ANÁLISIS DE LA MOVILIDAD REGIONAL EN ARGENTINA: UN ENFOQUE BASADO EN LAS CADENAS DE MARKOV

Autores: J. L. Arrufat, A. J. Figueras, V. J. Blanco y M. D. de la Mata
(con la colaboración de M.S. Puechagut)[1]
Instituto de Economía y Finanzas (UNC)

I. Introducción:

En términos de países, los datos sugieren que la dispersión relativa (convergencia sigma) en el mundo ha aumentado de manera constante; y los países ricos crecen a tasas mayores que los países pobres (convergencia beta). Pero dado que esta situación "contradice" las predicciones de convergencia implícitas en el modelo de crecimiento de la teoría neoclásica se ha encontrado una salida a la encrucijada teórica con el llamado análisis de la convergencia condicionada a otras variables (además de los habituales niveles de renta *iniciales*, presentes como determinantes en la convergencia absoluta) que justifiquen las diferencias finales de ingreso.

Como sabemos los supuestos que sostienen la presencia de una convergencia "absoluta" se cumplen (y siempre en sentido relativo) más dentro de las fronteras nacionales; por tanto, sería de esperar que la *perfomance* económica de las regiones de un mismo país realmente convergieran en sus niveles de producto por habitante, *pero esta situación no parece cumplirse en el caso de los países de menor desarrollo* (con excepciones, como el caso chileno). Tal circunstancia, esto es la divergencia, está presente en el caso argentino.

En un trabajo anterior (Figueras, Arrufat y Regis, 2003) se llegó a la conclusión, en línea con análisis previos (Porto, 1994; Utrera y Koroch, 1998; Marina, 2001), de rechazar la hipótesis de convergencia absoluta para el PBGpc([2]); si bien no se rechazaba la hipótesis de convergencia condicionada (también en concordancia con las investigaciones señaladas). Como estos trabajos se basaban en datos "en bruto", la inquietud que nos aquejaba era si los resultados se alterarían en presencia de series filtradas de sus variaciones cíclicas. Así acometimos otra investigación (Figueras, Arrufat, de la Mata y Álvarez, 2004), utilizando datos corregidos a partir del filtro de Hodrick – Prescott para eliminar, o, al menos suavizar, las fluctuaciones cíclicas. Se obtuvieron conclusiones muy similares a las anteriores: rechazo de la convergencia absoluta y "aceptación" de la hipótesis de convergencia condicionada (aunque con un menor R^2 y un número más reducido de variables significativas entre las condicionantes).

En base a estos resultados, y en consideración a la crítica de Quah (1996), que sostiene la posibilidad de convergencia pero no hacia un único nivel de ingreso, sino hacia dos niveles opuestos (uno alto y otro bajo), hemos procedido a investigar esta posibilidad; y, siguiendo el esquema de Quah (1993), emplear cadenas de Markov. Lo que resta del presente trabajo se organiza como sigue: **la segunda sección** sintetiza algunos aspectos metodológicos centrales de las cadenas Markov y sus propiedades básicas, dado que se utilizarán dichas cadenas para el estudio de la convergencia entre provincias argentinas. La **tercera sección** hace una brevísima mención de las conclusiones a las que llegaran otros autores sobre esta misma temática. **En la cuarta**, se analiza la convergencia provincial en el período 1980-1998, mientras que **en la sección quinta** se restringe dicho análisis

---

[1] Instituto de Economía y Finanzas. Facultad de Ciencias Económicas (UNC). Avda. Valparaíso s/n. Ciudad Universitaria. 5000 Córdoba. Teléfono: 0351-433-4089 int. 253. Fax: 0351-433-4436. jarrufat@eco.unc.edu.ar, alfi@eco.unc.edu.ar, dolo@eco.unc.edu.ar, valeriablanco03@argentina.com, solepuechagut@yahoo.com. Agradecemos los comentarios y sugerencias recibidos en el Seminario del Instituto de Economí a y Finanzas, especialmente los de Ernesto Rezk, Gastón E. Utrera y Jorge Mauricio Oviedo.

[2] Nuestros trabajos, y en general los anteriores, se refieren a un período de años posterior a 1980[con año de cierre en algunos casos en 1988 (Porto) y otros en 1994 (Koroch & alter, y Marina)]. Nuestra investigación abarca el período 1980-1998, que resulta más relevante por su proximidad temporal, y además por captar los efectos del cambio estructural y técnológico de los noventa.

exclusivamente al período 1986 – 1998. **En la sección sexta**, se presentan las principales conclusiones obtenidas en el curso de esta investigación. Seguidamente se referencia la bibliografía utilizada; y en los Apéndices 1, 2 y 3 se analizan algunos aspectos metodológicos, la ruina del jugador, y, finalmente, la diagonalización de las matrices de Markov para calcular las probabilidades de convergencia a cada estado en el largo plazo.

II. Cadenas de Markov: definición, propiedades y consideraciones básicas para su aplicación al estudio de la convergencia

Presentaremos sintéticamente el Método de cadenas de Markov, y sus propiedades básicas; **lo cual luego será aplicado al estudio la dinámica de los ingresos per cápita de las provincias argentinas** y a la indagación sobre la presencia o no del fenómeno de la convergencia. Para el estudio de la convergencia se hará uso de cadenas de Markov con un número finito de estados y probabilidades de transición estacionarias.

Definiciones previas:

- Un proceso estocástico se define como una colección indexada de variables aleatorias (Xt), en dónde el índice "t" adopta valores de un conjunto T dado. Con frecuencia T se toma como el conjunto de enteros no negativos y Xt representa una característica de interés medible en el tiempo t. En nuestro caso, el proceso estocástico X1, X2, X3… representa el grupo dentro del cual se puede clasificar una provincia según su nivel de PBG per cápita de un año determinado (o su PBG per cápita en relación al promedio nacional). Es decir, **"cada estado" representa una categoría del nivel de ingreso per cápita en el cual puede encontrarse una provincia.**

1. Propiedad Markoviana:

Se dice que un proceso estocástico (X) tiene la **propiedad markoviana** si la probabilidad condicional de cualquier "evento" futuro t+1 es *independiente* del evento pasado, y sólo depende del estado actual del proceso. En este caso suele decirse que el proceso no tiene memoria.

$P\{X_{t+1} = j / X_0 = k_0, X_1 = k_1, ..., X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$, para todo t = 0,1…y toda sucesión i, j, ko, …, kt-1

Las Probabilidades $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$ se denominan **probabilidades de transición**

Para el caso del estudio de la convergencia de los ingresos per cápita provinciales, **esta propiedad implicaría que para determinar la probabilidad de que una provincia pase del estado i (por ejemplo, el más pobre) al j (por ejemplo, el más rico) es independiente de los estados por los cuales ha transitado**. Es decir, no tiene relevancia si ésta provincia alguna vez ha sido rica o si siempre ha sido pobre, sólo importa el estado actual.

2- **Probabilidades de transición de un paso estacionarias**:

Si para cada para de estados i y j:

$P\{X_{t+1} = j / X_t = i\} = P\{X_1 = j / X_0 = i\}$ para toda t = 0, 1....

Se dice que las probabilidades de transición de un paso (entre períodos consecutivos) son estacionarias, es decir, **éstas no cambian con el tiempo** "t". Generalmente estas se denotan p_{ij}.

En el caso del estudio de la convergencia, las probabilidades de transición de un paso se interpretarían como las probabilidades de una provincia de pasar entre un año y otro, por ejemplo, del estado i = 1 (más pobre) al j = 5 (más rico, si la cantidad de grupos fuera 5). Si estas fueran estacionarias ésta probabilidad debe ser independiente del momento del tiempo en que la provincia se encuentre en el estado i.

3- **Probabilidades de transición de n pasos**

La existencia de probabilidades de transición de un paso estacionarias también implica que, para cada i, j y n (n = 0, 1,….),

$$P\{X_{t+n} = j / X_t = i\} = P\{X_n = j / X_0 = i\} \text{para toda t} = 0, 1....$$

Así, p_{ij}^n es simplemente la probabilidad condicional de que la variable aleatoria X, comenzando en el estado i, se encuentre en el estado j después de n pasos. Cuando n = 1, **las probabilidades de transición son las de *"un paso"*.**

4- **Expresión Matricial de las probabilidades de transición.**

$$p^n = \begin{array}{c|cccc} Estado & 0 & 1 & & M \\ \hline 0 & p_{00}^n & p_{01}^n & & p_{0M}^n \\ 1 & p_{10}^n & p_{11}^n & & p_{10}^n \\ & & & & \\ M & p_{M0}^n & p_{M1}^n & & p_{MM}^n \end{array} \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M$$

Donde por filas, se lee **el estado de partida** (o "actual") de la variable aleatoria y por columnas, el estado dentro de n períodos (**estado de llegada**)

Dado que el sistema se encuentra en el estado i en el momento t, deberá encontrarse en alguno de los M estados en t + n, por lo que para todo i y n deberá cumplirse:

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^n = 1$$

Es decir, que la suma horizontal de las filas de lla matriz debe ser igual a la unidad, para todos y cada uno de los estados "actuales". Además, como se trata de probabilidades condicionales, deben ser no negativas

$$p_{ij}^n \geq 0 \quad \text{para toda i y j; n} = 0, 1, 2\ldots.$$

Debe destacarse que la matriz de transición de n pasos puede obtenerse calculando la n-ésima potencia de la matriz de transición de un paso:

$$P^n = P.P....P \quad \text{siendo P la matriz con probabilidades de transición de un paso}$$

5. El paso práctico:

El modelo más sencillo para explicar la dinámica de las distribuciones en el tiempo es una ecuación en diferencias estocástica, que describe la evolución de las distribuciones.

Habitualmente en los trabajos empíricos, como el que encaramos, **esta ecuación en diferencias se discretiza de manera tal de obtener una matriz estocástica.**

Ahora bien, **la obtención de esta matriz estocástica de transición de un paso** en el estudio de la convergencia se realiza de la siguiente manera, según Utrera (1999): en primer lugar se discretiza de alguna manera la distribución de productos per cápita (en M grupos) y se clasifica a los países, regiones o provincias, según sea el caso, en cada grupo para cada uno de los años analizados. Luego, para cada par de años consecutivos es posible formar una matriz cuadrada de orden M en donde cada elemento m_{ij} es igual al porcentaje de países, regiones o provincias que en el primer año se encontraban dentro del grupo i y en el segundo año se encontraba en el grupo j. Si el período bajo análisis es de T años, entonces podrán formarse T-1 matrices de transición. Promediando las T-1 matrices de transición se obtiene la matriz de transición promedio que permite analizar a qué distribución tiende el proceso observado.

Por tanto, los elementos de los vectores fila de estas matrices, que representan la fracción del número de esos elementos (países, provincias o regiones) que se encuentran en cada categoría en el período final "t" no son sino la discretización de la función de densidad que explica la distribución del producto por habitante en el período de referencia.

6. Clasificación de los estados en una cadena de Markov:

<u>Estado accesible:</u> Se dice que el estado j es accesible desde el estado i si $p_{ij}^{n} > 0$ para alguna n distinta de 0. Esto indica que, eventualmente, el sistema pude llegar al estado j si comienza en el estado i.

<u>Comunicación de estados</u>: Dos estados i y j están comunicados si j es accesible desde i e i es accesible desde j. Se dice que dos estados que se comunican pertenecen a la misma clase. **Si todos los estados se comunican, se dice que la cadena de Markov es *irreducible*.**

<u>Estado recurrente</u>: Sea fii la probabilidad de que el proceso regrese al estado i dado que comienza en el estado i. El estado i se llama recurrente si fii=1. **Todos los estados de una cadena de Markov de estado finito irreducible son recurrentes.**

<u>Estado transitorio</u>: Un estado es transitorio cuando fii<1. Es decir, i **es un estado en tránsito si existe una forma de salir del estado i tal que nunca se regrese a ese estado.**

<u>Estado absorbente</u>: un estado es absorbente si la probabilidad de transición de un paso p_{ii} es igual a 1. Dicho de otro modo, es un estado recurrente en un solo paso (es decir, regresa al estado anterior en "un paso"; en otras palabras, no sale de él).

<u>Estado periódico</u>: un estado es periódico, con período k > 1, si k es el menor número tal que todos los caminos que parten de i y llegan a i tienen una longitud que es un múltiplo de k. Si un estado recurrente no es periódico se llama aperiódico.

<u>Cadena Ergódica</u>: Si todos los estados de una cadena de Markov son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre si, la cadena es ergódica.

Cada una de estas propiedades son consideradas en el estudio de la dinámica de la distribución de los PBG per cápita provinciales, ya que el cumplimiento o no de las mismas tienen distintas implicancias en el fenómeno de la convergencia.

7. Probabilidades de estado estacionario:

El comportamiento de largo plazo de una cadena de Markov se describe mediante el estado estacionario. Si P es la matriz de transición de una cadena de Markov ergódica de M estados, entonces, existe un vector $= [\ _{1},\ _{2},...,\ _{M}]$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} {}_1 & {}_2 & & {}_M \\ {}_1 & {}_2 & & {}_M \\ & & & \\ {}_1 & {}_2 & & {}_M \end{bmatrix}$$

El término **probabilidad de estado estacionario significa que** la probabilidad de encontrar el proceso en un cierto estado, por ejemplo j, después un número grande de transiciones tiende al valor ${}_j$, y es independiente de la distribución de probabilidad inicial definida para los estados.

El vector es llamado distribución de estado estacionario o distribución de equilibrio de la cadena de Markov.

En el estudio de la distribución de los PBG per cápita es posible determinar si los mismos muestran una tendencia convergente a través de la obtención de esta distribución de largo plazo.

III. <u>Breve reseña de los resultados de investigaciones anteriores sobre la distribución de largo plazo para las provincias argentinas, siguiendo la metodología de las Cadenas de Markov</u>

En la literatura hemos podido hallar dos trabajos relevantes sobre este tema y herramental:

- **Utrera y Koroch (2000) (en *"Regional Convergence in Argentina: Empirical Evidence")***

En este trabajo, mediante la aplicación de la metodología antes descripta, analizando la evolución de los PBG per cápita entre los años 1961-1994 indican que si bien los resultados no son concluyentes, la evidencia obtenida por los autores indica la posible **existencia de clubes de convergencia de provincias ricas, por un lado, y de provincias pobres, por el otro.** Sin embargo, y **contra los resultados obtenidos por Quah para una muestra de países, estos clubes parecen estar acercándose entre sí, tendiendo a desaparecer**, por lo que la distribución de largo plazo tendría una forma unimodal. No obstante, dentro de esta distribución, continuarían presentándose importantes disparidades regionales.

- **Garrido, Marina, Sotelsek (2000) (en *"Dinámica de la distribución del producto a través de las provincias Argentinas (1970-1995)")***

Los autores, a través de las matrices de transición y las distribuciones de largo plazo obtenidas, corroboran la baja convergencia o la existencia de persistencia antes del 83. Por otro parte, también observan la presencia de convergencia en todo el período 84-95. Sin embargo, **indican que la convergencia se produjo hacia la formación de dos clases.** Este proceso de estratificación se comienza a percibir en el período 84-90 y se enfatiza sobre el período 91-95.

IV. Nuestro aporte empírico (1980 – 1998)

En primer lugar, es de señalar que nuestra tarea se efectuará (como en Figueras, Arrufat, de la Mata y Álvarez, 2004) para el período 1980-1998 y a partir de datos filtrados de la fluctuaciones cíclicas.

Si bien el herramental que brinda el uso de las cadenas de Markov es muy útil en la investigación de la dinámica regional, sus resultados se sostienen en el supuesto central de que el fenómeno bajo estudio posee la ***propiedad markoviana***, una de cuyas características fuerte es **que las probabilidades de transición son estacionarias** (circunstancia profundamente discutible, en especial en el mundo de los procesos sociales, conmocionados como lo están hoy por las alteraciones técnicas y los cambios estructurales consiguientes). Por otro lado, al enfrentar el trabajo empírico se debe definir **cuántas categorías establecer**, así como el criterio que las defina. Este número de categorías es un gran condicionante de los resultados y conclusiones finales.

Con el propósito de abordar el tema en forma didáctica, resumimos el enfoque originado por D. Quah, valiéndonos para ello del desarrollo utilizado por Debraj Ray, en su conocido texto. Ray presenta la siguiente matriz de movilidad, aplicada a un gran número de países (algo más de un centenar) para el período 1962-1984.

$$M = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.12 & 0.12 & 0.00 & 0.00 \\ 0.52 & 0.31 & 0.10 & 0.07 & 0.00 \\ 0.09 & 0.20 & 0.46 & 0.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.24 & 0.52 & 0.24 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Los Estados trabajados se definen a continuación:
Estado 1: en este Estado el ingreso per cápita es menor o igual que ¼de la media mundial.
Estado 2: el ingreso p.c. es mayor que ¼media mundial y menor o igual que ½de la media mundial.
Estado 3: mayor que la ½media mundial y menor o igual que la media mundial.
Estado 4: mayor que la media mundial y menor o igual que 2 veces la media mundial
Estado: mayor que 2 veces la media mundial.

El elemento (i, j) de la matriz M representa la probabilidad de transición del Estado i inicial al Estado j final. En otras palabras, el elemento m_{11} indica que el 76% de los países que inicialmente se encontraban en el Estado 1 permanecen en él. Ahora bien, dicha matriz M presenta los siguientes autovalores (o raíces características):

$$\text{Autovalores}(M) = \begin{pmatrix} 0.201 + 0.075i \\ 0.201 - 0.075i \\ 0.656 \\ 0.943 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que esta matriz de Markov es regular y, por lo tanto, tiene una sola raíz igual a uno, como puede apreciarse con las cifras del vector anterior. Nótese la presencia de un par de raíces complejas conjugadas y el valor elevado de la segunda raíz (0.943), cuya magnitud es relativamente próxima a uno.

Para calcular el equilibrio de largo plazo se ha obtenido la potencia 500 de la matriz de transición (esta potencia se eligió con el propósito de asegurarnos que se haya producido ya el arribo al vector ergódico, o sea que el estado de inicial de partida no tiene relevancia alguna para predecir el estado de largo plazo), llegando al siguiente resultado.

$$M^{500} = \begin{pmatrix} 0.158 & 0.056 & 0.098 & 0.119 & 0.569 \\ 0.158 & 0.056 & 0.098 & 0.119 & 0.569 \\ 0.158 & 0.056 & 0.098 & 0.119 & 0.569 \\ 0.158 & 0.056 & 0.098 & 0.119 & 0.569 \\ 0.158 & 0.056 & 0.098 & 0.119 & 0.569 \end{pmatrix}$$

Deben notarse dos aspectos importantes: **Primero**, lleva muchas iteraciones lograr la convergencia a una matriz cuyas filas sean todas idénticas (siendo cada una de ellas igual al vector ergódico). Ello está, obviamente, influido por el tamaño de las raíces. **Segundo**, en este caso se observan fuertes indicios de polarización dado que el 15.8% de los países converge a largo plazo al estado 1, el 5.6% al 2, el 9.8% al estado 3; 11.9% al estado 4 y el 56.9% al estado 5.

Habiendo ilustrado el uso de esta técnica con el estudio mencionado, ahora pasaremos a centrarnos en el caso argentino, para lo cual se pasa a definir los estratos que hemos tenido en cuenta en nuestro análisis empírico.

En todos los casos se considerará el PBG *per capita* dividido por la media nacional[3], para el período 1980–1998. Los valores corresponden a los obtenidos mediante la aplicación del filtro de Hodrick-Prescott, mediante el cual se eliminaron las fluctuaciones cíclicas, preservando sólo los indicadores de tendencia.

Tabla IV.1

	cota inferior	**cota superior**
Primer grupo	27.621	52.639
Segundo grupo	52.639	73.157
Tercer grupo	73.157	116.598
Cuarto grupo	116.598	422.553

Para que el lector cuente con una perspectiva histórica apropiada, se consignan seguidamente medidas que resumen la posición relativa de las jurisdicciones. En el estrato I, en 1980, el máximo registrado corresponde a la provincia de San Luis con el 49.18% de la media nacional y el mínimo a Formosa con el 28.24% (siendo el cociente entre ambos de 1.742). Las restantes celdas tienen una interpretación análoga. Lo cual significa que Tierra del Fuego registra un ingreso 11.4 veces superior a Formosa (como lo señala la última columna). En el año de cierre del periodo bajo análisis, los extremos de la distribución son ahora CABA y Santiago del Estero, con un leve incremento del cociente.

Tabla IV.2 Medidas resumen. Periodo 1980-1998

	I - 1980	***II - 1980***	***III - 1980***	***IV - 1980***	***I - 1980 a IV - 1980***
Máximo	49.18 (San Luis)	63.10 (Salta)	104.07 (Mendoza)	322.07 (T. del Fuego)	322.07 (T. del Fuego)
Mínimo	28.24 (Formosa)	53.57 (Entre Ríos)	76.97 (Corrientes)	118.60 (La Pampa)	28.24 (Formosa)
Cociente	1.742	1.178	1.352	2.716	11.405

	I - 1998	***II - 1998***	***III - 1998***	***IV - 1998***	***I - 1998 a IV - 1998***
Máximo	52.41 (Catamarca)	65.28 (Entre Ríos)	98.01 (Río Negro)	318.87 (CABA)	318.87 (CABA)
Mínimo	27.62 (Sgo.d.Estero)	54.06 (Salta)	81.49 (La Rioja)	124.72 (La Pampa)	27.62 (Sgo.d.Estero)
Cociente	1.898	1.208	1.203	2.557	11.545

Fuente: Elaboración propia

Para continuar con la ubicación del lector, resumimos los aspectos más destacados de la movilidad observada para cada una de las jurisdicciones, incluyendo algunas medidas de posición, sus valores extremos (y en este último caso los años en que se registran).

[3] Para las series de PBG se utilizó como fuentes datos de CFI y para población los datos provienen de INDEC.

Tabla IV. 3

Provincia	Media	Mediana	Máximo(año)	Mínimo(año)	Estratos(años)	Población (1991)
Buenos Aires	92.66	92.23	102.74 (1980)	89.09 (1987)	III (1980-1998)	12.594.974
Catamarca	49.99	52.41	55.74 (1992)	38.88 (1980)	I (1980-1988, 1998) II (1989-1997)	264.234
Chaco	41.95	41.79	48.05 (1980)	38.08 (1998)	I (1980-1998)	839.667
Chubut	128.08	126.76	149.70 (1980)	117.42 (1991)	IV (1980-1998)	357.189
CABA	269.77	260.96	318.87 (1998)	245.18 (1985)	IV (1980-1998)	2.965.403
Córdoba	87.54	87.93	93.28 (1980)	83.67 (1986)	III (1980-1998)	2.766.683
Corrientes	54.03	50.84	76.97 (1980)	40.43 (1998)	I (1988-1998) II (1982-1987) III (1980-1981)	795.594
Entre Ríos	58.26	57.80	65.28 (1998)	52.47 (1983)	I (1980,1981,1985-1987, 1998) II (1982-1984)	1.020.257
Formosa	28.34	28.46	28.89 (1991)	27.61 (1983)	I (1980-1998)	398.413
Jujuy	45.17	44.71	54.66 (1980)	39.17 (1998)	I (1981-1998) II (1980)	512.329
La Pampa	119.13	118.38	124.72 (1998)	115.89 (1985)	III (1983, 1984, 1987) IV (1980-1982, 1988-1998)	259.996
La Rioja	78.42	82.34	86.24 (1991)	59.16 (1980)	II (1980-1984) III (1985-1998)	220.729
Mendoza	70.24	62.88	104.07 (1980)	59.14 (1995)	II (1986-1998) III (1980-1985)	1.412.481
Misiones	56.76	55.81	62.34 (1998)	52.84 (1984)	II (1980-1998)	788.915
Neuquén	115.05	111.20	139.54 (1998)	99.75 (1980)	III (1980-1990) IV (1991-1998)	388.833
Rio Negro	108.04	107.52	122.85 (1980)	98.01 (1998)	III (1983-1998) IV (1980-1982)	506.772
Salta	57.61	57.56	63.10 (1980)	54.06 (1998)	II (1980-1998)	866.153
San Juan	57.79	57.49	6072 (1991)	55.37 (1983)	II (1980-1998)	528.715
San Luis	154.55	178.8	196.38 (1995)	49.18 (1980)	I (1980) II (1981) III (1982-1984) IV (1985-1998)	286.458
Santa Cruz	200.66	197.13	244.01 (1980)	175.80 (1989)	IV (1980-1998)	159.839
Santa Fe	96.77	97.73	99.87 (1980)	90.01 (1998)	III (1980-1998)	2.798.422
Sgo. del Estero	29.68	29.71	31.13 (1991)	27.62 (1998)	I (1980-1998)	671.988
Tierra del Fuego	350.87	356.94	422.55 (1995)	250.49 (1998)	IV (1980-1998)	69.369
Tucumán	48.63	48.26	62.37 (1980)	37.94 (1998)	I (1986-1998) II (1980-1985)	1.142.105

Fuente: Elaboración propia en base a las series del CFI e INDEC utilizadas.

A partir de estos estratos trabajados, llegamos a las siguientes matrices de transición según tres métodos alternativos.

- **El Método I solamente considera los años extremos** (siendo el Año inicial: 1980 y Año final: 1998).

Tabla IV.4 Estado inicial y estado final. 1980 - 1998

	Estado Final			
Estado Inicial	I	II	III	IV
I	Catamarca, Chaco, Formosa y Santiago del Estero	Ninguna	Ninguna	San Luis
II	Jujuy y Tucumán	Entre Ríos, Misiones, Salta y San Juan	La Rioja	Ninguna
III	Corrientes	Mendoza	Buenos Aires, Córdoba y Santa Fe	Neuquén
IV	Ninguna	Ninguna	Río Negro	Chubut, CABA, La Pampa, Santa Cruz y T. del Fuego

Fuente: Elaboración propia.

La interpretación de la esta tabla de transiciones o de movilidad es la siguiente:

i) Las provincias de Catamarca, Chaco, Formosa, Santiago del Estero y San Luis tenían PBG *per capita* iniciales (1980) comprendidos entre 27.621 y 52.639. Sin embargo, al llegar al final del período analizado (1998), solamente las cuatro primeras permanecían en ese estrato mientras que San Luis había experimentado un notable crecimiento que la ubicaba en el cuarto estrato (ingresos comprendidos entre 116.598 y 422.553). Nótese que no se registraron casos de otras provincias que habiendo partido en 1980 del primer estrato se hayan ubicado en 1998 en el segundo o tercer estratos. Los niveles de ingresos de estos estratos son, respectivamente (52.639 – 73.157) y (73.157 - 116.598).

ii) Las provincias de Jujuy y Tucumán experimentaron entre 1980 y 1998 un deterioro dado que comenzaron el primer estrato y terminaron en el segundo. Por otra parte, Entre Río, Misiones, Salta y San Juan, se mantuvieron en su estrato inicial. La única provincia que mejoró su estrato en este grupo en La Rioja que logró avanzar al tercero.

iii) De las provincias que comenzaron en el tercer estrato en 1980 (Corrientes, Mendoza, Buenos Aires, Córdoba, Santa Fe y Neuquén) sólo Buenos Aires, Córdoba y Santa Fe se mantuvieron en su estrato de origen. En el caso de Corrientes, tuvo un empeoramiento marcado al descender al primer estrato. También Mendoza experimentó un retroceso aunque no tan marcado pues sólo descendió al segundo estrato. Neuquén fue la única jurisdicción que experimentó un cambio positivo puesto que pasó del tercer al cuarto estrato.

iv) Las provincias de Río Negro, Chubut, La Pampa, Santa Cruz y Tierra del Fuego, conjuntamente con la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA), se ubicaron inicialmente en el cuarto estrato. Sólo la provincia de Río Negro experimentó una caída ubicándose en el tercer estrato en 1998 mientras que las restantes jurisdicciones se mantuvieron en su estrato de origen.

A partir de esta información se calculó la matriz de transiciones que se consigna a continuación:

$$M = \begin{pmatrix} 0.800 & 0.000 & 0.000 & 0.200 \\ 0.286 & 0.571 & 0.143 & 0.000 \\ 0.167 & 0.167 & 0.500 & 0.166 \\ 0.000 & 0.000 & 0.167 & 0.833 \end{pmatrix}$$

El elemento correspondiente a la fila ~~i~~-ésima y la columna j-ésima de la matriz M indica la proporción de las jurisdicciones que comenzaron en el estrato i y finalizaron en el estrato j. Así, por ejemplo, el elemento (1, 1) indica que el 80% de las provincias que se encontraban en el primer estrato en 1980 permanecían en él en 1998. Nótese que por la forma en que se construye esta matriz, sus filas contienen elementos no negativos cuya suma es igual a uno en todos los casos. Nótese que la matriz precedente no es tridiagonal (ver Kremer y otros, 2000).

Los autovalores de la matriz M precedente son iguales a 1, 0.684 + 0.132i, 0.684 – 0.132i y 0.337. Sólo tiene, por lo tanto, una raíz unitaria y es una matriz regular. A su vez, el vector ergódico de la matriz M resulta ser igual al siguiente vector fila:

$$V = \begin{bmatrix} 0.255 & 0.071 & 0.184 & 0.490 \end{bmatrix}$$

Su interpretación es **que independientemente del estrato de origen,** el 25.5% de las jurisdicciones convergerán al primer estrato, el 7.1% al segundo, el 18.4% al tercero y, finalmente, el 49.0% al cuarto. Nótese que los porcentajes correspondientes al primer y cuarto estratos son sustancialmente mayores que los asociados al segundo y tercer estratos, lo que resulta indicativo de un alto grado de polarización.

- **Método II: A partir de productos de matrices de transición anuales**

Esta matriz se ha obtenido multiplicando 18 matrices de transición de un período cada una, dando como resultado:

$$MAnuales = \begin{pmatrix} 0.694 & 0.260 & 0.031 & 0.015 \\ 0.408 & 0.394 & 0.131 & 0.067 \\ 0.079 & 0.154 & 0.473 & 0.294 \\ 0.010 & 0.026 & 0.182 & 0.782 \end{pmatrix}$$

En esta matriz todos los estados son accesibles, por lo tanto no es tridiagonal. Al igual que en el resultado del método anterior la matriz de transición es regular y tiene, por lo tanto, un único autovalor igual a 1. El vector ergódico resultante es 0.313, 0.193, 0.176 y 0.318. En consecuencia, el 31.3% de las jurisdicciones convergerán al estrato 1; el 19.3% al 2; mientras que el 17.6% y el 31.8% lo harán a los estratos 3 y 4, respectivamente.

- **Método III: Matriz promedio**

A diferencia de los anteriores este método utilizado por Quah se basa en el cálculo de todas las transiciones anuales, las que se promedian para obtener una matriz de transición de un periodo. La matriz resultante es la siguiente:

$$\text{MPromedio} = \begin{pmatrix} 0.9717 & 0.0283 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0459 & 0.9358 & 0.0183 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0183 & 0.9541 & 0.0276 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0185 & 0.9815 \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz tridiagonal que refleja transiciones de sólo un periodo , por lo que no es estrictamente comparable con las obtenidas con los otros dos métodos. Se requiere entonces calcular la potencia 18 que arroja los siguientes valores.

$$M^{18} = \begin{pmatrix} 0.7038 & 0.2502 & 0.0394 & 0.0066 \\ 0.4055 & 0.4118 & 0.1421 & 0.0406 \\ 0.0639 & 0.1421 & 0.4964 & 0.2976 \\ 0.0072 & 0.0273 & 0.2003 & 0.7652 \end{pmatrix}$$

Esta nueva matriz sí resulta comparable con las anteriores porque también refleja probabilidades de transición de 18 periodos.

El vector ergódico asociado a esta matriz indica que el 31.74%, 19.58%, 19.58% y 29.10% de las jurisdicciones se encontrarán, respectivamente en los estratos I, II, III y IV. Nuevamente se observan aquí señales de polarización aunque sustancialmente más débiles que las que surgen a partir de la aplicación del Método I.

A modo de resumen, se reproducen seguidamente las principales características de las matrices de transición obtenidas por cada uno de los tres métodos antes reseñados. Se incluye asimismo el valor del índice de movilidad propuesto por Shorrocks (1978), cuya fórmula para una matriz M_{nxn} se define como: [n-traza(M)] / (n-1) ([4]).

Tabla IV. 5

	Indice de Shorrocks	Vector Ergódico			
Método I	0.43179	0,255	0,071	0,184	0,490
Método II	0.55270	0,313	0,193	0,176	0,318
Método III	0.54093	0,317	0,196	0,196	0,291

Fuente: Elaboración propia.

En definitiva, los métodos I y II apuntan a una fuerte polarización de las jurisdicciones en los estratos I y IV. Por otra parte, los resultados obtenidos por el Método III apuntan a una polarización mucho menos marcada que los dos anteriores.

La pregunta que surge es cuál de estos métodos mide las probabilidades de transición en forma más satisfactoria. Si comparamos las diagonales principales de las matrices de transición obtenidas por los métodos I y II surge con claridad que los elementos de la diagonal principal de esta última son en todos los casos menores que los de la primera. Estos resultados coinciden con los habitualmente citados en la literatura (Shorrocks,1976, Cantó, 2000, Bárcena Martín, 2004) y revelan que los supuestos implícitos

[4] Si todos los estados son absorbentes, la traza de M coincide con el orden de la matriz, por lo que el índice asumirá el valor cero. Es decir, que cuando no existe movilidad alguna el índice resulta igual a cero, y a medida que aumenta la movilidad aumenta el valor del índice.

en la construcción de las matrices de transición de un solo periodo (homogeneidad, propiedad markoviana de primer orden o sea ausencia de dependencia de estado, probabilidad de transición estacionarias) no se cumplen estrictamente. Por lo tanto y en línea con recomendaciones de la literatura mencionada hemos optado por la alternativa del método I[5]. Cabe aclarar, que en línea con el trabajo de Kremer et al., también se calcularon las transiciones con otros "pasos" temporales (que surgen del factoreo del número total de años bajo estudio([6]), concretamente, 9 transiciones de 2 años, 2 de 9, 3 de 6 y 6 de 3). En ninguno de estos casos se logró mejorar el poder predictivo del modelo, por lo cual finalmente **decidimos adoptar la alternativa de trabajar con una única matriz de movilidad de 18 periodos**.

Debe señalarse que existen algunos aspectos que no parecen ser completamente satisfactorios. Así, por ejemplo, debemos recordar que San Luis experimenta un cambio muy abrupto al pasar desde el estrato I al IV entre 1980 y 1998. No parece razonable presumir que un desempeño tan vertiginoso pudiera repetirse en el futuro sino que, por el contrario, debería considerarse que ha sucedido como consecuencia de un conjunto ciertamente extraordinario de factores. Téngase presente que su PBGpc representaba el 49.18% de la media nacional en 1980, mientras en 1985 ese valor se había elevado a 128.66% y, finalmente, en 1998, alcanza el 195.63%.

Resulta también llamativo el desempeño relativo de Mendoza, que se ubicaba en el estrato 3 en 1980 y sólo en el 2 en 1998. Sin pretender brindar una explicación monocausal del fenómeno señalado, haremos una breve mención a un estudio de Dagnino Pastore, Costa & Asociados (1999), **que analizó el impacto económico que tuvieron sobre la provincia de Mendoza los regímenes de promoción industrial que beneficiaron a las provincias de La Rioja, Catamarca, San Luis y San Juan.** Algunos de los supuestos utilizados por los autores del estudio son los siguientes. **Primero,** hubo un desplazamiento de varias empresas vitivinícolas y procesadoras de alimentos que se relocalizaron en San Juan, cuyo efecto sobre Mendoza se calculó en $ 200 millones anuales (a precios de 1993). **Segundo,** el 50% del crecimiento del sector de minerales no metálicos que se produjo en San Juan hubiera ocurrido en Mendoza, lo que da lugar a un impacto valuado en $ 30 millones anuales. **Tercero,** el 50% del crecimiento de la industria de maquinaria y equipos, radicada en San Juan, hubiera ocurrido en Mendoza, con un costo de $ 50 millones anuales. **Cuarto,** el 25% del incremento de la actividad del sector alimenticio radicado en San Luis hubiera ocurrido en Mendoza, con un impacto estimado en $ 80 millones anuales. **Quinto,** el mismo porcentaje del incremento de la actividad del sector químico radicado en San Luis hubiera tenido lugar en Mendoza, en este caso produciendo un perjuicio de $ 140 millones anuales. **Sexto,** los autores valoran otras instancias de inversiones realizadas en San Luis y San Juan en diversos sectores que acarrearon un costo acumulado significativo para la provincia de Mendoza.

Resumiendo, **el impacto total de la promoción industrial resultó ser de $ 635 millones anuales sobre la producción industrial; mientras que para el caso del sector agrícola los autores estimaron un impacto de $ 90 millones anuales**, totalizando $ 725 millones anuales. Teniendo en cuenta que la población de Mendoza según el censo de 1991, ascendía a 1.412.481 habitantes, ello representa una pérdida *per capita* $ 513 (a precios de 1993) o en términos porcentuales el 9.5% del PBGpc de ese territorio en 1990([7]).

---

[5] La confrontación entre los métodos I y III arroja un resultado diverso según el cual los elementos de la diagonal principal de la matriz de transición obtenida por este último método son sistemáticamente mayores que los del método I (es decir, refleja una muy baja movilidad, lo cual se aleja de los movimientos efectivamente observados). Razón por la cual también se descarta el tercer método.

[6] Apuntemos que son 19 años trabajados, y por tanto el número máximo de transiciones anuales es de 18.

[7] Según los datos de la tabla IV. 3 el PBGpc de Mendoza relativo a la media nacional tiene una media de 70.24 para el periodo 1980-1998 con un máximo de 104.07 en 1980 y un mínimo de 59.14 en 1995. Para una mejor comprensión de la dimensión del impacto, digamos que en 1990 el PBGpc de Mendoza era de 5426 (pesos de 1993). (Figueras A.J 2004,. <u>Argentina vale la pena</u>, Eudecor, Córdoba).

Adoptando una tasa de descuento del 8% anual, suponen un valor actual neto del costo para Mendoza del orden de los $ 9.000 millones bajo el supuesto de que las pérdidas anuales cuantificadas se perpetúan y valores aún superiores cuando se toman en cuenta otras pérdidas, como por ejemplo, las de recaudación fiscal. Esto podría, tal vez, explicar parcialmente el "retroceso" de Mendoza en la jerarquía provincial.

Las transiciones del período 1980 a 1998, tal como se reflejan en las matrices de movilidad aquí calculadas, pueden resultar, en gran medida, excepcionales. No parece aconsejable, por lo tanto, basarse en ellas para realizar predicciones de largo plazo porque implicaría admitir que tales condiciones pueden perpetuarse.

Sin embargo, un intento sencillo de eliminar este posible sesgo, nos llevó a prescindir de San Luis pero los resultados obtenidos fueron decepcionantes. En efecto, las nuevas matrices de transición así recalculadas dieron lugar a un vector ergódico del siguiente tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Según esto, el 100% de las jurisdicciones remanentes deberían ubicarse en el estrato I en el equilibrio de largo plazo. No es necesario abundar en lo absurdo de este resultado si se recuerda que los estratos I a IV se refieren a los porcentajes que representan con relación a la media nacional. No parece existir una argumentación razonable según la cual todas las jurisdicciones se ubiquen por debajo de la media nacional. A la luz de este resultado fue que optamos por restringir el período de análisis, tal como se presenta en la próxima sección.

V. Análisis del período 1986 – 1998.

En razón de las anomalías apuntadas, y a partir de los argumentos señalados, hemos optado por reducir el espacio temporal analizado, tomando como hito inicial el año 1986, habida cuenta de que el meteórico salto jerárquico de San Luis (que puede sesgar fuertemente el análisis y las conclusiones consiguientes) ya se había concretado para tal fecha.

Tabla V. 1
Medidas resumen. Periodo 1986-1998

	I - 1986	*II - 1986*	*III - 1986*	*IV - 1986*	*I - 1986 a IV - 1986*
Máximo	51.38 (Tucumán)	70.87 (Mendoza)	110.34 (Río Negro)	421.94 (T. del Fuego)	421.94 (T. del Fuego)
Mínimo	27.93 (Formosa)	53.32 (Misiones)	78.16 (La Rioja)	143.40 (San Luis)	27.93 (Formosa)
Cociente	1.840	1.329	1.412	2.942	15.107

	I - 1998	***II - 1998***	***III - 1998***	***IV - 1998***	***I - 1998 a IV - 1998***
Máximo	52.41 (Catamarca)	65.28 (Entre Rìos)	98.01 (Río Negro)	318.87 (CABA)	318.87 (CABA)
Mínimo	27.62 (Sgo.d.Estero)	54.06 (Salta)	81.49 (La Rioja)	124.72 (La Pampa)	27.62 (Sgo.d.Estero)
Cociente	1.898	1.208	1.203	2.557	11.545

Fuente: Elaboración propia.

Como puede apreciarse la desigualdad intraestrato, entre 1986 y 1998, sólo ha aumentado para el estrato I. En efecto, la razón entre Catamarca y Santiago del Estero ascendió a 1.898 en 1998 mientras que el cociente entre Tucumán y Formosa era de 1.840 en 1986. Comparando el recorrido completo (distancia entre los estratos I y IV), surgen los siguientes valores. En 1998 el PBGpc de CABA era 11.5 veces superior al de Santiago del Estero, los valores correspondientes para el año de inicio de este periodo (1986) reflejan que el PBGpc de Tierra del Fuego era 15.1 veces mayor al de Formosa.

Tabla V.2 Estado inicial y estado final (1986 – 1998)

	Estado Final – 1998			
Estado Inicial 1986	**I**	**II**	**III**	**IV**
I	Catamarca, Chaco, Formosa, Jujuy, Santiago del Estero y Tucumán	Ninguna	Ninguna	Ninguna
II	Corrientes	Entre Ríos, Mendoza Misiones, Salta y San Juan	Ninguna	Ninguna
III	Ninguna	Ninguna	Buenos Aires, Córdoba, La Rioja, Río Negro y Santa Fe	La Pampa y Neuquén
IV	Ninguna	Ninguna	Ninguna	Chubut, CABA, San Luis, Santa Cruz y T. del Fuego

Fuente: Elaboración propia.

Debe recordarse que se han utilizado los mismos valores de los intervalos para la construcción de las transiciones entre estratos.

La matriz M de transición, referida el período 1986 – 1998, viene dada por la siguiente expresión:

$$M := \begin{pmatrix} \frac{6}{6} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene características especiales:

1. No es tridiagonal como los casos analizados por Kremer et al.
2. Es diagonal por bloques (es decir, los estratos I y II conforman un bloque y los III y IV conforman el otro bloque)
3. En cada uno de bloques hay un estado absorbente, el I en el primer bloque y el IV en el segundo bloque.
4. Los estados correspondientes a los estratos II y III son transitorios.
5. La traza de esta matriz asciende a 3.5476, por lo que el índice de Shorrocks arroja un valor aproximado de 0.15, revelando una bajísima movilidad.

Los autovalores de M, están contenidos en el vector 4 x 1 simbolizado por vv, cuya expresión es la siguiente:

vv = [1, 0.83333, 1, 0.71428571].

Merecen destacarse dos puntos. Primero, todos los autovalores son reales, a diferencia del caso anterior en que había un par de autovalores complejos conjugados. Segundo, y más importante, la matriz M posee dos autovalores iguales a 1 mientras que los restantes (cuyos valores son 0.833333 y 0.71428571) tienen módulo estrictamente menor que uno.

A diferencia de los casos analizados con anterioridad, **las potencias sucesivas de M no convergen a una matriz cuyas filas son idénticas**. En otras palabras, **no se encuentra aquí un único vector de equilibrio de largo plazo** que indique la probabilidad de convergencia a cada estrato, independientemente del estado inicial. Así, por ejemplo, la potencia 1500 de M, resulta ser igual a la siguiente expresión:

$$M^{1500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para predecir la probabilidad de ubicarse en un determinado estrato en el largo plazo, resulta esencial precisar el estrato de origen. Así, por ejemplo, si una jurisdicción parte de los estratos I ó II (filas 1 y 2), se observa una probabilidad igual a 1 de quedar atrapada en el estrato I. Por el contrario, el hecho de tener los estratos III ó IV como estado de origen, llevan a esa jurisdicción a quedar finalmente atrapada en el estrato IV.

Aplicando las cantidades iniciales de territorios en cada estrato (I y II, 6 cada uno, III y IV, 7 y 5, respectivamente, se plantea el siguiente cálculo:

$[6\ \ 6\ \ 7\ \ 5] * M^{1500}$

Lo que produce el siguiente resultado:

Estrato I: 12 unidades jurisdiccionales
Estrato IV: 12 unidades jurisdiccionales

Este resultado revela una forma muy marcada de polarización. Baste recordar que el estrato I contempla aquellas situaciones en que el PBG *per capita* de una jurisdicción representa entre el 27.62% y el 52.64% de la media nacional mientras que el IV tiene como extremos el 116.60% y el 422.55% de la misma media. Los valores pertinentes para los estratos II y III son, respectivamente, de 52.64% a 73.16% y de 73.16% a 116.60%

Seguidamente, y con propósitos de completar la perspectiva, calculamos que el 28.33% de la población se ubicaría (según la estructura del censo de 1991 y teniendo en cuenta el estrato de origen de cada jurisdicción) en el estrato I mientras que el 71.67% lo haría en el estrato IV.

V.1.Análisis de sensibilidad de los resultados obtenidos para el período 1986 – 1998

El análisis precedente debe matizarse teniendo en cuenta que los elementos contenidos en las matrices de transición son sólo estimadores de las verdaderas probabilidades y, por lo tanto, se les pueden asignar errores estándar estimados. Shorrocks (1976) presenta las fórmulas pertinentes para dicho cálculo. Dado que sólo contamos con alrededor de 6 jurisdicciones, en promedio, para cada uno de los estratos de origen en el presente estudio, dichas fórmulas arrojan valores bastante elevados. No parece, desaconsejable, por lo tanto, considerar ligeras variantes para la matriz M del período 1986 a 1998, para investigar la sensibilidad de los resultados ante cambios marginales en las probabilidades de transición, máxime teniendo en cuenta los problemas estadísticos habitualmente encontrados en las series de PBG argentinas. En efecto, como consecuencia de ligeros errores de medición, podría fácilmente darse el caso de que alguna jurisdicción fuera erróneamente ubicada en algún estrato contiguo. Esto sería tanto más probable cuanto más próximos estuvieran los valores de los extremos de los intervalos de clase empleados. Consideraremos dos alternativas, a partir de variaciones en el valor de los elementos (1,2) y (2,3), cuyos impactos se analizan separadamente a continuación:

1) Supondremos inicialmente que la matriz de transición es:

$$M := \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0.0 & 0.0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$$

El único cambio realizado, con relación a la matriz utilizada anteriormente, consistió en reemplazar la probabilidad de transición desde I a II por 1/6. Obviamente, hemos reespecificado la probabilidad de transición de I (en 1986) a I (en 1998) con el valor de sólo 5/6 ahora, en lugar del valor 6/6. El cambio efectuado puede considerarse como relativamente menor.

Los autovalores de esta nueva matriz son:

[1 0.666667 1 0.71428571],

que, al igual que en el caso precedente, muestra la presencia de dos raíces unitarias.

Evaluando las potencias de esta nueva matriz M, obtenemos los siguientes resultados de largo plazo,

$$M^{1500} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante contiene sólo dos vectores diferentes para la convergencia de largo plazo. Según el primero, si una jurisdicción se ubica inicialmente en los estratos I ó II, tiene iguales probabilidad de acceder en el largo plazo a los estratos finales I ó II. El segundo, por el contrario, continúa mostrando el siguiente resultado: si una jurisdicción comienza en cualquiera de los estratos III ó IV, convergerá al estrato IV con probabilidad igual a 1.

Si se utilizan las cantidades iniciales de territorios en cada estrato (6 en I y II, 7 en III y 5 en IV, en 1986), se obtiene las siguientes predicciones para la cantidad de jurisdicciones en cada estrato, en el largo plazo, como resultado del siguiente cálculo:

[6 6 7 5] * M^{1500}

Ello arroja los siguientes valores:

Estrato I: 6 unidades territoriales
Estrato II: 6 unidades territoriales
Estrato III: ninguna
Estrato IV: 12 unidades territoriales

Si se utiliza la estructura poblacional del censo de 1991, la distribución final de la población de las jurisdicciones entre estratos será, en el largo plazo, la siguiente: 14.16%, 14.17% para los estratos I y II, respectivamente y el restante 71.67 % para el estrato IV.

2) Un análisis de sensibilidad alternativo da lugar a la siguiente matriz de movilidad:

$$M := \begin{pmatrix} \frac{6}{6} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$$

El cambio realizado, con relación a la matriz original, consistió en reemplazar la probabilidad de transición desde el estrato II al estrato III, a expensas del elemento (2,2)(por 1/6). Obviamente, hemos reespecificado la probabilidad de transición de II (en 1986) a II (en 1998) con un valor de sólo 4/6 ahora, en lugar del valor 5/6 preexistente. El cambio efectuado puede considerarse como relativamente marginal.

Los autovalores de esta matriz de movilidad son:

[1 1 0.71428571 0.66666667]

Nótese nuevamente la presencia de dos valores iguales a 1.

La convergencia al equilibrio de largo plazo se establece a partir de los vectores fila de la siguiente matriz:

$$M^{1500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Surgen ahora posibilidades más ricas que las que brindaban los análisis anteriores. En primer lugar, la jurisdicción que se ubica en el estrato I al comienzo, termina inexorablemente en el mismo estrato. Segundo, el comenzar en el estrato II da lugar a una probabilidad de ½de ubicarse en el I o en el IV. Tercero, las jurisdicciones que comienzan en los estratos III ó IV convergen inexorablemente al estrato final IV.

Resumiendo estos resultados, puede decirse que debemos esperar que todas las jurisdicciones que comienzan en el Estrato I y la mitad de las que comienzan en el Estrato II converjan al Estrato I final. Al Estrato IV final convergerán el 50% de las jurisdicciones originalmente ubicadas en II y la totalidad de los territorios que inicialmente pertenecían a los Estratos III y IV. Nuevamente podemos apuntar que los resultados que arroja este escenario señalan una forma muy marcada de polarización.

Si utilizamos la cantidad de jurisdicciones iniciales (año 1986 y la estructura poblacional del censo de 1991) en cada estrato: 6 en I, 6 en II, 7 en III y 5 en IV, la estimación de la cantidad de jurisdicciones a la que se convergerá finalmente, surge del siguiente cálculo:

$$[\ 6 \quad 6 \quad 7 \quad 5\ ] * M^{1500}$$

Esto arroja como resultado el siguiente vector fila:

$$[\ 9 \quad 0 \quad 0 \quad 15]$$

Para dar una idea cruda de la posible distribución de la población, y utilizando seguidamente la estructura del censo de 1991, llegamos a las siguientes cifras: el 20.04% es el valor esperado del volumen de la población para el estrato I, mientras que el 79.96% constituye el valor esperado para el estrato IV.

Ahora bien, **tanto el caso original como las dos variantes consideradas apuntan a un elevado grado de polarización**. Para nuestros fines presentes y a falta del conocimiento de una mejor alternativa, optamos por medir dicho grado de polarización a partir del coeficiente de variación (desviación estándar por unidad de media), de donde surgen los siguientes valores:

1. Matriz original: cv = 1.3544
2. Primer caso modificado: cv = 1.2729
3. Segundo caso modificado: cv = 1.5135

Con las cifras a la vista, la impresión es que la mayor polarización se encuentra presente en el último caso tratado.

VI. Conclusiones y consideraciones de cierre.

De acuerdo a nuestra investigación los resultados empíricos sugieren que no todos los estratos definidos resultan ser estados accesibles y comunicados, sino que se da la presencia de estados absorbentes (o recurrentes particulares) y también transitorios. Por otro lado, no nos ha sido posible obtener ningún tiempo de recurrencia.

Centrando nuestra atención en los equilibrios de largo plazo encontramos dos tipos de resultados. Cuando se trabajó con el periodo completo 1980-1998, encontramos como solución un vector ergódico. Es decir, que puede afirmarse que en ese periodo la performance responde a la presencia de una cadena ergódica. Por el contrario, al trabajar el periodo reducido 1986-1998, el cual se selecciona por las razones apuntadas en la sección correspondiente, no se encontró la presencia de una cadena ergódica; y por tanto, la situación final (o resultado de largo plazo) en este caso, sí depende del estado inicial de partida.

Es conveniente señalar que se trabajaron tres casos, la matriz original y dos matrices alternativas con el fin de comprobar la robustez de los resultados. El grado de polarización observado fue en todos los casos muy significativo.

Por lo tanto, puede decirse que sobre la base de la experiencia histórica del periodo 1986 a 1998 no surge evidencia de convergencia, apuntando, por el contrario, a la existencia de dos estados finales ubicados en los extremos de la distribución cuyas participaciones de población fueron analizadas en la sección V (concentrando el cuarto estrato, en todos los casos, entre el 71 y el 80% de la población; y el primero entre el 14 y el 28% de la población).

VII. Bibliografía

- **Akerlof, George A. and Brian G.M. Main, 1981**, "Pitfalls in Markov modeling of the labour markert stocks and flows", *The Journal of Human Resources*, Vol. 16, No 1, Winter, págs. 141-151.
- **Arulampalam, Wiji, A.L. Booth, and M.P. Taylor, 2000**, "Unemployment Persistence", *Oxford Economic Papers*, Vol 52,No. 1, January, págs. 24-50.
- **Arrufat, J.L., A.M. Díaz Cafferata y A.J. Figueras, 2001**. **"Apertura, integración y tendencias regionales de la desocupación en Argentina"**. En Mancha Navarro y Sotelsek Salem (eds) Convergencia económica e integración. Ediciones Pirámide. Madrid.
- **Arrufat, J.L., A.M. Díaz Cafferata y A.J. Figueras, 2000**. "Regional labor markets. The rate of participation. Argentina 1980- 1998". *XXXV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política*. UNC, noviembre.
- **Bárcena Martín, Elena, A. Fernández Morales, B. Lacomba Arias y G. Martín Reyes, 2004**, "Dinámica de la pobreza a corto plazo en España y Reino Unido a través del Panel de Hogares Europeo", *Estadística Española*, Vol. 46, Núm. 157, págs. 461-488.
- **Basharin, Gely P. , Amy N. Langville, and Valeriy A. Naumov, 2002**, "The Life and Work of A. A. Markov", Numerical Solutions of Markov Chains.
- Barro y Sala-i-Martín, 1992, "Convergente", *Journal of Pol. Economy*. 100.
- **Cantó, Olga, 2000**, "Climbing out of Poverty, Falling Back in: Low Income's Stability in Spain", *Applied Economics*, Vol. 34, No. 15, págs. 1903 – 1916.
- Cappellari, Lorenzo and Stephen Jenkins, 2003, "Transitions between unemployment and low pay", May, mimeo.
- **Castells, A y Núria Bosch, 1999**, **Desequilibrios territoriales en España y Europa**, Ariel, Barcelona.
- **Cuadrado Roura, J.R. y C. Iglesias Fernández; 2003,** Cambio sectorial y desempleo, Fundación FFVA, Bilbao.
- **Cuadrado Roura, J.R. y M.Parellada (Ed.),2002, "Regional Convergence in the European Union"**, Ediciones Springer, Heidelberg.
- **Cuadrado Roura, Juan R., B. García-Greciano y J.L Raymond, 1999**. "Regional productivity and productive structure: the Spanish case", *International Science Review*, 22, 1 (abril); 35- 53.
- **Cuadrado Roura, J.R. y T. Mancha Navarro, 1999**. "Política regional y de cohesión". En "Economía de la Unión Europea, tercera edición, Civitas Ediciones.
- **Cuadrado Roura, Juan; T. Mancha Navarro y Garrido Yserte, 1998**. **Convergencia regional en España**, Fundación Argentaria, Madrid.
- **Delfino, José A** (1997): "Educación, capital humano y crecimiento económico en Argentina", Rol de la Educación y la Capacitación en el Crecimiento Económico de la Argentina, Ediciones Eudecor.
- **Díaz Cafferata, AM., AJ. Figueras y JL. Arrufat, 2000**. "Integration and regional restructuring". IVth Arnoldshain Seminar. Frankfurt. Mimeo.
- **Díaz Cafferata, AM. y AJ. Figueras, 1999. La desocupación en Argentina: una visión regional**. Ed. CECYT de la FACPCE, Buenos Aires.
- **Díaz Cafferata, A.M. y J. Fornero, 2003,** Tendencias y quiebres del grado de apertura exportador de Argentina, *XXXVIII Reunión Anual de la AAEP*, Mendoza.
- **Dagnino Pastore, Costa & Asoc., 1999**, Impacto económico de los regímenes de promoción industrial en La Rioja, Catamarca, San Luis y San Juan, Buenos Aires.
- **Esteban, J., 2000**. "Regional convergence in Europe and the industry mix: a shift share analysis". *Regional Science and Urban Economics*, Vol 30, N3.

- **Fiel,** 2003, El ambiente de negocios de las provincias, Bs.As., FIEL.
- **Figueras, A.J. y A.M. Díaz Cafferata, 2001**(**a**). "La dimensión regional del desempleo". En Figueras y Díaz Cafferata, Nuevas Lecturas de Política Económica Argentina. Ed Eudecor. Córdoba.
- **Figueras, A.J., A.M. Díaz Cafferata y J.L. Arrufat, 2002, "**Análisis del Desempleo Regional: dificultades de oferta o de demanda", *XXXVII Reunión Anual de la* AAEP, Tucumán.
- **Figueras, A.J., J.L. Arrufat, R.L. Descalzi y A.A. Rubio, 2002;** Regional Analysis Based on Indicators, IV Arnoldshain Seminar,
- **Figueras, A.J., J.L. Arrufat y P.J. Regis, 2003, "**El fenómeno de convergencia regional : una contribución", *XXXVIII Reunión Anual de la AAEP*, Mendoza.
- **Figueras, A.J., J.L. Arrufat, M. Salto y A.A. Rubio, 2003;** Mercados Laborales Regionales: un nuevo estudio de oferta y demanda, JFP, Córdoba.
- **Figueras, A.J, J.L. Arrufat, M.D. De la Mata y S. Álvarez, 2004, "**Convergencia Regional: une estudio sobre indicadores de tendencia", *XXIX Reunión Anual de la AAEP*, Bs. As, noviembre.
- **Friedman, M. 1992, "**Do old fallacies ever die?", *J. of Economic Literature*, Vol.XXX.
- **Garrido Yserte, Rubén, 2002, Cambio Estructural y desarrollo regional en España**, Ed. Pirámide.
- **Garrido,Y., A. Marina y D. Sotelsek, 2002;** "Dinámica de la distribución del producto a través de las provincias argentinas (1970-1995)", *XXXVII Reunión de la AAEP*, Tucumán.
- **Grossman, Stanley I.** (2000), Álgebra lineal – Quinta Edición, McGraw-Hill, México.
- **Hillier, F. y G. Lieberman, G., 1997,** Introducción a la investigación de operaciones, Mc.Graw Hill., Mex.
- **Hodrick, R.J. Y E.C. Prescott, 1997**, "Postwar U.S. Business Cycles: an empirical investigation", *J. of Money, Credit and Banking,* 29.
- **Kangasharju, Aki, 1999,** "Relative economic performance in Finland: regional convergence", *Regional Studies*, Vol.33, págs. 207-217.
- **Kemeny, John G. y Snell, J. (1960)**: "Finite Markov Chains", J. Van Nostrand Company, Princeton, N. Jersey.
- **Kremer, Michael, A. Onatski, and J. Stock, 2000**, "Twin Peaks or Lake Wobegon? Testing Hypotheses On the Dynamics of World Income Distribution", March, mimeo.
- **Krugman, P., 1991**, "Increasing returns and economic geography", *J.P.Economy*, 99, págs.183-199.
- **Krugman, P.**,1995, **Development, geography and economic theory,** MIT. Hay traducción castellana de Ed.Bosch.
- **Marina, A. , 2001,** Convergencia económica en Argentina, en Mancha N. & Sotelsek.
- **Moreno, R. y E. Vayá, 2002**, Econometría espacial: nuevas técnicas, Investigaciones Regionales, Asociación Española de Centros Regionales, U. de Alcalá; Otoño.
- **Quah, D.**, 1993; "Galton´s fallacy and tests of the convergence hypothesis", *Scand. J. of Economics*, Vol 95, No.4.
- **Quah, Danny T.** (1995a): "Convergence empirics across economies with (some) capital mobility", Discussion Paper No. 257, Centre For Economic Performance, August.
- **Quah, Danny T.** (1995b): "Regional Convergence clusters across Europe", Discussion Paper No. 274, Centre for Economic Performance, December.
- **Quah, Danny T.** (1996a): "Empirics of economic growth and convergence", European Economic Review, Vol.40, No.6, June.
- **Quah, Danny T.** (1996b): "Twin peaks: growth and convergence in models of distribution dynamics", *The Economic Journal*, Vol.106, No.437, July.
- **Quah, Danny T.** (1997a): "Empirics for growth and distribution: stratification, polarization, and convergence clubs", Discussion Paper No. 324, Centre for Economic Performance, January.

- **Quah, Danny T.** (1997b): “Regional cohesion from local isolated actions: I. Historical outcomes”, Discussion Paper No. 378, Centre for Economic Performance, December.
- **Quah, Danny T.** (1997c): “Regional cohesion from local isolated actions: II. Conditioning”, Discussion Paper No. 379, Centre for Economic Performance, December.
- **Ray, Debraj, 1998**, Economía del desarrollo, Antoni Bosch, Barcelona.
- **Redwood, J.**,1991; Reversión de polarización, ciudades secundarias y eficiencia en el desarrollo: una visión aplicada al Brasil, Revista Eure 32
- **Sala-i-Martín, X.,** 1999; **Apuntes de Crecimiento Económico,** Ed. Bosch, Barcelona.
- **Shorrocks, AF.** (1976), “Income mobility and the Markov assumption”, *The Economic Journal*, Vol 86, págs. 566-578.
- **Shorrocks, A.F.** (1978), “The measurement of mobility”, *Econometrica*, Vol. 46, págs. 1013-1024.
- **Simon, Carl P. and Lawrence Blume,** 1994, Mathematics for Economists, W.W. Norton, New York.
- **Stewart, Mark B. and Joanna K. Swaffield, 1999**, “Low Pay Dynamics and transition Probabilities”, *Economica*, Vol. 66, No. 261, February, págs. 23-42.
- **Utrera, G.E. y J. Koroch, 1998**, **“**Convergencia: evidencia para provincias argentinas”, *XXXII Reunión Anual de la AAEP*, Mendoza.
- **Utrera, G.** (1999): “El crecimiento económico en Latinoamérica”, *XXXIV Reunión Anual de la AAEP*, Rosario.
- **Utrera, Gastón E. y Javier A. Koroch** (2000): “Regional Convergente in Argentina: Empirical Evidence”, *XXXV Reunión Anual de la AAEP*, Córdoba.
- **Willington, Manuel** (1998): “Un análisis empírico del crecimiento económico regional en Argentina”, Estudios, IERAL, Año XXI, No.84, Enero-Marzo.

Apéndice 1
Aspectos metodológicos

A continuación reseñamos brevemente los aspectos más destacados de la metodología empleada en algunos trabajos de investigación para cubrirse de los riesgos que plantean probabilidades de transición que están afectadas por dependencia de estado, heterogeneidad de los individuos cuyas transpones se estudian y por el control de las condiciones iniciales.

Cappellari, Lorenzo y Stephen P. Jenkins (2003). Los autores argumentan que existe un marcado interés en el Reino Unido por cuantificar el posible grado de existencia de un ciclo que involucre las transiciones entre bajos salarios y falta de ingresos (“low pay / no pay cycle”). En otras palabras, el fenómeno por el que los trabajadores alternen entre períodos de bajos salarios y otros en que se encuentren desempleados. ¿En qué medida los individuos que reciben bajos salarios tienen mayor probabilidad de quedar desempleados que aquellos otros que reciben salarios elevados? A la inversa, ¿tiene los desocupados una mayor probabilidad de obtener un salario bajo antes que un salario alto en caso de conseguir empleo? Los autores estiman un modelo econométrico explicativo de las transiciones las transiciones anuales entre el desempleo, el empleo con bajos salarios y empleo con salarios altos. Para ello emplean un modelo de cadenas de Markov de primer orden que contempla la endogeneidad de las condiciones iniciales, el posible sesgo de selección para la obtención de empleo y el hecho de que la salida de la muestra podría tener un carácter no aleatorio (*sample attrition*, como se la conoce en la literatura de habla inglesa). Los datos que utilizan provienen del *British Household Panel Survey* que contiene datos anuales de personas de sexo masculino para el período comprendido entre 1991 y 2000. Los resultados más importantes que obtuvieron los autores apuntan a que los tres posibles sesgos de selección antes mencionados deben tenerse en cuenta para analizar las transiciones experimentadas en el mercado laboral. Así, por ejemplo, los varones con empleos de bajos salarios tienen una mayor probabilidad de quedar desempleados que los que tienen empleo con salarios elevados, mientras que los desempleados tienen mayores probabilidades de conseguir trabajos con bajos salarios en comparación con las personas que se desempeñan con salarios elevados. Las transiciones observadas entre el desempleo y los bajos salarios se asocian fuertemente con la existencia de bajas calificaciones educativas. También encontraron evidencia empírica de que la propia experiencia en estados de desempleo o salarios bajos incrementa la probabilidad de quedar atrapado en esos estados, tratándose en este caso de un efecto adicional al que proviene de tener en cuenta los efectos de la heterogeneidad individual. En otras palabras, encuentran evidencias empíricas significativas en torno a la existencia de heterogeneidad individual, en primer término, y, en segundo lugar, de dependencia de estado (*state dependence*). Esta última indica que el mero hecho de haber experimentado episodios desfavorables en el mercado de trabajo en el pasado aumenta la probabilidad de sufrir nuevos episodios adversos en el futuro, una vez controlados los efectos de la heterogeneidad individual.

Arulampalam, Boot y Taylor (2000). Los autores utilizan técnicas de datos de panel para estimar los efectos de la incidencia del desempleo para hombres mediante el empleo del *British Household Panel Survey*. Algunos aspectos econométricos importantes involucran la heterogeneidad individual no observable, la dependencia de estado genuina y el problema que plantean las condiciones iniciales, todas las cuales son objeto de un tratamiento apropiado. Se encuentra fuerte evidencia empírica que apunta a la existencia de dependencia de estado que está en línea con los efectos previstos en la teoría del desempleo con cicatriz (*scarring theory of unemployment*), según la cual, la experiencia pasada de un episodio de desempleo tiene, para el individuo que la sufre, implicancias negativas sobre sus perspectivas laborales futuras. Los hallazgos empíricos llevan a sugerir que deben implementarse políticas que atenúen la incidencia del desempleo de corto plazo porque ellas traerán aparejada una reducción de la tasa natural de desempleo de equilibrio.

Apéndice 2
La ruina del jugador.
Una aplicación sencilla de las cadenas de Markov de primer orden.

Ejemplo sencillo. Dos jugadores (A y B). La suma de sus capitales es igual a 4. Si A comienza con capital igual a cero, cae en estado absorbente porque no se puede apostar $1 sin contar con él.
Si A comienza con $1, enfrenta una probabilidad de 0.50 de arruinarse y también de 0.50 de contar con $ 2.
Si A comienza con $ 2, enfrenta una probabilidad de 0.50 de quedarse con sólo $1 y también de 0.50 de contar con $ 3.
Si A comienza con $ 3, enfrenta una probabilidad de 0.50 de quedarse con sólo $ 2 y también de 0.50 de contar con $ 4.
Si A comienza con $ 4, significa que B está en bancarrota (su capital es $ 0). Como B no puede apostar, existe una probabilidad de 1 de que A siga con sus $ 4.

Matriz de probabilidades de transición

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz M son los siguientes:

$$\text{Autovalores (M)} = \begin{pmatrix} -0.707 \\ 0 \\ 0.707 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que, como la matriz de Markov asociada a este problema no es regular, el cálculo de sus autovalores arroja dos raíces iguales a uno.

Seguidamente se muestran los resultados obtenidos cuando se consideran dos envites sucesivos de este problema:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante el cálculo de las potencias sucesivas se puede demostrar que la matriz de Markov M no es regular, es decir, que no existe ninguna potencia para la cual todos sus elementos sean estrictamente positivos.

El cálculo del equilibrio de largo plazo requiere evaluar las potencias sucesivas de M hasta lograr la convergencia, es decir, que las potencias sucesivas arrojan una matriz cuyos elementos no cambien entre una iteración y la inmediatamente posterior.

Seguidamente se presenta la potencia número 100 de la matriz M.

$$M^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analizando secuencialmente las filas de la matriz precedente resulta inmediato advertir lo siguiente:

i) Si el capital inicial del jugador A es nulo, existe la certeza de que quede en cero pesos puesto que no está permitido apostar sin contar con capital. Quien no tiene capital, por lo tanto, sólo puede permanecer es esa situación aun cuando tiene una probabilidad de ½ de ganar un peso pero igual probabilidad de perderlo. Esta información está contenida en la primera fila de la matriz.

ii) Si el capital inicial del jugador A es de $ 1, enfrente una probabilidad de ¾ de quebrar porque el capital de su oponente es de $ 3 y se apuesta $ 1 en cada envite. Obviamente, la probabilidad complementaria a uno, es decir, ¼ es la probabilidad A termine el juego poseyendo los $ 4 que conjuntamente poseen ambos jugadores antes de empezar a jugar. De darse esta circunstancia, y tratándose de un juego de suma cero, será el jugador B quien acabe en bancarrota (segunda fila de la matriz).

iii) Si el capital inicial es de \$ 2 la situación luce equilibrada. En efecto, hay probabilidad igual a ½de que el jugador A quiebre y la misma probabilidad de que sea B quien caiga en bancarrota (tercera fila de la matriz).

iv) Si el capital inicial de A es de \$ 3 ello conlleva que el de B es de sólo \$ 1. Bajo estas condiciones existe una probabilidad de ¼de que A se arruine y de ¾de que sea B quien vaya a la bancarrota (cuarta fila de la matriz)

v) Finalmente, si el jugador A contara inicialmente con un capital de \$ 4, ello implicaría que el de B es de cero, dado que la suma de ambos capitales iniciales es siempre de \$ 4. Bajo estas condiciones, y siguiendo un razonamiento paralelo al enunciado en i) es el jugador B quien no puede apostar y por lo tanto cambiar su situación. Por lo que respecta a A, no pudiendo tampoco apostar, el único resultado posible es continuar con su capital de \$ 4 (quinta fila de la matriz).

El punto central a destacar es que las sucesivas potencias de la matriz de Markov M no dan lugar a una matriz cuyas filas son todas idénticas. El equilibrio de largo plazo al que se tiende depende, por consiguiente, del estado inicial.

Por lo demás, el modelo matemático adoptado para el estudio de este problema clásico es perfectamente adecuado. En efecto, no está aquí presente el problema de heterogeneidad, según el cual es posible que distintos individuos (jurisdicciones o territorios en nuestro caso) tengan distintas probabilidades de transición entre estratos. Además tampoco surge el problema de errores de medición que podrían implicar una asignación errónea de los individuos a cada estrato. Por último, el supuesto de que las probabilidades de ganar y perder son iguales a ½en cada envite, independientemente de la historia del juego está plenamente garantizado. No hay entonces ningún lugar en este problema para considerar el uso de modelos alternativos, tales como una matriz de Markov de un orden superior al uno o a la introducción de la dependencia de estado (*state dependence*) en cualquiera de sus formas.

Apéndice 3
DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES DE MARKOV Y CÁLCULO DEL EQUILIBRIO DE LARGO PLAZO

Trabajaremos a partir de la siguiente matriz de movilidad o transición

$$M := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0.0 & 0.0 & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0.0 & 0.0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Dada la matriz M anterior, se miden las probabilidades de transición de los estratos I a IV entre 1980 y 1998. Como corresponde a una matriz de Markov, se puede comprobar inmediatamente que la suma de sus cuatro filas es igual a uno. Asimismo, se advierte que no es simétrica, pero, como se mostrará seguidamente, es diagonalizable.

Sus autovalores son iguales a: 1, 0.6838275 + 0.13177917i, 0.6838275 - 0.13177917i y 0.33710691, que se almacenan en el vector vv. Los cuatro elementos del vector ocupan las posiciones (0,0), (1,0), (2,0) y (3,0), respectivamente. Nótese que se ha usado la convención de denominar cero la primera fila y cero la primera columna. La matriz de Markov definida en M es regular porque tiene una sola raíz unitaria, siendo las restantes de módulo menor que 1.

Se define a continuación la matriz diagonal D. Esta matriz contiene los autovalores de M, en el orden antes indicado.

Se define a la matriz P, cuyas columnas contienen los autovectores de M transpuesta, cuya expresión es:

$$P = \begin{pmatrix} 0.43506232 & 0.74384961 & 0.74384961 & 0.06152676 \\ 0.12181745 & -0.12217+0.28666i & -0.12217-0.28666i & -0.55417119 \\ 0.31324487 & -0.30905+0.09672i & -0.30905-0.09672i & 0.77912588 \\ 0.83531966 & -0.31263-0.38338i & -0.31263+0.38338i & -0.28648145 \end{pmatrix}$$

Usando el procedimiento habitual, se puede factorear M’ (transpuesta a M), como sigue:

P*D*inv(P) = M’ (la transpuesta de M), o, alternativamente, al transponer este resultado, la matriz MM = (P*D*inv(P))’. Como se puede observar, este factores de MM a partir de P, D y la inversa de P reproduce correctamente la matriz M original.

La ventaja que reporta esta forma de expresar M, a través de MM, es que resulta bastante sencillo evaluar las potencias de M, incluyendo las “raíces cuadradas, cúbicas, etc”.

Evaluaremos seguidamente, la matriz Dmedio, que se obtiene al elevar los autovalores de M a la potencia un medio, como sigue:

$$\text{Dmedio} := \begin{bmatrix} (\text{vv}_{0,0})^{0.5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\text{vv}_{1,0})^{0.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\text{vv}_{2,0})^{0.5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\text{vv}_{3,0})^{0.5} \end{bmatrix}$$

Resulta sencillo evaluar MMedio, matriz tal que satisface: MMedio*MMedio = MM. Suele decirse de MMedio, por lo tanto, que constituye la “raíz cuadrada matricial” de MM. Existen algunos programas de computación, tales como MATLAB, que realizan el cálculo correspondiente a MMedio a partir de la aplicación de la función sqrtm a la matriz MM.

MMedio = (P*Dmedio*inv(P))’

La matriz MMedio, así construida, resulta ser igual a:

$$MMedio = \begin{pmatrix} 0.89500999 & 1.02220e-03 & -7.41192e-03 & 0.11137974 \\ 0.16811925 & 0.74789751 & 0.10135778 & -0.01737455 \\ 0.0930166 & 0.11620635 & 0.69177216 & 0.09900489 \\ -4.71632e-03 & -7.34483e-03 & 0.10466447 & 0.90739668 \end{pmatrix}$$

Nótese que el procedimiento elegido para factorear la matriz presenta algunas anomalías numéricas. En efecto, surge inmediatamente que no se garantiza que la “raíz cuadrada”, que es a su vez una matriz de Markov, contenga elementos mayores o iguales a cero. Sin embargo, los 4 elementos, sobre un total de 16, que no cumplen con esa condición son muy pequeños y se encuentran en el orden de los milésimos. Para investigaciones futuras pensamos abordar una forma más satisfactoria de realizar estos cálculos, imponiendo la restricción de contar con elementos no negativos, pero se debe enfatizar que no se deriva de aquí ninguna dificultad para el análisis por cuanto el cuadrado de esta matriz reproduce la matriz de Markov original. Por otra parte, tanto a partir de MMedio como de la matriz MM, se obtienen los mismos vectores ergódicos.

MMedio*MMedio = (P*Dmedio*inv(P))'*(P*Dmedio*inv(P))'

La evaluación del producto anterior resulta en:
MMedio*MMedio = inv(P')*Dmedio*P'*inv(P')*Dmedio*P'

en que se ha tenido en cuenta de Dmedio es una matriz diagonal y por lo tanto simétrica.

MMedio*MMedio = inv(P')*Dmedio*Dmedio*P'
que resulta igual a:
MMedio*MMedio = inv(P')*D*P'
ya que, por definición, Dmedio*Dmedio es igual a D.

Recuérdese que MM = (P*D*inv(P))'
Operando algebraicamente, se obtiene,
MM = inv(P')*D*P' de donde surge, finalmente, que MMedio*MMedio = MM.

Como se advertirá inmediatamente, no existe nada especial en el cálculo de la "raíz cuadrada" matricial de MM, por lo que el procedimiento aquí reseñado puede aplicarse para calcular una "raíz cúbica" matricial de MM o una "raíz enésima" de la misma matriz.

Así, por ejemplo, podemos calcular "la raíz dieciocho" de MM, valiéndonos del siguiente factoreo:

MM18avo = (P*D18avo*inv(P))'

La matriz P aquí empleada es la misma que se definió con anterioridad y D18avo surge de la siguiente expresión:

$$D18avo := \begin{bmatrix} \left(vv_{0,0}\right)^{\frac{1}{18}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(vv_{1,0}\right)^{\frac{1}{18}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(vv_{2,0}\right)^{\frac{1}{18}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(vv_{3,0}\right)^{\frac{1}{18}} \end{bmatrix}$$

Si calculamos la potencia 18 de MM18avo, obtendremos, obviamente, la matriz original MM, tal se muestra a continuación:

$(MM18avo)^{18} = ((P*D18avo*inv(P))')^{18}$

Resulta inmediato comprobar que la expresión anterior da lugar a:

$(MM18avo)^{18}$ = (inv(P')*D*P')
y finalmente, reemplazando en esta fórmula:

$(MM18avo)^{18} = MM$

Las “raíces matriciales” calculadas se refieren a: un medio, un tercio, un sexto, un noveno y un dieciochoavo, cuando se analizan matrices de transición que abarcan el período 1980 a 1998. Téngase presente, que existen datos para 19 años, que dan lugar a sólo 18 transiciones de un período cada una. Alternativamente, se pueden considerar 9 transiciones de dos períodos, 6 transiciones de tres períodos, tres de 6 periodos cada una, dos transiciones de nueve períodos cada una y una única transición de 18 períodos.

Debe enfatizarse, aunque pudiera resultar obvio por construcción, que los vectores ergódicos asociados a cualquiera de la matrices M, MM, MMedio, MMtercio, MMsexto,

Cantidad de matrices	**Cantidad de periodos en cada matriz**	**Potencia de D**
1	18	1
3	6	1/3
6	3	1/6
9	2	1/9
18	1	1/18

MMnoveno y MM18avo son todos idénticos. En el ejemplo que aquí nos ocupa dicho vector ergódico, vector fila de 4 columnas, asume los siguientes valores:

Vector ergódico de M = [0.2551 0.0714 0.1837 0.4898]

Su interpretación es la siguiente: independientemente del estrato inicial en 1980, y manteniéndose constante la matriz M de transición obtenido para todo el período de análisis, el 25.51% de las jurisdicciones, convergerá al estrato I, mientras que el 7.14%, el 18.37% y el 48.98%, respectivamente, lo hará a los estratos II, III y IV, respectivamente.

Cuando se considera el período 1986 a 1998, como sólo hay 13 datos anuales el número máximo de transiciones anuales es de 12. Alternativamente, se pueden tener en cuenta 6 matrices de transición de 2 períodos anuales cada una, tres matrices de cuatro años cada una, cuatro matrices de 3 años, etc.

La enumeración de todas estas combinaciones se consigna en la siguiente tabla:

Cantidad de matrices	**Cantidad de periodos en cada matriz**
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

Por lo que respecta a la potencia pertinente a que debe elevarse la matriz D, el exponente respetivo surge de considerar el recíproco de la cantidad de matrices.

La matriz M de transición, referida el período 1986 – 1998, cuando se emplean los mismos cuatro estratos definidos anteriormente, viene dada por la siguiente expresión:

$$M = \begin{pmatrix} 6/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 5/5 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de M, están contenidos en el vector 4 x 1 simbolizado por vv, cuya expresión es la siguiente: vv = [1, 0.83333, 1, 0.71428571].

Merecen destacarse dos puntos. Primero, todos los autovalores son reales, a diferencia del caso anterior en que había un par de autovalores complejos conjugados. Segundo, y más importante, la matriz M ostenta dos autovalores iguales a 1. Las restantes (cuyos valores son 0.833333 y 0.71428571) tienen módulo estrictamente menor que uno.

La matriz P necesaria para la diagonalización de M, resulta ser, en este caso, igual a:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.70710678 & 0 & 0 \\ 0 & -0.70710678 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.70710678 \\ 0 & 0 & 1 & -0.70710678 \end{pmatrix}$$

Debe notarse que esta matriz P es diagonal por bloques.

D, al igual que antes, contiene sobre la diagonal principal los elementos del vector vv antes definido en el mismo orden indicado.

$$\mathrm{D} := \begin{pmatrix} vv_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & vv_{1,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vv_{2,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & vv_{3,0} \end{pmatrix}$$

Nuevamente es posible expresar MM = M a partir de los siguiente factores:

MM = (P*D*inv(P))’

Se dan aquí por reproducidos todos los comentarios efectuados con anterioridad con relación al cálculo de las “raíces matriciales” de M.

Calculando las potencias sucesivas de M, ya sea directamente o a partir de las “raíces” un medio, un tercio, un cuarto, un sexto y un doceavo, surge una la siguiente situación. A diferencia de los casos analizados con anterioridad, las potencias sucesivas de M no convergen a una matriz cuyas filas resultan ser todas idénticas entre sí. En otras palabras, no se encuentra aquí un vector ergódico que indique la probabilidad de convergencia a cada estrato en el largo plazo, independientemente del estado inicial.