notas de matemática

LES FORMULES EXCLUES DANS L'ALGORITHME DE PLANARITE DE LEMPEL, EVEN ET CEDERBAUM, I.

L. Oubiña et C. Martínez Favini-Dubost

Nº 41 1983

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

LES FORMULES EXCLUES DANS L'ALGORITHME DE PLANARITE DE LEMPEL, EVEN ET CEDERBAUM, I.

L. Oubiña et C. Martinez Favini-Dubost

Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Matemática, C.C. 172, 1900 La Plata, Argentina.

Abstract. Lempel, Even et Cederbaum have presented an algorithm for testing graph planarity which is based on t-graphs and their formulas. We replace the t-graphs by graphs called bushes with the following property: they can be embedded in the plane so that all articulation points lie on the exterior face. We define reducible bushes as reducible t-graphs and characterize them by forbidden formulas.

Résumé. Lempel, Even et Cederbaum ont présenté, comme test de planarité, un algorithme basé sur les t-graphes et leurs formules. On remplace ici les t-graphes par des graphes appelés arbustes qui ont la propriété suivante: ils admettent une representation plane où tons les point d'articulation sont sur la face extérieure. On définit les arbustes réductibles comme les t-graphes réductibles et on les caractérise par des formules exclues.

1. INTRODUCTION

Dans [4] Lempel, Even et Cederbaum présentent un algorithme qui détermine si un graphe biconnexe est planaire. Cet algorithme consiste en deux parties: la primière est un numérotage des sommets du graphe par ce qu'ils appellent une

st-fonction, une fois choisie une arête (s,t); la seconde est un algorithme basé sur un système de formules.

Even et Tarjan donnent [3] un nouvel algorithme pour trouver une st-fonction et Booth et Lueker, dans [2], donnent une implémentation de la seconde partie en représentant formules par PQ-arbres.

L'objet du présent article est, en situant les t-graphes de [4] dans le contexte des graphes W-extérieurs, d'obtenir les formules exclues, du théorhème (4.1), dont l'absence caractérise les graphes planaires.

Pour ce faire, on formalise la construction d'un graphe biconnexe G de n sommets, donné dans [4], au moyen d'une suite de sous-graphes $H_1,\ldots,H_n$ telle que G est planaire si et seulement si, pour tout i, $1\leq i\leq n-1$, H_i admet une représentation plane où tous les points d'articulation sont sur la frontière d'une même face. Ces sous-graphes, que l'on appelle arbustes, sont W-extérieurs (tous les sommets d'un ensemble W sont sur la frontière d'une même face).

En disant que l'arbuste H_i est réductible si H_{i+1} est aussi un arbuste, on caractérise les arbustes réductibles par sous-graphes exclus, comme cas particulier des graphes W-extérieurs. De là on déduit une caractérisation par sous-formules exclues, en définissant la formule d'un arbuste comme celle d'un t-graphe.

Dans la seconde partie de cet article, on présentera un algorithme, basé sur les formules exclues, qui détermine si un arbuste est réductible et deux algorithmes qui le complètent: l'un de planarité et l'autre de réduction des PQ-arbres.

2. ARBUSTES ET GRAPHES PLANAIRES

Les graphes considérés sont finis, non orientés, sans boucle ni arête

multiple. On utilise les notions de base de [1]. On désigne par V(G) l'ensemble des sommets d'un graphe G.

Soient G un graphe et K un sous-graphe de G. On appelle K-pièce de G, un sous-graphe de G composé de: une arête u de G et ses extrémités, où u n'est pas une arête de K, mais a ses extrémités dans K; ou une composante connexe N du sous-graphe engendré par V(G)-V(H), à laquelle on ajoute les arête de G incidentes à la fois à N et K, et leurs extrémités. Les sommets d'une K-pièce P de G qui sont dans K sont les pieds de P.

On dira qu'un sommet v de K est relié en dehors de K à un sommet v' de G s'il existe une chaîne de G reliant v à v' qui ne contient pas d'autre sommet de K que v.

Soit W un ensemble non vide de sommets de G. On dira que G est plan W-extérieur si G est plan et tout sommet de W est adjacent à la face extérieure. On dira aussi que G est planaire W-extérieur s'il peut être représenté par un graphe plan W-extérieur.

Dans [5] on caractérise les graphes planaires W-extérieurs:

(2.1) Si G est connexe, alors G est planaire W-extérieur si et seulement si G n'admet pas comme sous graphe un graphe K, sub-division de (A) ou (B) de la fig. 1 (K_4 et K_{23} resp.) où les sommets marqués sont dans W on sont reliés en dehors de K à des sommets de W.

(A) (B)

fig. 1

Soit s un sommet de G. Une chaîne de blocs de G d'origine s est une suite de sommets et de blocs de G: $x_0, B_1, x_1, \ldots, x_{n-1}, B_n, x_n, \ldots$ *telle que, 1)* $x_0 = s$, *2) pour tout i,* x_i *et* x_{i+1} *sont des sommets de* B_{i+1}, *3) les sommets* $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ *et les blocs* $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ *sont tous distincts.*

Soit W l'ensemble des point d'articulation de G. On dira que G est un arbuste plan de racine s si G est connexe, plan $W \cup \{s\}$*-extérieur et tel que toute chaîne de blocs maximale d'origine s finisse en un sommet pendant. On dira aussi que G est un arbuste de racine s s'il peut représenté par un arbuste plan de racine s.*

La définition suivante est donnée dans [4].

Soient G un graphe de n sommets et s,t deux sommets distincts de G. Une st-fonction sur G est une bijection f de V(G) sur $\{0, \ldots, n-1\}$ *telle que, 1)* $f(s)=0$ *et* $f(t)=n-1$, *2) pour tout sommet u, distinct de s et t, il existe deux sommets v,w adjacents à u tels que* $f(v) \leq f(u) < f(w)$.

Dans le Théorème a.1 de [4], on démontre que, si G est biconnexe, pour toute paire s,t de sommets distincts de G, il existe une st-fonction sur G.

Soit maintenant G un graphe biconnexe de n sommets, s,t deux sommets adjacents de G et f une st-fonction sur G. Pour tout sommet v, on dira que f(v) est l'étiquette de v et l'om désignera les sommets par leurs étiquettes.

On appelle suite de graphes associées à G par f, la suite $H_1 .., H_n$ *définie de la façon suivante: 1)* H_1 *est le sous-graphe de G engendré par les arête incidentes à s; 2) on suppose* $2 \leq i \leq n$ *et que l'on a défini* H_h *pour tout* $h<i$, *contenant un sommet d'étiquette h. Alors* H_i *est le graphe obtenu de* H_{i-1} *en réalisant les opérations suivantes:*

a) On identifie les sommets de H_{i-1} *étiquetés par i-1 en un sommet* z_{i-1}

auquel on assigne l'étiquette i-1.

b) Pour chaque sommet j adjacent à i-1 dans G, tel que j>i-1, on ajoute un sommet pendant d'étiquette j adjacent à z_{i-1}.

Il est immédiat que, pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, H_i *contient un sommet pendant d'étiquette i et que* H_n *est isomorphe à G.*

On peut démontrer facilement:

(2.2) <u>*Théorème. Soient G un graphe biconnexe, s,t deux sommets adjacents de G et* $H_1,\ldots,H_n$ *la suite associée à G par une st-fonction. Alors G est planaire si et seulement si les graphes* $H_1,\ldots,H_n$ *sont des arbustes de racine s.*</u>

3. *REDUCTIBILITE*

Dans tout ce paragraphe, G désignera un graphe biconnexe; s,t deux sommets adjacents de G et $H_1,\ldots,H_n$ *la suite associée par une st-fonction.*

On utilisera les notions suivantes:

On dira qu'un arbuste H_i *de racine s,* $i<n$, *est* <u>*réductible*</u> *si* H_{i+1} *est aussi un arbuste de racine s.*

On voit immédiatement que si H_{n-1} *est un arbuste de racine s, il est réductible.*

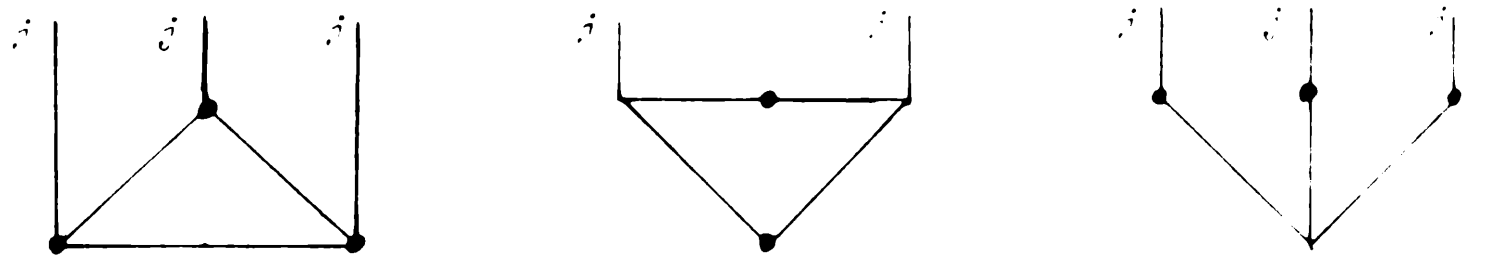
Un sous-graphe de H_i *dont les étiquettes des sommets pendants sont égales à i (resp. distinctes de i) sera appelé* <u>*blanc*</u> *(resp.*<u>*noir*</u>*). Un sous-graphe qui a au moins un sommet pendant d'étiquette i et un autre d'étiquette distincte de i sera appelé* <u>*mixte*</u>*.*

Si B est un bloc de H_i *et x est un point d'articulation de* H_i *qui est dans B, on dira que x est une* <u>*racine blanche*</u> *(resp.* <u>*noire, mixte*</u>*). dans B si l'union des B-pièces de* H_i *de pied x est blanche (resp. noire, mixte).*

On dira qu'un point d'articulation de H_i, $i<n$, est <u>i-stable</u> s'il est aussi un point d'articulation de H_{i+1}. On remarque que x est i-stable si et seulement si il existe une x-pièce noire de H_i.

On notera S_i l'ensemble des points d'articulation i-stables de H_i. Alors, pour tout $i<n-1$, $s \in S_i$ parce que s est adjacent à t dans G.

(3.1) <u>Théorème. Soit H_j un arbuste de racine s, pour $j<n-1$. Alors H_j est réductible si et seulement si H_j ne contient comme sous-graphe aucune subdivision H de (a), (b) où (c) de la fig. 2, où les sommets marqués sont dans S_j ou reliés en dehors de H à des sommets de S_j.</u>



(a) *(b)* *(c)*

fig. 2

En effet, soit W_i l'ensemble des points d'articulation de H_i. Pour tout i, $1 \le i \le n-2$, $W_{i+1} = S_i \cup \{i\}$. Si H_j n'est pas réductible, H_{j+1} n'est pas W_{j+1}-extérieur. Donc, d'après (2.1), H_{j+1} contient un sous-graphe K, subdivision de (A) ou (B) de la fig. 1, où les sommets marqués sont dans $S_j \cup \{j\}$ ou reliés en dehors de K à des sommets de $S_j \cup \{j\}$.

On voit tout d'abord que j est dans K. On obtient un sousgraphe H de H_j en remplaçant le sommet j adjacent aux sommets $x_1,\ldots,x_n$ de K par n sommets distincts $v_1,\ldots,v_n$ adjacents à $x_1,\ldots,x_n$ respectivement. Si K est une subdivision de (A), on trouve (a) ou un graphe qui contient (b); s'il est une sibdivision de (B), on trouve (b) ou (c), toujours dans les conditions de l'enocé. La réciproque est

immédiate d'après (2.1).

D'après le Lemme a.4 de [4] , si Z' et Z" sont les frontières de deux représentation planes W-extérieures d'un graphe biconnexe, alors deux sommets x_1 et x_2 de W séparent deux sommets y_1 et y_2 de W sur le cycle Z' si et seulement si ils les séparent sur le cycles Z". On dira alors que x_1 et x_2 séparent y_1 et y_2.

On remarque que si P est une x-pièce mixte, pour un point d'articulation x de H_j, alors il existe $y \in S_j, y \neq x$, sur une chaîne de P reliant x et un sommet étiqueté par j. En utilisant ce résultat et (3.1) on démontre:

(3.2) Théorème. Soit H_j un arbuste de racine s, pour $j<n-1$. Alors H_j est réductible si et seulement si H_j vérifie les trois propiétés suivantes.

1) *Pour tout point d'articulation x de H_j, il y a au plus deux x-pièces mixtes.*
2) *Deux racines noires ou mixtes d'un bloc B de H_j ne séparent pas deux racines blanches ou mixtes.*
3) *Tout bloc B de H_j admet au plus deux racines mixtes.*

4. FORMULES

Dans [4] on définit les formules d'un t-graphe. C'est presque la même

définition qui peut s'appliquer à un arbuste.

Si H est un arbuste de racine s, on pose H_s=H et, pour un point d'articulation x ≠ s, on appelle H_x l'arbuste de racine x égal à l'union des x-pièces de H qui ne contiennent pas s.

Soit S un ensemble de sommets pendants de H. On appelle <u>arbuste taillé</u> de H par rapport à S, noté H (S), l'union des chaînes de bloc de H qui finissent en un sommets de S.

Soit A un arbuste plan de racine s. On se donne un <u>sous-ordre</u> sur A en assignant un sens de parcours à la frontière de la face extérieure de chaque bloc de A, non réduit à une arête, et un ordre total à l'ensemble des x-pièces de A, pour chaque point d'articulation x de A. Un arbuste plan muni d'un sous-ordre sera appelé <u>arbuste sous-ordonné</u>.

On suppose maintenant que A est un arbuste plan sous-ordonné et que l'on a assigné une étiquette à chaque sommet pendant de A. La formule F de A est définie par récurrence comme suit :

1) Si $P_1,\ldots,P_n$ sont les x-pièces de A_x ordonnées d'après le sous-ordre de A, la formule de A_x est $F_1\circ\ldots\circ F_n$, où F_i est la formule de P_i, $1\leq i\leq n$.

2) Si P est une x-pièce de A_x, B étant le bloc de P qui contient x et $y_1,\ldots,y_n$ les racines de B, distinctes de x, ordonnées d'après le sens assigné à la frontière de B, à partir de x, la formule de P est $F_1\ldots F_n$, où F_i est la formule de l'union des B-pièces de P de pied y_i $1\leq i\leq n$.

3) La formule d'une arête pendant est l'étiquette de son sommet pendant.

Si $F=F_1\circ\ldots\circ F_n$ (resp. $F=F_1\ldots F_n$) on dira que F est un <u>produit</u> (resp. concaténation) est que $F_1,\ldots,F_n$ sont ses <u>facteurs</u> (resp. <u>composantes</u>). Si n > 1 on dira que le produit (resp. concaténation) est <u>propre</u>. Dans les deux cas on

dira que $F_1,\ldots,F_n$ sont les fils de F ; on utilisera aussi l'expression "descendant de F" dans le sens habituel. On interprètera (F) indistinctement comme un produit ou une concaténation impropre.

Les parenthèses sont mises de la façon habituelle et l'on convient que le produit est plus fort que la concaténation, donc par exemple la formule $(F_1F_2)\bullet F_3$ s'écrit plus simplement $F_1F_2\bullet F_3$.

Une sous-formule de F est la formule d'un arbuste taillé de A, muni du sous-ordre induit.

Changer le sous-ordre de A revient à permuter chaque produit de F et inverser, éventuallement, le sens de chaque concaténation (cela veut dire transformer une concaténation $F_1F_2\ldots F_n$ en $F_nF_{n-1}\ldots F_2F_1$). Ces transformatione sont appelées permutations et réflexion respectivement dans [4]. Une formule F' obtenue de cette façon sera dite équivalente à F. En utilisant le Lemme a.4 [4] on voit que l'ensemble des formules de A ne dépend pas de la représentation de H choisie, ce qui permet d'appeler formule de H toute formule de A.

Avec les hypothèses du début du paragraphe 3, soient H_i un arbuste et F_i une formule de H_i. Une sous-formule de F_i correspondant à un arbuste taillé de H_i blanc (resp. noir, mixte) sera appelée blanche (resp. noire, mixte).

Dans le théorème suivant la lettre B' (resp. N') avec ou sans sous-indice, représente une sous-formule blanche ou mixte (resp. noire ou mixte) et la lettre M une sous-formule mixte.

(4.1) Théorème. Soient H_j un arbuste de racine s, pour $j<n-1$ et F_j une formule de H_j. Alors H_j est réductible si et seulement si aucune sous-formule de F_j n'est de l'un des types suivants

1) $M_1\bullet M_2\bullet M_3$

2) $B'_1\,N'B'_2$

3) $B'_*\,(M_1 \perp M_2)$ ou $(M_1 \perp M_2)*B'$

4) $B'_1*(N'_1B'_2N'_2)$ ou $(N'_1B'_2N'_2)*B'_1$

*où les signes * et ⊥ représentent indépendamment un produit ou une concaténation.*

Soit A un arbuste sous-ordonné qui représente H_j, de formule F_j. On suppose que H_j n'est pas réductible. Donc, l'une des conditions de (3.2) n'est pas vérifiée.

1) On suppose qu'il existe un point d'articulation x de A tel qu'il y ait au moins trois x-pièces mixtes P_i, i=1,2,3.

*Si s=x ou s n'est pas dans P_1 ni P_2 ni P_3, on prend l'arbuste taillé déterminé par les sommets pendant de P_1, P_2 et P_3 dont la formule est du type 1). Si par exemple s est dans P_1 seul, P_1 contient un sommet pendant z étiqueté par j. On prend l'arbuste taillé déterminé par z et les sommets pendants de P_2 et P_3 dont la formule est du type 3) où * représente un produit.*

2) On suppose qu'il existe un bloc B de A et deux racines noires ou mixtes n'_1 et n'_2 qui séparent deux racines b'_1 et b'_2 blanches ou mixtes. Soit b=s, si s est dans B, ou bien l'unique pied de la B-pièce de A qui contient s. Si b est distinct de b'_1 et b'_2, on a une sous-formule de F_j du type 2). Dans le cas contraire, on a une formule du type 4).

3) On suppose qu'il existe un bloc B de A et trois racines mixtes m_1, m_2 et m_3 dans B. Soit b comme dans le cas précédent. Si b est distinct des trois racines, on a une formule de la forme $M_1M_2M_3$ qui est du type 2). Dans le cas contraire, on trouve une formule du type $B'*(M_1M_2)$ ou $(M_1M_2)*B'$.

Réciproquement si une sous-formule F de F_j est de l'un des types de l'énoncé, en prenant l'arbuste taillé H de H_j correspondant à F, on voit que si F est du type 1) (resp. 2); 3); 4)), H, et par suite H_j, ne vérifie pas la condition 1) (resp. 2); 1), 2) ou 3); 2)) de (3.2).

REFERENCES

1. *C. Berge, Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris 1970).*
2. *K. Booth and G. Lueker, Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphes and Graph Planarity Using PQ Tree Algorithms, J. Computer Syst. Sci 13 (1976) 335-379.*
3. *S. Even and R. Tarjan, Computing an st-numbering, Theor. Computer Sci. 2 (1976) 339-344.*
4. *A Lempel, S. Even and I. Cederbaum, An algorithm for planarity testing of graphs, in: Rosensthiel, ed. Théorie des graphes. Journées internationales d'étude, Rome 1966 (Dunod, Paris, 1967) 215-232.*
5. *L. Oubiña and R. Zucchello, A generalization of outerplanar graphs, à paraître.*