de parámetros libres cosmológicos correspondientes al modelo Λ_{CDM} empleando datos del FCR o del universo tardío, como con datos de SnIa, BAO, CC, RSD, AGNs, entre otros. Entre los reportes más valorados empleando esta metodología, se encuentran las estimaciones del proyecto Planck, cuyos colaboradores reportan un valor de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Planck Collaboration, 2020) empleando datos del FCR, como ya se mencionó anteriormente. También se cuenta con reportes de H_0 empleando un número importante de datos de universo tardío, o incluso combinación de ambos (Alam et al., 2021a; Abbott et al., 2022; Lahav & Liddle, 2022).

El problema conocido como *Tensión de H_0* surge a partir de las estimaciones muy reconocidas de los artículos publicados por de Riess y colaboradores, quienes trabajan en realizar estimaciones del parámetro de Hubble H_0 , con una metodología que es independiente de cualquier modelo cosmológico, midiendo de forma directa la tasa de expansión actual del universo, observando cefeidas, calibradas a partir de paralaje trigonométrico, con las cuales, calibran a su vez, supernovas tipo Ia a bajo *redshift*. En 1998 habían reportado un valor para $H_0 = 73.24 \pm 1.7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Riess et al, 1998), y en 2022 reafirmaron un valor cercano, de $73.30 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Riess et al., 2022). Se observa que el valor obtenido por Riess y colaboradores a *redshifts* bajos, difiere significativamente de la estimación publicada por la colaboración Planck a *redshifts* altos utilizando el modelo Λ_{CDM} . De ambos valores se observa que existe una tensión de 5σ entre ambos resultados y aún hoy en día se debate e intenta aclarar la causa de dicha tensión.

Las propuestas que actualmente se estudian para intentar aliviar dicha tensión son múltiples. Pero una de ellas y la que se empleará en la presente tesis, consistirá en generalizar la Relatividad General, a la espera que dicha teoría generalizada de la gravedad proporcione una predicción modelo-dependiente de la constante de Hubble consistente con todos los observables, como así también con las estimaciones modelo-independiente existentes.

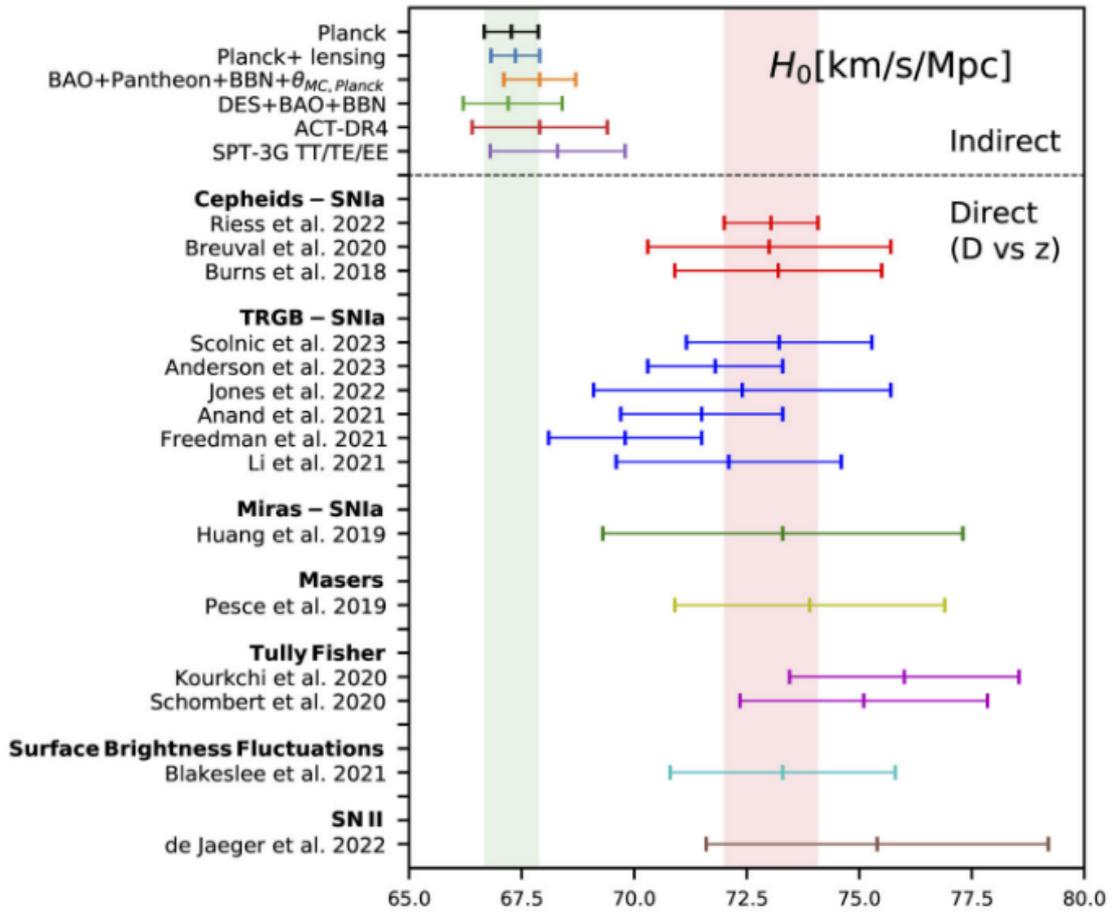


Figura 1.6. Estimación del parámetro de Hubble realizado por distintos proyectos empleando tanto métodos directos como indirectos, e incluyendo distintos observables. Se observa claramente la tensión de H_0 . Gráfica extraída de Riess & Breuval (2023)

1.4.2. Problema del referente físico de la constante cosmológica

Como se mencionó en el apartado de Energía Oscura, el referente físico de la constante cosmológica se desconoce. El debate al respecto sigue abierto en la comunidad científica y por el momento no hay común acuerdo. Múltiples son las propuestas sobre las que se trabajan, y en esta sección se expondrán brevemente las más conocidas y prometedoras, como así también se comentarán los puntos débiles de cada una que motivan el desarrollo y estudio de teorías alternativas al Modelo Estándar Cosmológico.

1.4.2.1. Energía de vacío de los campos cuánticos del Modelo Estándar de Partículas

Es la propuesta más popular y apoyada por la comunidad científica, especialmente por los físicos teóricos, a tal punto que se suele afirmar que el referente físico de la constante cosmológica es efectivamente la energía de vacío de los campos cuánticos del Modelo Estándar de Partículas (Weinberg, 1989a), cuando en realidad no existe certeza ni evidencia que respalde tal aseveración. La misma surge de la formulación de la teoría cuántica de campos. Ésta modela a los campos como un conjunto infinito de osciladores cuánticos acoplados, que finalmente modelan un campo clásico, que al imponerle la denominada *segunda cuantización*

(en el formalismo de cuantización canónica) por ejemplo, terminan siendo pieza fundamental para la formulación de la teoría cuántica de campos, que, en el caso particular de los campos del Modelo Estándar, conforman la descripción más exitosa de la historia en cuanto a física de partículas, y la precisa descripción unificada de 3 de sus interacciones fundamentales, a ser, la interacción electromagnética, débil y fuerte.

Como se sabe, la energía del estado basal de energía de un oscilador cuántico es no nula. De esta manera, el campo cuántico formulado como un conjunto infinito de estos, en su estado de vacío, tampoco tendrá energía nula. De hecho, aparecen infinitos en la teoría, que de todos modos no impiden describir procesos con éxito, debido a que sólo son importantes las diferencias de energía implicadas en los procesos y la energía de vacío no acarrea grandes problemas.

Con lo recién expuesto, se suele indagar si la energía del vacío debe ser incluida en el tensor energía-momento, en el miembro derecho de las ecuaciones de campo de Einstein, y generar efectos sobre el espacio-tiempo, o si la misma no es capaz de generar expansión en el universo (León, 2022; Bengochea et al., 2020), o si es acaso la energía del vacío sólo una característica matemática en la formulación de la teoría, por la forma en que se construye para aproximar la realidad. Es en esa instancia dónde quienes defienden que *el vacío sí gravita*, argumentan que existen sistemas físicos que para ser descritos de forma precisa, necesitan de la inclusión de fenómenos asociados al vacío del campo cuántico, como el Efecto Lamb en los niveles más bajos de energía del átomo (Feynman, 1949), Efecto Casimir (Casimir, 1948) en un experimento de laboratorio en donde la energía del vacío de los campos cuánticos genera una fuerza entre un par de placas paralelas; y por último, se suele mencionar la discrepancia entre la masa de los quarks individuales y la masa del protón, conformado por 3 de estos, la cual es mucho mayor que la suma de la masa de los 3 quarks individuales, entonces proponen que el vacío de los campos, cumple un rol fundamental en la explicación de la masa total del protón a partir de sus constituyentes (quarks y gluones). Estas cuestiones siguen en activo debate, ya que, por poner un ejemplo, existen trabajos en los que se expone que la atracción entre placas de los experimentos que confirmarían el efecto Casimir, pueden ser explicadas sin hacer referencia a las energías de punto cero del vacío, sino sólo como fuerzas cuánticas relativistas entre cargas y corrientes (Jaffe, 2005).

Si se remarcan puntos fuertes de la propuesta, se menciona que la misma está asociada a sistemas físicos conocidos, y no requieren la postulación de especies materiales nuevas, como así también se destaca algunos aspectos característicos de la energía del vacío, que coinciden muy bien con las características necesarias estimadas para la presunta energía oscura, como ser:

- Que permea todo el universo y no se diluye con la expansión del mismo.
- Que no tiene inhomogeneidades.
- Que no influye en la formación de estructura a pequeña escala (solo a través de la modificación en el ritmo de expansión del universo)

Si se mencionan los posibles puntos débiles que nos llevan a no recurrir a esta propuesta:

- No se conoce un mecanismo claro por el cual los efectos de la energía del vacío puede provocar una expansión acelerada, ni se tiene certeza de que dichos efectos observados solo en experimentos a escalas de laboratorio puedan manifestarse a gran escala y generar expansión en el universo. Se suele decir en la jerga que “*no se sabe si el vacío*”

gravita”, es decir, no se tiene en claro que se deba agregar, o no, un termino extra en el tensor energía momento asociado a esto y que genera efectos reales en el espacio-tiempo.

- En la línea del ítem anterior, intentos de teorizar mecanismos por los cuales el vacío genere expansión han resultado erróneos e inconsistentes, como por ejemplo expone (Bengochea et al., 2020) sobre la propuesta de Unruh y Wang (Wang et al., 2017), entre otros ejemplos.
- Existe una enorme discrepancia entre la predicción para expansión del universo que la energía de vacío genera con respecto al ritmo de expansión observado, siendo la predicción 120 ordenes de magnitud mayor, la cual fue la predicción mas errónea en la historia de la física.

Problema CC

Dentro de la propuesta de energía de vacío, se suele mencionar el conocido problema de la Constante Cosmológica o ”Problema CC”(Weinberg, 1989b), el cual se expondrá brevemente. Como se describió en párrafos anteriores la estimación de la constante cosmológica predicha por la teoría cuántica de campos, es 120 órdenes de magnitud mayor que la estimada por las observaciones; esto lleva a plantear analíticamente una precisa cancelación de términos para reconciliar predicción con observación, todo esto, por supuesto, asumiendo que *el vacío gravita*, como así también, que la predicción de la QFT es correcta. Si se asume entonces que la energía de vacío puede tener efectos dinámicos sobre el espacio-tiempo a gran escala, la componente al tensor energía-momento correspondiente se puede expresar como:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$$

donde la densidad de energía de vacío tendría que ser constante. Comparando esta componente con la de un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = (\rho + P)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}$$

se percibe que puede ser considerado un fluido perfecto con una presión isotrópica con signo opuesto a su densidad de energía

$$P_{vac} = -\rho_{vac}$$

Entonces, si se relaciona el término de la constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein directamente con la energía de vacío, se obtiene:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} &= 8\pi GT_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}) \\ T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} &= -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

En la ecuación de estado del vacío se tiene $\omega = -1$, la densidad de energía es constante en el espacio-tiempo y de acuerdo a los calculos de la QFT es del orden de (Weinberg, 1989b):

$$\rho_{vac} = (10^{18} \text{ GeV})^4 \approx 10^{112} \frac{\text{egs}}{\text{cm}^3}$$

mientras que las observaciones indican (Bahcall, 1999; Ostriker & Steinhardt, 1995), que la densidad de la hipotética “Energía Oscura” es de:

$$\rho_{\Lambda} = 10^{-8} \frac{\text{egs}}{\text{cm}^3}$$

Alternativamente, para evitar esta enorme discrepancia, se suele asumir que se debe tener en cuenta, tanto la energía de vacío en el tensor energía-momento, como constante cosmológica en el tensor de Einstein, y ambas contrarrestarse de tal modo que este modelo ajuste a los observables:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + (\Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{vac}) = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda_{ef}^* g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\Lambda_{ef}^* = \Lambda + 8\pi G \rho_{vac}$$

Pero este ajuste fino de la CC para evitar exactamente la contribución del vacío predicha por la QFT, se conoce como *Problema CC* (Weinberg, 1989b).

1.4.2.2. Modelos con Energía oscura

Los modelos cosmológicos con *energía oscura* proponen que el referente físico de la constante cosmológica es una substancia, hasta el momento desconocida del universo.

Se suelen incluir para ello, campos cuánticos extra, de distintas naturalezas, y existen múltiples modelos cosmológicos alternativos en esta línea, pero en la mayoría de los casos se asume un único campo cuántico extra, escalar, distinto a los del Modelo Estándar de Partículas, como se puede ver por ejemplo en (Copeland et al., 2006; Caldwell & Linder, 2005) que son los denominados, modelos de *Quintaesencia*.

Para que este campo cuántico provoque una expansión acelerada del universo y así poder describir las observaciones, debe cumplir una serie de condiciones necesarias y mantenerlas a lo largo del tiempo. Principalmente, su energía potencial debe dominar por sobre su energía cinética en épocas tardías, ya que mientras esta condición se cumpla, se genera una expansión acelerada exponencialmente del espacio-tiempo, en un mecanismo muy similar al que se propone para producir la expansión acelerada del modelo inflacionario del universo temprano. La acción en estos modelos suele tener la forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\phi} \right) + S_M \quad (1.9)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\phi} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi - V(\phi). \quad (1.10)$$

En el presente trabajo no se inclina por estudiar esta propuesta debido a que no es económica ontológicamente hablando, al asumir un campo cuántico extra y desconocido del que no existe evidencia, y bajo esta suposición sería la especie más abundante del universo. Las teorías $f(R)$ tienen la capacidad de explicar la expansión acelerada del universo sin introducir especies desconocidas en el modelo.

De igual manera es importante mencionar que las teorías $f(R)$ poseen una equivalencia matemática con las teorías Brans-Dicke cuando se estudia la teoría en el marco de Einstein

(Dicke, 1962; Capozziello et al., 1997, 2010), en las cuales aparecen campos escalares no-minimalmente acoplados a la materia. Por lo tanto, si se interpreta la teoría en el marco de Einstein, se podría argumentar que la teoría incluye campos escalares, que conforman una especie desconocida en el modelo. Autores como Starobinsky opinan que dichos campos existen realmente, tienen partículas asociadas y son una especie desconocida. De hecho, dicho autor construye su teoría $f(R)$ de tal modo que no se produzca una sobreproducción de estas partículas, que llamó "Escalarones", en el universo temprano y arruine el modelo cosmológico (Starobinsky, 1980a). De ser correctas interpretaciones como la de Starobinsky, y por ejemplo se detectase una partícula asociada a estos campos, queda descartada la interpretación expuesta en el presente trabajo, la cual fue pensada en el marco de Jordan, y se le dio un carácter puramente gravitacional o Geométrico del ET, a la explicación de la expansión acelerada del universo. Se interpreto el grado de libertad adicional de estas teorías, como parte también de la geometría, asociado a la variación del escalar de Ricci R , el cual es una entidad dinámica en teorías $f(R)$.

Tanto en los modelos de Quintaescencia como en otros denominados ω_{CDM} (Ontológicamente diferentes), puede darse una variación del parámetro ω de la ecuación de estado de la "Energía Oscura", pero hasta el momento no hay indicios observacionales de esta posible variación. Estimaciones que combinan datos del fondo cósmico de radiación del proyecto Planck, con datos de BAO, SnIa y DES (Dark Energy Survey), indican que la expansión del universo es mejor descrita por un modelo con constante cosmológica con $\omega_{\Lambda} = cte = -1$ que este tipo de modelos (Alam et al., 2021b), aunque aún no están descartados y variaciones de ω_{Λ} al rededor del valor -1 pueden ser posibles.

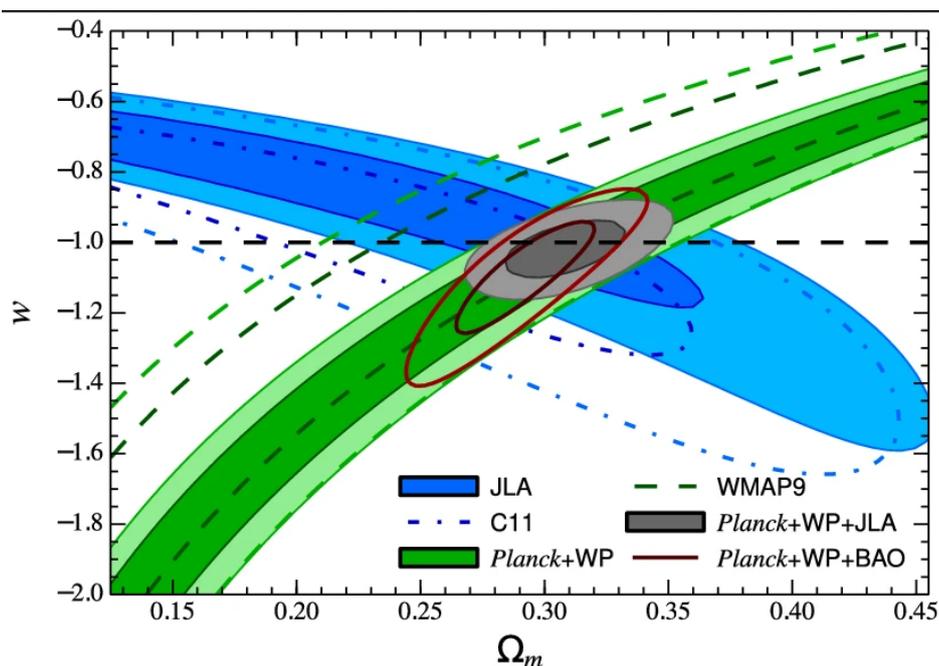


Figura 1.7. Cotras para ω y para Ω_M proporcionado por distintos proyectos. Gráfica extraída de (Betoule et al., 2014)

Existen también otras variantes como los modelos de *K-esencia*, los cuales proponen agregar un termino cinético no canónico en el Lagrangiano (Armendariz-Picón et al., 1999; Armendariz-Picon et al., 2000) o los modelos de *Interacción del Sector Oscuro* (Costa et al., 2015).

1.4.2.3. Teorías de gravedad modificada

En este tipo de teorías se modifica la Relatividad General de Einstein, en la búsqueda de una formulación más general de la misma, en búsqueda de comprender e indagar si no es acaso, el mismo comportamiento del espacio-tiempo, el responsable de generar una expansión acelerada del universo, a raíz de aspectos de la interacción gravitatoria que ignoramos hasta el momento. Esto puede ser debido a que se han estudiado múltiples sistemas astronómicos de baja escala, mientras que dicha interacción puede tener efectos que desconocemos a grandes escalas, como las estudiadas en el universo como un todo, o en casos de campo fuerte, como ser en cercanías de un agujero negro.

Planteado esto se procede a analizar que modificaciones se puede hacer a la Relatividad General para contemplar dichos efectos no tenidos en cuenta. Una posibilidad surge de la reflexión de que las ecuaciones de campo normalmente empleadas y presentadas por Einstein en 1915, se derivan de la acción Einstein-Hilbert (EH), que en principio es el caso más simple, pero no tiene por qué ser la acción definitiva y que mejor se corresponde a la realidad. La teoría con dicha acción ha sido muy exitosa, por lo tanto una teoría derivada de otra acción, debe superar todos los experimentos predichos por la RG y aún más. No existe un criterio claro, ni metodología precisa en la búsqueda de la formulación de la acción para la teoría de gravedad óptima desde un punto de vista teórico. Probablemente una teoría superadora, como ser una probable teoría del todo, o una teoría de gravedad cuántica den cuenta y explicación del origen de estos términos correctivos a la acción más simple (acción EH), pero por el momento sólo se cuenta con los datos observacionales. Es posible ir probando distintas acciones en busca de la que mejor describa las observaciones tanto del sistema solar, como cosmológicas, y que la teoría en conjunto con los datos no posea inconsistencias internas, como por ejemplo la tensión de H_0 empleando la RG, lo cual puede ser un indicio que la RG no es la teoría última de gravedad. Se pueden mencionar algunas propuestas de gravedad modificada, como ser:

- Las teorías $f(R)$, las cuales son una generalización de la Relatividad General, empleando una acción generalizada del tipo $f(R)$, es decir, una función del escalar de Ricci en lugar de la acción EH. (Starobinsky, 1980b)
- Las teorías $f(T)$ que consisten en introducir una torsión no nula en la conexión empleada por la teoría. (Aldrovandi & Pereira, 2013; Bengochea, 2011)
- Teoría Unimodular, la cual permite la no conservación del tensor energía-momento, motivados por efectos de la mecánica cuántica, y dicha teoría también tiene la cualidad de que en ella, el vacío no gravita. (León, 2022; Bengochea et al., 2023; Landau et al., 2022)
- Teorías del tipo Brans Dicke, las cuales surgieron con la intención de incluir los principios de Mach en la teoría de gravedad, y las mismas permiten una variación de la constante de gravitación. (Brans & Dicke, 1961)
- Teorías Escalar-Vector-Tensorial de gravedad (STVG o MOG) es un enfoque teórico que busca describir la gravedad mediante la combinación de campos escalares, vectoriales y tensoriales. En este marco, se considera un campo escalar que representa la influencia gravitacional, un campo vectorial que describe la dirección y fuerza de la gravedad, y un campo tensorial que aborda las propiedades geométricas del espacio-tiempo. (Moffat,

2006; Negrelli, 2019)

- entre otras

1.4.3. Problema de la unificación entre RG y MC:

Con el descubrimiento de la mecánica cuántica a principios del siglo pasado, se develó un comportamiento de la naturaleza sumamente anti-intuitivo y desconcertante, que, a pesar de ello, se comprendió y aplicó en diversos sistemas físicos, obteniendo resultados y predicciones con precisiones nunca antes vistas. Se han descrito con éxito experimentos de laboratorio, analizando el comportamiento de sistemas cuánticos, ya que usualmente, en sistemas macroscópicos, son imperceptibles los efectos cuánticos. Igualmente, en algunos casos, se ha aplicado la teoría cuántica a sistemas macrofísicos con éxito, como ser por ejemplo enanas blancas, en las cuales la presión que sostiene su estructura mecánica, tiene un origen puramente cuántico. Surge de uno de los principios de la mecánica cuántica, como es el principio de exclusión de Pauli, que, en un gas totalmente degenerado, como es el que compone una enana blanca, provoca una presión totalmente independiente de la temperatura, permitiendo a la estrella conservar el equilibrio hidrostático por millones de años hasta enfriarse e incluso llegar a cristalizarse. De este modo, la teoría de enanas blancas fue un éxito rotundo de la conjunción de 2 teorías sumamente exitosas del siglo pasado: La Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica. Si se va a un extremo aun mayor, como es el de la cosmología, que intenta describir el mayor sistema macrofísico posible, a ser, la descripción en conjunto de todo lo que existe, y más aún, cuando se trata del universo temprano, es necesaria no solo la conjunción de la MC y la relatividad especial, como en el caso de las enanas blancas, sino además la unificación de la MC con la Relatividad General. Esto se debe a que al igual que en las enanas blancas, la densidad fue tan alta en el universo temprano, que los efectos cuánticos son relevantes, A su vez que el espacio-tiempo está tan curvado que se requiere la RG. Más aún, es necesario contemplar posibles efectos cuánticos del espacio-tiempo muy relevantes en los primeros instantes, como así también en la expansión actual, según algunas opiniones de expertos, siendo los términos correctivos a la acción de la teoría gravitatoria, un reflejo del comportamiento cuántico del espacio-tiempo, que emerge, generando expansión a gran escala, como se ha intentado reflejar en trabajos como (Starobinsky, 2007, 1980a; Perez & Sudarsky, 2019; Josset et al., 2017). En este contexto, se ha buscado formular esa teoría superadora, proponiendo desde una teoría del todo, una teoría de gravedad cuántica, o una teoría de unificación, según sea el caso, para conseguir modelar esos escenarios en los que las teorías actuales fallan, pero hasta el momento sin éxito, ya que no hay ninguna predicción de alguna de estas teorías que luego haya sido verificada experimentalmente. A pesar de la frustrada unificación, distintas líneas de investigación han tenido relativos éxitos, principalmente desde un punto de vista teórico. Se pueden mencionar solo como ejemplo 3 propuestas muy conocidas como son:

- Teoría de cuerdas: Una propuesta de teoría del todo que busca englobar las 4 interacciones fundamentales y el conjunto total de partículas existentes.(Schwarz, 2000, 2011)
- Teoría cuántica de bucles: Una propuesta de gravedad cuántica que busca comprender el comportamiento cuántico del un espacio-tiempo discretizado.(Thiemann, 2007)
- Teorías de Kaluza-Klein: Una propuesta de unificación que incluyendo una dimensión extra consiguió buenos resultados en la unificación de la gravedad y el electromagnetismo.(Kaluzza, 1921; Klein, 1926)

Varias de estas líneas de investigación coinciden en que la RG no es el caso límite de bajas energías para dicha teoría, sino que esta debe incluir términos correctivos, asociados a dichos efectos de gravedad cuántica, en el lagrangiano de Einstein-Hilbert. Se puede mencionar como ejemplo lo expuesto en (Nojiri & Odintsov, 2003), quienes exponen que términos correctivos de mayor orden del escalar de Ricci deben ser incluidos en la acción empleada para derivar las ecuaciones de campo de la teoría gravitatoria, llegando a esa conclusión a partir del estudio de la Teoría M, asociado a la propuesta de cuerdas. De hecho, la función $f(R)$ empleada en el presente trabajo, ha sido propuesta por Starobinsky (Starobinsky, 2007), también a partir del estudio de efectos cuánticos de la gravedad en contexto cosmológico, como también se puede ver en (Starobinsky, 1980a) o en (Asaka et al., 2016), siendo la acción generalizada de tipo $f(R)$, una acción que permite derivar una teoría efectiva de gravedad, acorde a la teoría superadora, que contemple la naturaleza cuántica de la gravedad, que tal vez algún día se conozca.

Por otro lado, estos efectos previamente no contemplados de la gravedad, pueden interpretarse simplemente como efectos geométricos del ET, ahora incluidos para conformar una nueva teoría de gravitación clásica, que será la postura que se adoptará en el presente trabajo, quedando su relación con la teoría M y con la gravedad cuántica, simplemente como algo anecdótico, que supera ampliamente esta tesis.

1.5. Ventajas Ontológicas de la propuestas $f(R)$

Como se mencionó previamente, en la sección “Energía oscura”, es un problema abierto en cosmología el referente físico de la constante cosmológica. La incorporación de la constante cosmológica en las ecuaciones de campo de Einstein permitieron describir cuantitativamente de manera muy precisa las observaciones del ritmo de expansión del universo tardío. Sin embargo, aunque cuantitativamente funciona, cualitativamente nunca estuvo claro el referente físico en cuestión, ya que dicho término extra en las ecuaciones de campo, puede ser interpretado como parte del miembro izquierdo, como un término adicional asociado a la geometría del espacio-tiempo, o alternativamente, puede ser interpretado como parte del miembro derecho, como una componente extra del tensor energía-momento ⁽ⁱ⁾, asociado a una aparente componente material desconocida en el universo, o a la energía del vacío de los campos cuánticos del modelo estándar, según las diversas opiniones y posturas.

Es por ello que en este trabajo nos inclinamos por analizar las teorías llamadas $f(R)$, ya que éstas eliminan la ambigüedad existente en Relatividad General, en cuanto a la interpretación e identificación del referente físico de la constante cosmológica. En las teorías $f(R)$, el término asociado a la expansión del universo, es claramente parte del miembro izquierdo de las ecuaciones, asociado a la geometría, ya que es una función del escalar de curvatura. No es posible en este contexto, mal interpretar el término y despejarlo al miembro derecho de las ecuaciones de campo como una componente del tensor energía-momento, cuestión que no quedaba clara en el contexto de RG.

Es decir, la expansión acelerada del universo es causada por modificaciones en el comportamiento y naturaleza de la interacción gravitatoria, dándole en esta interpretación un rol mucho más relevante al espacio-tiempo, en contexto cosmológico, generando el mismo la expansión y cambios en las otras especies materiales, de manera análoga a como sucede con las ondas gravitacionales por ejemplo, las cuales generan cambio, poseen energía, ergo, el ET es un ente material (Bunge, 2018). En ese hecho radica en nuestra opinión lo valioso del modelo, ya que permite dar una explicación de la expansión acelerada del universo sin

⁽ⁱ⁾a veces mal llamado, tensor materia-energía, que como se explico previamente, no debemos confundir el referente físico, con una propiedad del mismo

introducir especies materiales desconocidas en nuestro modelo, sino que lo refiere a una interacción gravitatoria repulsiva por sobre cierta escala. Cuantitativamente los resultados de estos modelos son muy similares al Modelo Estándar, englobando lo ya logrado por el modelo, y lo simplifica ontológicamente de manera realmente importante, ya que en este paradigma, no hace falta asumir que el %70 del contenido material del universo es una substancia desconocida. La RG es un caso particular de esta teoría, y el apartamiento respecto a ella está dado por el *parámetro de distorsión* "b", siendo la RG con constante cosmológica, el caso más simple dentro de este tipo de teorías de gravedad, pudiendo interpretarse que la constante cosmológica Λ indica una escala por sobre la cual la gravedad actúa repulsivamente. De este modo, nuestro modelo de universo se ve simplificado y queda conformado materialmente por:

- Espacio-tiempo
- Todos los campos cuánticos del Modelo Estándar de partículas
- Materia oscura.

Esta interpretación fue pensada y planteada estudiando las ecuaciones en el llamado marco de Jordan, pero el viejo problema de no saber a que miembro de las ecuaciones de campo pertenece la constante cosmológica, y por lo tanto no saber si está asociada a la geometría del ET o a materia extra desconocida, parece resurgir cuando aparece la dicotomía entre estudiar estas teorías en el mencionado marco de Jordan, o estudiarlas en el marco de Einstein. Ya que la teoría $f(R)$, luego de un mapeo conforme, y manipulaciones matemáticas, pasando al marco de Einstein, es indistinguible matemáticamente a una teoría Brans-Dicke (o del tipo camaleón), las cuales poseen campos escalares no-mínimalmente acoplados a la gravedad. De ser materiales y reales estos campos, invalida la interpretación expuesta en esta tesis. El presente trabajo se inclina por interpretar la teoría en el marco de Jordan, por simple principio de la *Navaja de Ockham*, ya que en dicho marco, la interpretación posible es mucho más económica, ontológicamente hablando. La evidencia empírica determinará cuál interpretación es la correcta.

Capítulo 2

Teorías $f(R)$

En el presente capítulo se expondrá el proceso de obtención de las ecuaciones de campo de una teoría de gravedad generalizada del tipo $f(R)$ en el formalismo métrico analizando cómo esta modificación introduce cambios en el sector geométrico de las ecuaciones de campo de gravedad.

2.1. Obtención de ecuaciones de campo en teorías $f(R)$ - Gravedad Generalizada

Esta sección está inspirada, sigue los desarrollos y el formalismo empleado en el libro "New Phenomena and New States of Matter in the Universe" (Perez et al., 2023), más precisamente en el capítulo 4 del mismo, llamado "Dark Matter and Dark Energy vs. Modified Gravity: An Appraisal", escrito por Daniela Pérez, investigadora y docente de la Universidad Nacional de La Plata y CONICET.

La acción de una teoría $f(R)$ que plantea una generalización de la RG, está dada por:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi)$$

donde $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, S_m es la acción para la materia y R es el escalar de Ricci, por tanto $f(R)$ es alguna función de este último.

Para obtener las ecuaciones de campo generalizadas, se utiliza la variación de la acción respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x (\sqrt{-g} \delta f(R) + f(R) \delta \sqrt{-g} + \delta S_m)$$

La variación del determinante de la métrica es:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

El escalar de Ricci se define como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

y su variación respecto a la inversa de la métrica está dada por:

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho)$$

2. Teorías $f(R)$

siendo $\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ la variación de los símbolos de Christoffel, la cual es un tensor y por lo tanto, se transforma como tal. En consecuencia, puede ser escrita como:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_{\mu}\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_{\nu}\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu})$$

Sustituyendo en la variación del escalar de Ricci:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Dado que la variación de la acción inicial puede reescribirse como:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[f_R(R)\delta R\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + \delta S_m \right]$$

reemplazando en ella la variación del escalar de Ricci por la expresión anterior se obtiene:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left[f_R(R)(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right] + \delta S_m \right]$$

siendo $f_R(R) = \frac{df(R)}{dR}$.

Además integrando por partes el segundo y tercer término se llega a:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left[f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)f_R(R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \delta S_m \right]$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y $\square = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$, el operador de d'Alambertiano.

La variación de la acción de la materia es:

$$\delta S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$$

Para obtener las ecuaciones de campo, se impone la condición de que la variación de la acción sea nula para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$ arbitraria. Esto lleva a las ecuaciones de campo generalizadas:

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)f_R(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento para la materia y está representado por:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$$

El presente trabajo se enfoca en el estudio cosmológico del universo, y en la aplicación de estas ecuaciones generalizadas de campo para tal fin. Por lo tanto nos interesan las teorías $f(R)$ que cumplan los requisitos necesarios, como así también las métricas solución que describan universos dinámicos. Por fortuna esta teoría generalizada admite como solución la métrica cosmológica de FLRW, particularidad que nos permite realizar estudios cosmológicos y que mantiene las expresiones de las componentes del tensor de Riemann, tensor de Ricci, escalar de Ricci, y conexión, obtenidas para la métrica FLRW en RG, y son empleadas en esta teoría a pesar de ser diferente.

La métrica en coordenadas comóviles para una métrica FLRW se puede escribir como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

donde $d\Omega^2$ representa los elementos diferenciales de ángulo sólido, y se asumirá un universo espacialmente plano ($K = 0$).

La fórmula del escalar de curvatura R para una métrica FLRW resulta en:

$$R = \frac{6c^2}{a^2} \left(H^2 + \frac{\dot{H}}{c^2} \right)$$

2.2. Ecuaciones de Friedmann generalizadas

A partir de las expresiones de la sección anterior, y de los resultados asociados a la métrica FLRW, reemplazando en las ecuaciones de campo generalizadas, se obtienen las ecuaciones de Friedmann generalizadas:

$$-3H^2 = -\frac{1}{f_R} \left(\frac{8\pi G}{c^4} (\rho_m + \rho_r) + c^2 \frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR} \right) \quad (2.9)$$

$$-2\dot{H} = \frac{1}{f_R} \left[\frac{8\pi G}{c^4} \left(\rho_m + \frac{P_m}{c^2} + \rho_r + \frac{P_r}{c^2} \right) + f_{RRR}\dot{R}^2 + (\ddot{R} - H\dot{R})f_{RR} \right] \quad (2.10)$$

Además, se tienen las ecuaciones de continuidad para la materia y la radiación:

$$\dot{\rho}_m + 3H \left(\rho_m + \frac{P_m}{c^2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H \left(\rho_r + \frac{P_r}{c^2} \right) = 0$$

Es posible definir una densidad y presión efectivas, asociadas a la geometría del espacio-tiempo:

$$\rho_{eff} = \frac{Rf_R(R) - f(R)}{2f_R(R)} - \frac{3H\dot{R}f_{RR}(R)}{f_R(R)}$$

$$P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f_{RRR}(R) + 2H\dot{R}f_{RR}(R) + \ddot{R}f_{RR}(R) + \frac{1}{2}(f(R) - Rf_R(R))}{f_R(R)}$$

Analizando estas ecuaciones en el límite $\rho \rightarrow 0$, ρ_{eff} es necesariamente positiva. Dadas estas dos definiciones, las ecuaciones de Friedmann generalizadas, en el caso de vacío, son:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_{eff}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} (\rho_{eff} + 3P_{eff})$$

La presión y densidad de energías efectivas están relacionadas por una ecuación de estado efectiva del tipo:

$$\omega_{eff} = \frac{P_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\dot{R}^2 f_{RRR}(R) + 2H\dot{R}f_{RR}(R) + \ddot{R}f_{RR}(R) + \frac{1}{2}(f(R) - Rf_R(R))}{Rf_R(R) - f(R) - 3H\dot{R}f_{RR}(R)}$$

donde $\rho_{eff} > 0$, por lo tanto el signo de ω_{eff} está determinado por el numerador de la expresión. Para reproducir entonces un universo de de Sitter de fondo, es necesario que $\omega_{eff} = -1$, por tanto la función $f(R)$ debe satisfacer:

$$\frac{f_{RRR}(R)}{f_{RR}(R)} = \frac{H\dot{R} - \ddot{R}}{\dot{R}^2}$$

Otra forma de analizar la capacidad de las teorías $f(R)$ para explicar la aceleración del universo a través de un mecanismo puramente gravitacional, es estudiar el caso en que $R = cte = R_0$. Si se asume además ausencia de materia, las ecuaciones de campo modificadas y la de su traza se reducen a:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R_0}{2f_R(R_0)}g_{\mu\nu} = 0 \implies R_{\mu\nu} = \frac{R_0}{2f_R(R_0)}g_{\mu\nu}$$

$$f_R(R_0)R_0 - 2f(R_0) = 0 \implies R_0 = \frac{2f(R_0)}{f_R(R_0)}$$

Reemplazando ambas ecuaciones entre si:

$$R_{\mu\nu} = \frac{f(R_0)}{(f_R(R_0))^2}g_{\mu\nu}$$

Recordando que las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica en el vacío son:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Se identifica entonces de forma inmediata:

$$\Lambda = \frac{f(R_0)}{(f_R(R_0))^2}$$

Es decir, la teoría generalizada de tipo $f(R)$ es capaz de producir aceleración cósmica sin introducir constante cosmológica o campos cuánticos desconocidos.

2.3. Elección de la función $f(R)$

Las parametrizaciones y metodología empleadas en la presente sección son similares a las utilizadas en (Leizerovich et al., 2022) desarrolladas para el modelo de $f(R)$ de Hu-Sawicki, como así también en su tesis de grado (Leizerovich, 2020).

En principio existe un amplio número de funciones $f(R)$ distintas que se pueden incluir en la acción de la teoría de gravedad generalizada, y no existe un criterio claro de selección desde un punto de vista teórico, optando desde el caso más simple, a ser la función Einstein-Hilbert (EH) con CC, hasta otras funciones $f(R)$ más complejas. El principal criterio que se emplea es que la función $f(R)$ cumpla tanto con los requisitos analíticos necesarios (De Felice & Tsujikawa, 2010; Dolgov & Kawasaki, 2003; Hu W. et al., 2007; Soussa & Woodard, 2004), como físico-predictivos, es decir, que sean capaces de modelar tanto una cosmología consistente con los datos actuales (Amarguioui et al., 2006; Amendola et al., 2007a,b), como así también sean capaces de pasar los test de Sistema Solar con éxito (Chiba et al., 2007; Ericek et al., 2006; Flanagan, 2004; Jin et al., 2006; Multamäki & Vilja, 2006; Olmo, 2005). Esta última cuestión está muy bien estudiada y permitió descartar múltiples funciones $f(R)$, empleando también en este estudio la equivalencia entre teorías $f(R)$ con las teorías Brans-Dicke (Capone & Ruggiero, 2010; Faulkner et al., 2007); las cuales también han sido testeadas en el contexto de Sistema Solar, y se tienen cotas para parámetros de estas teorías, que permiten descartar a su equivalente teoría $f(R)$ si no cumple las cotas establecidas. Por ejemplo, las teorías $f(R)$ con potencial escalar nulo, son equivalentes a una teoría Brans-Dicke con parámetro BD $\omega_{BD} = 0$ (Chiba, 2003), las cuales están descartadas, ya que la cota observacional estimada a partir de los test del Sistema Solar para el parámetro de BD es de $\omega_{BD} \geq 4.10^4$

Posteriores análisis fueron posibles gracias a la equivalencia matemática descubierta entre las 2 representaciones de la teoría, planteada en el marco de Einstein o en el marco de Jordan. Se comprendió que hay teorías $f(R)$ que en el marco de Einstein son equivalentes a una teoría Brans-Dicke con potencial no nulo, en la que un campo escalar se acopla no-minimalmente a la materia (Dicke, 1962; Capozziello et al., 1997, 2010), en donde se observa que tienen la capacidad de adoptar un mecanismo de apantallamiento, análogo al comportamiento de los campos escalares camaleones a bajas escalas, y así pasar con éxito dichos test locales, mientras que muchas otras no tienen esta característica (que depende exclusivamente de la forma funcional de la $f(R)$) y por lo tanto son descartadas. Para llevar a cabo estos análisis se emplea también el formalismo de parámetros post-newtonianos (PPN), introducido por Nordtvedt, Thorne y Will (Will, 2018). Para una explicación mas profunda de este aspecto de la teoría, se puede recurrir a la tesis doctoral de C. Negrelli (Negrelli, 2019).

De los estudios anteriormente mencionados se desprenden las siguientes condiciones que las funciones $f(R)$ viables deben cumplir (Sotiriou & Faraoni, 2010; Hu W. et al., 2007; De Felice & Tsujikawa, 2010):

- Con el objetivo de que el modelo posea una constante cosmológica efectiva y sea de esa manera capaz de describir un universo en expansión, a su vez que garantiza que posean soluciones estables y excluir *ghost states*, la $f(R)$ debe cumplir:

$$f_R > 0, \quad \text{y} \quad f_{RR} > 0$$

ambas para $R > R_0$

Esto evita inestabilidades en regiones con altas densidades donde existe alta curvatura del ET.

- Para asegurar una correcta descripción por parte del modelo de una era dominada por materia, un periodo de expansión acelerada, no violar el principio de equivalencia y satisfacer condiciones de gravedad local, se debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$0 < \frac{Rf_{RR}}{f_R} < 1, \quad \text{en} \quad r = -\frac{Rf_R}{f} = -2$$

Con estas restricciones, las funciones viables $f(R)$ en general pueden ser expresadas de la forma:

$$f(R) = R - 2\Lambda.y(R, b)$$

de modo que la función $y(R, b)$ depende del escalar de Ricci y del que se denominará *parámetro de distorsión "b"*, y contendrá la información de como se diferencia la teoría $f(R)$ respecto a RG. El parámetro de distorsión cuantificará dicho apartamiento como se describirá en las próximas secciones. Entre las funciones $f(R)$ posibles, que cumplen todos los requisitos mencionados y por tanto son prometedoras, se encuentran las de Starobinsky (Starobinsky, 2007), Hu-Sawicki (Hu W. et al., 2007), Exponencial (Linder, 2009), Tanh (Tsujikawa, 2008), entre otras.

En el presente trabajo se empleará la función $f(R)$ de Starobinsky (Starobinsky, 2007), la cual brinda una teoría que supera hasta el momento con éxito todos los test de Sistema Solar requeridos, como así también cumple las condiciones analíticas necesarias y es capaz de describir un buen modelo cosmológico, desde la época de dominio de radiación hasta la época actual (Amendola et al., 2007a,b; Nunes et al., 2017; Perez & Sudarsky, 2019; Jaime et al., 2018; Sultana et al., 2019; Bessa et al., 2022).

2. Teorías $f(R)$

La función $f(R)$ de Starobinsky (Starobinsky, 2007) es de la forma:

$$f(R) = R + f_{ST}(R) = R - \lambda R_{ST} \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{R_{ST}^2} \right)^{-n} \right],$$

tal que $\lambda > 0$, R_{ST} y $n > 0$ los parámetros libres de la teoría.

Este modelo también puede escribirse de la siguiente forma, a través de un conveniente cambio de variables que permite una interpretación más clara de los parámetros libres expresados en función de parámetros cosmológicos H_0 y Ω_m , como se expone en varios trabajos tales como (Nunes et al., 2017; Leizerovich et al., 2022; Leizerovich, 2020) :

$$f(R) = R - 2\Lambda \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{\Lambda b} \right)^2 \right)^n} \right),$$

siendo $\Lambda = \lambda \frac{R_{ST}}{2}$ y $b = \frac{2}{\lambda}$

Tomando el límite $b \rightarrow 0$ se observa que la teoría tiende a Relatividad General, ya que la función $f(R) \rightarrow R - 2\Lambda$, siendo la misma un caso particular de la presente teoría. De esta manera, y en este caso, Λ será una constante cosmológica efectiva, que por ejemplo, en un universo dominado por materia, posee la misma expresión que en el Modelo Estándar

$$\Lambda = \Lambda(\Omega_m, H_0) = \frac{3H_0^2}{c^2}(1 - \Omega_m)$$

donde $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_{m,0}}{3H_0^2}$ es el parámetro de densidad asociado a la materia oscura más bariónica, en el presente; mientras que el *parámetro de distorsión* b cumple un rol fundamental, cuantificando el apartamiento de la presente teoría respecto a Relatividad General.

La condición de viabilidad para el modelo de Starobinsky no impone la restricción $b > 0$. A partir de la forma algebraica del modelo de Starobinsky, se deduce que, independientemente de los datos utilizados, el parámetro b exhibe una distribución simétrica alrededor de $b = 0$ en procedimientos de ajuste tipo MCMC. Dado que el interés reside en investigar desviaciones respecto al modelo Λ_{CDM} , respaldadas por los datos, se puede asumir $b > 0$ sin pérdida de generalidad (Ravi et al., 2023).

Para poder implementar este cambio de variables, se invirtieron las relaciones entre parámetros, presentadas en esta sección, obteniendo:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{2}{b} \\ R_{ST} = \frac{3H_0^2}{c^2}(1 - \Omega_m)b \end{cases}$$

Es importante aclarar que los valores actuales del parámetro de Hubble, y del parámetro de densidad, definidos en modelos $f(R)$, no son iguales a los valores H_0 y Ω_i del Modelo Cosmológico Estándar. Sin embargo están relacionados a partir de la densidad de materia (Hu W. et al., 2007):

$$\Omega_m H_0^2 = \Omega_m^{\Lambda_{CDM}} \left(H_0^{\Lambda_{CDM}} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} \rho_{m0} \quad (2.1)$$

Además, para el modelo Λ_{CDM} , se cumple:

$$\Omega_m^{\Lambda_{CDM}} + \Omega_\Lambda^{\Lambda_{CDM}} = 1 \quad (2.2)$$

$$\text{donde } \Omega_{\Lambda}^{\Lambda CDM} = \frac{\Lambda}{3(H_0^{\Lambda CDM})^2}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales planteado en esta tesis, y en artículos como (Leizerovich et al., 2022), está planteado en términos de $\Omega_m^{\Lambda CDM}$ y $H_0^{\Lambda CDM}$. Pero los resultados estadísticos finales serán reportados en función de los parámetros definidos en la teoría generalizada, a partir del cambio de variables recién expuesto. Estas expresiones también serán útiles al momento de plantear las condiciones iniciales.

2.4. Resolución del Sistema de Ecuaciones

Los análisis previos donde se estudió la expansión del universo para teorías $f(R)$ mostraron que resulta numéricamente más estable transformar el sistema de ecuaciones de segundo orden presentado por un conjunto de cuatro ecuaciones de primer orden. Con este propósito, en el trabajo (De La Cruz-Dombriz et al., 2016) se propuso el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R}, \quad y = \frac{c^2 f}{6H^2 f_R}, \quad v = \frac{c^2 R}{6H^2}, \quad \Omega = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2 f_R}.$$

De esta manera, la primera ecuación de Friedmann modificada puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3f_R} \left(8\pi G\rho_m + c^2 \frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR} \right) \\ 1 &= \frac{16\pi G\rho_m + c^2 Rf_R - c^2 f - 6H\dot{R}f_{RR}}{6H^2 f_R} \\ 1 &= \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2 f_R} + \frac{c^2 R}{6H^2} - \frac{\dot{R}f_{RR}}{Hf_R} - \frac{c^2 f}{6H^2 f_R} \end{aligned}$$

Se puede identificar cada uno de estos términos con alguna de las nuevas variables, obteniendo una ecuación constitutiva:

$$1 = \Omega + v - x - y$$

Por otro lado, la expresión del escalar de curvatura da lugar a una ecuación diferencial para el parámetro de Hubble en función de la variable v :

$$\begin{aligned} R &= \frac{6c^2}{2H^2 + \dot{H}} \\ \frac{\dot{H}}{H^2} &= 2 \frac{c^2 R}{6H^2} \\ \frac{\dot{H}}{H^2} &= 2 - v \\ \frac{dH}{dz} &= \frac{H}{z+1} (2 - v) \end{aligned}$$

Para encontrar el sistema de ecuaciones que rige la dinámica de las nuevas variables, se calcula la derivada en función del redshift de cada una. Esto da como resultado un conjunto de cuatro ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dz} &= \frac{1}{z+1}(-\Omega - 2v + x + 4y + xy + x^2) \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{-1}{z+1}[vx\Gamma - xy + 4y - 2yv] \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{-v}{z+1}(x\Gamma + 4 - 2v) \\ \frac{d\Omega}{dz} &= \frac{\Omega}{z+1}(-1 + 2v + x)\end{aligned}$$

Se especifica el modelo $f(R)$ que se estudia, que es análogo a especificar la forma funcional del parámetro $\Gamma = \frac{f_R}{Rf_{RR}}$ que aparece en el sistema de ecuaciones diferenciales. Una vez resuelto el sistema y habiendo obtenido las funciones $x(z)$, $y(z)$, $v(z)$, $\Omega(z)$, se obtiene el parámetro de Hubble $H(z)$ resolviendo la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{H_0}^{H(z)} \frac{dH'}{H'} &= \int_0^z \frac{dz'}{z'+1}(2-v) \\ \ln \left| \frac{H(z)}{H_0} \right| &= 2 \ln |z+1| - \int_0^z \frac{v}{z'+1} dz' \\ \ln \left| \frac{H(z)}{H_0} \right| &= \ln(z+1)^2 - F(z) \\ \frac{H(z)}{H_0} &= (z+1)^2 e^{-F(z)} \\ H(z) &= H_0(z+1)^2 e^{-F(z)}\end{aligned}$$

donde $F(z)$ se define como:

$$F(z) = \int_0^z \frac{v(z')}{z'+1} dz'.$$

En este trabajo se sustituyó la ecuación para el parámetro de Hubble por una ecuación diferencial adicional en el sistema de ecuaciones. Se define el escalar de Ricci reducido como $r = R/R^*$, donde R^* es una constante con las mismas unidades que el escalar de Ricci R . En el caso del modelo de Starobinsky, $R^* = R_{ST}$. La ecuación diferencial para la variable r se da por:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dz} &= \frac{1}{R^*} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dz} = \\ &= -\frac{1}{1+z} \frac{\dot{R}}{R^* H} = -\frac{1}{1+z} \frac{\dot{R} f_{RR}}{H f_R} \frac{f_R}{f_{RR} R} \frac{R}{R^*} \\ \frac{dr}{dz} &= \frac{-x\Gamma r}{1+z}\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtuvo el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = \frac{1}{z+1} (-\Omega - 2v + x + 4y + xv + x^2) \\ \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{z+1} [vx\Gamma - xy + 4y - 2yv] \\ \frac{dv}{dz} = -\frac{v}{z+1} (x\Gamma + 4 - 2v) \\ \frac{d\Omega}{dz} = \frac{\Omega}{z+1} (-1 + 2v + x) \\ \frac{dr}{dz} = -\frac{x\Gamma r}{z+1} \end{cases} \quad (2.3)$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones y obtenidas las funciones $x(z)$, $y(z)$, $v(z)$, $\Omega(z)$ y $r(z)$, es posible calcular el parámetro de Hubble $H(z)$ de forma inmediata a partir de la definición de v :

$$v = c^2 R / (6H^2)$$

$$H(z) = \eta \sqrt{\frac{r(z)}{v(z)}}$$

Aquí, η representa una constante independiente de z , definida como $\eta = c\sqrt{\frac{R_*}{6}}$. Al introducir la variable r y su respectiva ecuación diferencial, se logra una mayor robustez en el modelo, evitando así la necesidad de realizar integraciones numéricas adicionales para obtener $H(z)$.

La forma funcional explícita de Γ para el modelo de Starobinsky es:

$$\Gamma(r) = \frac{(r^2 + 1) [(r^2 + 1)^n (r^2 + 1) - n\lambda 2r]}{n\lambda 2r(2nr^2 + r^2 - 1)}$$

fijando n como un entero, que en el presente trabajo se asume el valor $n = 1$. Nuevamente se observa una única dependencia con la variable r . En el caso $n = 1$ se tiene:

$$\Gamma(r) = \frac{(r^2 + 1) [(r^2 + 1)^2 - \lambda 2r]}{\lambda 2r(3r^2 - 1)}$$

se observa que la función escala con órdenes superiores a r^2 generando que sea computacionalmente más costoso que si lo hiciera con dicho orden como en el caso Hu-Sawicki con $n_{HS} = 1$.

2.5. Condiciones Iniciales

En esta sección del capítulo se describen algunas de las características del modelo cosmológico elegido a analizar que nos permitirán brindar las condiciones iniciales necesarias para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales asociado. En el modelo Λ_{CDM} se sabe que existen distintas etapas de dominio por parte de las distintas especies; empezando por la era inflacionaria, pasando a la era de dominio de radiación, luego a la era de dominio de materia, y por último al dominio de la presunta energía oscura, volviéndose prácticamente nulas las contribuciones a la densidad total por parte de las especies no dominantes en cada época. Por lo tanto, es posible afirmar que la energía oscura cumple un rol despreciable en las épocas correspondientes a altos *redshifts*. Del mismo modo, la modificación a la gravedad será imperceptible a altos *redshifts*, es decir, la teoría tenderá a evolucionar de manera indistinguible al modelo Λ_{CDM} en tiempos tempranos, al igual que asumen diferentes autores

como (Nunes et al., 2017; D'Agostino et al., 2019, 2020) entre otros. Esta particularidad del modelo permite calcular las condiciones iniciales para el sistema de ecuaciones a partir de cálculos con el modelo ya conocido Λ_{CDM} . Las características recién mencionadas, se exigen a la teoría analíticamente del siguiente modo:

$$\lim_{R/R_0 \rightarrow \infty} f(R) = R - 2\Lambda$$

Por lo tanto, se estableció el criterio de condiciones iniciales que reproduzcan el modelo Λ_{CDM} para $R/R_0 \rightarrow \infty$, lo cual corresponde a $z \rightarrow \infty$. Se obtiene automáticamente que:

$$\lim_{R/R_0 \rightarrow \infty} f'(R) = 1 \quad \lim_{R/R_0 \rightarrow \infty} f''(R) = 0$$

En este trabajo se utilizó el superíndice (0) para referirse a una variable evaluada en la condición inicial. Por lo tanto, el parámetro de Hubble en la condición inicial es igual al del Modelo Estándar, que a continuación se designa como H_Λ :

$$H^0(z^{(0)}) = H_\Lambda(z^{(0)})$$

También es posible deducir el valor del escalar de Ricci para la condición inicial:

$$R = \frac{6}{c^2}(2H^2 + \dot{H}) = \frac{6H}{c^2} [2H - (1+z)H'],$$

donde $H' = \frac{dH}{dz}$.

Luego, se obtiene el valor de $R^{(0)}$:

$$R^{(0)} = \frac{6H_\Lambda(z^{(0)})}{c^2} [2H_\Lambda(z^{(0)}) - (1+z^{(0)})H'_\Lambda(z^{(0)})]$$

De este modo las condiciones iniciales para las nuevas variables del sistema dinámico están dadas por:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\dot{R}f_{RR}(R^{(0)})}{H_\Lambda(z^{(0)})f_R(R^{(0)})} = \frac{-(z^{(0)}+1)R'^{(0)}H_\Lambda(z^{(0)})f_{RR}(R^{(0)})}{H_\Lambda(z^{(0)})f_R(R^{(0)})} \\ y_0 &= \frac{c^2 f(R^{(0)})}{6H_\Lambda^2(z^{(0)})f_R(R^{(0)})} \\ v_0 &= \frac{c^2 R^{(0)}}{6H_\Lambda^2(z^{(0)})} \\ \Omega_0 &= 1 - v_0 + x_0 + y_0 \\ r_0 &= \frac{R^{(0)}}{R^*} \end{aligned}$$

siendo $R' = \frac{dR}{dz}$.

En este punto se debe elegir pertinentemente el valor del *redshift* inicial ($z^{(0)}$) de integración. Se debe buscar un equilibrio entre la reducción del costo computacional, lo cual se logra asignando un $z^{(0)}$ lo mas bajo posible, asumiendo el modelo Λ_{CDM} desde dicho valor, hasta $z^{(0)} \rightarrow \infty$, aprovechando su comportamiento indistinguible respecto del modelo alternativo en *redshifts* altos. Pero dicho $z^{(0)}$ no debe ser tan pequeño como para inducir problemas de convergencia en la integración numérica, como se observo al tomar *redshift* inicial demasiado bajo, como ser $z^{(0)} = 5$, donde la aproximación deja de ser buena, y modelo cosmológico

con $f(R)$ tiene mayor discrepancia con respecto al modelo Λ_{CDM} . Esto induce errores en el estudio. Se indagó también en el error inducido por la omisión de la ecuación asociada a la radiación en el sistema de ecuaciones (2.3), ya que si bien la densidad de radiación decae rápidamente luego de la época de recombinación ($z = 1100$ aproximadamente), la inclusión de los datos de la compilación *Pantheon*⁽⁺⁾ modificó notablemente los resultados del análisis estadístico, estimando mayores valores para el *parámetro de distorsión* b , y como bien se reporta en (Ravi et al., 2023), donde se presenta una expresión para el cálculo de la condición inicial ($z^{(0)}$) adecuada, se ve que mayores valores de b requieren un mayor valor de $z^{(0)}$ para no introducir errores considerables. Este hecho motivó a realizar un análisis de como varían las soluciones a partir de variaciones en las condiciones iniciales. Para ello se estimó la diferencia porcentual entre el modelo alternativo considerando modelo Λ_{CDM} entre ($z^{(0)}, \infty$) con $z^{(0)} = 80$ por un lado y $z^{(0)} = 10$ por el otro. Al mismo tiempo, se empleo el caso más desfavorable de parámetros libres, es decir, el set que mayor discrepancia provoca entre el modelo cosmológico alternativo y el modelo Λ_{CDM} , como por ejemplo ($\Omega_m = 0.1$, $b = 5$, $H_0 = 70$. y $M_{\text{abs}} = -19$.). Se fue variando el *redshift* inicial del segundo modelo, manteniendo al primero siempre con $z^{(0)} = 80$ y calculando la diferencia porcentual en cada caso. Se llego a la conclusión de que, empleando un $z^{(0)} = 15$, y despreciando la ecuación diferencial asociada radiación, el error es menor al 2%, $z^{(0)}$ que además es mayor al *redshift* de todos los observables empleados y abarca ampliamente toda la era de dominio de constante cosmológica.

Se puede ver también el trabajo de Basilakos et al. (2013), donde se fijó un *redshift* inicial adecuado en $z^{(0)} = 30$.

2.6. Aproximación para $b \rightarrow 0$

Por último, en la siguiente sección se detallará la manera de obtener una estimación de $H(z)$ para los casos donde b es pequeño. Existe un especial interés en el valor del parámetro b , que indica cuánto se aparta la teoría $f(R)$ con respecto a la Relatividad General. Es importante notar que cuando b tiende a cero, el costo computacional se incrementa notablemente, ya que en ese caso $f_{RR} \rightarrow 0$ y esto implica $\Gamma = \frac{f_R}{Rf_{RR}} \rightarrow \infty$. Para evitar este problema, se utiliza la propuesta publicada en (Basilakos et al., 2013), en donde se estudiaron los casos problemáticos asociados a los parámetros libres, y para dichos casos proponen una aproximación analítica mediante el desarrollo en serie alrededor de la solución cosmológica del modelo Λ_{CDM} ($b = 0$). Esta técnica también ha sido utilizada en otros trabajos como (Nunes et al., 2017; D'Agostino et al., 2019, 2020; Leizerovich et al., 2022).

El procedimiento es el siguiente: Si se define el número de e-folds del *redshift* como $N = -\log(1 + z)$, se puede escribir el parámetro de Hubble del modelo Λ_{CDM} en función de N como:

$$H_{\Lambda}^2(N) = H_0^2[\Omega e^{-3N} + (1 - \Omega_m)],$$

Un desarrollo en serie alrededor del mismo estará dado por:

$$H^2(N) = H_{\Lambda}^2(N) + \sum_{i=1}^M b_i \delta H_i^2(N), \quad (2.4)$$

donde N es la cantidad de términos que se utilizaron para la expansión. Para el modelo de Starobinsky con $n = 1$ propuesto a estudiar en esta tesis, es posible obtener un error menor del 0.001 % en $H(z)$ para todos los *redshifts* en el rango $b \in [0.001, 0.5]$ ⁽ⁱ⁾, conservando

⁽ⁱ⁾ Este análisis se encuentra desarrollado en la tesis del Lic. Leizerovich (Leizerovich, 2020)

únicamente los primeros dos términos no nulos de la expansión. Por lo tanto se empleará la siguiente expresión dentro de dicho rango y por fuera de él se resolverán numéricamente las ecuaciones (2.3) descritas en la sección 2.4:

$$H_{ST}^2(N) = H_\Lambda^2(N) + b^2 \delta H_2^2(N) + b^4 \delta H_4^2(N) + O(\text{sup}).$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo δH_i^2 se procede de la siguiente manera. En primer lugar, se reescribe la primera ecuación de Friedmann modificada en función de la variable N :

$$-f_R H^2(N) + H_0^2 \Omega_m e^{-3N} + \frac{c^2}{6} (f_R R - f) - f_{RR} H^2(N) R'(N) = 0, \quad (2.5)$$

donde $R'(N) = \frac{dR}{dN}$. Luego, se reemplaza la solución general (2.4) en la ecuación (2.5) y se agrupan los términos que se encuentran al mismo orden en b . De esta manera, al igualar los términos independientes a cero, se pueden despejar los coeficientes $\delta H_j^2(N)$ para cada b_j . Los valores de los coeficientes para el modelo de Starobinsky con $n = 1$ se encuentran en (Basilakos et al., 2013).

Capítulo 3

Datos observables

En el presente capítulo se presentan y describen brevemente los datos observables utilizados en la tesis para el análisis estadístico que nos permitirá determinar el espacio de parámetros libres de la teoría a estudiar.

3.1. Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)

Las Oscilaciones Acústicas de Bariones son una predicción del Modelo Cosmológico Estándar. Antes del desacople de la radiación con la materia bariónica, es decir, previo a que el universo cumpla 370 mil años y que sea emitido el Fondo Cósmico de Radiación, existía el denominado plasma fotón-barión. Esto es, un plasma que permeaba todo el universo, formado por partículas del Modelo Estándar de Partículas, principalmente núcleos de He, Li, y Be, producidos en la nucleosíntesis primordial, fotones, electrones libres, y por supuesto H^+ (protones). Tanto los núcleos como los electrones libres estaban fuertemente acoplados a los fotones, sufriendo constantemente procesos de *scattering*. Por supuesto, estaba presente también la materia oscura, interactuando sólo gravitacionalmente con las partículas del plasma. Este último en los primeros instantes luego de inflación, podría haber estado distribuido por todo el universo de manera perfectamente homogénea, pero a medida que el universo se expandía (en ese momento dominado por la radiación), el radio comóvil de Hubble creció, y comenzaron a ingresar al horizonte determinado por el mismo, las perturbaciones primordiales, asociadas a distintas escalas, producidas por fluctuaciones cuánticas del campo inflatón mucho tiempo antes, y que hasta ese momento habían permanecido “congeladas” fuera del horizonte. Dichas perturbaciones produjeron inhomogeneidades y sobre-densidades en el plasma, sembrando las primeras semillas para la formación de estructura del universo. Es a partir de ese momento, cuando dichas sobre-densidades tienden a crecer, por la misma gravedad, y se comienza a aglomerar en distintas regiones, tanto materia bariónica, como oscura. Pero, en un momento, la sobre-densidad crece lo suficiente, y con ella también la presión de radiación, que tiende a disipar dicha sobre-densidad, para luego repetir el ciclo, formando así las famosas Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO). Las BAO se ven reflejadas tanto en el espectro angular de potencias de los fotones que conforman el FCR, como en el espectro de potencias asociado a la estructura a gran escala del universo. Esto se debe, a que en el proceso en que la radiación, como bien se mencionó, se desacopló de la materia bariónica, el proceso de oscilación se detuvo, y las sobre densidades de ese instante quedaron “congeladas”, imprimiendo una escala característica que detectamos en la estructura de galaxias y podemos usar como regla estándar para la estimación de distancias. Esta escala característica se percibe en la distribución de galaxias en la época actual ya que la probabilidad de encontrar dos galaxias separadas por la distancia característica de las Oscilaciones Acústicas de Bariones es mayor

3. Datos observables

que la de encontrar dos galaxias a otras distancias diferentes, es decir, se espera observar un pico en la función de correlación espacial de galaxias como se puede ver en la figura 1.2.

La distancia al horizonte de sonido r_d está dada en por:

$$r_d = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c_s(z')}{H(z')} dz'$$

donde z_{drag} es el *redshift* correspondiente al desacople de la materia bariónica de los fotones y la velocidad del sonido en ese período se define como

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_r}\right)}},$$

siendo ρ_r y ρ_b las densidades de radiación y materia bariónica respectivamente.

Para modelos que se comportan como Λ_{CDM} en el momento del desacople de los bariones, como es el caso del modelo de Starobinsky (Amendola et al., 2007a,b), se tiene que:

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left(1 + \bar{R}_b(1+z)^{-1}\right)}},$$

siendo $\bar{R}_b = 31500 \times \Omega_b h^2 \left(\frac{T_{\text{CMB}}}{2.7\text{K}}\right)^{-4}$ y $T_{\text{CMB}} = 2.726\text{K}$

Se observa de la expresión para r_d que su cálculo requiere evaluar la función de Hubble del modelo en cuestión, en el intervalo de *redshifts* dado por los límites de integración. Pero justamente, por los valores de *redshift* involucrados en el cálculo, y teniendo en cuenta lo previamente expuesto en cuanto al comportamiento indistinguible de los modelos $f(R)$ con respecto a Λ_{CDM} en el universo temprano (altos *redshift*, $z \rightarrow \infty$), se puede emplear en dicha expresión la función de Hubble correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar, sin inducir error y evitando de esa manera la costosa integración de las ecuaciones de gravedad generalizada. Por esta razón dicho cálculo dependerá sólo de los parámetros (Ω_m, H_0) , y se elimina la dependencia con el parámetro de distorsión b . Se puede escribir del siguiente modo:

$$r_d = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c}{H_{\Lambda}(z') \sqrt{3(1 + \bar{R}_b(1+z')^{-1})}} dz'$$

utilizando la siguiente *fitting* formula para z_{drag} (Eisenstein et al., 1998):

$$z_{\text{drag}} = \frac{1291(\Omega_m h^2)^{0.251}}{1 + 0.659(\Omega_m h^2)^{0.828}} [1 + b_1(\Omega_b h^2)^{b_2}]$$

donde $b_1 = 0.313(\Omega_m h^2)^{-0.419}[1 + 0.607(\Omega_m h^2)^{0.6748}]$ y $b_2 = 0.238(\Omega_m h^2)^{0.223}$.

Dados los fundamentos esbozados anteriormente, esta expresión para z_{drag} puede ser utilizada para estudiar modelos $f(R)$ a pesar de haber sido desarrollada originalmente para el Modelo Cosmológico Estándar (Bernal et al., 2020).

Llegados a este punto, se definen indicadores de distancias útiles con fines de emplear las BAO en nuestro trabajo:

- **Distancia Luminosa:** Muy útiles para emplear candelas estándar luminosas como son por ejemplo las supernovas Ia:

$$D_L(z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}$$

con L la luminosidad intrínseca del objeto y S el flujo asociado. Si se asume un universo espacialmente plano descrito por la métrica FLRW, puede expresarse como:

$$D_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}$$

- **Distancia de Hubble:**

$$D_H(z) = \frac{c}{H(z)}$$

- **Distancia Angular:**

$$D_A(z) = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}$$

- **Distancia Angular Comóvil:**

$$D_M(z) = (1+z)D_A(z)$$

- **Comovil volume average angular diameter distance:**

$$D_V(z) = \left[(1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Es importante notar que todas dependen de la forma funcional de $H(z)$, siendo de utilidad para contrastar modelos de gravedad generalizada. En esta tesis se utilizaron distintas cartografías de galaxias, como por ejemplo el Sloan Digital Sky Survey, que midió las funciones de correlación entre las mismas. De esta forma, es posible calcular las cantidades observacionales que se definieron anteriormente. Los datos observacionales que se utilizan en este trabajo se encuentran en la tabla 3.1. El valor de la distancia al horizonte fiducial r_{fid} es un valor reportado por cada colaboración. Para calcularlo, se utiliza la expresión expuesta anteriormente asumiendo el modelo Λ_{CDM} y fijando los parámetros cosmológicos en valores particulares dados en cada publicación.

3. Datos observables

z_{ef}	dato observable	tipo de observable	Referencia
0.15	4.473 ± 0.159	D_V/r_d	(Ross et al, 2015)
0.44	11.548 ± 0.559	D_V/r_d	(Kazin et al, 2014)
0.6	14.946 ± 0.680		
0.73	16.931 ± 0.579		
1.52	26.005 ± 0.995	D_V/r_d	(Ata et al., 2018)
0.81	10.75 ± 0.43	D_A/r_d	(Abbott et al., 2019)
0.38	$10.272 \pm 0.135 \pm 0.074$	D_M/r_d	(Alam et al, 2017)
0.51	$13.378 \pm 0.156 \pm 0.095$		
0.61	$15.449 \pm 0.189 \pm 0.108$		
0.698	17.65 ± 0.3	D_M/r_d	(Gil-Marín et al., 2020)
1.48	30.21 ± 0.79	D_M/r_d	(Neveux et al., 2020)
2.3	37.77 ± 2.13	D_M/r_d	(Bautista et al., 2017)
2.4	36.6 ± 1.2	D_M/r_d	(du Mas des Bourboux et al., 2020)
0.698	19.77 ± 0.47	D_H/r_d	(Gil-Marín et al., 2020)
1.48	13.23 ± 0.47	D_H/r_d	(Neveux et al., 2020)
2.3	9.07 ± 0.31	D_H/r_d	(Bautista et al., 2017)
2.4	8.94 ± 0.22	D_H/r_d	(du Mas des Bourboux et al., 2020)
0.38	$12044.07 \pm 251.226 \pm 133.002$	$Hr_d[km/s]$	(Alam et al, 2017)
0.51	$13374.09 \pm 251.226 \pm 147.78$		
0.61	$14378.994 \pm 266.004 \pm 162.558$		

Tabla 3.1. Distancias vinculadas a las mediciones de BAO a partir de diferentes observaciones. La tabla muestra los *redshifts* de las mediciones, el valor medio y la desviación estándar de los observables, así como la correspondiente referencia. Tabla que recopila datos de BAOs extraída de (Leizerovich et al., 2022).

3.2. Cronómetros Cósmicos (CC)

Existe un método para obtener mediciones directas de la tasa de expansión del universo $H(z)$ propuesto por Jimenez & Loeb (2002) utilizando la edad relativa de galaxias con *redshift* similar. Básicamente, se obtiene una aproximación de $H(z)$, estimando dz/dt por medio de los corrimientos al rojo conocidos de las galaxias y sus edades, mediante la siguiente expresión:

$$H(z) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \approx \frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Es posible estimar la función de Hubble $H(z)$ aproximadamente a partir de Δz y Δt conocidos. Éstos pueden obtenerse a partir de 2 galaxias separadas un Δz conocido mediante espectroscopía, que poseen una diferencia de edad Δt también susceptible de aproximarse partir de las poblaciones estelares que las conforman, asumiendo las teorías de evolución estelar conocidas. De ese modo, estudiando galaxias que cumplan ciertas características de confianza, es posible conseguir una función de Hubble a ese *redshift* de manera totalmente independiente del modelo cosmológico. En general se considera que los mejores Cronómetros Cósmicos los constituyen galaxias que han evolucionado pasivamente durante un período temporal mayor que la diferencia de edad entre ellas. En base a estudios observacionales, se ha establecido que estas galaxias son masivas y han formado la mayor parte ($> 90\%$) de su masa estelar rápidamente ($0.1 - 0.3Gyr$), a un *redshift* típicamente alto ($z > 2 - 3$) y no han experimentado ningún gran episodio de formación estelar desde entonces.

Gracias a estas características, al observarlas en tiempos cósmicos posteriores a su etapa

z	$H(z)$ [km/s Mpc ⁻¹]	Referencia
0,09	69 ± 12	(Simon et al., 2005)
0,17	83 ± 8	
0,27	77 ± 14	
0,4	95 ± 17	
0,9	117 ± 23	
1,3	168 ± 17	
1,43	177 ± 18	
1,53	140 ± 14	
1,75	202 ± 40	
0,48	97 ± 62	(Stern et al., 2010)
0,88	90 ± 40	
0,1791	75 ± 4	(Moresco et al., 2012)
0,1993	75 ± 5	
0,3519	83 ± 14	
0,5929	104 ± 13	
0,6797	92 ± 8	
0,7812	105 ± 12	
0,8754	125 ± 17	
1,037	154 ± 20	
0,07	69 ± 19,6	(Zhang et al., 2014)
0,12	68,6 ± 26,2	
0,2	72,9 ± 29,6	
0,28	88,8 ± 36,6	
1,363	160 ± 33,6	(Moresco, 2015)
1,965	186,5 ± 50,4	
0,3802	83 ± 13,5	(Moresco et al., 2016)
0,4004	77 ± 10,2	
0,4247	87,1 ± 11,2	
0,4497	92,8 ± 12,9	
0,4783	80,9 ± 9	
0,35	82,1 ± 4,85	(Chuang et al., 2012)
0,75	98,8 ± 33,6	(Borghi et al., 2022)

Tabla 3.2. Datos observacionales del parámetro de Hubble a partir de la técnica de Cronómetros C3smicos. La tabla muestra el *redshift* de la medici3n, el valor medio y la desviaci3n estandar de $H(z)$ y la correspondiente referencia.

de formaci3n, la evoluci3n de sus estrellas puede utilizarse como un reloj sincronizado con la evoluci3n del tiempo c3smico. A partir de analizar las propiedades caracteristicas de galaxias elipticas y masivas, se determinan sus edades. Suponiendo que las galaxias del mismo tipo se formaron aproximadamente al mismo tiempo cosmol3gico, la diferencia de edades es igual a la diferencia en la edad del universo entre los dos *redshifts*: $\Delta t(z) = t(z + \Delta z) - t(z)$. Consecuentemente, con estas cantidades, se puede aproximar el parámetro de Hubble como se expreso al inicio de esta explicaci3n. La principal ventaja de utilizar galaxias pasivas para la cronometría c3smica es que su formaci3n es tan temprana que prácticamente no hay lugar para el sesgo de la historia de la formaci3n estelar. En la tabla 3.2 están reportados todos los datos utilizados y sus correspondientes referencias. A los observables comunmente utilizados, se ańado un nuevo dato publicado por Borghi y colaboradores (Borghi et al., 2022).

3.3. Supernovas Ia (SnIa)

Dentro de las denominadas “variables cataclísmicas” existen unas particularmente energéticas, las Supernovas tipo Ia, lo que permite observarlas a grandes distancias de hasta $z \sim 4$.

Su origen radica, de acuerdo a los modelos más aceptados, en un sistema binario formado por una gigante roja y una enana blanca. La conformación de estos sistemas es altamente probable en el universo dado que el 60% de las estrellas que se observan forman parte de un sistema binario y que a su vez, el 75% de las estrellas del universo son de baja masa y el 20% son de masa intermedia. Es decir, el 95% de las estrellas culminan su evolución como una enana blanca. Este tipo de supernovas son de las más brillantes permitiendo realizar un muy buen estudio de la expansión tardía del universo.

Al producirse un fenómeno de acreción de material a través del punto $L1$ de Lagrange, cuando la gigante roja llena su lóbulo de Roche, el traspaso de material provoca que la enana blanca supere el límite de Chandrasekhar y explote luego de una quema nuclear descontrolada de material. A causa de las similares características de todas las enanas blancas existentes, todas las explosiones serán también, muy similares, brindando la posibilidad de utilizarlas como candelas estándar. Tienen un pico de brillo máximo en el momento de explosión que es aproximadamente, y siempre, de una magnitud absoluta de $M_{abs} \sim -19$ (Phillips, 1993). A partir de este análisis se plantea el módulo de distancia, asumiendo que la magnitud absoluta es aproximadamente constante. Se considera *aproximadamente* porque los modelos siempre son aproximaciones a la realidad, siempre más compleja. La magnitud absoluta de la supernova terminará teniendo pequeñas diferencias con respecto a otras por diferencias en su composición sistémica astrofísica, como así también será susceptible al valor de H_0 y, en mucho menor grado, a variaciones de acuerdo al modelo cosmológico considerado. Por lo tanto, para este trabajo se decidió dejar a la magnitud absoluta como un parámetro libre, que se ajustará de acuerdo a la concordancia con los datos observables que se utilizarán, pero incluyendo un *prior* gaussiano ($M_{abs} = -19.2435 \pm 0.0373$) cuya finalidad es considerar la calibración de H_0 que se obtiene mediante las mediciones locales más actuales (Riess et al., 2016) Este enfoque se encuentra propuesto en (Camarena & Marra, 2021) y evita varias cuestiones como la doble contabilización de supernovas de bajo *redshift*; y la asunción de un valor del parámetro de desaceleración, tomando un intervalo de M_{abs} que se encuentra restringido por la calibración local de SnIa.

En el presente trabajo se emplean los datos de supernovas Ia, en primera instancia de la compilación “Pantheon” (Scolnic et al., 2016, 2018), que está conformada por datos de 1048 supernovas Ia ubicadas entre redshifts $0.01 < z < 2.2$, como se detalla en la tabla 3.3, la cual es ideal ya que abarca justamente la época del universo dominada por “*Constante Cosmológica*”.

Recientemente, se pusieron a disposición también los nuevos datos de la denominada compilación “*Pantheon*⁽⁺⁾” (Scolnic et al., 2022) en la que se añaden 502 datos nuevos a la compilación anterior, quedando esta nueva compilación con un total de 1550 datos de supernovas tipo Ia, abarcando un intervalo de *redshifts* de entre $0.00122 \leq z_{HD} \leq 2.26137$, siendo z_{HD} el *redshift en diagrama de Hubble*⁽ⁱ⁾

Debido a la relación entre la distancia luminosa y la función de Hubble resulta de gran interés el uso de este tipo de observaciones para testear modelos cosmológicos. La expresión del módulo de distancia, ampliamente conocida en el campo de la astronomía, es la siguiente:

⁽ⁱ⁾ Además durante el transcurso de esta tesis se publicaron los datos de *Pantheon*⁽⁺⁾ calibrados con los datos provistos por la colaboración SH0ES (Broun et al., 2022) (compilación *Pantheon*⁽⁺⁾ + SH0ES). Para este nuevo conjunto de datos en especial ya no sería necesario utilizar la propuesta de Camarena & Marra (Camarena & Marra, 2021)

$$\mu = \tilde{m}_b - \tilde{M}_{\text{abs}} = 25 + \log_{10}(D_L(z))$$

donde μ representa al módulo de distancia y $D_L(z)$ a la distancia luminosa en función del *redshift* z .

También es posible expresarla en función de la función de Hubble del siguiente modo:

$$\tilde{m}_b - \tilde{M}_{\text{abs}} = 25 + \log_{10} \left((1+z) \int_0^z \frac{c}{H(z')} dz' \right)$$

Como las SnIa constituyeron la principal herramienta para el estudio de la era de “*Energía Oscura*”, se han realizado esfuerzos por adquirir muestras cada vez más grandes y tener métodos cada vez más precisos de estandarización de sus curvas de luz, como se puede ver en la figura 3.1, para una precisa estimación de la distancia, proponiendo expresiones para el módulo de distancia con 3 parámetros libres como expone (Tripp, 1998), asociados a la amplitud, el color y el ancho de la curva. En la actualidad se suele emplear la siguiente expresión:

$$\mu = m_B - M_{\text{abs}} + \alpha x_1 + \beta c + \Delta M + \Delta B$$

la cual es una versión modificada de la fórmula de Tripp (Tripp, 1998), en la que se tienen en cuenta otros términos relevantes como; ΔM , relacionado con una corrección asociada a la masa de la galaxia que habita la supernova; y ΔB , que está vinculado con sesgos predichos a partir de simulaciones de 500000 supernovas Ia. Por último, α y β son los denominados *parámetros nuisance* que representan la relación entre la luminosidad del objeto x_1 y la forma de la curva de luz y el color c . M_{abs} es la magnitud absoluta de referencia con $x_1 = 0$ y $c = 0$. Se ha encontrado una correlación entre la luminosidad de la SnIa y la masa, edad, metalicidad y tasa de formación estelar de la galaxia donde se aloja. Posteriores estudios demostraron que de ellas, la correlación con la masa es la más importante y única tenida en cuenta por la compilación Pantheon, pudiendo despreciar las restantes sin introducir error considerable.

Es importante aclarar que en el presente trabajo los *parámetros nuisance* han sido fijados a los valores constantes reportados por (Scolnic et al., 2018), en donde se asume Modelo Cosmológico Estándar, ya que numerosos trabajos previos (incluyendo también a aquellos donde se estudian teorías de gravedad modificada) llegaron de manera independiente a la conclusión que es una buena aproximación dado que los valores reportados para dichos parámetros son siempre consistentes. (Negrelli et al., 2020; Leizerovich et al., 2022).

También es importante notar que existe una degeneración entre los valores que pueden tomar los parámetros libres H_0 y M_{abs} , debido a la dependencia lineal de $H(z)$ con H_0 . Este efecto se denomina *residuo de Hubble*, y para evitar esta degeneración, es necesario fijar uno de los parámetros, para poder estimar el otro, o de otro modo, complementar las observaciones de supernovas con otros observables además del uso de la marginalización propuesta por Camarena & Marra (2021) o la calibración dada por SH0ES (Brout et al., 2022). En este tesis, se optó por la segunda opción.

3. Datos observables

Muestra	Número de Sn Ia	z (media)
CSP	60	0.024
CfA3	78	0.031
CfA4	41	0.031
CfA1	9	0.024
CfA2	18	0.021
SDSS	335	0.202
PS1	279	0.292
SNLS	236	0.640
SCP	3	1.092
GOODS	15	1.120
CANDELS	6	1.732
CLASH	2	1.555

Tabla 3.3. Catálogo de Supernovas tipo Ia que conforman la compilación Pantheon (Scolnic et al., 2018). Se detalla el número de supernovas y el promedio del *redshift* de cada muestra.

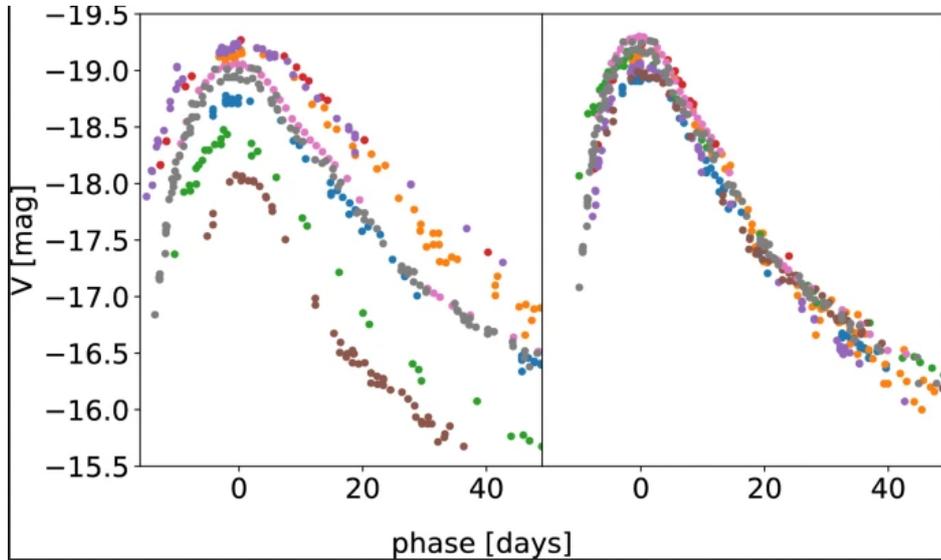


Figura 3.1. Ilustración de la estandarización de Curvas de luz de supernovas tipo Ia. El panel izquierdo muestra un conjunto de curvas de luz de SnIa cercanas, en magnitud absoluta V, corregidas por extinción. El panel derecho muestra dichas curvas estandarizadas empleando el *stretch factor* asociado a la relación entre el tiempo de evolución de la curva y la luminosidad. Imagen extraída de Cappellaro (2022).

3.4. Núcleos Activos de Galaxias (AGNs)

Los cuásares son los objetos persistentes más luminosos del universo, con luminosidades integradas de $10^{44} - 10^{48} \text{ erg s}^{-1}$ en el rango de energía del ultravioleta (UV) hasta los rayos X. La emisión de UV se interpreta como la radiación producida por el material que fluye hacia el agujero negro supermasivo, ubicado en el centro de una galaxia, en forma de un disco de acreción, y representa aproximadamente el 90% de la contribución bolométrica del cuásar (Shakura & Sunyaev, 1973). El resto se libera como rayos X, que se cree que se originan en un plasma caliente de electrones relativistas (Svensson & Zdziarski, 1994), llamado corona por analogía con el Sol, que por scattering de Compton dispersa fotones provenientes del disco.

En el último tiempo se ha propuesto la implementación de estos objetos como candelas estándar (Watson et al., 2011; La Franca et al., 2014; Solomon & Stojkovic, 2022; Lusso et al., 2020; Risaliti & Lusso, 2015, 2019), a raíz de que se identificó una relación aparentemente no lineal entre las emisiones de UV y rayos X de los cúasares, conocida como la relación Risaliti–Lusso (RL).

Sin embargo, se desconoce cómo se transfiere parte de la energía gravitatoria del disco a la corona, evitando su enfriamiento rápido a través de la producción de fotones de rayos X a través del proceso Compton inverso. La técnica que utiliza los cúasares como sondas cosmológicas se basa en la relación no lineal mencionada anteriormente para proporcionar una medición independiente de sus distancias, convirtiendo así los cúasares en candelas estandarizables y extendiendo el diagrama de módulo de distancia-corrimiento al rojo (o el llamado diagrama Hubble-Lemaître) de las supernovas Ia a un rango de *redshift* que aún está poco explorado ($z > 2$); en particular este trabajo se enfoca en la propuesta expuesta en (Risaliti & Lusso, 2015).

La relación no lineal entre L_X y L_{UV} está dada por:

$$\log(L_X) = \beta_1 + \gamma \log(L_{UV}) \quad (3.1)$$

en donde se consideran emisiones UV (en el marco de referencia en reposo a 2500 Å, L_{UV}) y de rayos X (en el marco de referencia en reposo a 2 keV, L_X) (Tananbaum et al., 1979; Zamorani et al., 1981; Avni & Tananbaum, 1982). Las constantes γ y β_1 se determinan con datos observacionales y deben ser independientes del *redshift* para asegurar la robustez del método (Risaliti & Lusso, 2015, 2019; Lusso et al., 2020). Esto se debe a que existe una fuerte correlación entre estos parámetros y las distancias cosmológicas, por ende a fin de testear modelos cosmológicos, es necesario haber calibrado γ y β_1 previamente con otros datos cosmológicamente independientes como las SnIa (Lusso et al., 2020)⁽ⁱ⁾.

Dado que el uso de esta relación RL como candela estándar es muy reciente, existen ciertas tensiones en la comunidad sobre su función. Ciertos autores (Khadka & Ratra, 2021b; Luongo et al., 2022; Cao et al., 2022) afirman que algunas de las submuestras de la compilación de datos proporcionado en (Lusso et al., 2020) no son estandarizables ya que no son modelo (cosmológico) independientes y/o evolucionan con el corrimiento al rojo. Sin embargo, en el estudio realizado por (Khadka & Ratra, 2021b; Luongo et al., 2022) existen varias cuestiones a tener en cuenta; a) no hay una calibración previa con datos de observacionales independientes; b) las mayores diferencias en los valores de γ y β ⁽ⁱⁱ⁾ que se reportan en estos artículos, son para modelos con diferentes geometrías (planas y no planas), y en este caso se está analizando un modelo $f(R)$ plano; c) se estiman los parámetros Ω_m y H_0 al mismo tiempo y esto no es recomendable de realizar utilizando solo datos de las distancias luminosas. Por otra parte, los autores de (Dainotti et al., 2022) demostraron que la relación RL no se encuentra influenciada por sesgos de selección ni por una evolución con el *redshift*, pero sí lo está intrínsecaente por la física de los cúasares en sí. Además, en la publicación (Signorini et al., 2023) se verifica la relación RL como candela estándar utilizando datos de rayos UV y X espectroscópicos en lugar fotométricos; siendo muchos más precisos que los comunmente empleados sobretodo para el caso de los rayos UV.

Por lo expuesto anteriormente, para este estudio se decidió seguir los pasos de (Leizerovich et al., 2022) y utilizar el método de calibración para γ y β propuesto por Li et al. (Li et al., 2021) donde, a partir de un proceso de regresión gaussiano utilizando observaciones de de

⁽ⁱ⁾Lamentablemente, hasta el momento no se conocen otras candelas estándar con las cuales calibrar con z superiores a $\sim 1,5$

⁽ⁱⁱ⁾ γ y β son los parámetros libres se la relación Risaliti y Lusso cuando se la expresa en función de sus flujos. β se encuentra relacionado con β_1 de la expresión original.

3. Datos observables

SnIa, reconstruyen la historia de expansión del Universo ⁽ⁱⁱⁱ⁾.

La ecuación (3.1) puede ser expresada en función de los flujos en UV y rayos X del siguiente modo:

$$\log(F_X) = \gamma(\log(F_{UV}) + 2(\gamma - 1) \log(D_L H_0) + \beta \quad (3.2)$$

siendo D_L la distancia luminosa, β y γ parámetros libres ^(iv). Existe la siguiente relación entre los parámetros libres de la ecuación (3.1) y los de (3.2):

$$\beta = \beta_1 + (\gamma - 1) \log(4\pi) - 2(\gamma - 1) \log(D_L H_0)$$

Las cantidades en esta última expresión se determinan de diferente forma, en particular $D_L H_0$ se obtiene a través del método de regresión gaussiano mencionado anteriormente (Li et al., 2021), mientras que la cantidad F_X se estima usando mediciones del flujo F_{UV} de los cuásares en cuestión, empleando la ecuación (3.2). En (Li et al., 2021) se reportan valores para γ y β , de 0.648 ± 0.007 , 7.730 ± 0.244 respectivamente ^(v), y la expresión de la Likelihood está dada por:

$$\ln(\mathcal{L}) = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{[\log(D_L H_0(\theta))_i^{TH} - \log(D_L H_0)_i^{AGN}]^2}{\sigma_{\log(D_L H_0)}^2} \quad (3.3)$$

donde $\theta = (\Omega_m, H_0, b)$, $\log(D_L H_0(\theta))^{TH}$ es la predicción teórica de la distancia luminosa, y $\log(D_L H_0)^{AGN}$ es calculada a partir de la ecuación (3.2) y siendo:

$$\sigma_{\log(D_L H_0)}^2 = \frac{\sigma_{F_X}^2 + \gamma^2 \sigma_{F_{UV}}^2 + \sigma_\beta^2}{[2(\gamma - 1)]^2} + \frac{(\beta + \log F_{UV} - \log F_X)^2 \sigma_\gamma^2}{[2(\gamma - 1)^2]^2} \quad (3.4)$$

El conjunto de datos empleados en esta tesis consta de 2421 cuásares de la compilación de Risaliti y colaboradores (Lusso et al., 2020), que abarcan un amplio rango de *redshift* de $0.009 \leq z \leq 7.5413$.

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Si bien para este proceso se asume un modelo teórico fiducial, sus resultados son independientes de él (Li et al., 2021)

^(iv) El parámetro β utilizado en este caso difiere del expresado en Lusso et al. (2020); Risaliti & Lusso (2019) pero se encuentran relacionados

^(v) Es importante señalar que este valor de γ es consistente con los reportados en Bargiacchi et al. (2022); Khadka & Ratra (2021a), donde se utilizan además sets de datos AGN, SnIa y BAO y se consideran extensiones del Modelo Estándar Cosmológico. Precisamente en Bargiacchi et al. (2022) γ es un parámetro a estimar junto a los parámetros cosmológicos mediante análisis estadísticos. Por otra parte, el β utilizado en dicha publicación no puede ser comparado con el empleado en esta tesis porque su parámetro se refiere al parámetro β_1 mencionado anteriormente y entonces sería necesario fijar el valor de H_0 para relacionar ambos parámetros.

Capítulo 4

Análisis Estadístico

En el capítulo 2 se presentó la teoría de gravedad generalizada empleada en el modelo cosmológico a analizar, la cual tiene 3 parámetros libres (b , Ω_m y H_0) más M_{abs} , a estimar a partir de los 4 tipos de observables, Cronómetros cósmicos, Supernovas tipo Ia, Oscilaciones Acústicas de Bariones, y Núcleos Activos de Galaxias. La metodología empleada en el análisis estadístico utilizado para dicha estimación será detallada en este capítulo.

4.1. Marco Teórico

El conjunto de n parámetros libres $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ óptimos del modelo f será aquel que maximice la densidad de probabilidad denominada Likelihood \mathcal{L} . Para una distribución gaussiana de los errores, la función \mathcal{L} para M datos observacionales se define como:

$$\mathcal{L} = P(y_i|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^M |\Sigma|} \exp\left(-\frac{1}{2} \mu^T \bar{\Sigma}^{-1} \mu\right)$$

que no es más que la exponencial del estadístico χ -cuadrado:

$$\chi^2 = \mu^T \bar{\Sigma}^{-1} \mu \quad (4.1)$$

donde μ es un vector cuyas componentes son $\mu_i = (y_i - f(x_i, \theta))$, (x_i, y_i) representa al conjunto de datos y $\bar{\Sigma}$ es la matriz de covarianza asociada.

La función de verosimilitud, denotada como \mathcal{L} , cuantifica la probabilidad de obtener los resultados de un experimento dado el modelo teórico propuesto. Maximizar \mathcal{L} es equivalente a minimizar el estadístico χ -cuadrado, el cual se utiliza para evaluar la bondad de ajuste. En otras palabras, al tener un modelo teórico, el χ -cuadrado mide la discrepancia entre las predicciones del modelo y las observaciones consideradas. Un ajuste se considera confiable cuando se realiza con un número de observaciones del mismo orden de magnitud que el valor del estadístico χ -cuadrado.

En situaciones donde los errores son independientes, la matriz de covarianza asociada es diagonal, y su inversa es:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_M^2} \end{bmatrix}$$

siendo M el número de datos. Luego, el estadístico χ -cuadrado se simplifica de la siguiente manera:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(y_i - f(x_i, \theta))^2}{\sigma_i^2} \quad (4.2)$$

mientras que el χ -cuadrado reducido está dado por:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{M - n}$$

siendo n el número de parámetros libres.

El χ -cuadrado reducido se emplea para analizar la bondad del ajuste. Si $\tilde{\chi}^2 \sim 1$ la bondad del análisis estadístico es buena. De lo contrario, si $\tilde{\chi}^2 \gg 1$ indica un mal ajuste, ya que resulta de una gran desviación de la distribución asumida, este hecho puede estar señalando que las mediciones u observaciones no son lo suficientemente óptimas (con una subestimación de la varianza del error), o que la elección de la función de probabilidad no es la indicada. En el caso restante, si $\tilde{\chi}^2 \ll 1$ tampoco es bueno ya que marca una sobre estimación de la varianza de la incerteza (Bevington et al., 1969).

En esta tesis, como se describe en el capítulo 3, se emplearon cuatro tipos de datos diferentes: SnIa, Cronómetros Cósmicos, BAOs y AGNs. En el caso de los tres últimos, los datos disponibles son independientes, por lo cual se puede utilizar la expresión del estadístico χ^2 simplificado (4.2). Sin embargo, para el caso de las supernovas esto no ocurre y es necesario aplicar la expresión general (4.1), utilizando la matriz de covarianza dada por la colaboración *Pantheon* y *Pantheon*⁽⁺⁾, las cuales contienen las incertezas sistemáticas y las correlaciones entre los datos.

Existen 2 enfoques posibles a la hora de abordar la inferencia estadística y el análisis de datos. Estos son:

Enfoque Frecuentista:

- Se basa en la interpretación de la probabilidad como la frecuencia relativa de un evento en el límite de un número infinito de repeticiones del mismo experimento.
- Los parámetros del modelo son considerados como fijos y no se les asigna una distribución de probabilidad, ni tampoco permite incorporar conocimientos previos.
- La probabilidad se utiliza para describir la variabilidad de los datos y no para expresar incertidumbre sobre los parámetros del modelo.
- La inferencia se basa en propiedades de los estimadores, como la consistencia y la eficiencia.
- El intervalo de confianza en este enfoque es unívoco pero no siempre refleja un resultado físicamente posible.

Enfoque Bayesiano:

- Se basa en la interpretación de la probabilidad como una medida subjetiva de creencia o grado de confianza en la ocurrencia de un evento.
- Los parámetros del modelo son tratados como variables aleatorias y se les asigna una distribución de probabilidad inicial, llamada distribución a priori.

- Tiene en cuenta e incorpora el grado de conocimiento previo del problema.
- La inferencia se actualiza mediante el teorema de Bayes, que incorpora la evidencia observada para obtener la distribución a posteriori, que refleja la creencia actualizada sobre los parámetros.
- La incertidumbre se modela de manera explícita y se actualiza a medida que se obtiene más información.

En la presente tesis se empleará el enfoque bayesiano y se buscará la distribución de probabilidad de los parámetros a partir de los datos conjuntamente con el grado de conocimiento previo del problema. De esta manera, son añadidas con facilidad las restricciones físicas conocidas de la cosmología y la información proveniente de otros datos a partir de una distribución de probabilidad a priori, cuya determinación en nuestro caso es clara, gracias al cambio de variables expuesto en el capítulo 2, en el cual se definieron los parámetros libres con directa analogía con respecto al modelo estándar Λ_{CDM} . Este hecho permite imponerles *priors* acordes al conocimiento cosmológico y astrofísico actual, tanto a H_0 , como a Ω_m y a M_{abs} . Particularmente se ha decidido tomar los siguientes *priors* uniformes:

- $0. < b < 8.$
- $60. < H_0 < 80.$
- $0.1 < \Omega_m < 0.5$
- $18. < M_{\text{abs}} < 20.$

4.1.1. Teorema de Bayes

El teorema de Bayes es una herramienta fundamental en estadística y probabilidad que permite actualizar las probabilidades de hipótesis o eventos a la luz de nueva evidencia como se comentó previamente, y es central en el enfoque bayesiano adoptado. Formalmente, el teorema de Bayes se expresa de la siguiente manera: Sea (θ) el conjunto de los parámetros libres del modelo, y (y_i) son los datos observables; el Teorema de Bayes permite obtener una distribución de probabilidad condicional para los parámetros desconocidos dados los datos $(P(\theta|y_i))$, llamada distribución de probabilidad a *posteriori*:

$$P(\theta|y_i) = \frac{P(\theta)P(y_i|\theta)}{\int P(\theta)P(y_i|\theta)d\theta}$$

$(P(y_i|\theta))$ denota la función de verosimilitud Likelihood (\mathcal{L}), mientras que $(P(\theta))$ representa la distribución a priori, comúnmente conocida como *prior*, que se construye con la información previa disponible sobre los parámetros θ . La integral presente en el denominador es exclusivamente dependiente de los datos y actúa como una constante de normalización.

El Teorema de Bayes permite calcular los valores a posteriori de cualquier función $(f(\theta))$ de forma directa, del siguiente modo:

$$E[f(\theta)|y_i] = \frac{\int f(\theta)P(\theta)P(y_i|\theta)d\theta}{\int P(\theta)P(y_i|\theta)d\theta}$$

En este punto se presenta un problema, y es que la integración sobre las probabilidades en el espacio de parámetros completo resulta inviable. Es un proceso sumamente costoso computacionalmente que llevaría meses e incluso años, de acuerdo a la complejidad de las ecuaciones del modelo teórico, y por supuesto, a la capacidad del hardware que se posea. Es por ello que se empleara el método de cadenas de Markov-Monte Carlo (MCMC, por sus siglas en inglés) para su realización.

4.2. Métodos de Cadenas de Markov - Monte Carlo

El Método de Cadenas de Markov-Monte Carlo (MCMC) es una poderosa técnica en estadística y computación utilizada para generar muestras de distribuciones de probabilidad complejas, especialmente en problemas de inferencia bayesiana. Combina dos conceptos fundamentales: las Cadenas de Markov y el Método Monte Carlo.

- **Cadenas de Markov:** Una Cadena de Markov es un modelo estocástico que describe una secuencia de eventos en la que la probabilidad de transición entre estados depende únicamente del estado actual, no de cómo se llegó a ese estado, de ese modo el resultado no está condicionado por la condición inicial. En el contexto de MCMC, una cadena de Markov se utiliza para explorar el espacio de parámetros de interés.
- **Método Monte Carlo:** Monte Carlo es una técnica estadística que utiliza métodos numéricos aleatorios para resolver problemas matemáticos. En el contexto de MCMC, el Método Monte Carlo se utiliza para aproximar soluciones mediante la generación de muestras aleatorias representativas de la distribución de interés.

Con la integración de Monte Carlo se pueden aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. Permite evaluar el valor de $E[f(X)]$ al tomar muestras $\{X_i; i = 1, \dots, N\}$ de la función posterior $P(\theta|y_i)$ y realizar la aproximación:

$$[E[f(X)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)] \quad (4.3)$$

La media de la población se aproxima a la media de la muestra. En el caso en que las muestras $\{X_i\}$ sean independientes, la ley de los grandes números asegura que la aproximación se hace cada vez más precisa al aumentar el tamaño de la muestra (N).

En ciertos escenarios, resulta imposible gestionar el tamaño de la muestra durante el análisis, debido a que esta función puede no ser trivial. Pero puede generarse por procesos que tomen muestras dentro de su soporte en las proporciones adecuadas. Las muestras $\{X_i\}$ se tomarán a partir de $P(\theta|y_i)$ a través de una cadena de Markov, teniendo a $P(\theta|y_i)$ como distribución estacionaria. Conforme la cadena de Markov progresa, va perdiendo gradualmente información sobre el estado inicial, y la distribución que muestra sus valores tiende a converger hacia una distribución estacionaria $\phi(\cdot)$. Después de un número significativo de pasos, conocidos como "burn-in", la cadena se estabiliza.

Para garantizar que la cadena generada tenga su distribución estacionaria $\phi(\cdot)$ en concordancia con la distribución a posteriori $P(\theta|y_i)$, es factible emplear el algoritmo de Metropolis-Hastings. Después de descartar las primeras k muestras de burn-in, el cálculo del estimador $E[f(\theta)]$ se realiza mediante el promedio ergódico, de la siguiente manera:

$$\bar{f} = \frac{1}{N - k} \sum_{i=k+1}^N f(X_i).$$

El teorema ergódico asegura la convergencia al valor de expectación requerido.

En la figura 4.1 se observa un ejemplo de una cadena de Markov, recorriendo de manera uniforme los valores de cada uno de los parámetros libres ($\Omega_m, b, H_0, M_{abs}$) ejecutada en el presente trabajo.

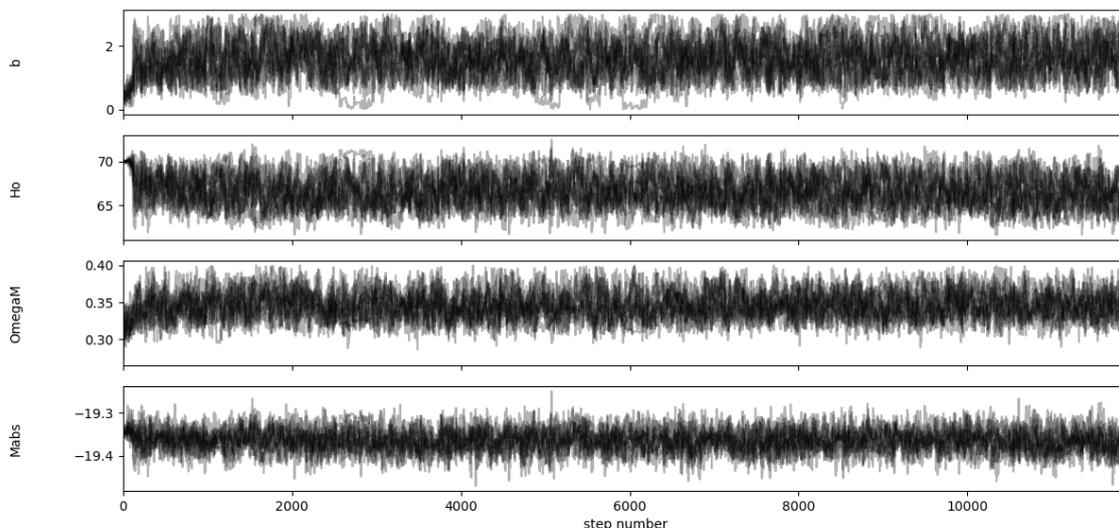


Figura 4.1. Cadenas de Markov que recorren los 4 parámetros libres.

4.3. Criterio de Convergencia

Ahora se establecerá el criterio de convergencia que determinará, bajo qué requisitos cuantitativos, asociados a las cadenas del método MCMC, se asumirá que la cadena efectivamente ha convergido, y se considerará bueno el resultado obtenido, siendo también el criterio de parada del método en nuestro algoritmo.

Existen distintos diagnósticos de convergencia, como por ejemplo, el estadístico de Gelman-Rubin. Para esta tesis se decidió utilizar el ya conocido tiempo de autocorrelación integrado τ , que cuantifica el error de la integración Monte Carlo en forma directa.

Si se trabaja con muestras independientes, el estimador de la varianza tiene la forma:

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \frac{1}{N} \text{Var}[f(\theta_i)]$$

$f(\theta_i)$ representa la función de densidad de probabilidad del parámetro θ_i , derivada de las cadenas de Markov. En esta situación, la disminución del error está relacionada con la cantidad de muestras de manera inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de muestras, expresado como $1/\sqrt{N}$.

En el caso de MCMC, las muestras no son independientes y el error está dado por:

$$\sigma_{\theta_i}^2 = \frac{\tau_f}{N} \text{Var}[f(\theta_i)]$$

donde τ_f es el tiempo de autocorrelación integrado para la cadena $f(\theta_i)$. La fracción $\frac{N}{\tau_f}$ puede ser considerada como el número efectivo de pasos independientes. Estimar τ_f conlleva poder verificar el error relativo que se comete al calcular la integral a partir del número de muestras tomadas. La ecuación siguiente define el tiempo de autocorrelación integrado para una función f como:

$$\tau_f = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_f(\tau) \quad (4.4)$$

siendo $\rho_f(\tau)$ la función de autocorrelación normalizada del proceso estocástico producida por las cadenas para f . Es posible obtener el valor de dicha función a partir de una cadena finita $\{f_n\}_{n=1}^N$ dada la expresión:

$$\hat{\rho}_f(\tau) = \frac{\hat{c}_f(\tau)}{\hat{c}_f(0)},$$

donde $\hat{c}_f(\tau)$ es el estimador de la función de autocorrelación:

$$\hat{c}_f(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} (f_n - \mu_f)(f_{n+\tau} - \mu_f),$$

y μ_f es la media de la función f :

$$\mu_f = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n.$$

Finalmente el valor de τ_f puede ser estimado a partir de la ecuación (4.4):

$$\hat{\tau}_f = 1 + 2 \sum_{\tau=1}^N \hat{\rho}_f(\tau)$$

La estimación de $\hat{\rho}_f(\tau)$ comienza a ser notoriamente ruidosa para cadenas de gran tamaño, impactando significativamente en la precisión de $\hat{\tau}_f$ a medida que el número de pasos de la cadena, denotado como N , aumenta. En este contexto, se adopta la estrategia de calcular $\hat{\tau}_f$ como $\hat{\tau}_f = 1 + 2 \sum_{\tau=1}^{N^*} \hat{\rho}_f(\tau)$, donde $N^* \ll N$. La introducción de N^* permite reducir la varianza del estimador, aunque conlleva cierto sesgo adicional.

La literatura especializada sugiere seleccionar el valor más bajo posible de N^* que cumpla con la condición $N^* \geq C \hat{\tau}_f(N^*)$, donde C suele ser aproximadamente igual a 5. Aunque este enfoque se considera eficaz para cadenas de longitud superior a $1000\tau_f$, la implementación de la biblioteca emcee en Python ofrece mejoras notables al permitir el uso de cadenas paralelas para reducir la varianza. Según este método, se observa que cadenas con longitudes superiores a $50\tau_f$ suelen ser suficientes para obtener resultados fiables.

En este trabajo se asumirá como criterio de convergencia y criterio de parada de las cadenas si se cumplen simultáneamente los 2 siguientes requisitos:

- Que la cadena sea más larga que $100\tau_f$.
- Que el error porcentual entre el paso N y el $N - 1$ en la estimación de τ_f resultó menor al 0,1 %.

De cumplirse ambos criterios por separado, para cada uno de los parámetros estudiados, se afirma que el método ha convergido.

4.4. Intervalos de Confianza

En el enfoque bayesiano el intervalo de confianza no está definido de manera unívoca, y es importante elegirlo de manera pertinente de acuerdo a la forma de nuestra distribución posterior. Existen, por ejemplo, dos intervalos bayesianos comúnmente reportados en la literatura:

- a) el *Highest density interval* (HDI)

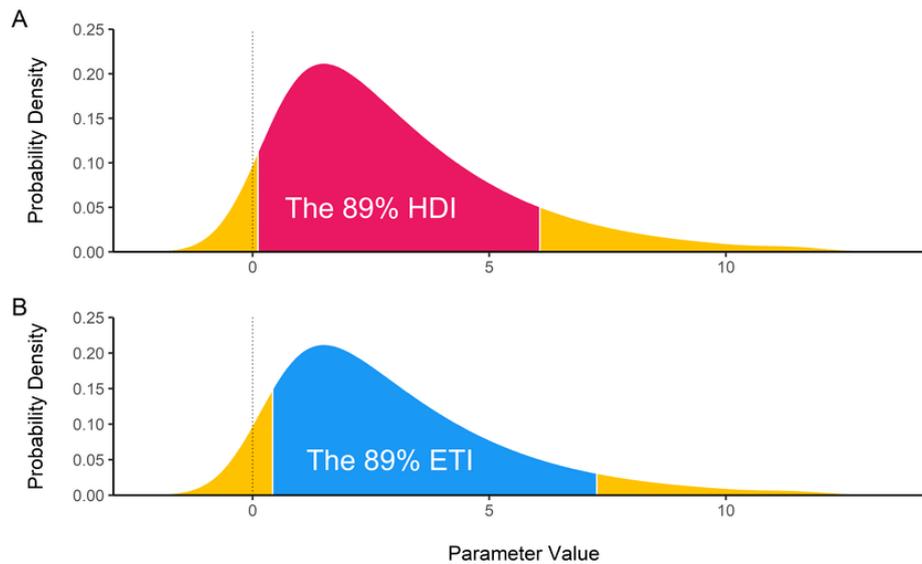


Figura 4.2. Intervalos de confianza del tipo HDI y ETI. Imagen extraída de (Makowski et al., 2019).

- b) el *Equal-tailed interval* (ETI)

El ETI se define de tal manera que el 2.5 % de la probabilidad se encuentre en ambos lados del mismo (es decir, está limitado por el percentil 2.5 y el percentil 97.5). En contraposición, el HDI se construye de tal manera que los puntos en su interior correspondan a los valores más altos de la densidad de probabilidad. Ambos intervalos coinciden cuando las distribuciones de probabilidad son simétricas, pero en general este hecho no ocurre. La figura 4.2 muestra un ejemplo de los intervalos mencionados en una distribución asimétrica. Aunque la construcción del intervalo ETI es más sencilla, no siempre es significativo y no asegura que los valores más probables estén incluidos en el intervalo.

En el presente trabajo, y para todos los intervalos de confianza que se expongan en esta tesis, para los resultados obtenidos, se empleará el intervalo de confianza de tipo HDI, para evitar de ese modo, malas estimaciones por la alta asimetría de las distribuciones observadas en nuestros cálculos, sobre todo en el parámetro b .

Capítulo 5

Resultados

En la presente capítulo se presentan los resultados del análisis estadístico realizado para determinar el espacio de parámetros libres de la teoría de gravedad generalizada $f(R)$ seleccionada. Se detallan y analizan los resultados obtenidos con los distintos sets de observables, correspondientes a los modelos de Starobinsky con $n=1$ y del Modelo Cosmológico Estándar para realizar comparaciones entre sus predicciones. En primera instancia se realizaron los análisis estadísticos, empleando métodos de Cadenas de Markov-Monte Carlo (MCMC), considerando en el análisis datos de Cronómetros Cósmicos (CC) y Supernovas tipo Ia (SnIa) de la compilación *Pantheon*. Posteriormente se agregaron datos de Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO), y Núcleos de Galaxias Activas (AGN), para mejorar la precisión de la estimación, con la inclusión de cada grupo de datos. Mientras se realizaba este trabajo, se pusieron a disposición los datos de *Pantheon*⁽⁺⁾, por lo tanto se procedió a repetir los cálculos reemplazando el conjunto de datos de *Pantheon* por los de *Pantheon*⁽⁺⁾, de manera totalmente análoga. En todos los casos se empleó la marginalización para la magnitud absoluta de las Supernovas Ia propuesta por [Camarena & Marra \(2021\)](#). Para llevar a cabo todo este proceso, se escribió un código en lenguaje de programación Python, el cual lee el conjunto total de datos observables, realiza el método estadístico MCMC, calcula los intervalos de confianza y grafica los contornos de la distribución de probabilidad a posteriori de los parámetros libres de la teoría.

En las tablas [5.2](#) y [5.3](#) se resume la totalidad de los cálculos realizados en el presente trabajo, exponiendo todos los intervalos de confianza para los parámetros libres, como así también se graficaron los correspondientes *corner plots* asociados a los métodos MCMC ejecutados, como se observa en las figuras [5.1](#) y [5.2](#).

Es posible percibir que la inclusión de los datos de AGN, los cuales son datos novedosos, restringen aún más, aunque levemente, el espacio de parámetros a estimar, que utilizando sólo los datos de cronómetros cósmicos y supernovas, pero no son tan precisos como los provenientes de las BAO.

En cuanto a la Marginalización empleada

Se procedió a estudiar la injerencia de la marginalización propuesta por [Camarena & Marra \(2021\)](#) empleada en el presente trabajo. Se llegó a la conclusión de que la inclusión o exclusión de la misma, modifica significativamente los resultados, a tal punto que, por ejemplo, para el modelo Λ_{CDM} , se obtiene una discrepancia a 1σ en la estimación del parámetro H_0 , entre 2 estimaciones, empleando los mismos datos (CC+*Pantheon* + AGN), una incluyendo dicha marginalización y otra excluyéndola.

Específicamente se obtuvieron los resultados expuestos en la tabla [5.1](#), donde también se

5. Resultados

Observables	H_0	Ω_m	M_{abs}
CC+SnIa (con M)	$72.070^{+1.021}_{-1.293} (+2.144)_{(-2.105)}$	$0.289^{+0.019}_{-0.018} (+0.039)_{(-0.034)}$	$-19.290^{+0.031}_{-0.028} (+0.058)_{(-0.059)}$
CC+SnIa (sin M)	$68.980^{+1.732}_{-1.946} (+3.720)_{(-3.584)}$	$0.302^{+0.022}_{-0.018} (+0.041)_{(-0.038)}$	$-19.380^{+0.050}_{-0.056} (+0.100)_{(-0.110)}$
CC+SnIa+AGN (con M)	$71.856^{+1.123}_{-1.230} (+2.173)_{(-2.100)}$	$0.296^{+0.019}_{-0.016} (+0.038)_{(-0.033)}$	$-19.293^{+0.031}_{-0.029} (+0.057)_{(-0.060)}$
CC+SnIa+AGN (sin M)	$68.611^{+1.725}_{-1.825} (+3.544)_{(-3.450)}$	$0.309^{+0.018}_{-0.020} (+0.039)_{(-0.036)}$	$-19.388^{+0.052}_{-0.054} (+0.100)_{(-0.100)}$

Tabla 5.1. Intervalos de confianza estimados para el modelo Λ_{CDM} con distintos observables. "(con M)" hace referencia a que se incluye en la estimación la marginalización propuesta por [Camarena & Marra \(2021\)](#). Los valores entre paréntesis están asociados a los intervalos de confianza a 2σ .

puede ver que se repitió de manera análoga 2 estimaciones con datos de CC+*Pantheon*, con y sin marginalización, para una mejor visualización del impacto de dicho prior.

De este modo es posible inferir que la inclusión de dicha marginalización permite una restricción mayor en los intervalos de confianza, principalmente para los parámetros H_0 y M_{abs} . Se deberá prestar especial atención a este aspecto, ya que como se detallará en secciones posteriores, en el artículo ([Ravi et al., 2024](#)) se incluye un *prior* para H_0 , reportado por la colaboración SHOES, que modifica drásticamente los resultados y provocando conclusiones significativamente distintas de acuerdo a su inclusión o exclusión con el cálculo de los estadísticos bayesianos ΔBIC y $\Delta AIC^{(i)}$. Es llamativo y se debe estudiar con mayor profundidad el por qué de la alta injerencia sobre los resultados la inclusión de datos del proyecto SHOES o marginalizaciones y *priors* relacionados con los mismos, lo cual induce discrepancias que parecen estar relacionadas con la misma tensión de Hubble.

5.1. Análisis de resultados obtenidos con datos de CC, *Pantheon*, BAO y AGN

En la figura 5.1 y en la tabla 5.2 se presentan los contornos de confianza de las distribuciones de probabilidad posteriori de los parámetros libres de la teoría $f(R)$ de Starobinski con $n=1$. Se emplearon para las mismas datos de Cronómetros Cósmicos (CC), Supernovas tipo Ia de la compilación *Pantheon*, Oscilaciones acústicas de Bariones (BAO) y Núcleos de Galaxias Activas (AGN).

Se puede observar en la figura la habitual fuerte correlación positiva entre M_{abs} y H_0 , una leve correlación negativa entre M_{abs} y Ω_m que pasa a ser una aparente correlación positiva al incluir datos de BAO. Se aprecia una correlación negativa de Ω_m , tanto con el *parámetro de distorsión b* (cuando se utilizan los datos CC+SnIa+AGN), como con H_0 (en este caso es bastante leve), que desaparecen al incluir datos de BAO. Además, se percibe entre H_0 y b una correlación negativa al incluir datos de BAO al conjunto de datos CC+SnIa+AGN.

⁽ⁱ⁾Estos estadísticos permiten comparar estadísticamente 2 modelos teóricos y estimar cual es modelo mas apropiado y preferido de acuerdo a los datos e información incluida en el análisis bayesiano.

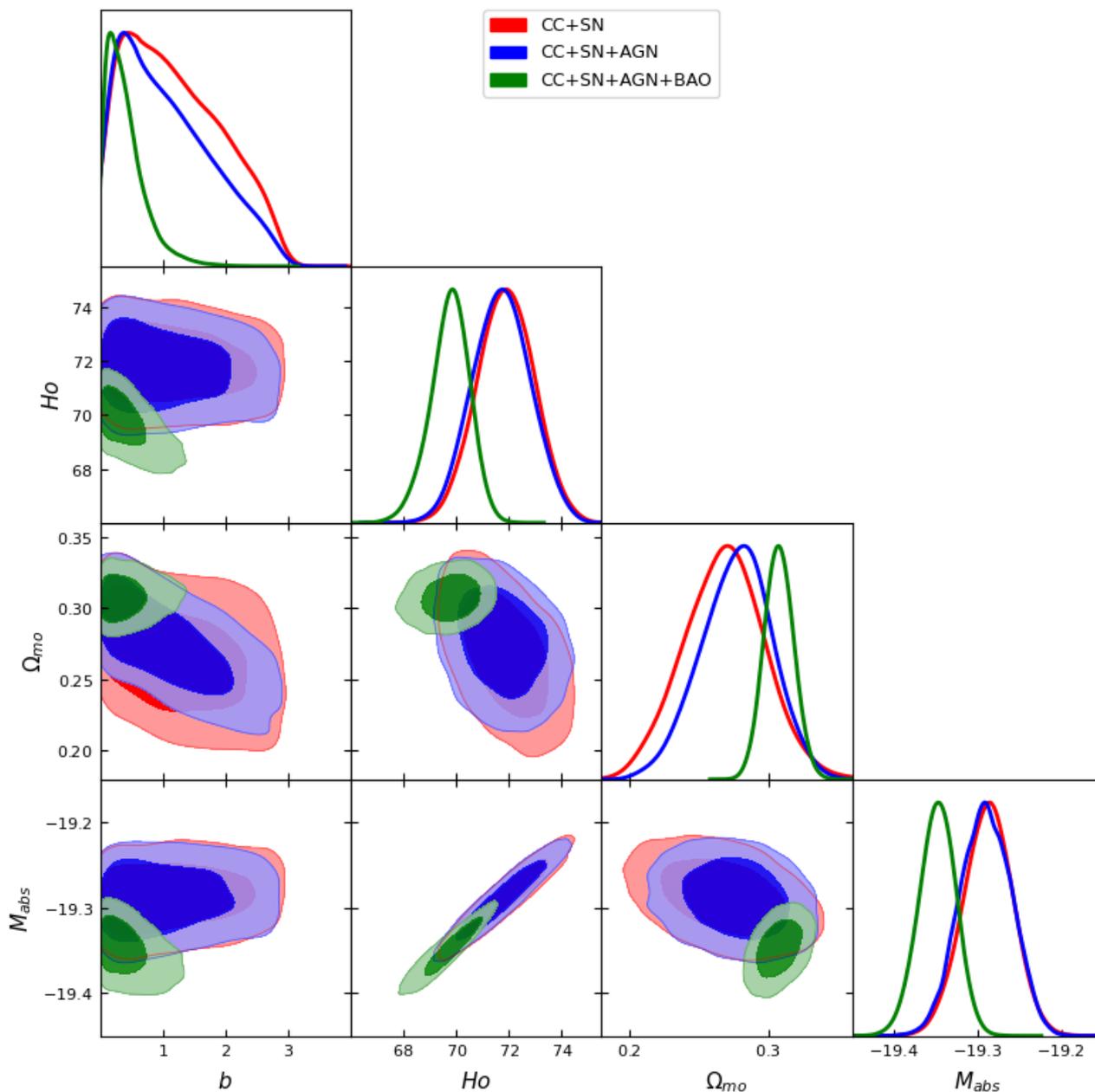


Figura 5.1. Resultados del análisis estadístico para el modelo de Starobinsky $n=1$ utilizando diferentes combinaciones de conjuntos de datos observables (CC, SnIa (*Pantheon*), AGN, BAOs). Las regiones más intensas representan a aquellas con un nivel de confianza del 65%, mientras que las más tenues corresponden a regiones con un nivel del 95%.

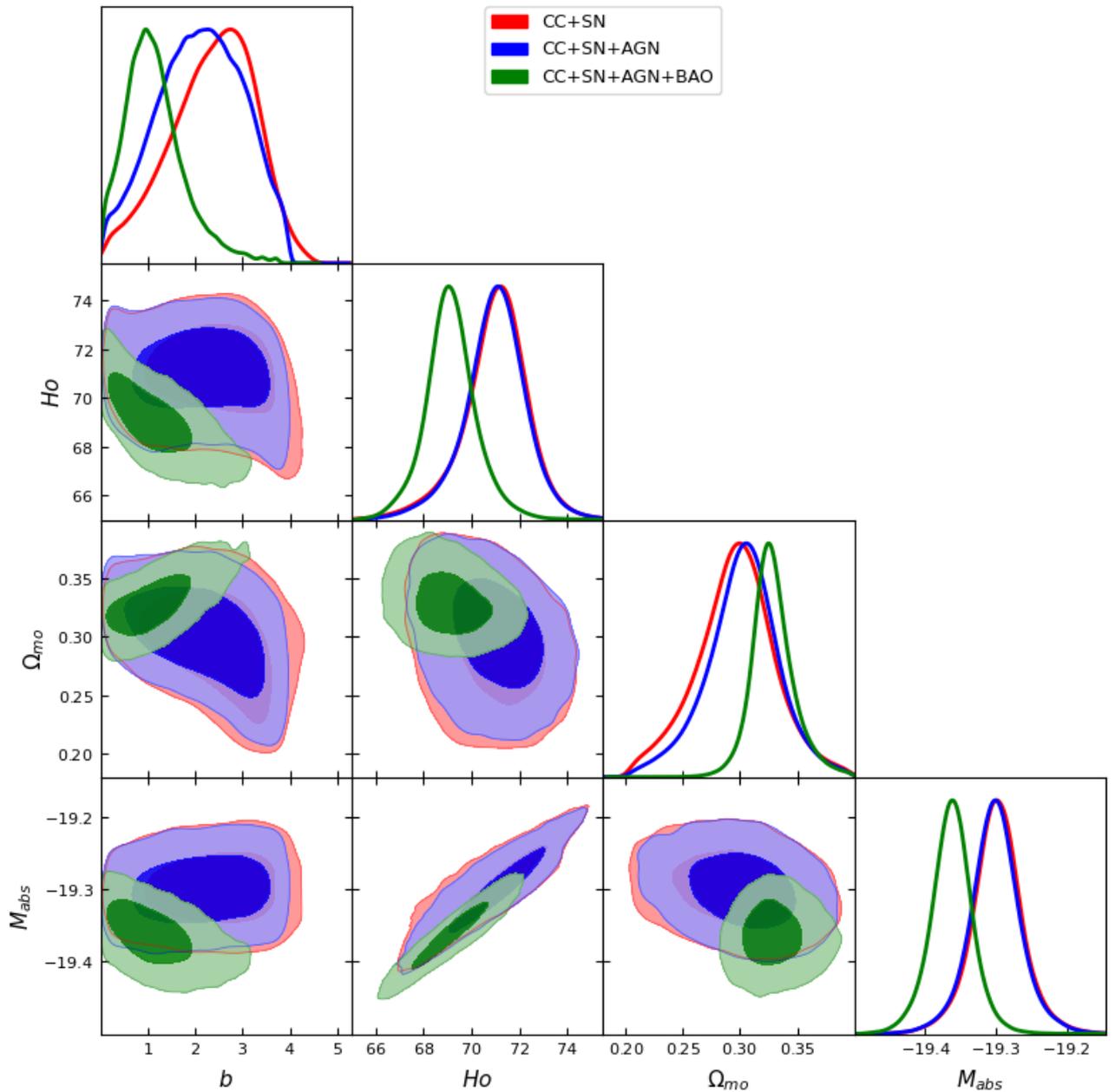


Figura 5.2. Resultados del análisis estadístico para el modelo de Starobinsky $n=1$ utilizando diferentes combinaciones de conjuntos de datos observables (CC, SnIa (*Pantheon*⁽⁺⁾), AGN, BAOs). Las regiones más intensas representan a aquellas con un nivel de confianza del 65 %, mientras que las más tenues corresponden a regiones con un nivel del 95 %.

**5.1. Análisis de resultados obtenidos con datos de
CC, *Pantheon*, BAO y AGN**

Λ CDM				
Observables	b	H_0	Ω_m	M_{abs}
CC+SnIa	–	$72.070^{+1.021}_{-1.293} (+2.144, -2.105)$	$0.289^{+0.019}_{-0.018} (+0.039, -0.034)$	$-19.290^{+0.031}_{-0.028} (+0.058, -0.059)$
CC+SnIa+AGN	–	$71.856^{+1.123}_{-1.230} (+2.173, -2.100)$	$0.296^{+0.019}_{-0.016} (+0.038, -0.033)$	$-19.293^{+0.031}_{-0.029} (+0.057, -0.06)$
CC+SnIa+BAO	–	$70.095^{+0.602}_{-0.784} (+1.265, -1.201)$	$0.304^{+0.010}_{-0.009} (+0.021, -0.018)$	$-19.343^{+0.021}_{-0.021} (+0.041, -0.041)$
CC+SnIa+AGN +BAO	–	$70.123^{+0.553}_{-0.653} (+1.155, -1.244)$	$0.307^{+0.010}_{-0.011} (+0.020, -0.021)$	$-19.341^{+0.017}_{-0.023} (+0.039, -0.041)$
$f(R)$ Starobinsky				
Observables	b	H_0	Ω_m	M_{abs}
CC+SnIa	$\leq 1.539(2.577)$	$71.880^{+1.070}_{-1.081} (+2.041, -2.178)$	$0.268^{+0.029}_{-0.028} (+0.055, -0.059)$	$-19.287^{+0.031}_{-0.027} (+0.059, -0.057)$
CC+SnIa+AGN	$\leq 1.540(2.578)$	$71.718^{+1.233}_{-0.918} (+2.203, -2.015)$	$0.276^{+0.021}_{-0.036} (+0.046, -0.068)$	$-19.290^{+0.033}_{-0.025} (+0.062, -0.054)$
CC+SnIa+AGN +BAO	$\leq 0.476(1.022)$	$69.756^{+0.832}_{-0.629} (+1.436, -1.560)$	$0.307^{+0.009}_{-0.011} (+0.020, -0.021)$	$-19.348^{+0.020}_{-0.020} (+0.042, -0.045)$

Tabla 5.2. Intervalos de confianza obtenidos en el presente trabajo empleando los distintos grupos de observables seleccionados para realizar los análisis estadísticos, tanto para el modelo Λ_{CDM} como para el modelo $f(R)$. Los valores entre paréntesis están asociados a los intervalos de confianza a 2σ .

5. Resultados

Λ CDM				
Observables	b	H_0	Ω_m	M_{abs}
CC+SnIa(+)	–	$71.056^{+0.946}_{-1.121} (+2.054)$	$0.330^{+0.016}_{-0.017} (+0.033)$	$-19.309^{+0.027}_{-0.033} (+0.057)$
CC+SnIa(+) +AGN	–	$71.011^{+0.985}_{-1.110} (+2.006)$	$0.333^{+0.018}_{-0.015} (+0.033)$	$-19.310^{+0.030}_{-0.031} (+0.058)$
CC+SnIa(+) +BAO	–	$70.375^{+0.568}_{-0.646} (+1.145)$	$0.318^{+0.011}_{-0.009} (+0.021)$	$-19.334^{+0.017}_{-0.022} (+0.041)$
CC+SnIa(+) +AGN+BAO	–	$70.378^{+0.575}_{-0.645} (+1.212)$	$0.320^{+0.010}_{-0.010} (+0.021)$	$-19.333^{+0.019}_{-0.020} (+0.041)$
$f(R)$ Starobinsky				
Observables	b	H_0	Ω_m	M_{abs}
CC+SnIa(+)	$2.751^{+0.649}_{-1.117} (+1.198)$	$70.992^{+1.409}_{-1.071} (+2.738)$	$0.296^{+0.034}_{-0.031} (+0.066)$	$-19.298^{+0.034}_{-0.032} (+0.077)$
CC+SnIa(+) +AGN	$2.252^{+1.149}_{-0.617} (+1.698)$	$70.984^{+1.416}_{-1.064} (+2.746)$	$0.302^{+0.028}_{-0.037} (+0.060)$	$-19.300^{+0.036}_{-0.030} (+0.080)$
CC+SnIa(+) +BAO	$0.940^{+0.698}_{-0.500} (+1.434)$	$69.105^{+0.917}_{-1.043} (+2.348)$	$0.316^{+0.013}_{-0.010} (+0.028)$	$-19.363^{+0.025}_{-0.028} (+0.060)$
CC+SnIa(+) +AGN+BAO	$0.951^{+0.607}_{-0.522} (+1.388)$	$69.164^{+0.953}_{-1.032} (+2.317)$	$0.328^{+0.014}_{-0.019} (+0.042)$	$-19.362^{+0.028}_{-0.027} (+0.061)$

Tabla 5.3. Intervalos de confianza obtenidos en el presente trabajo empleando los distintos grupos de observables seleccionados para realizar los análisis estadísticos, tanto para el modelo Λ_{CDM} como para el modelo $f(R)$. Los valores entre paréntesis están asociados a los intervalos de confianza a 2σ . “SnIa(+)” hace referencia a la compilación de supernovas tipo Ia, *Pantheon*⁽⁺⁾.

Por otra parte, de los resultados de la tabla 5.2 se desprende que los valores de los parámetros para modelo de Starobinsky elegidos a estimar (b , H_0 , Ω_m y M_{abs}) son consistentes a 1σ con los obtenidos para el Modelo Cosmológico Estándar.

5.2. Análisis de resultados obtenidos con datos de CC+*Pantheon*⁽⁺⁾+BAO+AGN

En la tabla 5.3 y en la figura 5.2 se observan los intervalos de confianza de tipo HDI y se observan los contornos de confianza, respectivamente, de la distribución a posteriori de los parámetros libres de la teoría, estimados a partir del análisis estadístico empleando observables de CC, SnIa⁽⁺⁾ AGN Y BAO, según corresponda como indica la referencia de la gráfica.

De las mismas se infiere que el reemplazo de los datos de *Pantheon* por los de *Pantheon*⁽⁺⁾ provoca un considerable cambio en el intervalo de confianza estimado para el *parámetro de distorsión* b , incrementando su valor, hasta incluso ser inconsistente con el modelo $\Lambda_{CDM}(b=0)$ en algunos casos. Se percibe la habitual correlación entre H_0 y M_{abs} , presente al incluir cualquier combinación de observables. Con CC+*Pantheon*⁽⁺⁾+AGN+BAO se observa una aparente correlación negativa entre $b - M_{abs}$ y entre $b - H_0$. Pero éstas no se observan cuando los datos de BAO no son incluidos. Entre b y Ω_m se observa una leve correlación negativa con datos CC+SnIa⁽⁺⁾ Y con CC+SnIa⁽⁺⁾+AGN, que pasa a ser una correlación positiva al añadir datos BAO. Entre Ω_m y H_0 , como así también entre Ω_m y M_{abs} no se observan claras tendencias de correlación de ningún tipo al incluir todos los observables. Se observa que con la inclusión de datos observables de más alta precisión y con el consecuente incremento de la precisión de la estimación estadística, los valores más probables del parámetro de distorsión disminuyen y se acercan a la consistencia con $\Lambda_{CDM}(b=0)$, al menos a 2σ . Mas específicamente, se observa una inconsistencia a 2σ con el modelo estándar ($b=0$) empleando datos CC + SnIa⁽⁺⁾ y CC + SnIa⁽⁺⁾ + AGN. La estimación pasa a ser consistente con el modelo estándar a 2σ con la inclusión de datos BAO, pero mantiene la inconsistencia a 1σ .

En cuando a los parámetros en común del modelo de Starobinsky y el Modelo Cosmológico Estándar, H_0 , Ω_m y M_{abs} , empleando estos 4 observables, se obtiene una consistencia para los mismos a 1σ .

5.3. Comparación entre los resultados obtenidos y los publicados por otros autores

En la tabla 5.4 se presentan los intervalos de confianza estimados para el modelo de Starobinsky ($n=1$), tanto del presente estudio como de trabajos similares ya publicados, con el fin de realizar comparaciones. Se observa que:

- Las estimaciones obtenidas en el presente análisis son consistentes con las reportadas en Nunes et al. (2017) a 1σ tanto para b , como para H_0 y para Ω_m , ambas empleando datos observables similares, CC+*Pantheon* en esta tesis, y CC+ H_0^{Riess} en Nunes et al. (2017), donde incluyen la estimación de $H_0 = 73.2 \pm 1.79 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ reportada por Riess et al. (2016) como un prior en el método MCMC. Como se ve en la tabla 5.4, el reporte Nunes et al. (2017) emplea la compilación "JLA" (Joint Light-Curve Analysis), la cual es anterior a *Pantheon*, compuesta por datos de 740 SnIa, mientras que el conjunto de datos de BAO empleados en dicho trabajo es más acotado y no tan actualizado como el utilizado en esta tesis. En cuanto a su estimación empleando estos últimos observables

mencionados (CC+ H_0^{Riess} +BAO+JLA), es consistente con la estimación similar del presente trabajo que emplea CC+*Pantheon*+AGN+BAO a 1σ en todos los parámetros.

- Los intervalos de confianza publicados en [Farrugia et al. \(2021\)](#) empleando CC+ *Pantheon* +BAO+CMB+RSD difieren levemente de los obtenidos en esta tesis empleando CC+ *Pantheon* +BAO +AGN, existiendo una inconsistencia a 1σ en H_0 , seguramente provocada por la diferencia en los observables empleados, como por ejemplo la inclusión de datos de CMB en su trabajo y el uso de la marginalización sobre M_{abs} en esta tesis. De igual manera son consistentes a 1σ los otros parámetros, b y Ω_m , y lo es a 2σ en H_0 .

Es importante aclarar que cuando en dicho trabajo reportan haber empleado datos de CMB, se refieren a la inclusión de 4 *priors* de distancias, a ser, el parámetro de cambio R , la escala acústica l_A , el índice espectral de potencia escalar primordial n_s , y la cantidad $\Omega_{b,0}h^2$ relacionada con el parámetro de densidad barionica, provistos por la colaboración Planck. Para obtener dichos datos se asumió como válido el Modelo Cosmológico Estándar, sin haber realizado las correspondientes modificaciones numéricas en códigos como *CLASS* (*Cosmic Linear Anisotropy Solving System*) o *CAMB* (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*) para incluir las $f(R)$ en el análisis y así obtener predicciones propias de teorías generalizadas. Por esto, en esta tesis se evita dicha metodología para no sesgar los resultados.

- La estimación del parámetro b del presente trabajo es consistente con la estimación de [Ravi et al. \(2024\)](#) a 1σ , empleando CC+*Pantheon*⁽⁺⁾ a pesar de emplear marginalizaciones distintas para M_{abs} , como así también lo es a 1σ de la estimación del mismo trabajo cuando emplean CC+*Pantheon*⁽⁺⁾+ H_0^{SH0ES} . Al analizar las estimaciones del parámetro de Hubble H_0 , son consistentes a 1σ cuando en dicho trabajo incluyen el prior para H_0 asociado a datos SH0ES (H_0^{SH0ES}), pero son inconsistentes a 1σ cuando no lo incluyen (Aparentemente la inclusión del prior H_0^{SH0ES} provoca un efecto muy similar en los resultados que la marginalización propuesta por [Camarena & Marra \(2021\)](#) empleada en esta tesis). El parámetro Ω_m es consistente en todos los casos.
- Al emplear datos de CC+*Pantheon*⁽⁺⁾+BAO, se observa una inconsistencia entre la estimación del *parámetro de distorsión* del presente trabajo con la reportada en [Ravi et al. \(2024\)](#) a 1σ (solo consistente a 2σ). Pero pasan a ser consistentes a 1σ cuando en dicho trabajo incluyen el prior H_0^{SH0ES} (Análogo al ítem anterior). Lo mismo ocurre con el parámetro H_0 . El parámetro Ω_m nuevamente es consistente en todos los casos. Cabe aclarar que el conjunto de datos de BAO empleados en cada trabajo no son los mismos.
- De los resultados expuestos se desprende que la estimación de H_0 más completa para $f(R)_{ST}$ de esta tesis, empleando datos de CC + SnIa⁽⁺⁾ + AGN + BAO, es inconsistente a 1σ tanto con la estimación de la colaboración Planck de $67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ ([Planck Collaboration, 2020](#)) (valor que se obtiene utilizando el Modelo Cosmológico Estándar), como con la estimación de Riess y colaboradores de $73.30 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ ([Riess et al., 2022](#)). A 2σ es consistente con el dato reportado por Planck, y se podría decir que también consistente a 2σ con Riess y colaboradores, si se asume co-

mo estimación a 2σ de Riess a $H_0 + 2*(1\sigma)$, ya que no incluyen estimación precisa a 2σ .

- Las estimaciones de la presente tesis para el modelo Λ_{CDM} , empleando datos de CC+*Pantheon*⁽⁺⁾ como así también empleando CC+*Pantheon*⁽⁺⁾+AGN, son consistentes a 1σ con el reporte para el parámetro H_0 de la colaboración Planck ([Planck Collaboration, 2020](#)) si en el método MCMC excluimos la marginalización para M_{abs} propuesta por [Camarena & Marra \(2021\)](#), relacionada con a datos de *SH0ES*, y al mismo tiempo son inconsistentes a 1σ con la estimación de H_0 de [Riess et al. \(2022\)](#). Al incluir la marginalización mencionada, las estimaciones pasan a ser consistentes a 1σ con [Riess et al. \(2022\)](#), e inconsistentes a 1σ con [Planck Collaboration \(2020\)](#).
- En comparación con la estimación reportada en el trabajo [Kumar et al. \(2023\)](#) se observan grandes discrepancias e inconsistencias, por ejemplo en el parámetro de distorsión "b" a 2σ , con respecto a esta tesis, a pesar de usar datos similares, como en su estimación, empleando *Pantheon*⁽⁺⁾+SH0ES, por ejemplo, comparada con la de este trabajo empleando CC+*Pantheon*⁽⁺⁾. Pero esto es esperable, ya que en dicho trabajo no realizan la integración completa de las ecuaciones generalizadas de Friedmann, sino que emplean en todo el método MCMC la aproximación para valores pequeños de b propuesta en [Basilakos et al. \(2013\)^{\(i\)}](#), lo cual se evita en esta tesis, ya que dicha asunción sesga el resultado, asumiendo a priori que el valor estimado para "b" será pequeño y esto puede no ser así como se propone en esta tesis y en trabajos como [Ravi et al. \(2024\)](#). En resumen, en dicho trabajo no se percibe el relevante cambio en las estimaciones que provoca la incorporación de *Pantheon*⁽⁺⁾, debido a malas hipótesis en su metodología.

⁽ⁱ⁾Comunicación privada con el Dr. Nunes

5. Resultados

Observables	b	H_0	Ω_m	Referencia
<i>CC+Pantheon</i> +BAO+AGN	$\leq 0.476(1.022)$	$69.756^{+0.832}_{-0.629} (+1.436, -1.560)$	$0.307^{+0.009}_{-0.011} (+0.020, -0.021)$	Este trabajo.
<i>CC+Pantheon</i> +CMB+BAO+RSD	$0.0122^{+0.0055}_{-0.0122}$	$68.408^{+0.4792}_{-0.4852}$	$1 - (0.6974^{+0.0063}_{-0.0060})$	(Farrugia et al., 2021)
<i>CC + H₀^{Riess}</i>	$0.229^{+0.254}_{-0.710} (+0.438, -0.893)$	$72.7^{+3.1}_{-3.1} (+4.7, -4.7)$	$0.261^{+0.055}_{-0.065} (+0.102, -0.080)$	(Nunes et al., 2017)
<i>CC+Pantheon</i>	$\leq 1.539(2.577)$	$71.880^{+1.070}_{-1.081} (+2.041, -2.178)$	$0.268^{+0.029}_{-0.028} (+0.055, -0.059)$	Este trabajo.
<i>CC+H₀^{Riess}</i> +BAO+JLA	$0.111^{+0.070}_{-0.286} (+0.074, -0.304)$	$71.4^{+2.8}_{-3.0} (+3.3, -3.8)$	$0.269^{+0.042}_{-0.05} (+0.054, -0.061)$	(Nunes et al., 2017)
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾	$2.75^{+0.786}_{-1.165}$	$67.01^{+1.740}_{-1.716}$	$0.30^{+0.034}_{-0.031}$	(Ravi et al., 2024)
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾ + <i>H₀^{SH0ES}</i>	$2.85^{+0.601}_{-0.971}$	$71.45^{+0.901}_{-0.873}$	$0.27^{+0.029}_{-0.032}$	(Ravi et al., 2024)
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾	$2.751^{+0.649}_{-1.117} (+1.198, -2.226)$	$70.992^{+1.409}_{-1.071} (+2.738, -3.150)$	$0.296^{+0.034}_{-0.031} (+0.066, -0.076)$	Este trabajo.
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾ +BAO	$2.64^{+0.686}_{-0.754}$	$65.72^{+1.038}_{-1.052}$	$0.31^{+0.011}_{-0.011}$	(Ravi et al., 2024)
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾ + <i>H₀^{SH0ES}</i> +BAO	$0.83^{+0.578}_{-0.445}$	$69.51^{+0.80}_{-0.799}$	$0.32^{+0.010}_{-0.010}$	(Ravi et al., 2024)
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾ +BAO	$0.940^{+0.698}_{-0.500} (+1.434, -0.940)$	$69.105^{+0.917}_{-1.043} (+2.348, -2.337)$	$0.316^{+0.013}_{-0.010} (+0.028, -0.029)$	Este trabajo.
<i>CC+Pantheon</i> ⁽⁺⁾ +BAO+AGN	$0.951^{+0.607}_{-0.522} (+1.388, -0.951)$	$69.164^{+0.953}_{-1.032} (+2.317, -2.353)$	$0.328^{+0.014}_{-0.019} (+0.042, -0.037)$	Este trabajo.
<i>Pantheon</i> ⁽⁺⁾ <i>SH0ES</i>	$0.037^{+0.051}_{-0.044}$	$74.0^{+1.00}_{-0.85}$	$0.332^{+0.019}_{-0.019}$	(Kumar et al., 2023)
<i>Pantheon</i> ⁽⁺⁾ <i>SH0ES</i> +BAO+BBN	$0.01^{+0.31}_{-0.31}$	$71.53^{+0.77}_{-0.77}$	$0.335^{+0.013}_{-0.013}$	(Kumar et al., 2023)

Tabla 5.4. Intervalos de confianza del análisis estadístico del modelo Starobinsky $n=1$ del presente trabajo y de otros artículos publicados recientemente. Los valores entre paréntesis están asociados a los intervalos de confianza a 2σ .

Capítulo 6

Conclusiones

Para esta tesis se propuso analizar el modelo de gravedad generalizada del tipo $f(R)$, en particular se empleó la $f(R)$ de Starobinsky con $n=1$ (Starobinsky, 2007). Se estudió dicha teoría en el contexto cosmológico, enfocándose específicamente en el universo tardío, realizando un análisis estadístico del modelo con datos de SnIa, CC, AGN y BAO, para verificar su viabilidad.

Para esto se resolvieron las ecuaciones de Friedmann generalizadas, teniendo presente la región donde las ecuaciones se vuelven inestables y el costo computacional incrementa considerablemente. Allí se usó la aproximación propuesta por Basilakos (Basilakos et al., 2013), en donde se plantea una expansión en serie alrededor de la solución del Modelo Cosmológico Estándar, como buena aproximación a la teoría generalizada cuando el *parámetro de distorsión* "b" es pequeño.

También se empleó una aproximación del modelo a altos *redshifts*, donde la teoría generalizada tiene un comportamiento indistinguible respecto a Λ_{CDM} , asumiendo así este modelo para *redshifts* $z > 15$, ya que se analizó que en dicho caso el error de esta aproximación es menor al 2%.

Luego, se realizó un análisis estadístico ejecutando un método de Cadenas de Markov Monte Carlo, elaborado en lenguaje Python, teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta aquí, el cual leía e incorporaba para dicho análisis los 4 sets de observables descritos en el capítulo 3, que son CC, AGN, SnIa y BAO.

Toda esta metodología es similar a la empleada en los trabajos Leizerovich et al. (2022); Leizerovich (2020), que se pueden consultar para analizar detalles.

En primera instancia se empleó para las supernovas tipo Ia, la compilación *Pantheon*, y mientras se realizaban dichos cálculos, se publicaron y pusieron a disposición los nuevos datos de la denominada compilación *Pantheon*⁽⁺⁾, la cual agrega datos de 502 supernovas Ia, a los ya 1048 datos de *Pantheon*, abarcando un *redshift* de $0.00122 < z_{\text{HD}} < 2.26137$, intervalo ideal ya que abarca la era de dominio de *Constante Cosmológica*. Se decidió entonces realizar un nuevo análisis reemplazando los datos de SnIa por los más actuales. Éstos modificaron significativamente las estimaciones del presente trabajo.

En ambos análisis se utilizó la ya mencionada marginalización estadística sobre la magnitud absoluta de las SnIa propuesta por Camarena & Marra (2021) con el fin de mejorar la estimación de dicho parámetro. Los resultados obtenidos finalmente permiten concluir que:

- Los modelos cosmológicos alternativos que emplean teorías de gravedad generalizada del tipo $f(R)$, constituyen una prometedora propuesta para resolver el problema del referente físico de la constante cosmológica, ya que simplifican significativamente el modelo desde un punto de vista ontológico. Aunque, este hecho queda supeditado a la no comprobación de la existencia material de campos escalares del tipo Brans-Dicke y/o

camaleones, los cuales introducirían nuevas especies al modelo $f(R)$.

- Al igual que reportan en [Leizerovich et al. \(2022\)](#), incluir datos de AGN mejoran las estimaciones respecto a las obtenidas con datos de CC+SnIa, aunque no tan significativamente como lo hacen las BAO, quienes restringen en un mayor nivel los intervalos de confianza.
- La inclusión de la compilación $Pantheon^{(+)}$, en contraste con la utilizada en primer instancia ($Pantheon$), modifican significativamente las estimaciones, indicando mayores valores del parámetro de distorsión b como los más probables como mejor ajuste, llegando incluso a ser inconsistentes a 1σ con respecto al modelo $\Lambda_{CDM}(b=0)$.
- Se observa una inconsistencia del parámetro H_0 estimado en este trabajo, empleando datos de $CC + SnIa^{(+)} + AGN + BAO$, para el modelo Starobinsky con $n=1$, a 1σ con las estimaciones de H_0 de [Riess et al. \(2022\)](#) y la reportada por [Planck Collaboration \(2020\)](#) utilizando el modelo Λ_{CDM} . A 2σ es consistente con el dato reportado por Planck, y se podría decir que también consistente a 2σ con Riess y colaboradores, si se asume como estimación a 2σ de Riess a $H_0 + 2 * (1\sigma)$, ya que no incluyen estimación precisa a 2σ en dicho trabajo.
- En cuanto a las estimaciones para el Modelo Cosmológico Estándar propias de esta tesis, se observa consistencia a 1σ con la estimación del parámetro H_0 del proyecto Planck ([Planck Collaboration, 2020](#)) e inconsistencia a 1σ con la estimación de [Riess et al. \(2022\)](#), si se excluye la marginalización propuesta por [Camarena & Marra \(2021\)](#). Si en el análisis se incluye dicha marginalización, ocurre exactamente lo contrario. Es decir, consistencia a 1σ para H_0 con [Riess et al. \(2022\)](#) e inconsistencia a 1σ con [Planck Collaboration \(2020\)](#).
- Con respecto a otras estimaciones para el modelo de Starobinsky $n=1$ realizada por otros grupos de investigación, empleando datos similares, se ven resultados en su mayoría consistentes a 1 ó 2σ . Por ejemplo se observan consistencias a 1σ entre este trabajo y el artículo de [Nunes et al. \(2017\)](#), empleando la compilación $Pantheon$, entre otros datos, y al emplear la nueva compilación $Pantheon^{(+)}$ también hay buen acuerdo con los resultados de [Ravi et al. \(2024\)](#), quienes también la emplean, trabajo aparentemente realizado en simultaneo a la presente tesis.
- En el mencionado artículo ([Ravi et al., 2024](#)), calculan además los estadísticos ΔAIC y ΔBIC , para todos los modelos incluidos en su trabajo, y para cada conjunto de observables. De los cálculos para el modelo Starobinsky ($n=1$), específicamente, empleando $CC + Pantheon^{(+)} + BAO$, por ejemplo, se desprende una preferencia estadística hacia el modelo de comparación ($f(R)_{ST}$) por sobre el modelo de referencia (Λ_{CDM}). Pero esto cambia al incluir el *prior* de H_0 provisto por *SH0ES*, ya que para este caso no hay una preferencia por sobre alguno de los dos modelos. A futuro se calcularán los estadísticos mencionados de manera análoga para el presente trabajo, para analizar si ocurre lo mismo incluyendo o excluyendo la marginalización empleada.

-
- Existe una equivalencia entre la teoría estudiada en el presente trabajo, Starobinsky (n=1) (Starobinsky, 2007) y la teoría Hu Sawicki (n=2) (Hu W. et al., 2007). Ya que la expresión de la $f(R)$ de Hu Sawicki tiene la forma:

$$f(R) = R - 2\Lambda \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\Lambda b}\right)^n} \right)$$

Es fácil ver que Starobinsky n=1, es indistinguible respecto a Hu Sawicki n=2. Por lo tanto, los resultados reportados en esta tesis son válidos y útiles para quienes estudian la teoría de Hu Sawicki. En esa línea, analizando los resultados publicados en Leizerovich et al. (2022) para Hu Sawicki n=1, y las estimaciones obtenidas aquí (Hu Sawicki n=2), concluimos que un incremento en el parámetro n de dicha función $f(R)$, admite mayores valores en la estimación del intervalo de confianza del *parámetro de distorsión* b , obteniendo para Hu Sawicki n=1, $b \leq 0.276 (\leq 0.583)$, mientras que para Hu Sawicki n=2, $b \leq 0.476 (\leq 1.022)$ (ambas estimaciones con datos de CC+Pantheon+AGN + BAO). Es decir, un mayor n , admite un mayor apartamiento respecto a Relatividad General, consistente con los datos observacionales. Es importante aclarar que ambos trabajos difieren en la marginalización empleada, a pesar de usar los mismos datos observables.

- Como trabajo a futuro se propone el reemplazo de la marginalización de Camarena & Marra (Camarena & Marra, 2021), por la implementación de la compilación de datos Pantheon⁽⁺⁾+SH0ES (Brout et al., 2022), la cual no estaba disponible en un primer momento cuando se iniciaron los cálculos de esta tesis, aunque en los resultados aquí expuestos se observa un gran acuerdo entre las 2 alternativas. También se propone realizar un estudio similar al expuesto en este trabajo pero utilizando el modelo $f(R)$ de Tsujikawa (Tsujikawa, 2008).

Bibliografía

- Abbott et al. ., 2019, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 483, 4866
- Abbott T., et al., 2022, *Physical Review D*, 105
- Alam et al ., 2017, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 470, 2617
- Alam S., et al., 2021a, *Physical Review D*, 103
- Alam S., et al., 2021b, *Physical Review D*, 103, 083533
- Aldrovandi R., Pereira J. G., 2013, Teleparallel Gravity: An Introduction. Vol. 173, doi:10.1007/978-94-007-5143-9,
- Amarzguioui M., Elgarøy Ø., Mota D. F., Multamäki T., 2006, *Astron.Astrophys*, 454, 707
- Amendola et al. ., 2007a, *Physical Review D*, 75, 083504
- Amendola et al. ., 2007b, *Physical Review Letters*, 98, 131302
- Amon A., et al., 2022, *Physical Review D*, 105, 023514
- Armendariz-Picon C., Mukhanov V., Steinhardt P. J., 2000, *Physical Review Letters*, 85, 4438–4441
- Armendáriz-Picón C., Damour T., Mukhanov V., 1999, *Physics Letters B*, 458, 209–218
- Asaka T., Iso S., Kawai H., Kohri K., Noumi T., Terada T., 2016, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2016, 123E01
- Ata et al. ., 2018, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 473, 4773
- Avni Y., Tananbaum H., 1982, *ApJ*, 262, L17
- Bahcall N. A., 1999, *Science*, 284, 1481
- Bargiacchi G., Benetti M., Capozziello S., Lusso E., Risaliti G., Signorini M., 2022, Quasar cosmology: dark energy evolution and spatial curvature ([arXiv:2111.02420](https://arxiv.org/abs/2111.02420))
- Basilakos S., Nesseris S., Perivolaropoulos L., 2013, *Physical Review D*, 87
- Bautista et al. ., 2017, *A&A*, 603, a12
- Bengochea G. R., 2011, *Physics Letters B*, 695, 405–411
- Bengochea G. R., León G., Okon E., Sudarsky D., 2020, *European Physical Journal C*, 80, 18
- Bengochea G. R., León G., Perez A., Sudarsky D., 2023, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2023, 011
- Bernal J. L., Smith T. L., Boddy K. K., Kamionkowski M., 2020, *Physical Review D*, 102, 123515
- Bessa P., Campista M., Bernui A., 2022, *The European Physical Journal C*, 82
- Betoule M., et al., 2014, *A&A*, 568, A22
- Bevington et al. ., 1969, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences
- Borghi N., Moresco M., Cimatti A., 2022, *The Astrophysical Journal Letters*, 928, L4
- Brans C., Dicke R. H., 1961, *Physical Review*, 124, 925
- Brout D., et al., 2022, *ApJ*, 938, 110
- Bunge ., 2018, *Foundations of Science*,
- Caldwell R. R., Linder E. V., 2005, *Physical Review Letters*, 95, 141301
- Camarena D., Marra V., 2021, *MNRAS*, 504, 5164

- Cao S., Zajaček M., Panda S., Martínez-Aldama M. L., Czerny B., Ratra B., 2022, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 516, 1721
- Capone M., Ruggiero M. L., 2010, *Classical and Quantum Gravity*, 27, 125006
- Capozziello S., de Ritis R., Marino A. A., 1997, *Classical and Quantum Gravity*, 14, 3243
- Capozziello S., Martin-Moruno P., Rubano C., 2010, *Physics Letters B*, 689, 117
- Cappellaro E., 2022, *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 45, 549
- Casimir H. B. G., 1948, *Indag. Math.*, 10, 261
- Chiba T., 2003, *Physics Letters B*, 575, 1
- Chiba T., Smith T. L., Erickcek A. L., 2007, *Physical Review D*, 75
- Chuang et al. ., 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426, 226
- Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S., 2006, *International Journal of Modern Physics D*, 15, 1753
- Costa A. A., Olivari L. C., Abdalla E., 2015, *Physical Review D*, 92
- D'Agostino et al. ., 2019, *Physical Review D*, 100
- D'Agostino et al. ., 2020, *Physical Review D*, 101
- Dainotti M. G., et al., 2022, *The Astrophysical Journal*, 931, 106
- De Felice A., Tsujikawa S., 2010, *Living Reviews in Relativity*, 13, 3
- De La Cruz-Dombriz et al. ., 2016, *Physical Review D*, 93, 1
- Dicke R. H., 1962, *Physical Review*, 125, 2163
- Dodelson S., Schmidt F., 2020, *Modern Cosmology*. Elsevier Science, <https://books.google.com.ar/books?id=GGjfywEACAAJ>
- Dolgov A. D., Kawasaki M., 2003, *Physics Letters B*, 573, 1
- Eddington A. S., 1919, *The Observatory*, 42, 119
- Eddington A. S., 1930, *MNRAS*, 90, 668
- Einstein A., 1915a, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp 831–839
- Einstein A., 1915b, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp 844–847
- Einstein A., 1917, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp 142–152
- Eisenstein et al. ., 1998, *The Astrophysical Journal*, 496, 605
- Eisenstein et al. ., 2008, *Physics Today*, 61, 44
- Ellis G. F. R., Maartens R., MacCallum M. A. H., 2012, *Relativistic Cosmology*
- Erickcek A. L., Smith T. L., Kamionkowski M., 2006, *Physical Review D*, 74, 121501
- Farrugia C. R., Sultana J., Mifsud J., 2021, *Phys. Rev. D*, 104, 123503
- Faulkner T., Tegmark M., Bunn E. F., Mao Y., 2007, *Physical Review D*, 76, 063505
- Feynman R. P., 1949, *Phys. Rev.*, 76, 749
- Flanagan É. É., 2004, *Physical Review Letters*, 92, 071101
- Friedmann A., 1922, *Zeitschrift für Physik*, 10, 377
- Gil-Marín H., et al., 2020, *MNRAS*, 498, 2492
- Hinshaw G., et al., 2007, *apjs*, 170, 288
- Hu W. et al. ., 2007, *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 76, 1
- Hubble E., 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- Jaffe R. L., 2005, *Physical Review D*, 72
- Jaime L. G., Jaber M., Escamilla-Rivera C., 2018, *Phys. Rev. D*, 98, 083530
- Jimenez R., Loeb A., 2002, *The Astrophysical Journal*, 573, 37
- Jin X.-h., Liu D.-j., Li X.-z., 2006, *arXiv e-prints*, pp astro-ph/0610854
- Josset T., Perez A., Sudarsky D., 2017, *Physical Review Letters*, 118, 021102

- Kaluza T., 1921, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, pp 966–972
- Kazin et al ., 2014, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 441, 3524
- Khadka N., Ratra B., 2021a, *MNRAS*, 502, 6140
- Khadka N., Ratra B., 2021b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 510, 2753
- Klein O., 1926, *Zeitschrift fur Physik*, 37, 895
- Kumar S., Nunes R. C., Pan S., Yadav P., 2023, *Phys. Dark Univ.*, 42, 101281
- La Franca F., Bianchi S., Ponti G., Branchini E., Matt G., 2014, *ApJ*, 787, L12
- Lahav O., Liddle A. R., 2022, The Cosmological Parameters (2021) ([arXiv:2201.08666](https://arxiv.org/abs/2201.08666))
- Landau S. J., Benetti M., Perez A., Sudarsky D., 2022, Cosmological constraints on unimodular gravity models with diffusion ([arXiv:2211.07424](https://arxiv.org/abs/2211.07424))
- Leizerovich ., 2020, PhD thesis, Universidad de Buenos Aires
- Leizerovich M., Kraiselburd L., Landau S., Scóccola C. G., 2022, *Physical Review D*, 105, 103526
- Lemaître G., 1927, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47, 49
- León G., 2022, *Classical and Quantum Gravity*, 39, 075008
- Li X., Keeley R. E., Shafieloo A., Zheng X., Cao S., Biesiada M., Zhu Z.-H., 2021, *MNRAS*, 507, 919
- Linder E. V., 2009, *Physical Review D*, 80, 123528
- Luongo O., Muccino M., Colgáin E. , Sheikh-Jabbari M., Yin L., 2022, *Physical Review D*, 105
- Lusso E., et al., 2020, *A&A*, 642, A150
- Makowski D., Ben Shachar M., Lüdecke D., 2019, *The Journal of Open Source Software*, 4, 1541
- Matarrese et al. ., 2011, Dark Matter and Dark Energy: A Challenge for Modern Cosmology. Vol. 370, [doi:10.1007/978-90-481-8685-3](https://doi.org/10.1007/978-90-481-8685-3),
- Miller C. J., Nichol R. C., Batuski D. J., 2001, *Science*, 292, 2302
- Moffat J. W., 2006, *jcap*, 2006, 004
- Moresco M., 2015, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 450, L16
- Moresco et al. ., 2012, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012, 006
- Moresco et al. ., 2016, *JCAP*, 05, 014
- Multamäki T., Vilja I., 2006, *Physical Review D*, 74, 064022
- Negrelli ., 2019, PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata
- Negrelli C., Kraiselburd L., Landau S., Scóccola C. G., 2020, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020, 015–015
- Neveux R., et al., 2020, *MNRAS*, 499, 210
- Nojiri S., Odintsov S. D., 2003, *Physics Letters B*, 576, 5
- Nunes et al. ., 2017, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017, 005
- Olmo G. J., 2005, *Physical Review Letters*, 95, 261102
- Ostriker J. P., Steinhardt P. J., 1995, *Nature*, 377, 600
- Particle Data Group et al., 2022, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022, 083C01
- Perez A., Sudarsky D., 2019, *Physical Review Letters*, 122, 221302
- Perez et al. ., 2023, New Phenomena and New States of Matter in the Universe, [doi:https://doi.org/10.1142/11847](https://doi.org/10.1142/11847).
- Perlmutter S., et al., 1999, *ApJ*, 517, 565
- Phillips M. M., 1993, *ApJ*, 413, L105
- Planck Collaboration ., 2020, *A&A*, 641, A6

- Ravi K., Chatterjee A., Jana B., Bandyopadhyay A., 2023, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 527, 7626
- Ravi K., Chatterjee A., Jana B., Bandyopadhyay A., 2024, *MNRAS*, 527, 7626
- Riess A. G., Breuval L., 2023, *arXiv e-prints*, p. [arXiv:2308.10954](https://arxiv.org/abs/2308.10954)
- Riess et al ., 1998, *The Astronomical Journal*, 116, 1009
- Riess A. G., et al., 2016, *ApJ*, 826, 56
- Riess et al ., 2018, *The Astrophysical Journal*, 855, 136
- Riess A. G., et al., 2022, *ApJ*, 934, L7
- Risaliti G., Lusso E., 2015, *ApJ*, 815, 33
- Risaliti G., Lusso E., 2019, *Nature Astronomy*, 3, 272
- Robertson H. P., 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 822
- Ross et al ., 2015, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449, 835
- Rubin V. C., Ford W. K. J., 1970, in Becker W., Kontopoulos G. I., eds, Vol. 38, *The Spiral Structure of our Galaxy*. p. 61
- Schwarz J. H., 2000, *arXiv e-prints*, pp [hep-ex/0008017](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0008017)
- Schwarz J. H., 2011, in Zichichi A., ed., *Predicted and Totally Unexpected in the Energy Frontier Opened by LHC*. pp 335–371, [doi:10.1142/9789814340212_0012](https://doi.org/10.1142/9789814340212_0012)
- Scolnic et al ., 2016, *The Astrophysical Journal*, 822, L35
- Scolnic et al ., 2018, *The Astrophysical Journal*, 859, 101
- Scolnic D., et al., 2022, *ApJ*, 938, 113
- Scott D., Smoot G., 2004, *Cosmic Background Radiation Mini-Review* ([arXiv:astro-ph/0406567](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0406567))
- Shakura N. I., Sunyaev R. A., 1973, *A&A*, 24, 337
- Shapiro I. I., 1964, , 13, 789
- Signorini M., Risaliti G., Lusso E., Nardini E., Bargiacchi G., Sacchi A., Trefoloni B., 2023, *Astronomy & Astrophysics*, 676, A143
- Simon et al ., 2005, *Phys. Rev. D*, 71, 123001
- Solomon R., Stojkovic D., 2022, , 2022, 060
- Sotiriou T. P., Faraoni V., 2010, *Reviews of Modern Physics*, 82, 451
- Soussa M. E., Woodard R. P., 2004, *General Relativity and Gravitation*, 36, 855
- Starobinsky A. A., 1980b, *Physics Letters B*, 91, 99
- Starobinsky A. A., 1980a, *Physics Letters B*, 91, 99
- Starobinsky A. A., 2007, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 86, 157
- Stern et al ., 2010, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010, 008
- Sultana J., Melia F., Kazanas D., 2019, *Physical Review D*, 99, 103505
- Svensson R., Zdziarski A. A., 1994, *ApJ*, 436, 599
- Tananbaum H., et al., 1979, *ApJ*, 234, L9
- Thiemann T., 2007, in Stamatescu I.-O., Seiler E., eds, , Vol. 721, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. p. 185, [doi:10.1007/978-3-540-71117-9_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71117-9_10)
- Tripp R. D., 1998, *Astronomy and Astrophysics*, 331, 815
- Tsujikawa S., 2008, *Physical Review D*, 77
- Walker A. G., 1937, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42, 90
- Wang Q., Zhu Z., Unruh W. G., 2017, *Physical Review D*, 95, 103504
- Watson D., Denney K. D., Vestergaard M., Davis T. M., 2011, *ApJ*, 740, L49
- Weinberg S., 1989a, *Reviews of Modern Physics*, 61, 1
- Weinberg S., 1989b, *Reviews of Modern Physics*, 61, 1
- Will C. M., 2018. Cambridge University Press, [doi:10.1017/9781316338612](https://doi.org/10.1017/9781316338612), <https://doi.org/10.1017/9781316338612>

- Zamorani G., et al., 1981, *ApJ*, **245**, 357
Zhang et al. ., 2014, *Res. Astron. Astrophys.*, **14**, 1221
Zwicky F., 1933, *Helvetica Physica Acta*, **6**, 110
de Sitter W., 1917, *MNRAS*, **78**, 3
du Mas des Bourboux H., et al., 2020, *ApJ*, **901**, 153