

# CAPÍTULO 4

## Refracción atmosférica

*Laura Isabel Fernández*

La observación astronómica impone coleccionar la radiación electromagnética proveniente de los objetos celestes, y generalmente, los receptores de esa información se ubican en la superficie terrestre. Esta afirmación involucra a todos los instrumentos de observación desde nuestros ojos mirando al cielo estrellado o los telescopios, ambos capaces de captar radiación electromagnética en el rango visible<sup>1</sup>, hasta las antenas que detectan información astronómica en el rango de frecuencias de radio<sup>2</sup>. Lo último también vale para cualquier otra técnica de medición astronómica o geodésica que trabaje en el mismo rango de frecuencias, por ejemplo, los receptores de los sistemas de navegación global por satélite.

El arribo de la información al receptor en Tierra impone que la radiación electromagnética atraviese la atmósfera terrestre. En consecuencia el haz será refractado por la atmósfera y el camino óptico que la señal recorre se verá aumentado con respecto a la trayectoria que se asume rectilínea para su propagación en el vacío. Por este motivo, especialmente para los sistemas de observación que trabajan en frecuencias de radio, se suele referir a la refracción atmosférica sobre la señal como *retraso atmosférico*.

En este Capítulo trataremos los efectos de la atmósfera sobre los observables astronómicos medidos en distintas longitudes de onda, o lo que es lo mismo, medidos en distintos rangos de frecuencia del espectro electromagnético. En particular, trataremos los efectos en el rango visible y en el rango de microondas-radio.

### Refracción atmosférica en el rango visible

La radiación electromagnética en el rango visible que provenga de cualquier objeto celeste debe atravesar la atmósfera antes de llegar al instrumento y/u ojo del observador en la

---

<sup>1</sup> También conocido como rango óptico. Comprende a las longitudes de onda entre 400 y 700 nanómetros

<sup>2</sup> Longitudes de onda mas largas que 1 centímetro (microondas) y tan largas como miles de metros (radio)

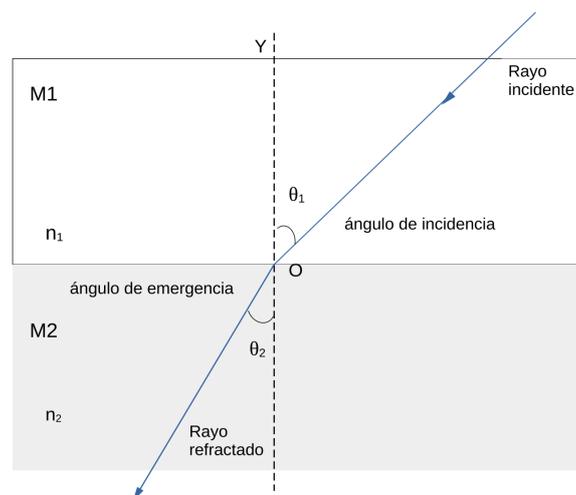
superficie terrestre. Debido a su cruce por la atmósfera, el camino óptico de la señal se modifica por el fenómeno de refracción.

Desde la figura 4.1, recordando que la refracción es el cambio en la dirección de propagación de una onda electromagnética como consecuencia de atravesar dos medios homogéneos (M1 y M2) con distinto índice de refracción (  $n_1$  y  $n_2$  ), si denominamos OY a la dirección perpendicular a ambos medios, la ley de Snell establece que (Miczaica y Sinton, 1967, p.15; Malacara, 2015, p. 34)

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \quad (4.1)$$

siendo  $\theta_1$  el ángulo de incidencia del rayo desde M1 y  $\theta_2$  el ángulo de emergencia del rayo refractado en M2.

**Figura 4.1.**  
*Ley de Snell*



Dado que la densidad del aire disminuye a medida que se incrementa la altura respecto a la superficie terrestre, es usual tratar a la atmósfera como un conjunto de capas esféricas concéntricas y estratificadas. Cada una de estas capas posee sus propias características físicas. En particular cada capa posee su propia densidad e índice de refracción que se asumen uniformes dentro de ella (Smart, 1962 p. 60).

### Corrección aproximada: Modelo de capas plano paralelas

La corrección aproximada por refracción asume modelar la atmósfera según un modelo de capas estratificadas planas y paralelas. La aproximación se justifica en que el efecto de refracción más significativo se produce en la troposfera. En particular, dado que enfocamos este estudio al rango visible, la contribución a la refracción atmosférica desde las otras capas de la atmósfera puede despreciarse (Green, 1985, p. 83). La troposfera es la parte de la atmósfera más próxima a la superficie terrestre, es la más densa y tiene una extensión aproximada de 10 km. (Böhm y otros, 2013, p. 17). Por tal razón, dado que el radio de curvatura de la troposfera es mucho mayor que el espesor de la capa, este enfoque es válido para estimar el efecto de la refracción atmosférica en el rango visual. Sin embargo es obvio que esta aproximación ignora la curvatura de la Tierra, por lo tanto no es válida para cualquier caso. Este tratamiento del problema sólo es aceptable si el objeto observado está muy cerca del cenit (Smart, 1962, p. 60).

Asumimos a la atmósfera compuesta con  $N$  capas planas estratificadas  $C_1, C_2, \dots, C_N$ , cada una de ellas con su respectivo índice de refracción  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{N-1}$ ; siendo  $n_0$  el máximo valor y  $n_{N-1}$  por encima de la capa más alta<sup>3</sup>. Sea  $z$  la distancia cenital topocéntrica de la luz incidente antes de atravesar la atmósfera. El rayo atraviesa las sucesivas capas cambiando su dirección en cada una de ellas. Matemáticamente, el efecto se expresa a través de sucesivas aplicaciones de la ley de Snell y considera que los respectivos valores de los índices de refracción aumentan a medida que la altura disminuye por un crecimiento acorde en la densidad atmosférica (Smart, 1962, p. 61).

Luego de atravesar la troposfera, el rayo refractado alcanzará al observador (O) con una distancia cenital observada  $z_0$  (ver figura 4.2).

$$\begin{aligned}
 n \operatorname{sen} z &= n_{N-1} \operatorname{sen} z_{N-1} \\
 n_{N-1} \operatorname{sen} z_{N-1} &= n_{N-2} \operatorname{sen} z_{N-2} \\
 n_{N-2} \operatorname{sen} z_{N-2} &= n_{N-3} \operatorname{sen} z_{N-3} \\
 n_{N-3} \operatorname{sen} z_{N-3} &= n_{N-4} \operatorname{sen} z_{N-4} \\
 &\dots \\
 n_1 \operatorname{sen} z_1 &= n_0 \operatorname{sen} z_0
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

dado que la cantidad  $n_i \operatorname{sen} z_i$  se conserva en cada nivel, y reemplazando  $n_{N-1}$  quedará

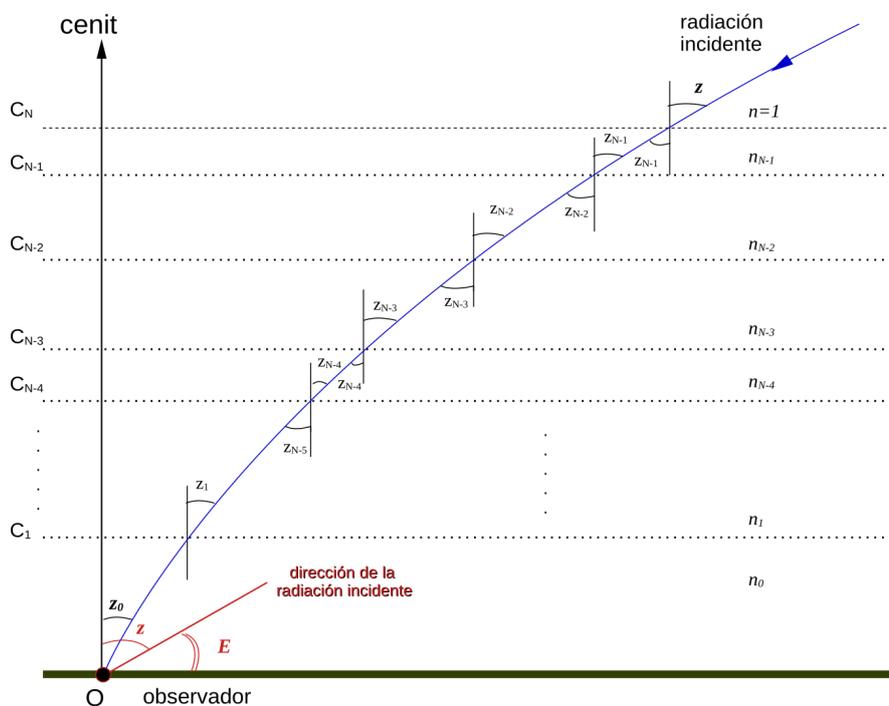
$$\operatorname{sen} z = n_0 \operatorname{sen} z_0
 \tag{4.3}$$

<sup>3</sup> Índice de refracción que corresponde al vacío

donde  $n_0$  es el índice de la refracción en la superficie terrestre y es mayor a 1. Por lo anterior podemos concluir fácilmente que la distancia cenital observada ( $z_0$ ) será menor que la distancia cenital incidente ( $z$ ). Por lo tanto, y a causa de la atmósfera, *el astro será observado más cerca del cenit*. Asimismo, y dado que la refracción ocurre en un plano vertical, el acimut de la fuente no estará afectado (Green, 1985, p. 84).

**Figura 4.2.**

*Esquema de propagación de la radiación en un modelo de atmósfera de capas planas y paralelas*



*Nota.* Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 60), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Denominamos *ángulo de refracción* a la cantidad  $R = z - z_0$ . Reemplazando en la ecuación (4.3), y expresando los ángulos en radianes podemos aproximar como

$$\begin{aligned} \sin(R + z_0) &= n_0 \sin z_0 \\ \sin R \cos z_0 + \cos R \sin z_0 &= n_0 \sin z_0 \\ R \cos z_0 + \sin z_0 &\approx n_0 \sin z_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$R \approx (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 \quad (4.5)$$

Estas expresiones serán válidas sólo al primer orden de  $(n_0 - 1)$  (Green, 1985, p. 84) y bajo todas las restricciones que se mencionaron más arriba. En general, puede aceptarse su validez para distancias cenitales menores a  $45^\circ$  (Smart, 1962, p. 62).

Un análisis un poco más cuidadoso de la ecuación (4.5) advierte que el valor de  $R$  no es una constante dado que el índice de refracción en la superficie terrestre depende tanto de las condiciones atmosféricas locales como de la longitud de onda de la radiación incidente.

Con el objetivo de cuantificar el efecto, suelen proveerse valores válidos para condiciones estándar, esto es: 1013 hPa de presión atmosférica y  $20^\circ$  C de temperatura. Considerando el centro del rango visual del espectro electromagnético, resulta un valor del índice de refracción  $n_0 = 1.002927$  (Woolard y Clemence, 1966, p. 83; Green, 1985, p. 85). De este modo, si llamamos *constante de refracción media* ( $K$ ) al argumento de la tangente de la distancia cenital observada en la fórmula (4.5), y reemplazamos los valores para condiciones estándar quedará (Green, 1985, p. 85)

$$\begin{aligned} R &\approx K \operatorname{tg} z_0 \\ R &\approx 60.4'' \operatorname{tg} z_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nótese que, por razones prácticas,  $K$  fue multiplicada por el factor (206265) con el objeto de expresarla en segundos de arco. Es posible calcular la constante de refracción utilizando datos atmosféricos reales a partir de la aplicación de la ley de Gladstone-Dale que vincula en índice de refracción con la densidad

$$n - 1 = K(\lambda) \rho \quad (4.7)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la radiación incidente y  $\rho$  la densidad del gas (Merzkirch, 1987, p. 118-119). Por lo anterior, si se tratara al aire como un gas ideal

$$n - 1 = K(\lambda) (MP/R_v T) \quad (4.8)$$

donde  $R_v$  es la constante universal de los gases,  $M$  la masa molar,  $P$  la presión atmosférica y  $T$  la temperatura. De modo que generalizando la expresión anterior, podemos escribir

$$n_0 - 1 \propto \left( \frac{P}{760} \right) \left( \frac{1}{t+273} \right) \quad (4.9)$$

donde  $P$  está expresado en [mmHg] y  $t$  en [°C]. Luego en términos de las condiciones estándar<sup>4</sup>, y usando la ecuación (4.9), obtenemos (Green, 1985, p. 85)

$$R \approx 60,4'' \frac{(P/760)}{[1/(t+273)]} \operatorname{tg} z_0 \quad (4.10)$$

## Modelo de capas concéntricas

Hemos visto que el tratamiento de la atmósfera como una sucesión de capas planas constituye una aproximación y su aplicación está limitada a observaciones en un entorno del cenit. Sin embargo, el modelo de capas planas y paralelas puede considerarse como una aproximación válida para  $z \geq 45^\circ$  de un modelo más general que asume a la atmósfera como una sucesión de capas esféricas, concéntricas y estratificadas. Nuevamente, en este modelo de atmósfera radialmente simétrica cada capa ( $i$ ) posee su propio índice de refracción ( $n_i$ ). Por lo tanto, como a medida que crece la altura respecto de la superficie de la Tierra la densidad del aire disminuye, lo mismo hace el índice de refracción hasta llegar al límite  $n=1$ .

Siguiendo la deducción de Smart (1962, p. 62-65), en la figura (4.3), llamamos GOZ la dirección al cenit geocéntrico siendo G el Geocentro. Para 2 capas adyacentes  $C'$  y  $C$ , sean  $n'$  y  $n$  sus respectivos índices de refracción. En el punto A, el rayo incidente desde la capa  $C'$ , entra a la capa  $C$  y emerge de ella refractado en el punto F. Similar al tratamiento anterior, asumiendo que las sucesivas capas estratificadas son finas, este proceso se repite hasta que el rayo refractado alcanza al observador con una distancia cenital geocéntrica  $z_0$ .

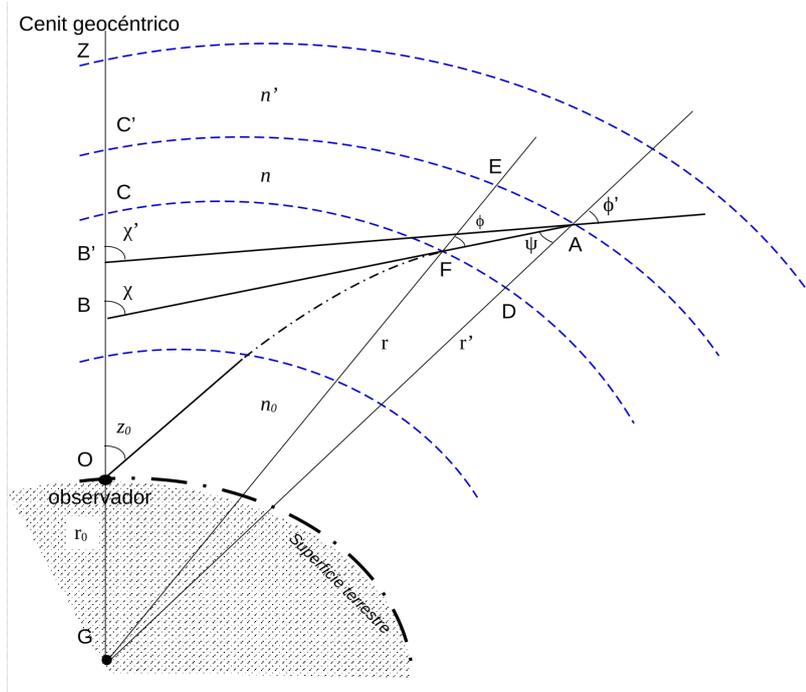
Denominaremos  $r'$ ,  $r$  y  $r_0$  a las distancias geocéntricas de los puntos A, F y la posición del observador; y denominaremos  $\theta'$  y  $\theta$  a los ángulos  $\widehat{AGZ}$  y  $\widehat{FGZ}$ , de tal modo que los puntos A y F poseen coordenadas polares  $(r', \theta')$  y  $(r, \theta)$ , respectivamente. Dado que las direcciones radiales son perpendiculares a cada una de las capas, podemos aplicar la ley de Snell

$$n' \operatorname{sen} \phi' = n \operatorname{sen} \psi \quad (4.11)$$

<sup>4</sup> 760 mmHg=1013 hPa

**Figura 4.3.**

*Propagación de la radiación en un modelo de atmósfera de capas finas concéntricas y radialmente simétrica.*



*Nota.* Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 63), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Considerando el triángulo plano  $GAF$ , el ángulo  $\widehat{AFG} = 180^\circ - \phi$  luego aplicando la ley del seno para triángulos planos quedará

$$r \operatorname{sen} \phi = r' \operatorname{sen} \psi \quad (4.12)$$

Reemplazando  $\operatorname{sen} \psi$  desde la ecuación (4.12) en la fórmula (4.11)

$$nr \operatorname{sen} \phi = n' r' \operatorname{sen} \phi' \quad (4.13)$$

Esta relación se cumplirá en cada par de capas concéntricas hasta alcanzar al observador. Por esta razón, si la capa que contiene al observador y limita con la superficie de la Tierra tiene

índice de refracción  $n_0$ , a partir de (4.13) y aplicando recursivamente la ley de Snell podemos llegar a la fórmula general

$$\begin{aligned}nr \operatorname{sen} \phi &= n_0 r_0 \operatorname{sen} z_0 \\nr \operatorname{sen} \phi &= n_0 a_e \operatorname{sen} z_0\end{aligned}\tag{4.14}$$

donde  $r_0 = a_e$ , el radio ecuatorial terrestre. Dado que queremos encontrar la relación de la refracción con el cambio de la distancia cenital, evaluaremos el cambio relativo a la distancia cenital provocado por el efecto de la refracción de la luz al atravesar la capa C.

La dirección de la luz incidente en el punto A corta la dirección GZ en el punto B' formando el ángulo  $\chi'$ . La dirección de la luz refractada (AF) corta a GZ en el punto B formando el ángulo  $\chi$ . Luego

$$\Delta R = \chi' - \chi\tag{4.15}$$

Denominando  $\Delta \theta = \theta' - \theta$  y asumiendo a C como una capa fina, es válido expresar  $r' = r + \Delta r$  y  $FD = EA = r \Delta \theta$ . Además, esto nos permite asumir que AEF es un triángulo rectángulo plano. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \phi &= \frac{EA}{EF} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{r \Delta \theta}{\Delta r}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Si consideramos al triángulo plano  $AB'G$ , la suma de sus ángulos interiores será

$$\begin{aligned}\phi' + \theta' + (180^\circ - \chi') &= 180^\circ \\ \chi' &= \phi' + \theta'\end{aligned}\tag{4.17}$$

De modo análogo, para el triángulo  $ABG$  vale

$$\chi = \phi + \theta\tag{4.18}$$

Luego reemplazando (4.17) y (4.18) en la ecuación (4.15) y denominando  $\Delta \phi = \phi' - \phi$ , con  $\Delta \phi$  un ángulo pequeño

$$\Delta R = \Delta \phi + \Delta \theta\tag{4.19}$$

Considerando que el índice de refracción  $n=n(r)$  y que  $n$  aumenta a medida que  $r$  disminuye, podemos expresar  $n'=n-\Delta n$ . Luego, reemplazando  $n'$ ,  $r'$  y  $\phi'$  en la ecuación (4.13)

$$(n - \Delta n)(r + \Delta r) \sin(\phi + \Delta \phi) = nr \sin \phi \quad (4.20)$$

Desarrollando el seno de la suma, aproximando convenientemente las funciones trigonométricas de ángulos pequeños expresadas en radianes y despreciando los productos dobles de cantidades infinitesimales quedará

$$\begin{aligned} (nr - r\Delta n + n\Delta r)(\sin \phi + \Delta \phi \cos \phi) &= nr \sin \phi \\ nr \sin \phi - r \sin \phi \Delta n + n \sin \phi \Delta r + nr \cos \phi \Delta \phi &= nr \sin \phi \end{aligned} \quad (4.21)$$

Operando convenientemente sobre esta expresión obtenemos

$$(nr \sin \phi) \left( \frac{-\Delta n}{n} + \frac{\Delta r}{r} + \cotg \phi \Delta \phi \right) = 0 \quad (4.22)$$

Según la ecuación (4.16) podemos reemplazar  $(\Delta r/r) = \Delta \theta \cotg \phi$  en (4.22) y quedará

$$\frac{\Delta n}{n} = (\Delta \theta + \Delta \phi) \cotg \phi \quad (4.23)$$

Usando (4.19)

$$\Delta R = \frac{\Delta n}{n} \operatorname{tg} \phi \quad (4.24)$$

Utilizando (4.14) para expresar  $\sin(\phi)$  como  $\sin \phi = n_0 a_e \sin z_0 / rn$ , luego  $\cos \phi = (rn)^{-1} \sqrt{r^2 n^2 - n_0^2 a_e^2 \sin^2 z_0}$  y reemplazando en (4.24)

$$\Delta R = \frac{\Delta n}{n} \frac{n_0 a_e \sin z_0}{\sqrt{r^2 n^2 - n_0^2 a_e^2 \sin^2 z_0}} \quad (4.25)$$

Recordemos que la fórmula (4.25) me provee la cantidad de refracción que afecta al rayo de luz desde una capa con índice de refracción  $(n - \Delta n)$  al atravesar la capa con índice de

refracción  $n$ . Si integramos la ecuación (4.25) entre los límites 1 y  $n_0$  obtendremos la cantidad total de refracción que afecta el camino del rayo de luz al atravesar la atmósfera.

$$R = n_0 a_e \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \sqrt{r^2 n^2 - n_0^2 a_e^2 \sin^2 z_0}} \quad (4.26)$$

Esta fórmula, que exige conocer la variación local del índice de refracción con la altura, admite integrarse numéricamente y es exacta (Smart, 1962, p 64.; Green, 1985, p. 89).

### Desarrollo de la fórmula de refracción

La resolución de la integral en (4.26) exige considerar la altura de la atmósfera. Sabemos que la constante de refracción media ( $K$ ) tiende a cero con la altura creciente dado que el índice de refracción ( $n$ ) se acerca a 1 a medida que la altura crece (ver ecuación 4.7). Sin profundizar en los cálculos detallados de una altura de escala para la atmósfera en el sitio, consideraremos que la extensión vertical de la atmósfera<sup>5</sup> es una cantidad muy pequeña comparada con el radio ecuatorial terrestre. Por esta razón será válido expresar  $r = a_e + h$  siendo  $h$  una cantidad pequeña (Smart 1962, p.65; Green, 1985, p. 91).

De este modo, si trabajamos sobre el denominador de (4.26) y expresamos  $(r/a_e) = 1 + s$ , con  $s$  una cantidad pequeña, obtenemos

$$\begin{aligned} (r^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{(-1/2)} &= [a_e^2 (1+s)^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \sin^2 z_0]^{(-1/2)} \\ &= a_e^{-1} [(1+s)^2 n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0]^{(-1/2)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

despreciando los términos que involucran  $s^2$ ,

$$\begin{aligned} (r^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \sin^2 z_0)^{(-1/2)} &= a_e^{-1} [(1+2s)n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0]^{(-1/2)} \\ &= a_e^{-1} \left[ (n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0) \left( 1 + \frac{2sn^2}{n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0} \right) \right]^{(-1/2)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

reordenando y desarrollando en serie de Taylor al primer orden

<sup>5</sup> Podemos estimar 10 km para la troposfera y 100 km si incluimos la termosfera recordando que esta última capa no representa un medio dispersivo para la luz visible

$$\begin{aligned} (r^2 n^2 - a_e^2 n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{(-1/2)} &= a_e^{-1} (n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{(-1/2)} \left( 1 + \frac{2 s n^2}{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0} \right)^{(-1/2)} \\ &= a_e^{-1} (n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{(-1/2)} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{2 s n^2}{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

reemplazando convenientemente en (4.26) quedará

$$R = n_0 a_e \text{sen} z_0 \int_1^{n_0} \frac{1}{n a_e \sqrt{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0}} \left( 1 - \frac{s n^2}{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0} \right) d n \quad (4.30)$$

aplicando la propiedad distributiva y ordenando

$$R = R_1 - R_2 \quad (4.31)$$

donde

$$R_1 = n_0 \text{sen} z_0 \int_1^{n_0} \frac{d n}{n \sqrt{n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0}} \quad (4.32)$$

$$R_2 = n_0 \text{sen} z_0 \int_1^{n_0} \frac{s n d n}{(n^2 - n_0^2 \text{sen}^2 z_0)^{3/2}} \quad (4.33)$$

La solución de la integral  $R_1$  es sencilla por el método de sustitución. Denominando  $u = n_0 \text{sen} z_0 / n$ , luego  $du = -n_0 \text{sen} z_0 d n / n^2$  y quedará

$$R_1 = - \int_{n_0 \text{sen} z_0}^{\text{sen} z_0} \frac{d u}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (4.34)$$

luego

$$\begin{aligned} R_1 &= \arcsen \left( \frac{n_0 \text{sen} z_0}{n} \right) \Big|_1^{n_0} \\ R_1 &= \arcsen (n_0 \text{sen} z_0) - z_0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Esta solución será válida sí y solo sí  $|n_0 \text{sen} z_0| < n$ , y dado que  $n_0$  es el máximo valor del índice de refracción esto sólo puede cumplirse para astros localizados en un entorno del cenit,

muy lejos del horizonte. Podemos demostrar que  $R_1$  es equivalente a la corrección aproximada por refracción asumiendo que la atmósfera admite modelarse según un modelo de capas planas y paralelas (Smart, 1962, p. 66).

Sabiendo que  $n_0 > 1$  y expresando  $n_0 = 1 + x$ , con  $x$  una cantidad pequeña, la ecuación (4.35) puede reescribirse como

$$R_1(x) = \arcsen[(1+x)\sen z_0] - z_0 \quad (4.36)$$

Aplicando el teorema de Maclaurin al primer orden quedará

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1(0) + x \left. \frac{dR_1}{dx} \right|_{x=0} \\ &= 0 + x \left. \frac{\sen z_0}{\sqrt{1 - (1+x)^2 \sen^2 z_0}} \right|_{x=0} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned} R_1 &= x \operatorname{tg} z_0 \\ R_1 &= (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como se mencionó más arriba, la expresión (4.38) sólo será válida para distancias cenitales pequeñas y es equivalente a la aproximación de capas planas y paralelas. Es necesario hacer un desarrollo de  $R_1$  en serie de potencias de  $(n_0 - 1)$  hasta el segundo orden (Green, 1985, p. 92) y quedará

$$R_1 = (n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 + \frac{1}{2} (n_0 - 1)^2 \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (4.39)$$

La solución para  $R_2$  exige la aplicación de la ley de Gladstone – Dale para expresar en índice de refracción en términos de la densidad del aire ( $\rho$ ). Expresamos  $n - 1 = c\rho$  siendo  $c$  una constante.

Siguiendo (Smart, 1962, p. 67), consideramos  $n = n_0 = 1$  y  $dn = c d\rho$  en la ecuación (4.33), quedará

$$\begin{aligned} R_2 &= \sen z_0 \int_0^{\rho_0} \frac{sc d\rho}{(1 - \sen^2 z_0)^{3/2}} \\ &= c \operatorname{tg} z_0 \sec^2 z_0 \int_0^{\rho_0} s d\rho \end{aligned} \quad (4.40)$$

De modo análogo, aplicamos la ley de Gladstone – Dale en la superficie y resulta  $n_0 - 1 = c\rho_0$  donde  $\rho_0$  es la densidad del aire en la superficie. Por lo tanto, la constante  $c$  resulta  $c = (n_0 - 1)/\rho_0$ . Por otro lado, recordamos que  $r = a_e + h$  y  $(r/a_e) = 1 + s$ , por lo tanto  $s = h/a_e$ . Reemplazando los valores de  $c$  y  $s$  en (4.40) y resolviendo la integral por partes

$$R_2 = \frac{(n_0 - 1)}{\rho_0} \frac{1}{a_e} \operatorname{tg} z_0 \sec^2 z_0 (h\rho|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \rho dh) \quad (4.41)$$

Nótese que en la superficie terrestre  $h=0$  y  $\rho=\rho_0$ , mientras que en el límite superior de la atmósfera  $\rho=0$ , por lo tanto, el primer término del segundo miembro de (4.41) será nulo. Por otro lado, el término integral de (4.41) representa la masa de una columna de aire de base unitaria que se extiende verticalmente desde la superficie hasta el límite superior de una atmósfera homogénea equivalente. Este término será una función de la temperatura y de la presión atmosférica pero independiente del comportamiento de la densidad con la altura (Smart, 1962, p. 67; Green, 1985, p. 92).

Si definimos la *altura equivalente de una atmósfera homogénea* ( $H_0$ ) (Green, 1985, p. 92),

$$H_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} \rho dh \quad (4.42)$$

Reemplazando (4.42) en la ecuación (4.41)

$$R_2 = -(n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 \sec^2 z_0 \frac{H_0}{a_e} \quad (4.43)$$

Llamando  $H = H_0/a_e$ , resulta

$$R_2 = -(n_0 - 1) \operatorname{tg} z_0 (1 + \operatorname{tg}^2 z_0) H \quad (4.44)$$

Luego usando (4.39) y (4.44) podemos escribir (4.31) como

$$R = A \operatorname{tg} z_0 + B \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (4.45)$$

donde (Woolard y Clemence, 1962, p. 83; Green, 1985, p. 93)

$$\begin{aligned} A &= (n_0 - 1)(1 - H) \\ B &= -(n_0 - 1)\left[H - \frac{1}{2}(n_0 - 1)\right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

siendo  $A$  y  $B$  las *constantes de refracción*. En términos de los valores para las condiciones normales de presión y temperatura de una atmósfera estándar, la fórmula (4.46) puede escribirse como (Green, 1985, p. 94)

$$R = 60,29'' \operatorname{tg} z_0 - 0,06688'' \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (4.47)$$

La determinación de los valores  $A$  y  $B$  exige conocer las condiciones meteorológicas del lugar que afectarán a  $n_0$ . Sin embargo, la estimación de la influencia que estos cambios locales en el estado en la atmósfera ejercen sobre la cantidad de refracción que afecta a la trayectoria de la radiación es muy compleja. Asimismo, debe tenerse en cuenta que los cambios en la gravedad local afectarán el cálculo de la altura equivalente y por lo tanto, también tendrán incidencia en la estimación.

Históricamente, desde el siglo XVII en adelante, se utilizaron las *Tablas de Refracción*<sup>6</sup>. Estos cálculos estaban basados en teorías analíticas, usaban condiciones atmosféricas estándar para el sitio de observación y brindaban estimaciones válidas para distancias cenitales menores a 75° aproximadamente<sup>7</sup>. El lector interesado en la historia y construcción de las tablas de refracción puede consultar el texto de Woolard y Clemence (1966, p. 84-88).

Sin embargo  $A$  y  $B$  pueden estimarse a partir de las observaciones. Efectivamente, aplicando el método de Horrebow - Talcott<sup>8</sup> es posible determinar la latitud geográfica del observatorio a partir de la culminación superior e inferior de estrellas<sup>9</sup>. Si en las correspondientes ecuaciones de observación se expresa la distancia cenital verdadera ( $z$ ) del objeto en tránsito como  $z = z_0 + A \operatorname{tg} z_0 + B \operatorname{tg}^3 z_0$ , siendo  $z_0$  la distancia cenital observada,  $A$ ,  $B$  y la latitud de la estación serán incógnitas que pueden determinarse estadísticamente a partir del método de cuadrados mínimos (Smart, 1962 p. 68-69; Woolard y Clemence, 1966 p. 87; Green, 1985, p. 93).

## Efecto de la refracción en las coordenadas ecuatoriales

<sup>6</sup> Existen tablas de refracción estimadas por Tycho Brahe y mejoradas por Kepler. Sin embargo, estas tablas empíricas no fueron basadas en el estado físico de la atmósfera

<sup>7</sup> no abordaremos en este texto el tratamiento de la refracción sobre orto y ocaso de los astros

<sup>8</sup> también conocido como método de alturas iguales

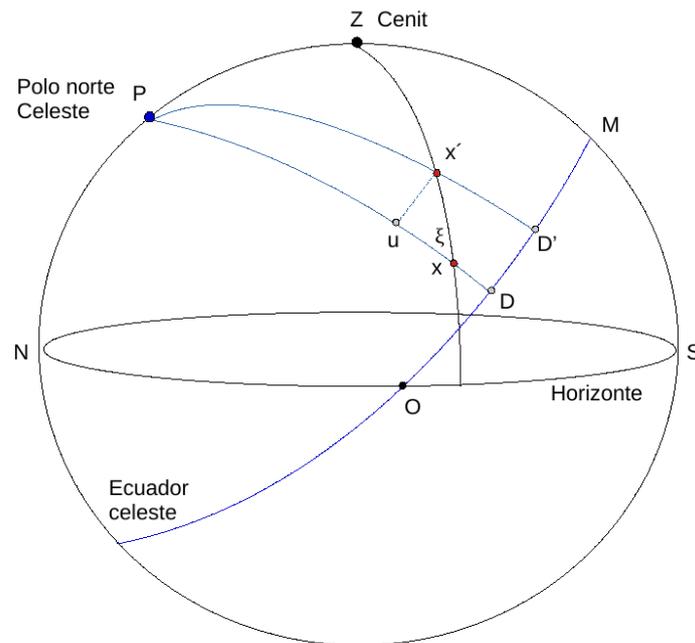
<sup>9</sup> En general, estrellas circumpolares

Siguiendo Smart (1962, p. 71) repasaremos la corrección aproximada por refracción atmosférica en coordenadas ecuatoriales. Consideremos una estrella de coordenadas ecuatoriales locales  $(t, \delta)$  ubicada en la posición  $x$  de la esfera celeste (ver figura 4.4), a causa de la refracción atmosférica se desplazará hacia el cenit hasta ocupar la posición  $x'$  de coordenadas  $(t', \delta')$ , donde  $t' = t + \Delta t$  y  $\delta' = \delta + \Delta \delta$ .

Sea  $z$  la distancia cenital de  $x$  y  $z'$  la distancia cenital de  $x'$ , respectivamente. Trazaremos por el punto  $x'$  un arco del paralelo de declinación  $\delta'$  hasta intersectar perpendicularmente al círculo meridiano que pasa por  $x$  en el punto  $u$ . Dado que el desplazamiento  $xx'$  es muy pequeño, podemos considerar que el triángulo  $xux'$  es un triángulo rectángulo plano.

**Figura 4.4.**

*Efecto de la refracción atmosférica en las coordenadas ecuatoriales*



*Nota.* Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 71), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Denominaremos  $\xi$  al ángulo paraláctico  $P \hat{x} Z = \xi$ ,

$$ux' = xx' \operatorname{sen} \xi \quad (4.48)$$

$$ux = xx' \cos \xi \quad (4.49)$$

Dado que  $xx' = R$ , aproximaremos  $xx' = K \operatorname{tg} z$  con  $K$  la constante de refracción. Reemplazando en (4.48) y (4.49) quedará

$$ux' = K \operatorname{tg} z \operatorname{sen} \xi \quad (4.50)$$

$$ux = K \operatorname{tg} z \cos \xi \quad (4.51)$$

Consideremos el triángulo esférico  $PZx$ , que tiene por lados  $Px = (90^\circ - \delta)$ ,  $Zx = z$  y  $PZ = (90^\circ - \phi)$ , siendo  $\phi$  la latitud del sitio de observación. De la figura 4.4 puede verse que  $Z\hat{P}x = t$ , el ángulo horario. Dado que  $Px' = 90^\circ - \delta'$ , y que  $Pu = Px'$ , luego

$$\begin{aligned} Px &= Pu + ux \\ 90^\circ - \delta &= 90^\circ - \delta' + ux \\ ux &= \delta' - \delta \\ ux &= \Delta \delta \end{aligned} \quad (4.52)$$

Por otro lado, dado que  $ux'$  es un arco de círculo menor, y sabiendo que  $DD' = MD - MD'$  y aproximando  $\delta' \approx \delta$

$$\begin{aligned} ux' &= D\hat{P}D' \operatorname{sen}(90^\circ - \delta') \\ ux' &\approx DD' \cos \delta \\ ux' &\approx (t - t') \cos \delta \\ ux' &\approx -(\Delta t) \cos \delta \end{aligned} \quad (4.53)$$

Reemplazando (4.51) en (4.52) y (4.50) en (4.53) resulta

$$\Delta \delta = K \operatorname{tg} z \cos \xi \quad (4.54)$$

$$\Delta t \cos \delta \approx -K \operatorname{tg} z \operatorname{sen} \xi \quad (4.55)$$

Aplicando la fórmula del coseno al triángulo  $PZx$  se obtiene

$$\cos z = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t \quad (4.56)$$

Aplicando la fórmula del seno al mismo triángulo esférico quedará

$$\text{sen } \xi \text{ sen } z = \text{cos } \phi \text{ sen } t \quad (4.57)$$

Finalmente, aplicando la fórmula de los 5 elementos resulta

$$\text{sen } z \text{ cos } \xi = \text{sen } \phi \text{ cos } \delta - \text{cos } \phi \text{ sen } \delta \text{ cos } t \quad (4.58)$$

Reescribiendo (4.54) y reemplazando por las expresiones (4.58) y (4.56)

$$\Delta \delta = K \frac{\text{sen } z \text{ cos } \xi}{\text{cos } z}$$

$$\Delta \delta = K \frac{(\text{sen } \phi \text{ cos } \delta - \text{cos } \phi \text{ sen } \delta \text{ cos } t)}{(\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ cos } t)}$$

$$\Delta \delta = K \frac{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} (\text{tg } \phi - \text{tg } \delta \text{ cos } t)}{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} (\text{tg } \phi \text{ tg } \delta + \text{cos } t)}$$

$$\Delta \delta \simeq 60,4'' \frac{(\text{tg } \phi - \text{tg } \delta \text{ cos } t)}{(\text{tg } \phi \text{ tg } \delta + \text{cos } t)}$$

(4.59)

Análogamente, reescribiendo (4.55) y reemplazando por las expresiones (4.56) y (4.57)

$$\Delta t \simeq -K \frac{\text{sec } \delta \text{ sen } z \text{ sen } \xi}{\text{cos } z}$$

$$\Delta t \simeq -K \frac{\text{sec } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } t}{(\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ cos } t)}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $1/\text{cos } \phi \text{ cos } \delta$ , simplificando y ordenando

$$\Delta t \simeq -K \frac{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} \text{sec } \delta \text{ cos } \phi \text{ sen } t}{\frac{1}{\text{cos } \phi \text{ cos } \delta} (\text{sen } \phi \text{ sen } \delta + \text{cos } \phi \text{ cos } \delta \text{ cos } t)}$$

$$\Delta t \simeq -60,4'' \frac{\sec^2 \delta \sin t}{(\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta + \cos t)} \quad (4.60)$$

De modo análogo, si denominamos  $\Delta \alpha = \alpha' - \alpha$  y dado que  $\Delta \alpha = -\Delta t$ , dado que estas cantidades se miden en sentidos opuestos, luego la ecuación (4.60) puede expresarse como

$$\Delta \alpha \simeq 60,4'' \frac{\sec^2 \delta \sin t}{(\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta - \cos t)} \quad (4.61)$$

## Refracción atmosférica en ondas de radio

La mayor parte de las Técnicas de la Astrometría y Geodesia Espacial (TAGE<sup>10</sup>) trabajan en la región de microondas - radio del espectro electromagnético. Esto presenta algunas ventajas evidentes con respecto a la operación en el rango visible. Por ejemplo, las observaciones realizadas en este rango del espectro serán insensibles a las diferencias de iluminación del cielo entre el día y la noche y además admiten realizarse con marcada nubosidad, lluvia o incluso nieve (IERSTN23, 1997). De este modo puede asegurarse la operatividad de los sistemas durante las 24 horas del día a lo largo de todo el año<sup>11</sup>.

En las sesiones precedentes hemos tratado el efecto de la atmósfera sobre el camino óptico de las señales electromagnéticas en el rango visible. Para ello, fue suficiente discutir la refracción como un problema que involucra a la baja atmósfera<sup>12</sup>. Sin embargo, los efectos atmosféricos sobre las señales observadas en el rango de las ondas de radio requieren un tratamiento diferente.

Por un lado veremos que la refracción troposférica constituye una fuente de errores que debe ser compensada en el procesamiento de los datos. Sin embargo, desde los años 90 y a través un análisis cuidadoso del problema geodésico involucrado, se pueden usar las señales de los sistemas de navegación global por satélite (GNSS, del inglés Global Navigation Satellite Systems) como una confiable fuente de datos atmosféricos escasos o de difícil acceso para los meteorólogos: el contenido de vapor de agua precipitable integrado en un volumen elemental sobre el observador.

<sup>10</sup> VLBI, GNSS, SLR, LLR, DORIS

<sup>11</sup> Característica imprescindible para la operatividad de los GNSS

<sup>12</sup> Básicamente, la troposfera

Por otro lado, en el caso de las ondas de radio no puede despreciarse la influencia de las capas superiores de la atmósfera. Efectivamente, la ionosfera<sup>13</sup> constituye un medio dispersivo para la propagación de la radiación en este rango de longitudes de onda. Dicho de otro modo, la ionosfera realiza una importante contribución a la refracción en el caso de las ondas de microondas-radio dado que las propiedades refractivas de la señal se relacionan con la frecuencia del plasma.

A continuación veremos como puede estimarse la refracción atmosférica para los observables de las TAGE que operan en este rango del espectro. Trataremos la contribución a la refracción de la baja atmósfera (troposférica) y mencionaremos algunas palabras acerca de la refracción de la alta atmósfera (ionosférica), dado que su tratamiento excede los contenidos abordados en este texto.

## Retrasos troposféricos

A diferencia de las observaciones en el rango visible donde se *miden* posiciones e importa el cambio relativo en las coordenadas observadas, las TAGE habitualmente miden el tiempo de viaje de la señal emitida desde la fuente hasta algún dispositivo receptor. Sabemos que si la señal viaja en el espacio vacío se propaga en línea recta y a velocidad conocida ( $c$ <sup>14</sup>). Sin embargo, cuando la fuente está en el espacio (satélites artificiales, radiofuentes) y el receptor en la Tierra (antena GNSS, antena VLBI), la señal necesariamente debe atravesar la atmósfera terrestre.

Ya hemos visto que el análisis del camino óptico o de la propagación de una señal electromagnética a través de la atmósfera dependerá del índice de refracción del medio sin importar la aproximación matemática que se use para su modelado. Dado que la velocidad de propagación en el medio se relaciona con el índice de refracción a través de la fórmula (Seeber, 2003, p. 45)

$$n = \frac{c}{v} \tag{4.62}$$

Recordando que  $n > 1$ , en la ecuación (4.62) es fácil ver que la velocidad de propagación en la atmósfera será menor que en el vacío y por lo tanto la señal *tardará mas tiempo* en alcanzar al receptor. Por esta razón la refracción troposférica en micro ondas/radio ondas suele denominarse *retraso troposférico o retardo troposférico*.

<sup>13</sup> Parte de la atmósfera que se extiende entre los 80 y los 400 km sobre la superficie terrestre

<sup>14</sup> Velocidad de la luz

La troposfera es una mezcla de gases y vapor de agua donde no hay partículas cargadas y por lo tanto representa un medio no dispersivo para las ondas de radio. Por esta razón, el índice de refracción dependerá de la presión atmosférica, de la temperatura del aire y de la presión del vapor de agua, pero no de la frecuencia de la señal (Seeber, 2003, p. 48).

Dado que  $n$  es próximo a 1, se suele trabajar con la *refractividad* ( $N$ ) (Smith y Weintraub, 1953)

$$N = 10^6(n - 1) \quad (4.63)$$

Para este rango de frecuencias en particular, el contenido de vapor de agua atravesado por la señal es fundamental dado que es el único constituyente de la mezcla atmosférica que posee una contribución del momento dipolar a la refractividad (Bevis y otros, 1992). Una discusión detallada del desarrollo de la refractividad en términos de la polarizabilidad media de la troposfera puede encontrarse en Janes (1986, p. 6-10).

Por lo anterior, y teniendo en cuenta que cualquier onda electromagnética en el rango de radio y hasta una frecuencia de 15 GHz estará afectada por las troposfera del mismo modo (Seeber, 2003, p. 56), podemos expresar la refractividad en términos de parámetros meteorológicos y constantes empíricas (Smith y Weintraub, 1953; Seeber, 2003, p. 57; Hofmann-Wellenhof y otros, 2007, p. 129)

$$N = N_d + N_w \quad (4.64)$$

donde  $N_d$  refiere a la parte *hidrostática*<sup>15</sup> y tiene en cuenta la contribución de las componentes no dipolares de la mezcla a la refractividad,  $N_w$  refiere a la parte *húmeda* y tiene en cuenta el momento dipolar del vapor de agua atmosférico (Bevis y otros, 1992). Según Smith y Weintraub, (1953)

$$N_d = K_1 \frac{p_d}{T} \quad N_w = K_2 \frac{e}{T} + K_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.65)$$

donde  $p_d$  refiere a la presión parcial del aire seco,  $e$  a la presión parcial de vapor de agua, ambas presiones medidas en hectopascales [hPa],  $T$  es la temperatura en grados Kelvin [K], y donde  $K_1 = 77,6 \pm 0,013 [K hPa^{-1}]$ ,  $K_2 = 71,6 \pm 8,5 [K hPa^{-1}]$  y  $K_3 = 3,75 \times 10^5 [K^2 hPa^{-1}]$  son constantes empíricas.

Expresando la presión atmosférica como  $p = p_d + e$  y reemplazando (4.65) en (4.64) quedará

<sup>15</sup> también conocida como componente seca

$$N = 77,6 \frac{p}{T} - 6 \frac{e}{T} + 3,74 \times 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (4.66)$$

Haciendo aproximaciones válidas dentro del rango de temperaturas  $-50^\circ C < T < 40^\circ C$  y definiendo una nueva constante empírica  $K_4 = 3,73 \times 10^5 [K^2 hPa^{-1}]$ , la ecuación (4.66) quedará (Smith y Weintraub, 1953)

$$N = 77,6 \frac{p}{T} + 3,73 \times 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (4.67)$$

donde la presión atmosférica ( $p$ ) se mide en hectopascales [hPa]. Por lo tanto, resultará  $N_d = 77,6 p/T$  y  $N_w = 3,73 \times 10^5 e/T^2$ .

Sin embargo, la expresión (4.67) no tiene la exactitud necesaria requerida para corregir los caminos ópticos involucrados en las observaciones de las TAGE. Por esta razón, se adopta una fórmula más exacta teniendo en cuenta el comportamiento de un gas no ideal (Bevis y otros, 1992)

$$N = k_1 \frac{p_d}{T} + k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.68)$$

donde  $k_1 = 77,6 \pm 0,05 [K hPa^{-1}]$ ,  $k_2 = 70,4 \pm 2,2 [K hPa^{-1}]$  y  $k_3 = 3,739 \pm 0,012 \times 10^5 [K^2 hPa^{-1}]$ . La exactitud de esta nueva expresión de refractividad quedará limitada por la incerteza en el valor de las constantes (Bevis y otros, 1992). De este modo, finalmente resultará

$$N_d = k_1 \frac{p_d}{T} \quad N_w = k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.69)$$

En esta aproximación hemos omitido el desarrollo de las expresiones en términos de los factores de compresibilidad del aire seco y el vapor de agua como funciones de la masa molar de la mezcla para cada caso (ver Nilsson y otros, 2013, p. 78-79). Para corregir esto en la componente de la refractividad, más pequeña en valor absoluto pero más variable e impredecible, reescribimos la refractividad húmeda como

$$N_w = k_2' \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (4.70)$$

donde  $k_2' = k_2 - (M_w/M_d)k_1$  siendo  $M_w$  y  $M_d$  las masas molares del vapor de agua y el aire seco, respectivamente. Según Bevis y otros (1994)  $k_2' = 22,1 \pm 2,2 [K hPa^{-1}]$ .

Para analizar como influyen estas expresiones de la refractividad en el camino de la señal a través de la atmósfera, denominaremos G al camino óptico de la señal propagándose en el vacío, desde la fuente hasta el receptor. De modo que G será una línea recta con longitud igual al tiempo de propagación en el vacío multiplicado por la velocidad de la luz ( $c$ ). Sea L el camino óptico de la misma señal en la troposfera (Bevis y otros, 1992).

$$L = \int_{atm} n(s) ds \quad (4.71)$$

donde *atm* refiere al camino de la señal en la troposfera. Ya hemos visto que a consecuencia de una velocidad de propagación  $v$  menor a  $c$ , el tiempo de propagación será mayor y por lo tanto resulta que  $L > G$ . Llamaremos  $\Delta L = L - G$ , luego

$$\Delta L = \int_{atm} n(s) ds - G \quad (4.72)$$

$$\Delta L = \int_{atm} [n(s) - 1] ds + \int_{atm} ds - G \quad (4.73)$$

donde el primer término de (4.73) es el exceso de camino óptico debido al retraso en el tiempo de vuelo, se conoce como *retraso troposférico* y puede alcanzar valores de 2,4 metros (Fernández y otros, 2009). Los dos últimos términos de (4.73) representan el efecto de curvatura de la atmósfera alcanzando valores de 1 cm o menos para  $z < 75^\circ$ , siendo nulo en el cenit (Bevis y otros, 1992).

Expresando el retraso troposférico de la ecuación (4.73) en términos de la refractividad, quedará

$$\Delta L = 10^{-6} \int_{atm} N ds \quad (4.74)$$

donde se omite explícitamente el efecto de curvatura (Nilsson y otros, 2013, p. 83). Dado que en las aplicaciones de las TAGE es común referir los retrasos troposféricos a la dirección cenital, proyectaremos los retrasos oblicuos sobre la dirección cenital (Seeber, 2003, p. 57; Nilsson y otros, 2013, p. 83). Sea *ZTD* el retraso cenital total<sup>16</sup>

<sup>16</sup> del inglés, ZTD: Zenith Total delay

$$ZTD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} N(h) dh \quad (4.75)$$

donde  $h_0$  es la altura del observador. Usando (4.64) de modo análogo podemos expresar el retraso cenital hidrostático  $ZHD$ <sup>17</sup> y el retraso cenital húmedo  $ZWD$ <sup>18</sup> como (Seeber, 2003, p. 57)

$$ZHD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} N_d(h) dh \quad ZWD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} N_w(h) dh \quad (4.76)$$

Luego,

$$ZTD = ZHD + ZWD \quad (4.77)$$

donde el  $ZHD$  explica el 90% del efecto con muy buena exactitud mientras que  $ZWD$  es responsable por la contribución de 10% restante al  $ZTD$  (Fernández y otros, 2009). A nivel del mar y en condiciones meteorológicas nominales, el  $ZHD$  puede alcanzar hasta 2,3 metros (Bevis, 1992; Nilsson y otros, 2013, p. 85). Por otro lado, el  $ZWD$  dependerá de la cantidad de vapor de agua presente en la atmósfera durante la medición, y puede variar desde unos pocos milímetros en regiones desérticas o muy frías hasta varios centímetros en zonas tropicales.

Una vez conocido el retraso troposférico en la dirección cenital, se puede estimar su proyección sobre cualquier distancia cenital<sup>19</sup>, arbitraria usando las funciones de mapeo (Seeber, 2003, p. 58). Así, las expresiones para el retardo a lo largo de una trayectoria de elevación arbitraria ( $E$ ) consisten en el retardo cenital multiplicado por la función de mapeo. De la figura 4.1, es fácil ver que si asumimos a la troposfera local como horizontalmente homogénea y considerando un entorno del cenit, la función de mapeo más sencilla será (Seeber, 2003, p. 58),

$$\begin{aligned} \Delta L(E) &= m_f(E) ZTD \\ \Delta L(E) &= \frac{1}{\sin E} ZTD \\ \Delta L(z) &= \frac{1}{\cos z} ZTD \end{aligned} \quad (4.78)$$

<sup>17</sup> del inglés, ZHD: Zenith Hydrostatic Delay

<sup>18</sup> del inglés, ZWD: Zenith Wet Delay

<sup>19</sup> o su complemento: el ángulo de elevación

Luego, usando la ecuación (4.77) podemos expresar (Nilsson y otros, 2013, p. 100-101)

$$\Delta L(E) = ZHD m_f^d(E) + ZWD m_f^w(E) \quad (4.79)$$

donde la función de mapeo hidrostático ( $m_f^d(E)$ ) estará afectada por el efecto de curvatura despreciado en la ecuación (4.74) (Nilsson y otros, p. 83).

Durante más de 30 años se han desarrollado y refinado distintas funciones de mapeo. Una excelente revisión del estatus del tema puede encontrarse en Nilsson y otros, (2013, sección 4.2, p. 99-106) y las referencias que allí se indican.

A lo largo del tiempo, también se desarrollaron diferentes modelos para expresar la variación de la refractividad con la altura utilizando datos meteorológicos locales en el sitio de observación (Seeber, 2003, p. 57; Hofmann-Wellenhof y otros, 2007, p. 129).

Históricamente, desde el inicio de la era espacial, se publicaron diferentes modelos para estimar ZTD. Entre todos ellos, el más exacto y más ampliamente adoptado para modelar ZHD es el modelo de Saastamoinen (1972) modificado por Davis (1985), (ver Feng y otros, 2020)

$$ZHD = \frac{0,0022768 p}{[1 - 0,00266 \cos(2\phi) - 0,28 \times 10^{-6} h]} \quad (4.80)$$

donde  $\phi$  es la latitud del lugar,  $p$  es la presión atmosférica del sitio en [hPa] y  $h$  la altura de la antena receptora en [m]. Por otro lado, los modelos de ZWD no resultaron ser muy exactos debido a la variabilidad del contenido de vapor de agua en la atmósfera (Feng y otros, 2020). Más información y detalles de la deducción de los algunos modelos puede encontrarse en (Hofmann-Wellenhof y otros, 2007, p. 130-135).

Dado que la principal fuente de errores se encuentra en la medición de la presión atmosférica, puede estimarse un error de 2,3 mm en el camino óptico por cada hPa de error en las mediciones de presión atmosférica (Nilsson y otros, 2013, p. 85). Efectivamente, si la atmósfera está en equilibrio hidrostático y el barómetro está calibrado con un error  $< 0,3$  hPa, el  $ZHD$  se determinará con una precisión superior a 1 mm (Bevis y otros, 1992).

### **Conversión del retraso cenital húmedo en cantidad de vapor de agua precipitable**

Una de las principales tareas de los software de procesamiento geodésico de los observables de las TAGE es corregir la distancia estimada entre la fuente de radio ondas y el receptor en Tierra para eliminar, entre otros errores, los efectos de la atmósfera terrestre.

Hemos visto que el  $ZWD$  depende la cantidad de vapor de agua atmosférico. Esta cantidad es muy variable según la estación del año y la latitud del observador. Además, sus observaciones son costosas<sup>20</sup> y escasas. Sin embargo, allí donde se posean coordenadas muy precisas, es posible resolver el problema inverso al posicionamiento GNSS y obtener el dato de vapor de agua de modo económico y preciso.

Efectivamente, si se conoce la distancia entre la fuente y el receptor con buena precisión, podrá obtenerse una estimación del retraso troposférico total ( $ZTD$ ) dado que se puede estimar la trayectoria lineal ( $G$ ) numéricamente (ver ecuaciones 4.72 a 4.75). Asumiendo medidos los parámetros meteorológicos locales (presión atmosférica, temperatura y humedad relativa), podremos calcular  $ZHD$  y obtener valores de  $ZWD$ .

Definiendo  $T_m$  como la *temperatura media pesada de la atmósfera* Jones y otros, 2020, p. 545)

$$T_m \approx \frac{\int_{h_0}^{\infty} \frac{e}{T} dh}{\int_{h_0}^{\infty} \frac{e}{T^2} dh} \quad (4.81)$$

donde  $h_0$  es la altura del observador sobre la superficie,  $e$  la presión parcial de vapor de agua en [hPa] y  $T$  la temperatura en [K].  $T_m$  puede calcularse numéricamente resolviendo la integral a partir de datos obtenidos en modelos numéricos de clima, datos de radiosondeos o bien utilizando la estimación dada por Askne y Nordius (1987). Sin embargo, los datos necesarios para resolver la integral (4.81) no siempre están disponibles. En ese caso la practica impone la aplicación de la fórmula de Bevis para estimar  $T_m$ .

Bevis y colaboradores (1992), analizando más de 8000 radiosondeos en una vasta región de América del Norte, deducen una función lineal que vincula  $T_m$  con la temperatura del sitio ( $T$ ) expresada en [K]

$$T_m = 70,2 + 0,72 T \quad (4.82)$$

Si expresamos  $ZWD$  usando (4.76) y (4.70)

$$ZWD = 10^{-6} \int_{h_0}^{\infty} \left( k_2' \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \right) dh \quad (4.83)$$

<sup>20</sup> radiosondeos, radiómetro

Reemplazando por la ecuación (4.81) quedará

$$ZWD = 10^{-6} \left( k_2' + \frac{k_3}{T_m} \right) \int_{h_0}^{\infty} \frac{e}{T} dh \quad (4.84)$$

Definiendo

$$IWV = \int_s \rho_w ds \quad (4.85)$$

donde  $IWV$ <sup>21</sup> [  $kg m^{-2}$  ] expresa el contenido total de vapor de agua verticalmente integrado para una columna de aire en la vertical del observador y  $\rho_w$  es la densidad de vapor de agua (Nilsson y otros, 2013, p. 89). Luego usando la ecuación de los gases ideales

$$IWV = \Pi ZWD \quad (4.86)$$

donde  $\Pi$  es una constante y resulta (Jones y otros, 2020, p. 545)

$$\Pi = \frac{10^6}{R_v \left( k_2' + \frac{k_3}{T_m} \right)} \quad (4.87)$$

donde  $R_v$  es la constante específica de los gases para el vapor de agua  $R_v = 461,521 \pm 0,008 [ J kg^{-1} K^{-1} ]$  (AMS, 2014, Jones y otros, 2020, p. 320) y recordamos que  $1 hPa = 10^2 J m^{-3}$ .

$IWV$  representa la cantidad total absoluta de agua en la columna vertical de aire que hipotéticamente podría precipitarse, siendo una cantidad de gran importancia para las aplicaciones de los profesionales de las Ciencias Atmosféricas. La amplia distribución espacial de las estaciones GNSS en el planeta, y la amplia disponibilidad temporal de datos<sup>22</sup> han hecho de este procedimiento una herramienta muy valiosa que hoy día es usada para la mejora de pronósticos y otros estudios climáticos, dando origen a la denominada *Meteorología GNSS* (Nilsson y otros, 2013, p. 125-126).

## Refracción ionosférica

<sup>21</sup> del inglés, Integrated Water Vapor

<sup>22</sup> Puede disponerse de la información a tiempo casi real (< 3 horas) y con una frecuencia temporal de varios minutos

La ionosfera está poblada por iones y electrones libres. La generación de iones y electrones en esta región de la atmósfera es proporcional a la intensidad de la radiación solar recibida y a la densidad de los elementos gaseosos en ella (Seeber, 2003, p. 49). El estado de la ionosfera se describe a través de su densidad electrónica ( $n_e$ ), esto es, el número de electrones por unidad de volumen. La densidad electrónica varía de modo complejo según la latitud geomagnética de la estación, hora del día, época del año, actividad solar y otras causas que alteren las condiciones nominales o tranquilas del Clima Espacial (del inglés *Space Weather*).

Como ya se ha visto más arriba, la ionosfera constituye un medio dispersivo para las ondas de microondas/radio. La ventaja de esto radica en la posibilidad de reducir la contribución de la ionosfera a la refracción a través de una combinación lineal de frecuencias. Esta es la razón por la cual las TAGE operando en radio<sup>23</sup> poseen dos frecuencias de trabajo para neutralizar la dispersión del medio.

Dicho de otro modo, es posible eliminar el retraso ionosférico al primer orden aplicando una combinación lineal de las dos frecuencias de operación del sistema. Esta combinación suele denominarse *combinación libre de ionosfera* y luego de su aplicación los efectos ionosféricos de segundo orden, aunque son pequeños, permanecen afectando el camino óptico de la señal. Para un tratamiento extendido y riguroso del efecto ionosférico en VLBI y GNSS recomiendo la lectura de Alizadeh y otros (2013).

## Referencias

- Alizadeh, M. M., Wijaya, D. D., Hobiger, T., Weber, R., Schuh, H. (2013). Ionospheric effects on microwave signals. In *Atmospheric effects in space geodesy* (pp. 35-71). Springer, Berlin, Heidelberg.
- AMS, American Meteorological Society (2014). Gas constants. Recuperado de [https://glossary.ametsoc.org/wiki/Gas\\_constant](https://glossary.ametsoc.org/wiki/Gas_constant)
- Askne, J., y Nordius, H. (1987). Estimation of tropospheric delay for microwaves from surface weather data. *Radio science*, 22(03), 379-386.
- Bevis, M., Businger, S., Herring, T. A., Rocken, C., Anthes, R. A., & Ware, R. H. (1992). GPS meteorology: Remote sensing of atmospheric water vapor using the Global Positioning System. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 97(D14), 15787-15801.

---

<sup>23</sup> GNSS, VLBI

- Bevis, M., Businger, S., Chiswell, S., Herring, T. A., Anthes, R. A., Rocken, C., Ware, R. H. (1994). GPS meteorology: Mapping zenith wet delays onto precipitable water. *Journal of Applied Meteorology (1988-2005)*, 379-386.
- Böhm, J., Salstein, D., Alizadeh, M. M., Wijaya, D. D. (2013). Geodetic and atmospheric background. In *Atmospheric effects in space geodesy* (pp. 1-33). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Davis, J.L.; Herring, T.A.; Shapiro, I.I.; Rogers, A.E.E.; Elgered, G. Geodesy by radio interferometry: Effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length. *Radio Sci.* 1985, 20, 1593–1607
- Fernández, L. I., Meza, A. M., Natali, M. P. (2009). Determinación del contenido de vapor de agua precipitable (PWV) a partir de mediciones GPS: primeros resultados en Argentina. *Geoacta*, 34(2), 35-57.
- Feng, P., Li, F., Yan, J., Zhang, F., & Barriot, J. P. (2020). Assessment of the accuracy of the Saastamoinen model and VMF1/VMF3 mapping functions with respect to ray-tracing from radiosonde data in the framework of GNSS meteorology. *Remote Sensing*, 12(20), 3337.
- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Wasle, E. (2007). *GNSS—global navigation satellite systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer Science & Business Media.
- IERSTN23 (1997) *IERS Technical Note 23: Definition and Realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects*. Ma C. y Feissel M. (eds.). Disponible en: <https://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote23/tn23.pdf>
- Janes, H. (1986). On the modelling of tropospheric effects in ultra-high frequency radio positioning. *Technical Report N.º 119*. University of New Brunswick. Canada
- Jones, J., Guerova, G., Douša, J., Dick, G., de Haan, S., Pottiaux, E., ... & van Malderen, R. (2020). *Advanced GNSS tropospheric products for monitoring severe weather events and climate: COST Action ES1206 Final Action Dissemination Report*. Jones, J., Guerova, G., Douša, J., Dick, G., de Haan, S., Pottiaux, E., Bock, O., Pacione, R., van Malderen, R. (Eds). Springer.
- Malacara, D. (2015). *Óptica básica*. Fondo de cultura económica.
- Merzkirch W. (1987). *Flow Visualization*. Academic Press Inc.
- Miczaika, G. R. y Sinton, W. M. (1967). *Las herramientas del astrónomo*. Eudeba.
- Nilsson, T., Böhm, J., Wijaya, D. D., Tresch, A., Nafisi, V., & Schuh, H. (2013). Path delays in the neutral atmosphere. In *Atmospheric effects in space geodesy* (pp. 73-136). Springer.
- Saastamoinen, J. (1972) Atmospheric Correction for the Troposphere and Stratosphere in Radio Ranging Satellites. In *Geophysical Monograph Series; American Geophysical Union: Volume 15*, pp. 247–251.

- Seeber, G. (2003). *Satellite Geodesy*, 2nd edition. Walter de Gruyter GmbH & Co.
- Smart W. M. (1962) *Text-Book on Spherical Astronomy*. Quinta edición. Cambridge University Press
- Smith, E. K., Weintraub, S. (1953). The constants in the equation for atmospheric refractive index at radio frequencies. *Proceedings of the IRE*, 41, 1035–1037
- Woolard, E. C., Clemence, G. (1966). *Spherical Astronomy*. New York-London.