



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Trabajo de Tesis Doctoral:

Aspectos topológicos de sistemas magnéticos bidimensionales

Tesista: Alejo Costa

Director: Mauricio B. Sturla

Codirector: Tomás S. Grigera

Año: 2024

Índice general

Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Topología en materia condensada	1
1.1.1. Transición de BKT	2
1.2. Geometría hiperbólica	7
1.3. Estructura de la tesis	8
2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada	10
2.1. Topología	10
2.1.1. Espacios topológicos	10
2.1.2. Homeomorfismos e invariantes topológicos	11
2.1.3. Clasificación de defectos topológicos	13
2.2. Fase y curvatura de Berry	15
2.2.1. Formalismo general	15
2.2.2. Formulación independiente de gauge	18
2.2.3. Números de Chern	18
2.2.4. Fase y curvatura de Berry en sólidos	18
2.3. Redes hiperbólicas	20
2.3.1. Aspectos geométricos de las redes hiperbólicas	20
2.3.2. Cristalografía	23
2.3.3. Condiciones de contorno periódicas	28
2.3.4. Límite termodinámico y superceldas	33
2.4. Simulaciones computacionales	34
2.4.1. Simluaciones de Monte Carlo	34
2.4.2. Algoritmo de Metrópolis	36
2.4.3. Parallel tempering	37
3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos	40
3.1. Modelo con interacción DM	41
3.1.1. Campo medio	43
3.1.2. Teoría de campos efectiva	47
3.1.3. Módulo de helicidad	51
3.1.4. Simulaciones de Monte Carlo	54
3.1.5. Fenomenología y diagrama de fases	56
3.2. Dinámica de electrones sobre la red	57
3.2.1. Modelo y estructura de bandas	58

Índice general

3.2.2. Conductividad de Hall anómala	61
3.2.3. Posibles realizaciones	65
4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico	67
4.1. Modelo de Ising antiferromagnético	67
4.1.1. Construcción de condiciones de contorno periódicas	68
4.1.2. Estado fundamental	69
4.1.3. Simulaciones de Monte Carlo	70
4.1.4. Aproximación de campo medio	73
4.2. Resultados y discusión	78
5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico	79
5.1. Modelo de fractones en el plano Euclídeo	79
5.2. Modelo de fractones en la red hiperbólica $\{5,4\}$	83
5.2.1. Simetrías del sistema	83
5.2.2. Correlaciones no-nulas	86
5.2.3. Holografía y entropía de entrelazamiento	87
5.2.4. Agujeros negros como defectos en la red	88
5.3. Perspectiva a futuro y generalización de resultados	92
6. Conclusiones	95
A. Apéndice	99
A.1. Condiciones de contorno periódicas en redes hiperbólicas	99
A.2. Porciones abiertas del plano hiperbólico	100
A.2.1. Redes triangulares	100
A.2.2. Redes $\{5,4\}$	103

Resumen

En los últimos años, el rol de la topología como una herramienta para la comprensión de la física de la materia condensada se ha vuelto preponderante. En particular, en el área de sistemas magnéticos bidimensionales es usual la descripción de fenómenos en términos de soluciones topológicamente singulares, soluciones suaves topológicamente cargadas, teorías de campos topológicas entre otras. La topología irrumpió en sistemas magnéticos con los trabajos de Berezinskii [1, 2] y los trabajos de Kosterlitz y Thouless [3] en donde mostraron que soluciones topológicamente singulares, vórtices, jugaban un papel central en la transición de fase a temperatura finita de sistemas ferromagnéticos bidimensionales clásicos del tipo XY. Esta transición de fase, conocida como transición BKT y en principio inesperada debido al teorema de Mermin-Wagner [4], consiste en la creación de pares de vórtice-antivórtice a temperatura finita que, al desaparecerse a una temperatura crítica dada, decorrelacionan el sistema. La transición de BKT dió origen a lo que hoy llamamos *transiciones de fase topológicas* y más en particular a las transiciones de fase mediadas por la aparición de *defectos topológicos*. Por defecto topológico nos referimos a irregularidades o interrupciones dentro de campos continuos o estados ordenados de la materia que no pueden ser removidos a través de transformaciones continuas del campo o el material en el que se encuentran; pueden tomar varias formas como puntos, líneas o superficies.

Es en este contexto que la topología emerge en la física de la materia condensada como herramienta indispensable para el estudio de sistemas magnéticos. En el marco de esta tesis doctoral, nos centraremos en el estudio sistemas magnéticos bidimensionales cuya naturaleza física requiere de la topología para su completa descripción. Nos centraremos en cuatro sistemas físicos particulares. En primer lugar, extenderemos el estudio del modelo XY al agregarle una interacción antisimétrica, la llamada interacción de Dzyaloshiinskii-Moriya [5] y analizando cómo una modulación espacial de esta interacción nos lleva a una red de vórtices-antivórtices, dando lugar a una transición mediada por la desaparición de defectos topológicos que llamaremos *transición de BKT inversa* (iBKT). En segundo lugar, estudiaremos la dinámica de electrones sobre una red cristalina bajo un modelo simple de tight-binding con una interacción del tipo espín órbita; en este contexto la topología se vuelve crucial al estudiar la conductividad del sistema, exhibiéndose mediante la conductividad de Hall topológica.

En una segunda parte de la tesis veremos la influencia que tiene la curvatura intrínseca de la red sobre la física de un sistema magnético, en particular, veremos la influencia que tienen espacios con curvatura negativa en sistemas magnéticos del tipo Ising. En una primera instancia investigaremos un modelo de Ising en una teselación triangular del plano hiperbólico de curvatura negativa constante y veremos cómo implementar de manera correcta condiciones de contorno periódicas que nos llevan a una topología no trivial en la compactificación del espacio base. Por último estudiaremos un modelo de fractones en el plano hiperbólico cuyas

Resumen

excitaciones serán topológicas en el sentido que involucran cambios macroscópicos en el sistema. Al considerar el plano hiperbólico como una rebanada a tiempo constante del espacio AdS_3 verificamos la conjetura AdS/CFT e incluso encontramos una relación lineal entre la temperatura de la CFT y el radio de un agujero negro en el plano.

Ya sea en la descripción de excitaciones en un sistema físico, en las características que presentan las bandas de energía en el espacio recíproco o en las propiedades topológicas del espacio base en el que se definen distintos sistemas magnéticos la topología resulta una herramienta central para comprender la física de la materia condensada.

1. Introducción

En este capítulo introduciremos brevemente dos de los conceptos fundamentales en los que se basan los aportes originales de esta tesis: las transiciones de fase topológicas, tomando como paradigma de éstas a la transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless, y el estudio de espacios con curvatura negativa y geometría hiperbólica en el contexto de la física de la materia condensada. Por último, terminaremos este capítulo describiendo la estructura de la tesis y mencionando las publicaciones surgidas durante el desarrollo de la misma.

1.1. Topología en materia condensada

Uno de los primeros casos de aplicación de herramientas de la topología en el estudio de la física de la materia condensada se da en el año 1972 con los trabajos de V. Berezinskii, J. Michael Kosterlitz y David J. Thouless quienes identificaron una transición de fase completamente nueva en donde los defectos topológicos adquirieron un rol crucial. Estas transiciones de fase, ahora llamadas de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT), se caracterizan por la ausencia de una ruptura espontánea de simetría, a diferencia de la teoría de Landau de transiciones de fase, y constituye un ejemplo paradigmático del rol de los defectos topológicos en los sistemas físicos. Aquí los defectos topológicos no son únicamente una estructura matemática abstracta bajo la cual caracterizar distintas configuraciones magnéticas sino que además tienen consecuencias drásticas en la física observada y se vuelven indispensables para comprender las distintas fases del sistema. En la transición de BKT los defectos topológicos serán los responsables de disminuir las correlaciones del sistema para pasar de un orden de casi-largo alcance a un decaimiento exponencial de las correlaciones a altas temperaturas.

Otro ejemplo ampliamente estudiado donde la topología juega un rol central en la explicación del mecanismo subyacente es el efecto Hall cuántico [6], cuyo descubrimiento abrió las puertas a nuevas áreas de investigación en la física de la materia condensada. El efecto Hall cuántico se caracteriza por la cuantificación de plateaus de resistividad de Hall que tiene un origen topológico. Una vez más, la topología se hace presente en la caracterización de distintas fases que no difieren debido a la ruptura espontánea de alguna simetría física, sino en los valores particulares que toman ciertas cantidades no-locales que llamamos invariantes topológicos. Un ejemplo de invariante topológico muy utilizado es el de primer número de Chern que nos sirve para caracterizar las distintas bandas observadas en sistemas cristalinos y tiene consecuencias fundamentales en la fenomenología y física que observaremos, la aparición de números de Chern no triviales será la responsable de la cuantización de la conductividad de Hall. Estos descubrimientos llevaron a lo que llamamos teoría de bandas topológicas, que se basa en la clasificación de bandas de energía de sistemas cristalinos en distintas clases de equivalencia caracterizadas por estos invariantes topológicos.

1. Introducción

Estos dos ejemplos dados nos dan la pauta de que la topología como herramienta para el estudio de sistemas físicos, en particular para el estudio de sistemas de materia condensada, se ha vuelto indispensable. A modo de ejemplo de aplicación de las ideas de la topología en la materia condensada y para comprender mejor el rol que toman los defectos topológicos y cómo surge su caracterización repasaremos el modelo XY en la sección siguiente, haciendo énfasis en las principales características fenomenológicas de su transición de fase. Este modelo también nos servirá como punto de partida para los aportes originales de esta tesis que desarrollaremos en el capítulo 3.

1.1.1. Transición de BKT

Para comenzar con la descripción de la transición de BKT repasaremos el estudio de el modelo XY bidimensional en el que fue descubierta. Este es un modelo de vectores clásicos de dos componentes normalizados $\mathbf{S}(\mathbf{r}_i)$, que llamamos espines, situados en cada sitio \mathbf{r}_i de una red cuadrada y con interacciones ferromagnéticas. Su Hamiltoniano está dado por

$$\beta H = -\beta J \sum_{\mathbf{r}_i, \hat{\mu}} \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}_i + a\hat{\mu}) = -\beta J \sum_{\mathbf{r}_i, \hat{\mu}} \cos(\theta(\mathbf{r}_i) - \theta(\mathbf{r}_i + a\hat{\mu}))$$

donde $\hat{\mu} = \hat{x}, \hat{y}$, $J > 0$ y los sitios \mathbf{r}_i forman una red cuadrada con espaciado a . $\theta(\mathbf{r}_i)$ es el ángulo entre el vector $\mathbf{S}(\mathbf{r}_i)$ y una dirección arbitraria.

Si analizamos el sistema a temperatura baja podemos suponer que el campo varía suavemente de sitio a sitio y podemos aproximar $\cos(\theta(\mathbf{r}_i) - \theta(\mathbf{r}_i + a\hat{\mu})) \simeq 1 - \frac{(\theta(\mathbf{r}_i) - \theta(\mathbf{r}_i + a\hat{\mu}))^2}{2}$. Esto lleva a un Hamiltoniano en el continuo

$$H \simeq -2JN + J \sum_{\mathbf{r}_i} \frac{(\theta(\mathbf{r}_i) - \theta(\mathbf{r}_i + a\hat{\mu}))^2}{2} \simeq E_0 + \frac{J}{2} \int d^2r |\nabla\theta|^2 \quad (1.1)$$

donde $E_0 = -2JN$ es la energía de la configuración en la que todos los espines se encuentran alineados. La termodinámica del sistema está dada por la función de partición

$$Z = e^{-\beta E_0} \int D[\theta] \exp \left[-\beta \frac{J}{2} \int d^2r |\nabla\theta(\mathbf{r})|^2 \right],$$

que es una integral sobre todas las posibles configuraciones del campo θ . Si bien a simple vista este Hamiltoniano es el de un modelo Gaussiano no debemos obviar que $\theta(\mathbf{r})$ es un campo que representa un ángulo, es decir, $\theta(\mathbf{r}) \in [0, 2\pi) \forall \mathbf{r}$, lo cual dificulta la integral funcional. Para poder realizarla vamos a dividirla en una suma sobre los mínimos locales de $H[\theta]$, θ_{vor} , y fluctuaciones sobre estos mínimos θ_{sw}

$$Z = e^{-\beta E_0} \sum_{\theta_{\text{vor}}} \int D[\theta_{\text{sw}}] \exp \left[-\beta \left(H[\theta_{\text{vor}}] + \frac{1}{2} \int \int d^2r_1 d^2r_2 \theta_{\text{sw}}(\mathbf{r}_1) \frac{\delta^2 H}{\delta\theta(\mathbf{r}_1) \delta\theta(\mathbf{r}_2)} \theta_{\text{sw}}(\mathbf{r}_2) \right) \right] \quad (1.2)$$

Las configuraciones de campos que corresponden a mínimos locales del Hamiltoniano cumplen

$$\nabla^2\theta = 0 \quad (1.3)$$

1. Introducción

Hay dos tipos de soluciones a esta ecuación, el estado ferromagnético de campo constante $\theta(\mathbf{r}) = \theta_0 \forall \mathbf{r}$ y las soluciones de tipo *vórtice*. Estas últimas surgen de imponer un conjunto de condiciones de contorno para la integral de línea de $\theta(\mathbf{r})$:

- Para todas las curvas cerradas que encierren la posición \mathbf{r}_0 del núcleo del vórtice

$$\oint \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n$$

- Para todas las curvas cerradas que no encierren la posición del núcleo

$$\oint \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

La primera condición implica que el campo θ posee una singularidad en \mathbf{r}_0 si $n \neq 0$. Llamaremos al entero n la carga del vórtice. Podemos estimar la energía de un vórtice aislado de la siguiente manera. Dado que el problema tiene simetría esférica $\theta(\mathbf{r}) = \theta(r)$, depende solo de la distancia al origen, por lo que la integral de línea del campo sobre un círculo C de radio r y con centro en \mathbf{r}_0 debe ser

$$\oint \nabla\theta(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r |\nabla\theta(r)| = 2\pi n$$

de donde $|\nabla\theta(r)| = n/r$. Sustituyendo esta expresión en el Hamiltoniano (1.1) encontramos que la energía de un vórtice aislado es

$$E_{\text{vor}} - E_0 = \pi n^2 J \ln \left(\frac{L}{a} \right) \quad (1.4)$$

siendo L el tamaño del sistema, notemos que la energía de un vórtice aislado diverge logarítmicamente con el tamaño del sistema. El campo $\theta(\mathbf{r})$ correspondiente a una configuración con un vórtice de carga n con centro \mathbf{r}_1 toma la forma

$$\theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, n)_v = n \arctan \left(\frac{y - r_{1,y}}{x - r_{1,x}} \right) \quad (1.5)$$

Consideremos ahora la energía de un par de vórtices de cargas n_1 y n_2 . Sin pérdida de generalidad podemos tomar un vórtice con centro en $\mathbf{r}_0 = (x_0/2, 0)$ y carga n_1 y el otro con carga n_2 y centro en $\mathbf{r}_1 = (-x_0/2, 0)$, la configuración total será la suma de las configuraciones individuales, es decir,

$$\theta_{2v}(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, n_1)_v + \theta(\mathbf{r}, -\mathbf{r}_0, n_2)_v \quad (1.6)$$

Tomando el gradiente cuadrado de esta expresión obtenemos

$$|\nabla\theta(\mathbf{r})|^2 = \left| n_1 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \hat{z}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} + n_2 \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \times \hat{z}}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^2} \right|^2 \quad (1.7)$$

1. Introducción

$$|\nabla\theta(\mathbf{r})|^2 = n_1^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} + n_2^2 \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^2} + 2n_1n_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 |\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^2} \quad (1.8)$$

Con esto podemos calcular la energía de una configuración de dos vórtices de cargas opuestas separados una distancia x_0 , utilizando este gradiente cuadrado en (1.1)

$$E_{2\text{vor}} - E_0 = \pi J \left((n_1^2 + n_2^2) \ln \left(\frac{L}{a} \right) - 2n_1n_2 \ln \left(\frac{x_0}{L} \right) \right) \quad (1.9)$$

Vemos que la energía total del par de vórtices será la suma de las energías individuales más un término de interacción entre pares. Notemos que esto lo podemos reescribir como

$$E_{2\text{vor}} - E_0 = \pi J \left((n_1 + n_2)^2 \ln \left(\frac{L}{a} \right) - 2n_1n_2 \ln \left(\frac{x_0}{a} \right) \right) \quad (1.10)$$

Donde aquí vemos que si los vórtices son de cargas opuestas el término divergente de creación de cargas se cancela, quedándonos solo con un término finito de interacción entre vórtices. Esto nos llevará a encontrar una dualidad entre el modelo XY y un gas de Coulomb de carga neutra, donde las cargas representan la vorticidad de cada vórtice presente en el sistema.

Para continuar con el análisis del modelo XY, notemos que podemos expresar una configuración general del campo θ con una contribución con y otra sin singularidades, estas contribuciones se suelen llamar longitudinales y transversales respectivamente. Como en el Hamiltoniano entra el gradiente del campo escribimos

$$\nabla\theta = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} \quad (1.11)$$

La parte longitudinal, \mathbf{j}_{\parallel} , sin singularidades nos da la contribución llamada de espín-wave mientras que la parte transversal, \mathbf{j}_{\perp} , nos da la contribución de vórtices.

Miremos ahora la aproximación espín-wave, es decir solo con campos longitudinales suaves y sin configuraciones de vórtices. Bajo esta aproximación podemos verificar si hay orden de largo alcance calculando $\langle S(\mathbf{r})_x \rangle = \langle \cos(\theta(\mathbf{r})) \rangle$ y la correlación espín-espín $\langle \mathbf{S}(0) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \Re \left[\langle e^{i(\theta(0) - \theta(\mathbf{r}))} \rangle \right]$. Utilizando la función de partición (1.2) solo con campos sin vórtices obtenemos

$$\langle S_x \rangle = \exp \left(-\frac{\pi T}{J} \ln(L/a) \right) = \left(\frac{L}{a} \right)^{-\pi T/J}$$

que tiende a 0 para $L \rightarrow \infty$ para toda temperatura no nula, de donde concluimos la ausencia de orden dentro de la aproximación de espín-wave, válida a temperatura baja y bajo el supuesto que podemos ignorar las configuraciones con vórtices. ¿Qué sucede con la correlación espín-espín? Siguiendo con esta aproximación obtenemos

$$\langle S(\mathbf{r}) \cdot S(0) \rangle \simeq \left(\frac{r}{L} \right)^{-T/(2\pi J)}$$

es decir, obtenemos un decaimiento algebraico con un exponente que depende de la temperatura. Un decaimiento algebraico en la función de correlación es lo que esperamos en la temperatura crítica en una transición de fase continua.

1. Introducción

Si analizamos el sistema a temperatura alta, $\beta J \ll 1$, obtenemos un decaimiento exponencial para la correlación espín-espín a largo alcance; en contraste con el decaimiento algebraico para temperaturas bajas.

A pesar de que no hay orden de largo alcance con un valor no nulo para la magnetización $\langle \mathbf{S} \rangle$ para cualquier temperatura no nula, las correlaciones del sistema bidimensional a temperatura baja decaen algebraicamente con un coeficiente η dependiente de la temperatura. Es decir, observamos una línea de puntos críticos bajo la aproximación de espín-wave. Notemos además que en este análisis la línea de puntos críticos se extiende desde $T = 0$ a $T = \infty$ y sin embargo esperamos un decaimiento exponencial a temperatura alta, por ende, el mecanismo mediante el cual la correlación disminuye está por fuera de esta aproximación. Como este análisis no tuvo en cuenta configuraciones con vórtices, esperamos entonces que los vórtices jueguen un rol importante en esta transición.

Podemos verificar estas afirmaciones mirando la energía libre de un vórtice aislado. La energía de un vórtice aislado de carga n está dada por (1.4) y la entropía puede ser aproximada a partir del número de posiciones disponibles para el núcleo del vórtice. Bajo esta aproximación el número de posiciones corresponde al número de plaquetas en la red, es decir, $S = 2 \ln(L/a)$. Por ende, la energía libre de un vórtice aislado de carga $n = 1$ es

$$F = E_0 + (\pi J - 2T) \ln(L/a).$$

Para $T < \pi J/2$ la energía libre de esta configuración diverge a ∞ en el límite termodinámico, mientras que para $T > \pi J/2$ el sistema puede disminuir su energía libre produciendo vórtices, ya que $F \rightarrow -\infty$ en el límite termodinámico.

Por lo que vimos al analizar la energía de un vórtice aislado, en el sistema real no van a proliferar vórtices aislados de un mismo signo ya que su energía diverge con el tamaño del sistema. Lo que sucederá es que para temperaturas menores a la temperatura T_{KT} los vórtices se encuentran unidos de a pares de cargas opuestas, con una energía de interacción finita, y, a temperaturas mayores a T_{KT} , estos pares se desaparean, llevándose las correlaciones del sistema en un efecto colectivo.

Podemos analizar este efecto de decorrelación debido al desapareamiento de vórtices de cargas opuestas definiendo un parámetro global Υ que llamaremos *módulo de helicidad*. Este parámetro describe el costo de energía libre al aplicar un giro o un gradiente a los espines, es decir,

$$\theta(\mathbf{r}) = \theta_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_{\text{ex}} \cdot \mathbf{r}. \quad (1.12)$$

Si el sistema es de tamaño finito L este giro implica un cambio en las condiciones de contorno y, si la energía libre cambia, el bulk del sistema es susceptible a un cambio en las condiciones de contorno, por lo que diremos que el sistema posee coherencia angular que vemos en el orden de cuasi-largo alcance. El aumento en la energía libre será

$$F(\mathbf{v}_{\text{ex}}) - F(0) = \frac{1}{2} V \Upsilon v_{\text{ex}}^2. \quad (1.13)$$

Para calcular Υ calculamos la energía libre separando el gradiente en una contribución longitudinal de espín-wave y una transversal de vórtices al igual que antes. Los detalles de

1. Introducción

este calculo pueden verse en [7], llegando a la expresión

$$\Upsilon = J - \frac{1}{2} \frac{J}{T^2} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{n(\mathbf{k})n(-\mathbf{k})}{k^2} \quad (1.14)$$

siendo $n(\mathbf{k})$ la transformada de Fourier de la densidad de vórtices

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}). \quad (1.15)$$

Para completar el estudio del modelo XY, miremos la contribución de la parte transversal al Hamiltoniano. Al estar asociada las singularidades introducidas por los vórtices, la parte transversal cumple

$$\nabla \times \mathbf{j}_{\perp} = -2\pi n(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

Esto nos permite expresarla en términos de un potencial $W(\mathbf{r})$ que cumple con la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 W = -2\pi n(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

Lo que nos lleva a un Hamiltoniano

$$H_{\perp} = \mu \sum_i n_i^2 - \pi J \sum_{i \neq j} \ln \left(\frac{r_{ij}}{a} \right) n_i n_j \quad (1.18)$$

siendo μ la energía necesaria para la creación de un vórtice y donde se tuvo que imponer neutralidad de carga, $\sum_i n_i = 0$. Vemos aquí una dualidad entre el modelo XY y el gas de Coulomb de carga total nula. Los detalles analíticos para llegar a esta expresión pueden verse en [8]. En el capítulo 3 se llegará a esta misma dualidad para el modelo XYDM por otro camino.

Podemos explotar ahora la dualidad con el gas de Coulomb. Ya que el gas de Coulomb es a su vez dual con el modelo de Sine-Gordon ampliamente estudiado [8], esto nos permite escribir las ecuaciones del grupo de renormalización para el modelo de Sine-Gordon y así obtener las ecuaciones equivalentes para el modelo XY. Estas son

$$\frac{dK}{dl} = -K^2 y^2 \quad (1.19)$$

$$\frac{dy}{dl} = (2/\pi - K)y \quad (1.20)$$

siendo $K = \frac{J}{T}$, $y = 2\pi e^{-\beta\mu}$ y l la escala de longitud. El correspondiente flujo se encuentra en la figura 1.1. Este flujo de renormalización ha sido estudiado numerosas veces en la literatura [9] pero estudiamos acá sus características principales. Separamos en dos casos, $K > 2/\pi$ y $K < 2/\pi$. Si $K > 2/\pi$ la derivada de y es negativa, y por ende $y \rightarrow 0$ y $K \rightarrow K^*$ con K^* finito para $l \rightarrow \infty$. Si $K \leq 2/\pi$ la fugacidad y crece bajo el flujo del grupo de renormalización y por ende $K \rightarrow 0$. La transición entre estos dos regimenes se da para $K = 2/\pi$, es decir a una temperatura tal que

$$\frac{J(T_{KT})}{T_{KT}} = \frac{2}{\pi}. \quad (1.21)$$

Con el análisis previo vemos que para temperaturas $T > T_{KT}$ la fugacidad y crece, es decir, la creación de vórtices se ve favorecida, y $K \rightarrow 0$. Mientras que para temperaturas $T < T_{KT}$ la fugacidad tiende a 0, la creación de vórtices se ve suprimida, y K es finito.

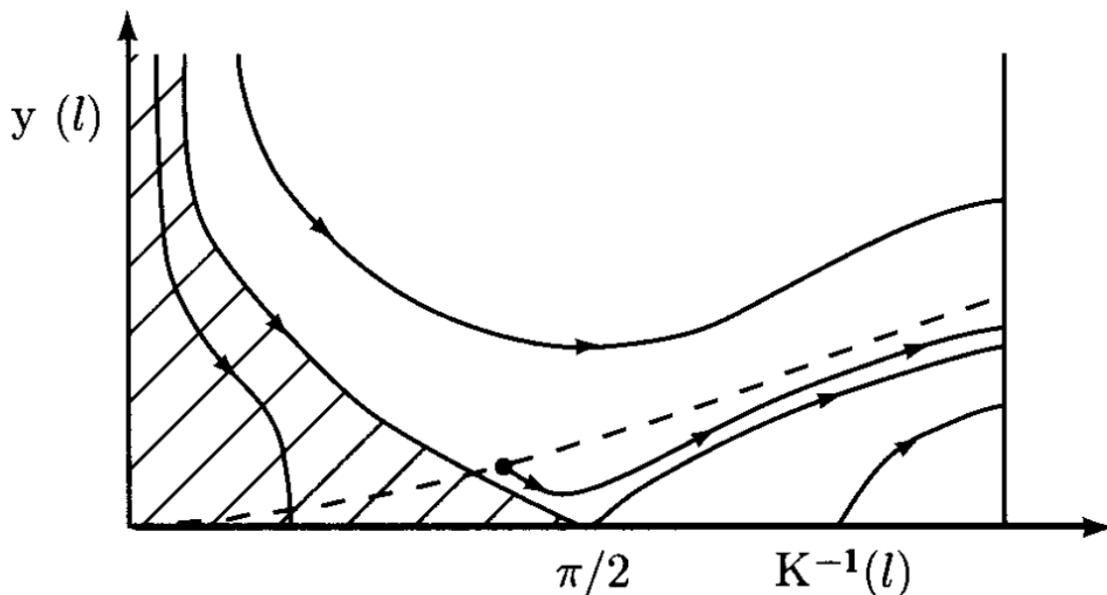


Figura 1.1.: Esquema del flujo de renormalización del modelo XY en las variables $y = e^{-\mu/T}$ y T/J , siendo y la fugacidad de los vórtices.

1.2. Geometría hiperbólica

En la segunda mitad de esta tesis doctoral estudiaremos la influencia de la curvatura y la topología del espacio base sobre sistemas magnéticos. En particular, estudiaremos dos modelos con variables de tipo Ising definidos sobre el plano hiperbólico, que es una superficie con curvatura constante y negativa. Si bien los espacios con curvatura no nula suelen estar asociados a la relatividad general o a cosmología, tienen importantes aplicaciones en la materia condensada. Por ejemplo, a través de la idea de la holografía Gauge/Gravedad [10] que es una dualidad entre teorías de gravedad y sistemas cuánticos fuertemente correlacionados, ampliamente estudiada en espacios con curvatura negativa, que puede ser usada como herramienta para describir la física de sistemas de materia condensada con acoplamientos fuertes.

Los espacios curvos han ganado un significativo interés en la física de materia condensada en los últimos años. En primer lugar, el descubrimiento de principios holográficos [10] ha revelado una estructura fundamental en ciertos sistemas cuánticos fuertemente correlacionados que nos permiten calcular sus propiedades a partir de una teoría de gravedad. Estos principios han sido aplicado de manera satisfactoria para analizar sistemas electrónicos fuertemente correlacionados y para mejorar el entendimiento del entrelazamiento cuántico en sistemas de materia condensada [11, 12, 13]. En segundo lugar, y más recientemente, se han logrado realizaciones experimentales de redes hiperbólicas en circuitos de electrodinámica cuántica (QED) y circuitos topoelectrónicos, dando lugar a simulaciones cuánticas de espacios curvos en geometrías discretas. Estos resultados experimentales de vanguardia se complementan con trabajos experimentales de metamateriales ópticos, guías de onda electromagnéticas, gases

1. Introducción

cuánticos ultra fríos, entre otros [14, 15, 16, 17].

Es así que, motivado por las conexiones con problemas abiertos en la física, el interés en las propiedades del plano hiperbólico ha resurgido en los últimos años. Si bien la geometría del plano hiperbólico ha sido extensamente estudiada desde el siglo XIX, varias preguntas críticas sobre sus teselaciones discretas siguen sin obtener respuesta. Recientemente se ha avanzado con el desarrollo de la cristalografía en el contexto de redes hiperbólicas a través de los trabajos realizados por Maciejko et. al. [18] en donde se desarrolla una descripción sistemática de los distintos tipos de redes hiperbólicas y sus respectivas redes de Bravais.

Una de las características destacables del plano hiperbólico y que lo diferencian del plano Euclídeo es que dada una teselación finita del plano hiperbólico la proporción de sitios en el borde ∂L y sitios totales L tiende a una constante no nula al aumentar el tamaño del sistema. Esto tiene consecuencias importantes en la física observada, principalmente en lo que respecta a efectos de borde. Al ser los sitios de borde una proporción considerable del total del sistema no es posible ignorar su contribución a la termodinámica del sistema incluso en tamaños grandes, frente a esta dificultad tenemos dos opciones: imponer condiciones de contorno periódicas o estudiar los efectos de tamaño finito.

En esta tesis consideraremos ambos abordajes. En un primer lugar consideraremos condiciones de contorno periódicas, de manera que la totalidad de sitios del sistema se comportan como sitios del bulk, teniendo todos el mismo número de coordinación. Esto nos conduce a eliminar por completo el borde de sistema pero a su vez trae una complicación ¿Cómo definimos de manera consistente condiciones de contorno periódicas en una teselación del plano hiperbólico? Y, ¿En qué sentido nos estamos acercando a un límite termodinámico al aumentar el tamaño del sistema? Estas preguntas son en parte abiertas pero se han logrado grandes avances en los últimos años [19, 20, 21, 22, 23]. Nuestro aporte a este problema en esta tesis será el de explorar las consecuencias que tiene la implementación de condiciones de contorno periódicas sobre sistemas magnéticos, en particular sobre un modelo de Ising antiferromagnético.

El otro acercamiento que tendremos al problema de el crecimiento exponencial del borde en el plano hiperbólico será justamente estudiar este borde del sistema, en lugar de mirar las propiedades del bulk. Esto nos permitirá adentrarnos parcialmente en la idea de holografía, estudiaremos un modelo de fractones bajo esta perspectiva holográfica y veremos cómo la física del bulk queda determinada por el borde del sistema.

1.3. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se introducirá el marco teórico necesario para el desarrollo de esta tesis. Introduciremos en la sección 1 las nociones básicas necesarias sobre topología que utilizaremos, como grupos de homotopía e invariantes topológicos. En la sección 2 se aplicarán algunas de estas nociones al ámbito de la física de la materia condensada, en particular se discutirá cómo obtener los invariantes topológicos asociados a bandas de energía y con estos la conductividad de Hall topológica. En la sección 3 introducimos las nociones geométricas del plano hiperbólico necesarias para el análisis de su compactificación en superficies de distintos genus, la posibilidad de teselar el mismo con redes de distintos números de coordi-

1. Introducción

nación y el problema de implementar correctamente condiciones de contorno periódicas que nos permitan estudiar la física que ocurre en el bulk del sistema. Por último en la sección 4 se dará una descripción general de los métodos de simulaciones de Monte Carlo, haciendo hincapié en el algoritmo de Metropolis y el de parallel tempering que serán utilizados en esta tesis.

En el capítulo 3 se presentan algunos de los resultados teóricos originales desarrollados en esta tesis que involucran nociones topológicas en sistemas con interacciones antisimétricas. Introduciremos en la sección 3.1 el modelo XY con interacción de Dzyaloshiinskii-Moriya, y estudiaremos cómo ciertas distribuciones espaciales de esta interacción estabilizan fases magnéticas conformadas por redes de vórtices y antivórtices de manera alternada. La desaparición de estos vórtices genera una transición de fase que llamaremos *inverse Berezinskii-Kosterlitz-Thouless* o iBKT. Estos desarrollos se realizarán a través de técnicas de campo medio, mediante la descripción con teorías de campos efectivas y utilizando simulaciones de Monte Carlo. A su vez, en la sección 3.2, estudiaremos la dinámica de electrones sobre redes con configuraciones magnéticas no triviales y cómo interacciones antisimétricas nos llevan a la aparición de una conductividad de Hall anómala. Para esto, utilizaremos en esta sección un modelo de tight binding para electrones sobre una red triangular coloreada.

En el capítulo 4 estudiaremos un modelo magnético simple sobre una teselación del plano hiperbólico, un modelo Ising antiferromagnético, y veremos cómo la curvatura negativa influye significativamente en la fenomenología del sistema. Estudiaremos el modelo con técnicas de simulación de Monte Carlo y técnicas de campo medio.

En el capítulo 5 seguiremos con el estudio de sistemas magnéticos en el plano hiperbólico al mirar un modelo de fractones. Analizaremos el sistema a través de simulaciones de Monte Carlo y estudiaremos brevemente cómo pueden ser utilizados como modelos de gravedad utilizando la correspondencia AdS/CFT.

En el capítulo 6 presentaremos las conclusiones del presente trabajo y posibles trabajos a futuro.

La lista de publicaciones que constituyen los resultados centrales de esta tesis es:

- [24] Duran, A. C., & Sturla, M. (2020). Vortex lattice in two-dimensional chiral X Y ferromagnets and the inverse Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition. *Physical Review B*, 102(10), 100406.
- [25] Duran, A. C., Osorio, S. A., & Sturla, M. B. (2022). Anomalous Hall effect in the coplanar antiferromagnetic coloring-triangular lattice. *Physical Review B*, 106(4), 045101.
- [26] Duran A. C., Sturla, M. B., Jaubert L. & Han Yan, (2024) Conformal Boundary as Holographic Dual to the Hyperbolic Fracton Model
- Duran A. C., Sturla, M. B., Han Yan, & Jaubert L. (2024) Geometric frustration and Ising antiferromagnetism in hyperbolic lattices (Sin publicar)

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

2.1. Topología

La topología es una rama de la matemática que se ocupa de estudiar las propiedades de los espacios que son invariantes bajo deformaciones continuas. En los últimos años ha surgido como una poderosa herramienta en el área de la materia condensada en general y en el estudio de sistemas magnéticos bidimensionales en particular. En esta sección explicaremos algunas nociones básicas de la topología, necesarias para el entendimiento de esta tesis doctoral, siguiendo lo desarrollado en [27, 28]. Explicaremos también algunas de las aplicaciones de la topología en el estudio de sistemas magnéticos y desarrollaremos diferentes tipos de invariantes topológicos. En los sistemas magnéticos la aplicación de la topología ha rendido frutos, en particular, con el descubrimiento de transiciones de fase topológicas. Esto se debe, en parte, al estudio de sistemas físicos que poseen configuraciones magnéticas en las que el campo o parámetro de orden correspondiente es un estado no uniforme caracterizado por la aparición de lo que definiremos más adelante como defectos topológicos. La topología nos permite separar configuraciones magnéticas en clases de equivalencia de acuerdo a si son *topológicamente equivalentes*, esto es, si es posible deformar continuamente una de ellas en otra sin superar una barrera de energía muy alta o recurrir a la naturaleza discreta de la red. Diremos que el conjunto de configuraciones equivalentes forman una clase de equivalencia que llamaremos *sector topológico*.

En la práctica, algunas de las características físicas de un sistema magnético real restringen las aplicaciones de la topología. En primer lugar, las configuraciones magnéticas están definidas en una red discreta de puntos por lo que las nociones continuas que utilizaremos en topología constituyen una aproximación. En segundo lugar, los sistemas experimentales son necesariamente finitos, por lo que los efectos topológicos pueden ser borrados por efectos de borde.

2.1.1. Espacios topológicos

Comencemos definiendo a un espacio topológico. Un espacio topológico, que denotaremos (X, \mathcal{T}) , consiste de un conjunto X y una cierta colección de subconjuntos \mathcal{T} de X que satisface lo siguiente

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- Dada una cantidad arbitraria U_i de subconjuntos de X pertenecientes a \mathcal{T} , la unión $\bigcup_i U_i$ también pertenece a \mathcal{T} .

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

- Dada una cantidad arbitraria U_i de subconjuntos de X pertenecientes a \mathcal{T} , su intersección $\bigcap_i U_i$ también pertenece a \mathcal{T} .

Es usual hacer un abuso de notación y decir simplemente que X es un espacio topológico. También llamamos a los $U_i \in \mathcal{T}$ conjuntos abiertos y decimos que \mathcal{T} le da una topología a X . Notemos que dado un conjunto X podemos definir más de un espacio topológico, dentro de estos destacamos la topología discreta en la que \mathcal{T} es la colección de todos los subconjuntos de X ; y la topología trivial en la que $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Si X posee una métrica d podemos convertirlo inmediatamente en un espacio topológico cuyos conjuntos son los discos abiertos $U_\epsilon = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}$ y todas sus posibles uniones. La topología así definida se llama **topología métrica** determinada por d .

También destacamos que un espacio topológico induce una topología a sus subconjuntos. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y A cualquier subconjunto de X . Entonces llamamos topología relativa en A la dada por la colección $\mathcal{T}' = \{U_i \cap A | U_i \in \mathcal{T}\}$.

Definimos a su vez mapas continuos entre espacios topológicos. Un mapa $f : X \rightarrow Y$ es continuo si la imagen inversa de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X .

Espacios compactos

Dentro de los espacios topológicos podemos definir los espacios compactos, para poder definirlos partimos primero de los recubrimientos de espacios, un concepto que nos será de utilidad al trabajar con las compactificaciones del plano hiperbólico más adelante. Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , una familia $\{A_i\}$ de subconjuntos de X se llama un recubrimiento de X si

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

Si todos los A_i son conjuntos abiertos, es decir elementos de la colección \mathcal{T} , entonces decimos que el recubrimiento es abierto.

Consideremos ahora un conjunto X y todos sus posibles recubrimientos. El conjunto X es compacto si, para cada recubrimiento abierto $\{U_i | i \in I\}$ existe un subconjunto finito J de I tal que $\{U_j | j \in J\}$ es también un recubrimiento de X .

Los espacios topológicos compactos son de especial interés en la física general y en el estudio de sistemas magnéticos en particular. En esta tesis doctoral definiremos sistemas magnéticos sobre el plano Euclídeo y el plano Hiperbólico; en ambos casos dotaremos a los planos de condiciones de contorno periódicas que, efectivamente, compactificarán los planos. En el caso del plano Euclídeo, la implementación de condiciones de contorno periódicas nos lleva a trabajar sobre un toro, mientras que en el caso del plano hiperbólico tendremos distintas compactificaciones que nos llevarán a superficies con distintos genus.

2.1.2. Homeomorfismos e invariantes topológicos

Dentro de los mapas continuos podemos definir los **homeomorfismos**. Un homeomorfismo entre un espacio topológico X_1 y otro X_2 es un mapa continuo $f : X_1 \rightarrow X_2$ cuya inversa $f^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ también es continua. Si existe un homeomorfismo entre X_1 y X_2 se dice que

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

dichos espacios son homeomorfos. Coloquialmente, decimos que dos espacios topológicos son homeomorfos si podemos deformar uno en otro con continuidad, esto es, sin 'romperlos' o 'emparcharlos'.

Dada la definición de homeomorfismos tenemos la posibilidad de categorizar los espacios topológicos en clases de equivalencias de acuerdo a si son homeomorfos entre sí. Surge ahora la pregunta, ¿Podemos caracterizar todas las clases de equivalencia de homeomorfismos entre espacios topológicos? Esta es una pregunta abierta aún, pero podemos preguntarnos algo menos ambicioso, ¿Tenemos algún mecanismo para distinguir si dos espacios topológicos **no** pertenecen a la misma clase de equivalencia? Como respuesta a esta pregunta surgen los llamados **invariantes topológicos**. Diremos que si dos espacios topológicos tienen diferentes invariantes topológicos entonces no pertenecen a la misma clase de equivalencia. Un invariante topológico puede ser un número, como el número de componentes conectadas del espacio, una estructura algebraica como puede ser un grupo o un anillo que se construye a partir del espacio, entre otros. No conocemos todos los posibles invariantes topológicos, por lo tanto si dos espacios coinciden en todos los invariantes que calculamos aun pueden no ser equivalentes. Dentro del conjunto de invariantes topológicos nos van a interesar dos: los grupos de homotopía $\pi_n(X)$ y la característica de Euler.

Grupos de homotopía

Al hablar de grupos de homotopía estamos interesados en deformaciones continuas de un mapeo a otro. Supongamos que las funciones f y g son mapas entre los espacios X e Y . Si existe un mapa $F : X \times I \rightarrow Y$, donde I es el intervalo real $[0, 1]$, tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para cualquier punto $x \in X$ entonces se dice que f es homotópica a g . Lo que estamos diciendo es que podemos deformar continuamente el mapeo f hasta llegar al mapeo g . La homotopia establece una relación de equivalencia entre mapas por lo que nos permite definir clases de equivalencia. En particular, solemos elegir X como algún espacio topológico ya conocido, por ejemplo, se suele elegir la n -esfera S^n y miramos los mapas que van de S^n a un espacio Y y vemos cómo se clasifican estos mapas de acuerdo a las clases de equivalencia homotópicas.

Consideremos en particular mapeos de la esfera S^1 a un espacio X que supondremos comienzan y terminan en un punto base $x_0 \in X$, por lo que f representa un lazo. La relación de homotopía nos permite dividir el conjunto de lazos en el espacio X en subconjuntos disjuntos llamados clases de homotopía, denotamos a la clase de un lazo f con $[f]$. El conjunto de lazos con un mismo punto base junto con la concatenación de funciones forman una estructura de grupo. A este grupo lo llamamos $\pi_1(X, x_0)$.

Hasta aquí consideramos lazos que comienzan y terminan en un mismo punto base x_0 , para aplicar estas herramientas en la clasificación de defectos topológicos estamos interesados en desplazar estos puntos base libremente por el espacio X . Esto nos define las homotopías libres, que son el conjunto de lazos sin un punto base.

Podemos generalizar este concepto a grupos de homotopía mayores, estos quedan definidos como

$$\pi_n(X) = \{\text{Mapeos: } S^n \rightarrow X\} / \text{Bajo deformaciones continuas}$$

Característica de Euler

Para definir a la característica de Euler la introducimos primero en \mathbb{R}^3 , las definiciones que daremos a continuación pueden formalizarse en espacios de mayor dimensión pero para el desarrollo de esta tesis nos es suficiente con estas nociones intuitivas. Definimos a los polihedros como objetos geométricos rodeados de caras. El borde entre dos caras es un lado y la intersección entre lados un vértice. Sea ahora X un subconjunto de \mathbb{R}^3 que es homeomorfo a un polihedro K . Entonces la característica de Euler $\chi(X)$ de X está definida por

$$\chi(X) = V(K) - E(K) + F(K) \quad (2.1)$$

donde $V(K)$, $E(K)$ y $F(K)$ son el número de vértices, lados y caras de K respectivamente. Es notable que la característica de Euler χ es independiente del polihedro particular K que hayamos elegido siempre y cuando K sea homeomorfo a X .

En la práctica, haremos uso de la característica de Euler en conjunto con el teorema de Gauss-Bonnet que nos relaciona la integral de la curvatura Gaussiana de una superficie con su característica de Euler. El teorema de Gauss-Bonnet, en el caso particular de superficies compactas y orientables, nos dice

$$\chi = 2 - 2g \quad (2.2)$$

siendo g el genus de la superficie, el número de agujeros de la superficie.

2.1.3. Clasificación de defectos topológicos

Consideraremos sistemas físicos descritos por un campo $\phi(r)$. A los campos los vamos a pensar como mapeos

$$\phi : M \rightarrow T$$

que asignan a cada punto r de alguna variedad \mathcal{M} , que llamaremos variedad base, un valor del campo m cuyos posibles valores definen una variedad T , que llamaremos espacio target. En líneas generales, en los sistemas magnéticos el espacio base suele ser \mathbb{R}^d mientras que el espacio target S^n . En el contexto de esta tesis vamos a considerar sistemas de espines, que pueden pertenecer a S^1 (modelo XY) o a S^2 (modelo de Heisenberg), definidos sobre redes tanto Euclídeas como hiperbólicas, las redes están constituidas a partir de un conjunto discreto de puntos de \mathbb{R}^2 o del plano hiperbólico \mathbb{H} . Nos interesará a su vez tomar como espacio base una región $R \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{H}$ con condiciones de contorno adecuadas en cuyo caso el espacio base se verá modificado. Usualmente terminaremos tomando entonces como espacio base a la esfera S^d , un toro T^d y en el caso del plano hiperbólico a alguna superficie T con genus g que estudiaremos con más detalle en el capítulo 4. En cualquier caso, será objeto de nuestro interés la clasificación de los distintos tipos de mapeos entre el espacio base y el espacio target.

Es en este contexto en el que la teoría de homotopía nos va a servir como herramienta para la descripción de defectos topológicos. Para los casos que consideraremos en esta tesis los defectos topológicos surgirán cuando exista algún n tal que $\pi_n(T) \neq 0$. Nos va a interesar a su vez desarrollar invariantes topológicos que nos permitan identificar a qué clase de homotopía

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

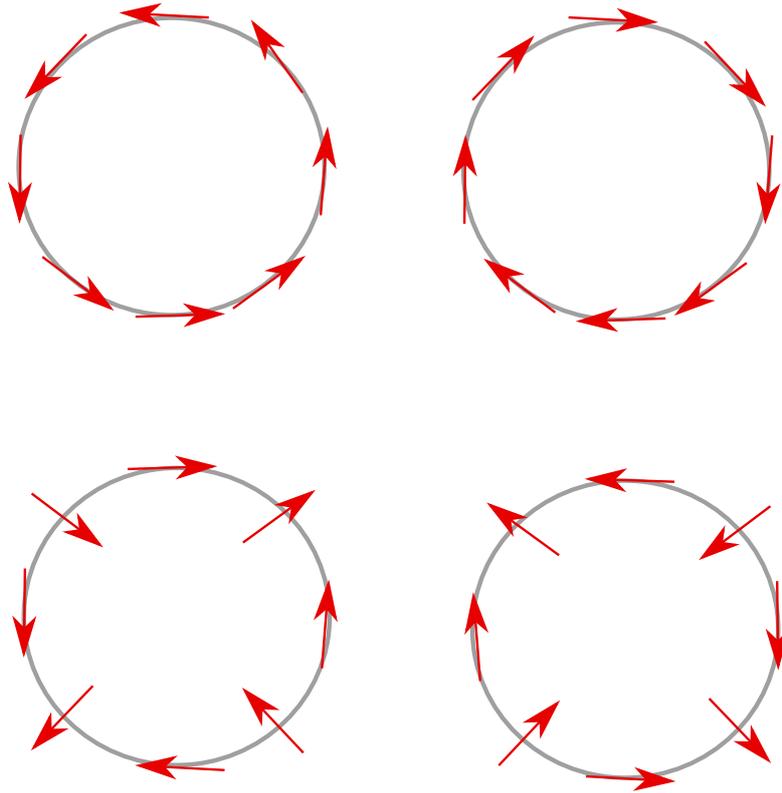


Figura 2.1.: Configuraciones de campo $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ con distinto winding number. En la fila superior dos configuraciones distintas, ambas con winding number $n = 1$. En la fila inferior dos configuraciones con winding number $n = -1$.

pertenece una configuración de campo dada. Estos son invariantes de clase y toman un valor específico para cada clase de homotopía.

Como ejemplo de defectos topológicos hablaremos de los llamados vórtices. Este tipo de defectos surge en particular en el estudio de sistemas de espines planares definidos por un campo $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, con norma fija y de dos componentes, en un espacio bidimensional, como lo es el modelo XY que discutiremos en el siguiente capítulo. Consideraremos que el campo $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ es continuo en todo el espacio excepto en un punto singular P y consideremos un lazo cerrado centrado en P . Como el parámetro de orden es un vector unitario de dos componentes lo podemos caracterizar unívocamente con un ángulo $\theta(\mathbf{r})$. A su vez, si parametrizamos el lazo con una variable $t \in [0, 1]$ con $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1)$ y definimos el valor del parámetro de orden en esa curva mediante la función $f(t) = \theta(\mathbf{r}(t))$, podemos asignarle al campo un entero n dado por

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{df}{dt} dt.$$

Este número lo llamamos *winding number* y es el número de vueltas que da el parámetro de orden a lo largo de la curva. Que este número sea un entero se debe a que $\pi_1(S^1) =$

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

\mathbb{Z} y se trata de un invariante topológico. Esto último implica que no podemos deformar una configuración de campo con winding number n a otra con winding number $m \neq n$ continuamente, en la figura 2.1 se encuentran 4 configuraciones de campo con distintos winding number. Supongamos que vamos disminuyendo continuamente la curva que rodea al punto P . Como el campo es continuo excepto quizás en P y el winding number es una cantidad discreta, concluimos que el winding number debe ser idéntico en cada curva que rodea a P . Con este análisis también podemos concluir que la derivada de $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ debe ser divergente en P si $n \neq 0$, ya que sin importar cuán pequeña sea la curva que rodea este punto el campo debe rotar en un ángulo $2\pi n$. Para poder remover esta singularidad debemos modificar el winding number en cada curva que rodee al punto, sin importar que tan lejos de P se encuentre.

También nos va a interesar el caso en el que en lugar de tener espines planares tenemos espines de módulo 1 y con tres componentes. En este caso el parámetro de orden es un elemento de S^2 . Esperamos entonces identificar a cada textura magnética con un invariante de clase que también es un número entero ya que $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Definimos este número con

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) d^2 \mathbf{r}$$

donde la integral se hace sobre una superficie cerrada en este caso, como ser una esfera.

2.2. Fase y curvatura de Berry

La topología nos será útil también en la descripción de las estructuras de bandas de sistemas electrónicos, como los que estudiaremos en el capítulo 3. Uno de los conceptos más importantes en los aspectos topológicos de la teoría de bandas electrónicas es el de la fase de Berry [29]. La idea general es que el transporte adiabático de partículas genera un cambio de fase extra en la función de onda además de la fase que obtiene por la dinámica. En esta sección introducimos la fase de Berry para una partícula cuya evolución temporal está determinada por un Hamiltoniano con parámetros que cambian lentamente con el tiempo. Tomamos esta formulación como base para definir invariantes topológicos como los números de Chern que nos permitan hablar de transiciones de fase topológicas.

2.2.1. Formalismo general

Consideremos un sistema físico con un Hamiltoniano $H(\mathbf{R}(t))$ que varía con el tiempo a través de un conjunto de parámetros que introducimos en un vector $\mathbf{R}(t)$. Estos parámetros pueden ser campos magnéticos, campos eléctricos, cualquier parámetro externo que varíe con el tiempo. Estudiaremos la evolución adiabática del sistema, es decir, cómo evoluciona el sistema cuando los parámetros $\mathbf{R}(t)$ cambian lentamente comparados con cualquier escala intrínseca del sistema. Supondremos que $\mathbf{R}(t)$ varía a lo largo de un camino \mathcal{C} en el espacio de parámetros e introducimos una base ortonormal instantánea $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ de $H(\mathbf{R}(t))$ que se obtiene de diagonalizar $H(\mathbf{R}(t))$ para cada punto en el espacio de parámetros, es decir,

$$H(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle. \quad (2.3)$$

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

donde, a partir de ahora, dejamos de escribir explícitamente la dependencia en el tiempo del parámetro \mathbf{R} para alivianar la notación. La ecuación (2.3) nos determina una base instantánea del Hamiltoniano a menos de una fase, removemos esta arbitrariedad eligiendo una fase y por ende fijando una elección de gauge.

Nos dedicamos ahora a analizar la fase de la función de onda de un sistema preparado en un estado inicial $|n(\mathbf{R}_0)\rangle$ a medida que movemos lentamente \mathbf{R} a lo largo del camino \mathcal{C} . Si llamamos $|\psi(t)\rangle$ al estado del sistema en un tiempo t arbitrario, la evolución temporal está dada por la ecuación de Schrodinger

$$H(\mathbf{R}) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle. \quad (2.4)$$

Podemos expandir el estado de nuestro sistema en la base instantánea (2.3), lo que nos deja $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n(\mathbf{R})\rangle$ que introduciéndolo en la ecuación de Schrodinger nos deja

$$\sum_n E_n(\mathbf{R}) c_n(t) |n(\mathbf{R})\rangle = i\hbar \sum_n \dot{c}_n(t) |n(\mathbf{R})\rangle + c_n(t) |\dot{n}(\mathbf{R})\rangle. \quad (2.5)$$

Tomando el producto interno con el ket $\langle m(\mathbf{R})|$ y recordando que es una base instantánea ortonormal tenemos

$$E_m(\mathbf{R}) c_m(t) = i\hbar \dot{c}_m(t) + i\hbar \sum_n c_n(t) \langle m(\mathbf{R}) | \dot{n}(\mathbf{R}) \rangle. \quad (2.6)$$

Miramos el último término con detalle y para esto tomamos la ecuación (2.3) que define a la base instantánea y la derivamos respecto al tiempo

$$\dot{H}(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle + H(\mathbf{R}) |\dot{n}(\mathbf{R})\rangle = \dot{E}_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle + E_n(\mathbf{R}) |\dot{n}(\mathbf{R})\rangle \quad (2.7)$$

que reordenando y tomando el producto con el ket $|m(\mathbf{R}(t))\rangle$

$$\langle m(\mathbf{R}) | \dot{n}(\mathbf{R}) \rangle = \frac{\langle m(\mathbf{R}) | (\dot{E}_n(\mathbf{R}) - \dot{H}(\mathbf{R})) |n(\mathbf{R})\rangle}{(E_m(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}))} \quad (2.8)$$

en el caso en que $m \neq n$. Aquí entra en juego la hipótesis de adiabaticidad, consideramos que la variación del Hamiltoniano respecto a los parámetros es lo suficientemente pequeña como para que el lado derecho se anule. Volviendo a (2.6) tenemos

$$E_m(\mathbf{R}) c_m(t) = i\hbar \dot{c}_m(t) + i\hbar c_m(t) \langle m(\mathbf{R}) | \dot{m}(\mathbf{R}) \rangle. \quad (2.9)$$

Podemos resolver esta ecuación diferencial para $c_m(t)$ y obtenemos

$$c_m(t) = c_m(t=0) \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_m(\mathbf{R}) dt - \int_0^t \langle m(\mathbf{R}) | \dot{m}(\mathbf{R}) \rangle dt \right] \quad (2.10)$$

notemos que si el sistema se encuentra en el estado $|n(\mathbf{R})\rangle$ inicialmente entonces son $c_m(t) = 0 \forall m \neq n$. El primer término en la exponencial es simplemente la fase dinámica que obtenemos normalmente. El término extra es también una fase ya que el integrando es puramente imaginario, como podemos ver si derivamos la ecuación de normalización

$$\frac{d}{dt} (\langle n(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle) = 0 \rightarrow \langle n(\mathbf{R}) | \dot{n}(\mathbf{R}) \rangle + (\langle n(\mathbf{R}) | \dot{n}(\mathbf{R}) \rangle)^* = 0. \quad (2.11)$$

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

A esta fase extra que obtenemos la llamamos fase de Berry, la denotamos con γ_n y está dada por

$$\gamma_n = i \int_0^t \langle n(\mathbf{R}) | \frac{d}{dt} (|n(\mathbf{R})\rangle) dt \quad (2.12)$$

Con esto tenemos para nuestro sistema a tiempo t

$$|\psi(t)\rangle = \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}) dt + i\gamma_n \right] |n(\mathbf{R})\rangle. \quad (2.13)$$

Volviendo a la fase de Berry, podemos reexpresarla a modo de poder calcularla como una integral sobre el camino \mathcal{C} . Esto es

$$\gamma_n = i \int_0^t \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} dt = i \int_{\mathcal{C}} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle \cdot d\mathbf{R}. \quad (2.14)$$

Esto nos permite definir la conexión o potencial de Berry $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = i \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle, \quad \gamma_n = \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{R}). \quad (2.15)$$

La conexión de Berry depende del gauge elegido. Bajo una transformación de gauge $|n(\mathbf{R})\rangle \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle$ con un campo suave $\alpha(\mathbf{R})$ la conexión de Berry cambia según

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \alpha(\mathbf{R}). \quad (2.16)$$

Por lo tanto, la fase de Berry transformará también según

$$\gamma_n \rightarrow \gamma_n - \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \alpha(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \alpha(\mathbf{R}(0)) - \alpha(\mathbf{R}(t_f)) \quad (2.17)$$

siendo t_f el tiempo en el que se alcanza el final de la trayectoria. Podríamos pensar en este momento que la fase de Berry puede ser removida con una elección adecuada del factor $\alpha(\mathbf{R})$. Esto no es así y lo podemos ver si consideramos ahora un camino cerrado en el espacio de parámetros. Si el camino es cerrado entonces $\alpha(\mathbf{R}(0)) = \alpha(\mathbf{R}(t_f))$ y la modificación a la fase de Berry por el cambio de gauge se anula.

En lo que resta de la sección vamos a tratar siempre con caminos cerrados en el espacio de parámetros. Dado que la calcularemos sobre caminos cerrados podemos aplicar el teorema de Stokes para reescribirla

$$\gamma_n = -\oint d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \langle n(\mathbf{R}) | \nabla |n(\mathbf{R})\rangle) = -\oint dS_i \epsilon_{ijk} \nabla_j \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_k |n(\mathbf{R})\rangle \quad (2.18)$$

$$\gamma_n = -\oint d\mathbf{S} \cdot (\langle \nabla n(\mathbf{R}) | \times | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle) \quad (2.19)$$

donde $\Omega = \langle \nabla n(\mathbf{R}) | \times | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle$ es la curvatura de Berry, precisamente $\Omega_{jk} = \langle \nabla_j n(\mathbf{R}) | \nabla_k n(\mathbf{R}) \rangle - j \rightarrow k$. Podemos pensar a F_{jk} como un campo magnético en el espacio de parámetros, el rotor del potencial de Berry.

2.2.2. Formulación independiente de gauge

En un procedimiento numérico uno diagonaliza numericamente el Hamiltoniano para cada valor de \mathbf{R} pero nada nos asegura que a distintos valores de \mathbf{R} estemos tomando el mismo gauge como para luego derivar los estados y calcular la fase de Berry según (2.15). Estas consideraciones nos están indicando que necesitamos una expresión independiente del gauge. Para esto, introducimos la identidad en la base instantánea en (2.19)

$$\gamma_n = -\oint \int dS_i \sum_{m \neq n} \epsilon_{ijk} \langle \nabla_j n(\mathbf{R}) | m \rangle \langle m | \nabla_k n(\mathbf{R}) \rangle \quad (2.20)$$

Esto puede ser reescrito como

$$\gamma_n = - \int \int_C d\mathbf{S} \cdot \oint \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} H(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle}{(E_m(\mathbf{R}) - E_n(\mathbf{R}))^2}. \quad (2.21)$$

Esta expresión tiene la ventaja de no depender explícitamente de la fase elegida para la base instantánea. Aún así, notemos que esta expresión es solo válida en los casos en los que no haya degeneraciones o cruce de niveles en ningún valor del parámetro \mathbf{R} . Para los casos degenerados, el potencial de Berry se vuelve una matriz de dimensión igual a la degeneración de los niveles, se vuelve no Abelian.

2.2.3. Números de Chern

Una cantidad destacable que podemos calcular a partir de la curvatura de Berry es el número de Chern definido sobre una variedad S cerrada. Esta cantidad está dada por el teorema de Chern [30] que indica que

$$\int_S \Omega \cdot d\mathbf{S} = 2\pi C \quad (2.22)$$

siendo C un entero que llamamos número de Chern o índice de Chern de la variedad y es un invariante topológico.

2.2.4. Fase y curvatura de Berry en sólidos

Hasta este momento consideramos la fase, conexión y curvatura de Berry definidas sobre algún autoestado $|n(\mathbf{R})\rangle$ dependiente de un conjunto arbitrario de parámetros \mathbf{R} definidos en algún espacio. Lo que nos va a interesar en particular es tomar a nuestros parámetros como los momentos \mathbf{k} de los cuales depende cada banda de energía de un sólido y como espacio de parámetros a la zona de Brillouin.

Supongamos que tenemos una banda n aislada, es decir que no se cruza con las bandas vecinas en ningún punto de la zona de Brillouin. Si tomamos las funciones de onda periódicas $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ que son autoestados de un Hamiltoniano H que depende de los vectores \mathbf{k} , es decir, estamos bajo las condiciones de la sección previa, tomando ahora como parámetros a \mathbf{k} . Con esto, podemos definir la fase de Berry igual que antes

$$\gamma_n = \int_C \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{k} \quad (2.23)$$

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

donde la conexión de Berry está dada por

$$\mathbf{A}_{n,\mu} = i \langle u_n(\mathbf{k}) | \frac{\partial}{\partial k_\mu} | u_n(\mathbf{k}) \rangle \quad (2.24)$$

y de manera similar la curvatura de Berry será

$$\Omega_{n,\mu\nu}(\mathbf{k}) = \partial_{k_\mu} A_{n,\nu} - \partial_{k_\nu} A_{n,\mu} \quad (2.25)$$

En dos dimensiones la zona de Brillouin es un toro y podemos definir el número de Chern de una banda Como

$$C_n = \frac{1}{2\pi} = \int_{BZ} \Omega_{n,xy} d^2k \quad (2.26)$$

Para que estas cantidades sean de interés en un sistema en particular deben ser no triviales. Esto dependerá del sistema en general pero de acuerdo a las simetrías que tenga un cristal podemos predecir ciertos comportamientos de la curvatura de Berry. En particular vemos que

1. Si el cristal tiene simetría de inversión entonces $\Omega_n(\mathbf{k}) = \Omega_n(-\mathbf{k})$
2. Si el cristal tiene simetría de inversión temporal entonces $\Omega_n(\mathbf{k}) = -\Omega_n(-\mathbf{k})$, lo que nos dice que si están presentes ambas, simetría de inversión temporal y simetría de inversión espacial, entonces la curvatura de Berry es nula. También vemos que en el caso de simetría de inversión temporal la integral sobre toda la zona de Brillouin de la curvatura de Berry es nula.
3. Otras simetrías del cristal impondrán otras condiciones sobre la curvatura de Berry.

La segunda condición nos dice que la curvatura de Berry será de especial interés en sistemas magnéticos en donde tenemos rota la simetría de inversión temporal.

Nos queda por determinar qué efectos tienen la fase, curvatura y conexión de Berry en la física de un sistema. En sólidos bidimensionales el momento \mathbf{k} suele estar definido sobre un variedad que usualmente tomamos como un toro, este toro tiene dos direcciones periódicas por lo que un posible objeto de interés es la fase de Berry acumulada a lo largo de algún lazo cerrado en estas direcciones. Dicha fase de Berry suele llamarse fase de Zak y fue introducida por Zak en [31] y está íntimamente relacionada con la polarización eléctrica [32].

En dos dimensiones podemos definir además el número de Chern asociado a la banda n mediante

$$\int_{BZ} \Omega_n dS = 2\pi C_n \quad (2.27)$$

si este índice no es nulo dicho decimos que el sistema es un aislante de Chern.

Un último aspecto importante a destacar de la teoría de fases de Berry es la aparición de una conductividad de Hall anómala. Hasta ahora mencionamos el número de Chern para una única banda ocupada pero la generalización a más bandas es inmediata, simplemente tomamos el número de Chern total, es decir, $C = \sum_n^{\text{occ}} C_n$ la suma de los números de Chern

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

de cada banda ocupada. En el caso de bandas parcialmente ocupadas podemos encontrar una conexión entre la curvatura de Berry y la conductividad de Hall anómala dada por [32]

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 \hbar} \sum_n \int_{BZ} f(\mathbf{k}) \Omega_n(\mathbf{k}) d^2 k \quad (2.28)$$

donde $f(\mathbf{k})$ es la distribución de Fermi-Dirac.

2.3. Redes hiperbólicas

En esta sección discutiremos algunas propiedades básicas del plano hiperbólico que forman la base necesaria para desarrollar modelos de espines clásicos en este espacio y así estudiar la influencia de la curvatura sobre las propiedades físicas de los sistemas magnéticos. En particular, vamos a estudiar teselaciones del plano hiperbólico, introduciendo primero el modelo del Disco de Poincaré.

2.3.1. Aspectos geométricos de las redes hiperbólicas

El plano hiperbólico es el espacio bidimensional con curvatura Gaussiana constante y negativa. Podemos definir de manera análoga otros dos espacios bidimensionales, el de curvatura constante y positiva que constituye una esfera y el de curvatura constante y nula que es el plano Euclídeo. La esfera puede ser embebida en el espacio Euclídeo tridimensional pero esto no es posible para el plano hiperbólico. Esto se debe al teorema de Hilbert que establece que no existe ninguna superficie completa regular con curvatura constante y negativa inmersa en \mathbb{R}^3 . Si bien esto no nos prohíbe embeber las pseudoesferas, porciones del plano hiperbólico con radio constante, en \mathbb{R}^3 , sí nos imposibilita representar el plano hiperbólico completo en \mathbb{R}^3 . Es por esta razón que necesitamos modelos de representación del plano hiperbólico entre los que destacamos el disco de Poincaré con el que trabajaremos a continuación.

El disco de Poincaré es un modelo de representación del plano hiperbólico. Constituye un espacio continuo en donde embebemos al plano hiperbólico, lo representamos a través de un disco en el plano complejo $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ con la métrica hiperbólica

$$ds^2 = (2\kappa)^2 \frac{dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2} \quad (2.29)$$

donde la curvatura Gaussiana está dada por $K = -\kappa^2$ y κ nos da una unidad de longitud. El modelo del disco de Poincaré nos permite identificar cada punto del plano hiperbólico con un punto en \mathcal{D} , $z_i = x_i + iy_i = r_i e^{i\theta_i}$.

Dada la métrica definida en (2.29) podemos obtener las geodésicas en el disco. La geodésica que une dos puntos z_1 y z_2 está dada por el arco de circunferencia que interseca al disco de manera perpendicular, o por diámetros si la línea que une z_1 y z_2 pasa por el origen. Esta circunferencia está definida por la ecuación

$$C = \{z = x + iy \in \mathcal{D} \mid x^2 + y^2 + ax + by + 1 = 0\}$$

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

con

$$b = \frac{x_1(1 + z_2^2) - x_2(1 + z_1^2)}{y_1x_2 - y_2x_1} \quad a = \frac{y_1(1 + z_2^2) - y_2(1 + z_1^2)}{y_1x_2 - y_2x_1}.$$

Con esto podemos obtener la distancia hiperbólica entre dos puntos $z_i, z_j \in \mathcal{D}$

$$d(z_i, z_j) = \kappa \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2|z_i - z_j|^2}{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)} \right).$$

Notemos además que los ángulos en el disco de Poincaré están dados por los ángulos Euclídeos en el plano complejo.

Definimos además transformaciones que preservan distancias en el disco de Poincaré, isometrías de \mathcal{D} ,

$$z \rightarrow Mz = \frac{az - b}{b^*z - a^*} \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det M = \pm 1$$

donde a y b son números complejos. La condición sobre el determinante nos divide a las transformaciones en 2, las que tienen determinante positivo que preservan la orientación y la que tienen determinante negativo que no preservan la orientación. Notemos que podemos obtener todas a partir de las que mantienen la orientación. Este grupo de transformaciones forma el grupo proyectivo unitario $PSU(1, 1)$. Podemos obtener las que reversan la orientación componiendo una transformación de $PSU(1, 1)$ con la operación $z \rightarrow z^*$, de manera que el grupo completo de isometrías es el producto semidirecto $SU(1, 1) = PSU(1, 1) \times \mathbb{Z}_2$.

Llamaremos teselación al cubrimiento de una superficie usando una o más figuras geométricas que llamamos *tiles* de manera que no se solapen ni que queden porciones de la superficie sin cubrir. Miraremos las teselaciones de superficies bidimensionales con curvatura constante como las que mencionamos antes, en particular, las teselaciones del plano hiperbólico. Más aún, nos concentraremos en teselaciones regulares de dichas superficies, es decir, las teselaciones obtenidas a partir de polígonos regulares, todos idénticos.

Obtenemos teselaciones regulares de una superficie bidimensional colocando polígonos regulares de p lados, p -gons de ahora en más, compartiendo vértices con otros q p -gons. Denotamos dichas teselaciones con la notación $\{p, q\}$. Si $(p-2)(q-2) = 4$ serán teselaciones del plano Euclídeo, que solo puede ser teselado con triángulos, cuadrados y hexágonos, $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$ respectivamente. Si $(p-2)(q-2) < 4$ serán teselaciones de la esfera, en este caso serán válidas solamente $\{3, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 3\}$, $\{4, 3\}$ y $\{5, 3\}$. Por último, si $(p-2)(q-2) > 4$ tendremos teselaciones del plano hiperbólico, en este caso existen infinitas teselaciones regulares. En la figura 2.2 podemos ver teselaciones de cada una de estas superficies.

Concentramos nuestra atención ahora en el plano hiperbólico utilizando el modelo del disco de Poincaré. A partir de una dada teselación, podemos identificar el conjunto de los vértices de cada polígono que conforma dicha teselación como $\Lambda = \{z_i\}$ con $z_i \in \mathcal{D}$, llamaremos a este conjunto de puntos una red en el plano hiperbólico. Podemos elegir las posiciones de los polígonos arbitrariamente pero elegiremos en líneas generales o bien tener el centro de un polígono en el origen del o bien tener un sitio de red en el origen del disco de Poincaré.

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

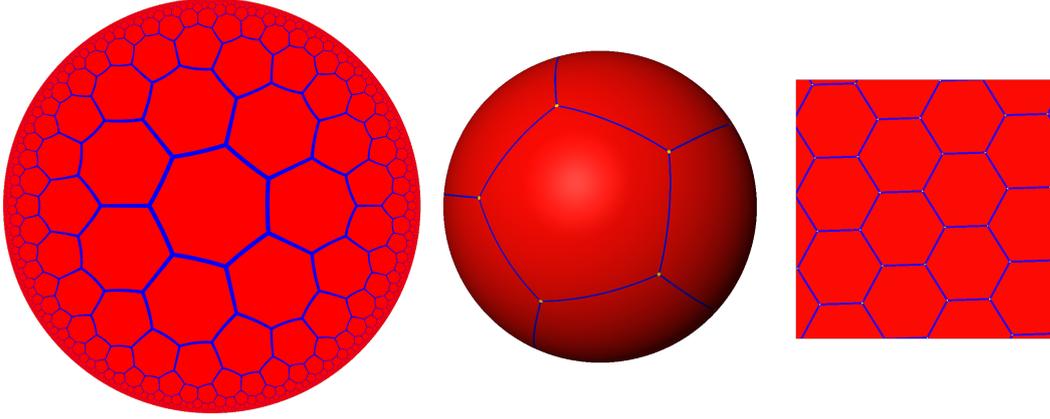


Figura 2.2.: Teselaciones en distintas superficies. *a)* Teselación $\{7, 3\}$ en el plano hiperbólico utilizando el disco de Poincaré. *b)* Teselación $\{5, 3\}$ en la esfera. *c)* Teselación $\{6, 3\}$ del plano Euclídeo.

Contrario a lo que sucede en el plano euclídeo, la geometría hiperbólica fija la longitud de los lados del polígono y son una función del par (p, q) .

Consideremos el caso en el que centramos un polígono de p lados en el origen. Formamos ahora el triángulo que tiene como lados las geodésicas que unen el origen con un vértice del polígono y con el punto del polígono más cercano al origen como vemos en la figura 2.3. De acuerdo a la trigonometría hiperbólica se debe cumplir

$$\cosh(c/\kappa) = \frac{\cos(\pi/q) \cos(\pi/p)}{\sin(\pi/p) \sin(\pi/q)}$$

siendo c la distancia hiperbólica entre el origen y el vértice del polígono en la posición $z = r_0 e^{i\pi/q}$. Esta distancia hiperbólica la podemos calcular también a partir de

$$d(z, 0) = c = \kappa \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{2r^2}{(1-r^2)^2} \right)$$

entonces

$$r = \sqrt{\frac{\cos(\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q})}{\cos(\frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{q})}}$$

Los vértices del polígono central estarán en el disco de Poincaré en las posiciones $z_j = r e^{i\pi/q + j2\pi/q}$, siendo δ una fase arbitraria. De aquí podemos obtener también la distancia hiperbólica entre primeros vecinos, d_l , según

$$d(z_l, z_{l+1}) = d_l = \kappa \operatorname{arcosh} \left(1 + \frac{8r^2 \sin^2(\pi/q)}{(1-r^2)^2} \right)$$

de donde

$$\sinh(d_l/\kappa) = \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \sinh(2 \operatorname{artanh}(r)).$$

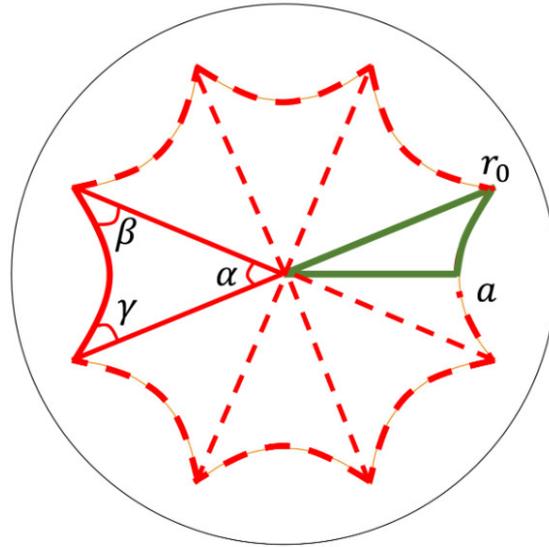


Figura 2.3.: Polígono regular de una teselación $\{8, 8\}$ del disco de Poincaré. Los vértices del polígono centrado en el origen se encuentran en las posiciones $z_j = r_0 e^{i(2j\pi/8 + \pi/8)}$. En verde el triángulo formado por los ángulos $\pi/2$, $\pi/p, \pi/q$, con $p = q = 8$.

Vemos entonces que, al tener el plano hiperbólico una escala de distancia ya definida, dada por su curvatura Gaussiana, la distancia entre sitios de red en una teselación regular queda determinada por esta curvatura. Esta será la distancia que tienen los primeros vecinos en la red, es decir, los vértices más cercanos.

2.3.2. Cristalografía

Generalizaremos ahora las nociones de cristalografía en el plano Euclídeo al plano hiperbólico, siguiendo lo expuesto en [22]. Dado un conjunto discreto de puntos $\Lambda = \{z_i\}$ que constituye una red, existe un grupo máximo \mathcal{G} actuando sobre las coordenadas z_i que deja a la red invariante, lo llamamos *grupo espacial*. La red puede ser descompuesta ahora de la siguiente manera. Cada sitio $z_i \in \Lambda$ puede ser escrito de manera única como $z_i = \gamma z^{(a)}$, donde $z^{(a)}$ es un elemento de una celda unidad de referencia $D = \{z^{(1)}, \dots, z^{(N)}\} \subset \Lambda$, que está compuesta por un número finito de sitios; y donde γ es un elemento de un grupo de traslaciones discreto $\Gamma \subset \mathcal{G}$, que es el grupo de simetrías de la *red de Bravais*. Esta separación nos permite identificar el índice de z_i como $i = (\gamma, a)$, donde γ y a denotan la posición de z_i en la red de Bravais y celda unidad respectivamente. Para que exista dicha descomposición, Γ tiene que ser un subgrupo normal de \mathcal{G} . El correspondiente grupo cociente $G = \mathcal{G}/\Gamma$ es el *grupo puntual* de la red. Describiremos ahora cómo encontrar los grupos espaciales, de traslación y puntual dada una red $\{p, q\}$ en el plano hiperbólico, utilizando como ejemplo la red $\{3, 7\}$ que utilizaremos en el capítulo 4.

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

Grupo espacial

El grupo espacial completo de una red $\{p, q\}$ está dado por [33] el grupo triangular que tiene como presentación

$$\Delta(2, q, p) = \langle a, b, c | a^2, b^2, c^2, (ab)^2, (bc)^q, (ca)^p \rangle \quad (2.30)$$

es decir, el grupo está generado por los elementos a, b y c con los constraints dados por los llamados *relators* que nos dicen que las expresiones que aparecen a la derecha en (2.30) son iguales a la identidad en el grupo. Estos generadores tienen una interpretación geométrica como reflexiones a lo largo de los lados de unos triángulos que llamamos *triángulos de Schwarz*, con ángulos internos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{q}$ y $\frac{\pi}{p}$, notemos que el triángulo que definimos en 2.3 es un triángulo de Schwarz, notemos también que la red $\{p, q\}$ y la red dual $\{q, p\}$ tienen el grupos espaciales isomorfos.

Al reflejar el triángulo de Schwarz utilizando sucesivas operaciones del grupo (2.30) podemos teselar el plano completo. Formalmente, definimos al conjunto S de todos los triángulos de Schwarz en el plano a partir de la acción a derecha del grupo Δ sobre el triángulo de Schwarz fundamental s_f , es decir,

$$S = s_f \cdot \Delta.$$

En líneas generales trabajaremos con el subgrupo propio de Δ , es decir, solo con las operaciones que preservan la orientación. Este grupo tiene la presentación

$$\Delta^+(2, p, q) = \langle x, y, z | xyz, x^2, y^p, z^q \rangle \quad (2.31)$$

En este caso los generadores tienen otra interpretación, ahora son rotaciones al rededor de cada vértice del triángulo de Schwarz fundamental, ver figura 2.4. Este grupo es un subgrupo de las isometrías del plano hiperbólico, es un subgrupo de $PSU(1, 1)$.

Grupo de traslaciones

Como dijimos antes, encontraremos al grupo de traslaciones Γ como un subgrupo normal del grupo espacial que preserva la orientación, es decir, un subgrupo normal de Δ^+ . Que sea un subgrupo normal implica que la conjugación de cualquier elemento de Γ con cualquier otro elemento de Δ^+ resulta devuelta en una traslación, denotamos esto con $\Gamma \triangleleft \Delta^+$. Necesitamos además que los elementos de Γ no tengan un punto fijo, esto implica que el grupo no tenga torsión, es decir, que no exista $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma^n = e$ para algún $n \neq 0$ entero. En resumen, definiremos al grupo de traslaciones como el subgrupo normal sin torsión de mayor orden en Δ^+ . Γ será lo que llamamos un grupo Fuchsiano y tiene un número finito de generadores.

Para ser concretos consideremos como ejemplo el caso de la red $\{4, 4\}$ Euclídea y la red $\{3, 7\}$ hiperbólica. En la red Euclídea el grupo de traslaciones es el grupo Abelian \mathbb{Z}^2 generado por las traslaciones en las direcciones x e y . En términos del grupo triangular Δ^+ , las traslaciones están generadas por los elementos zy^{-1} y $y^{-1}z$ respectivamente. Por otro lado, a pesar de tener solo dos dimensiones espaciales, el grupo de traslaciones de la red $\{3, 7\}$ tendrá 7 generadores de los cuales 6 son independientes y tiene presentación

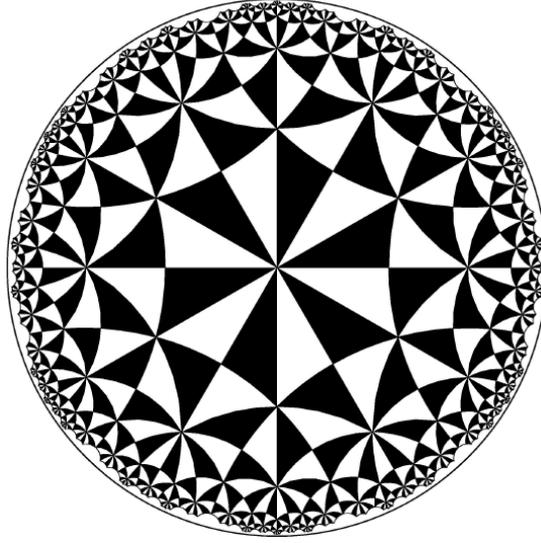


Figura 2.4.: Teselación $\{3, 7\}$ del disco de Poincaré, los triángulos blancos y negros indican triángulos de Schwarz de distintas orientaciones.

$$\Gamma_{\{3,7\}} = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 | \gamma_2 \gamma_3^{-1} \gamma_6 \gamma_5 \gamma_1 \gamma_4 \gamma_3 \gamma_5^{-1} \gamma_4^{-1} \gamma_2^{-1} \gamma_6^{-1} \gamma_1^{-1} \rangle, \quad (2.32)$$

estos generadores de traslaciones también tienen representaciones en erminos de las rotaciones del grupo Δ^+ y son

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\rightarrow (y^{-1}z^{-1}x)^2(zyx)^2 \\ \gamma_2 &\rightarrow zy^{-1}z^{-1}xy^{-1}z^{-1}xzyxzy^{-1} \\ \gamma_3 &\rightarrow (z^{-1}xy^{-1})^2z^{-1}xzyxy^{-1} \\ \gamma_4 &\rightarrow xzy^{-1}z^{-1}xy^{-1}z^{-1}xzyxz^2 \\ \gamma_5 &\rightarrow z^2y^{-1}z^{-1}xy^{-1}z^{-1}xzyxz^2y \\ \gamma_6 &\rightarrow z^{-1}xzy^{-1}z^{-1}xy^{-1}z^{-1}xz^2yz^{-2} \end{aligned}$$

y corresponden a traslaciones en las direcciones de los lados de un polígono regular de 14 lados. Todos estos resultados fueron obtenidos gracias al lenguaje de programación GAP, que nos permite encontrar una lista de subgrupos normales del grupo espacial y las relaciones entre las traslaciones. Detalles del código para generar estos resultados pueden encontrarse en el apéndice A.

Como dijimos al comienzo de esta sección, el grupo de traslaciones nos define una descomposición de la red entera en celdas unidades. Esta descomposición está determinada por la descomposición de Δ en cosets de Γ , es decir,

$$\Delta = \bigcup_{g_j \in T_\Delta(\Gamma)} \Gamma g_j \quad (2.33)$$

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

donde el conjunto $T_\Delta(\Gamma)$ es el transversal de Γ en Δ , es un conjunto que tiene un representante por cada coset de Δ/Γ . El número de elementos de $T_\Delta(\Gamma)$ es lo que llamamos índice de Γ en Δ .

Si escribimos (2.33) como una unión en Γ obtenemos

$$\Delta = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} T_\Delta(\Gamma)\gamma \quad (2.34)$$

lo que nos induce una descomposición del conjunto de los triángulos de Schwarz de la siguiente manera

$$S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (s_f \cdot T_\Delta(\Gamma)) \cdot \gamma \quad (2.35)$$

es decir, estamos dividiendo a S en un conjunto C que llamamos celda unidad

$$C = s_f \cdot T_\Delta(\gamma) \quad (2.36)$$

y copias de esta celda unidad trasladadas por Γ . La celda unidad particular que obtenemos dependerá de la elección de transversal que hagamos.

Grupo puntual

Como el grupo de traslaciones es un subgrupo normal de Δ el grupo cociente Δ/Γ es isomorfo al grupo puntual G de la red hiperbólica. Usando este isomorfismo podemos definir a la celda unidad como

$$C = s_f \cdot G \quad (2.37)$$

que nos dice inmediatamente que G es el grupo de simetrías que deja la celda unidad invariante. El orden del grupo puntual es igual al índice de Γ en Δ y nos da el número de triángulos de Schwarz en la celda unidad.

De igual manera que hicimos con el grupo espacial podemos obtener el grupo puntual propio G^+ como el grupo puntual sin las inversiones y, naturalmente, se cumple que

$$G^+ \simeq \Delta^+/\Gamma. \quad (2.38)$$

En la práctica obtendremos la celda unidad C a partir de la búsqueda del subgrupo normal $\Gamma \triangleleft \Delta^+$ de menor índice. Esta búsqueda la haremos en general con el lenguaje de programación GAP [34]. Volviendo al ejemplo de la red $\{3, 7\}$, el grupo cociente de menor orden del grupo triangular $\Delta^+(2, 3, 7)$ es un grupo de orden 168 que obtenemos a partir del cociente $\Delta^+/\Gamma_{\{3,7\}}$ siendo $\Gamma_{\{3,7\}}$ el dado por 2.32. Este grupo puntual tiene por presentación

$$\Delta^+/\Gamma_{\{3,7\}} = \langle x, y, z | x^2, y^3, z^7, xyz, z^{-3}xyz^{-3}, yxzyxzy^{-1}zy^{-1}z^{-1}xz \rangle \quad (2.39)$$

esto nos da el homomorfismo natural entre Δ^+/Γ y Δ^+ , cuyo núcleo es isomorfo a $\Gamma_{\{3,7\}}$. Que el orden sea 168 implica que la celda unidad estará formada por 168 triángulos de Schwarz de una dada orientación y 168 triángulos de Schwarz de la orientación opuesta.

Etiquetado de sitios en la red

Siguiendo el tratamiento dado en [23] daremos una manera sistemática de etiquetar los sitios de una red hiperbólica que utilizaremos en el tratamiento de sistemas magnéticos.

Como vimos antes, obtenemos una teselación del plano hiperbólico infinito a partir del conjunto infinito de triángulos de Schwarz. Como cada lado en la teselación está compartido por dos triángulos de orientaciones opuestas trabajaremos únicamente con el subconjunto de los triángulos de una dada orientación, lo que implica que nos alcanzará con mirar el grupo triangular propio Δ^+ . El conjunto V de la totalidad de vértices en la red puede ser dividido en tres subconjuntos V_x, V_y y V_z , encontramos el subconjunto V_x aplicando las acciones del grupo Δ^+ al vértice x del triángulo de Schwarz fundamental, y de manera similar para los otros subconjuntos. Ejemplificamos ahora como obtener los vértices $v \in V_z$ pero la discusión para los otros subconjuntos es equivalente. Como dijimos antes, el conjunto V_z está formado por la acción del grupo Δ^+ sobre el vértice z del triángulo de Schwarz fundamental, esto quiere decir, en el lenguaje de teoría de grupos, que estamos buscando la órbita de z bajo la acción de Δ^+ , la denotamos con $\Delta^+ \cdot z$. Obtenemos la órbita de z haciendo uso del teorema de órbitas y estabilizadores, el estabilizador de z es el conjunto de operaciones en Δ^+ que lo dejan invariante, es decir

$$\Delta_z^+ = \langle z | z^p \rangle. \quad (2.40)$$

El teorema nos dice que hay una biyección entre la órbita $\Delta^+ \cdot z$ y el grupo cociente Δ^+ / Δ_z^+ , o de manera equivalente, podemos asociar cada elemento de V_z con un elemento del transversal de Δ_z^+ en Δ^+ , es decir

$$V_z \simeq T_{\Delta^+}(\Delta_z^+). \quad (2.41)$$

De esta manera, los vértices de toda la red teselada con triángulos de Schwarz son etiquetados como $(w, [t]_w)$ con w indicando el tipo de vértice en el triángulo de Schwarz fundamental y $[t]_w \in \Delta^+ / \Delta_w^+$.

De esa manera etiquetamos los sitios en la red infinita, ¿Qué sucede cuando partimos la red en copias de una celda unidad utilizando un grupo de traslaciones? Como discutimos antes, el grupo de traslaciones $\Gamma \triangleleft \Delta^+$ nos subdivide la red infinita en copias de una celda unidad C bajo la acción del grupo cociente $G \simeq \Delta / \Gamma$. Para etiquetar ahora los vértices devuelta trabajaremos con los subgrupos propios $G^+ = \Delta^+ / \Gamma$. Ahora miraremos el estabilizador de los vértices w bajo la acción de G^+ , lo llamamos G_w^+ y es isomorfo al estabilizador total Δ_w^+ . Esto nos permite etiquetar los vértices de la celda unidad con $V_w^C \simeq T_G^+(G_w^+)$, es decir,

$$V^C \simeq \{(w, \delta_w) : w \in \{x, y, z\}, \delta \in T_G^+(G_w^+)\}. \quad (2.42)$$

¿Que quiere decir esto? Estamos etiquetando los vértices que conforman la celda unidad con el tipo de vértice del triángulo de Schwarz fundamental con el que se generan y con algún elemento del transversal del grupo G_w^+ sobre el grupo puntual propio G^+ . La elección de elementos representativos de cada coset nos determinará la celda unidad particular que estaremos utilizando.

Tenemos con esto etiquetados los sitios de cada celda unidad, si queremos etiquetar el plano completo tenemos ahora que trasladar la celda unidad a través de la acción de Γ .

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

Debido a la descomposición en cosets

$$\Delta^+ = \bigcup_{g_j \in T_{\Delta^+}(\Gamma)} g_j \Gamma, \quad (2.43)$$

cualquier elemento $t \in \Delta^+$ puede ser escrito como

$$t = g_j \gamma' \quad (2.44)$$

para un único $g_j \in T_{\Delta^+}(\Gamma)$ y $\gamma' \in \Gamma$. Esto nos está indicando que podemos etiquetar cada sitio de la red infinita indicando de qué sitio de la celda unidad se trata y cómo trasladamos esa celda unidad bajo la acción Γ .

2.3.3. Condiciones de contorno periódicas

En general cuando estudiamos un sistema magnético definido en una red en el plano Euclídeo trabajamos con redes con un número finito de sitios N con ciertas condiciones de contorno y tomamos sistemas de tamaños cada vez más grandes para obtener un límite termodinámico. Como en el límite $N \rightarrow \infty$ la proporción de sitios en el borde respecto a sitios en el bulk tiende a cero podemos utilizar tanto condiciones de contorno periódicas como abiertas sin mayor complicación. Sin embargo, al trabajar en el plano hiperbólico en el límite de $N \rightarrow \infty$ vemos que la proporción de sitios de borde y de bulk se acerca a una constante. Es por esta razón que si queremos estudiar las propiedades del bulk en algún límite de tamaño infinito necesitamos establecer condiciones de contorno periódicas que nos permitan eliminar los efectos de borde. En esta sección estudiaremos cómo definir condiciones de contorno periódicas en distintas teselaciones del plano hiperbólico y cómo definir un límite termodinámico unívoco. Trabajaremos primero desde una perspectiva geométrica estudiando patrones en superficies y luego desde una perspectiva algebraica mirando grupos de traslación.

Patrones

Introducimos ahora el concepto de patrones sobre una variedad \mathcal{M} que nos permitan definir condiciones de contorno periódicas.

Sea \mathcal{M} una variedad Riemanniana conectada bidimensional. El teorema de uniformización nos indica que cada una de estas superficies es conformalmente equivalente a una superficie con curvatura constante e igual a $+1$, 0 o -1 , esto significa que existen unas coordenadas \mathbf{x} en donde la métrica toma la forma $ds^2 = \Omega(\mathbf{x})(dx^2 + dy^2)$ donde $\Omega(\mathbf{x})$ es tal que la curvatura es constante. Si \mathcal{M} es simplemente conexa, es decir sin agujeros, es entonces equivalente a la esfera S^2 , el plano hiperbólico o el disco de Poincaré. Si \mathcal{M} tiene agujeros, que solo puede pasar para curvatura 0 o -1 , entonces es o bien equivalente a un toro con genus $g = 1$ y curvatura nula, o bien es equivalente a una superficie hiperbólica con curvatura negativa, que tiene la forma \mathbb{D}/Γ siendo Γ un grupo Fuchsiano. Si la superficie es compacta entonces está totalmente caracterizada por su número de agujeros o genus $g \geq 2$. Toda superficie hiperbólica compacta puede ser pensada entonces como una superficie con al menos dos agujeros.

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

Definimos un patrón $\{p, q\}$ en una superficie cerrada, sin borde, \mathcal{M} como una teselación de \mathcal{M} por polígonos regulares de p lados y número de coordinación q . El patrón dual se obtiene colocando un vértice en el centro de cada polígono y es un patrón $\{q, p\}$.

Cada patrón $\{p, q\}$ en una superficie cerrada satisface

$$pF = 2E = qV, \quad (2.45)$$

donde F, E, V es el número de caras (polígonos), lados y vértices del patrón respectivamente. Como vimos en el capítulo 2, la característica de Euler χ del patrón está dada por

$$\chi = F - E + V. \quad (2.46)$$

Juntando (2.45) y (2.46) obtenemos

$$\chi = F \left(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{q} V \right). \quad (2.47)$$

Si χ es par, entonces el patrón puede ser embebido en una superficie orientable \mathcal{M} con genus g y cumpliéndose la relación

$$\chi = 2(1 - g). \quad (2.48)$$

Por otro lado, si χ es impar entonces el patrón puede embeberse en una superficie no-orientable.

Dada una solución (F, E, V) de (2.45), podemos generar infinitas soluciones multiplicándola por un entero arbitrario positivo. Crucialmente, para un patrón $\{p, q\}$ el número de caras F y el genus $g \geq 2$ están relacionados como se ve de (2.45) y (2.48). Si obtenemos una segunda solución a partir de (F, E, V) multiplicándola por un entero n , obtenemos el patrón con solución (nF, nE, nV) , característica de Euler $n\chi$ y genus h dado por $h = n(g - 1) + 1$. Incrementar el número de caras implica entonces incrementar el número de agujeros exceptuando el caso Euclídeo de $g = 1$ y $\chi = 0$ en donde el número de agujeros es siempre 1 independientemente del número de caras.

Para cada $\{p, q\}$ existe una solución mínima (F_0, E_0, V_0) con el menor número de caras F_0 . Entre las soluciones mínimas, existe la posibilidad de obtener $F_0 = 1$, aunque no todo par p, q la admite. Si un patrón $\{p, q\}$ puede ser embebido en una superficie cerrada con una única cara, entonces podemos definir condiciones de contorno periódicas de manera consistente a un p -gon con ángulos interiores $2\pi/q$. Esto es así, ya que si equipamos a un p -gon hiperbólico con condiciones de contorno periódicas identificando ciertos pares de lados, por ejemplo pares opuestos, entonces es posible dibujar el patrón $\{p, q\}$ correspondiente utilizando una única cara. Si tomamos más caras vamos a poder tener este mismo patrón, pero esta vez en una variedad con mayor número de agujeros haciendo nuevamente una identificación de lados de a pares. Como ejemplo, tenemos en la figura 2.5 el procedimiento para formar una variedad de dos agujeros a partir de un octógono. A su vez en la figura 2.6 podemos observar el procedimiento de agregar caras a un patrón en el caso Euclídeo e hiperbólico.

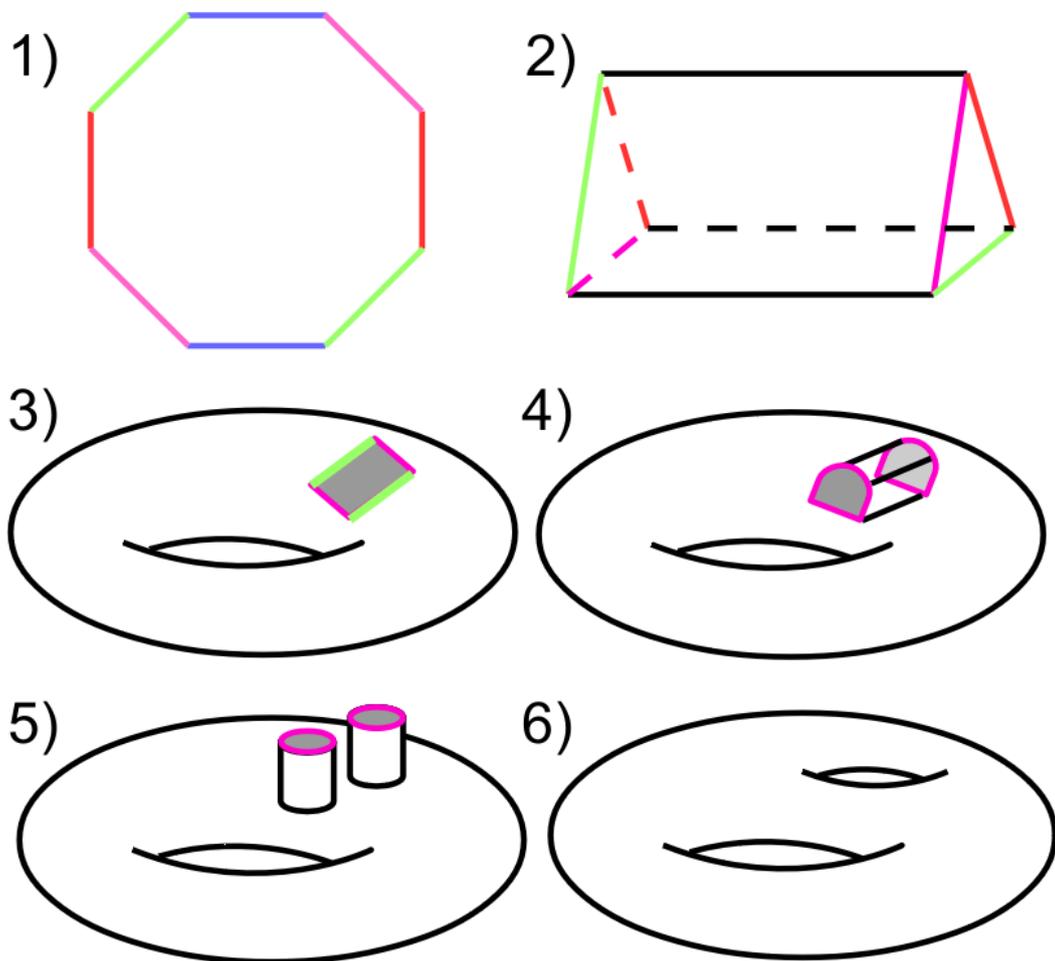


Figura 2.5.: La identificación de lados opuestos en un octógono determina una superficie cerrada de genus 2. En la figura se muestra una sucesión de pasos para llegar a la superficie a partir del octógono. (1) Lados opuestos del octógono que van a ser identificados se representan con el mismo color. 2) Al identificar los lados azules se forma un prisma con una base triangular. 3) Al identificar ahora los lados rojos formamos un toro con una ventana rectangular. 4) Se identifican luego los lados verdes llegando a un toro con un tunel en su superficie, la entrada y salida tienen bordes rosas. 5) Identificamos ahora los lados rosas de obteniendo una superficie con dos agujeros. La figura fue tomada de [18].

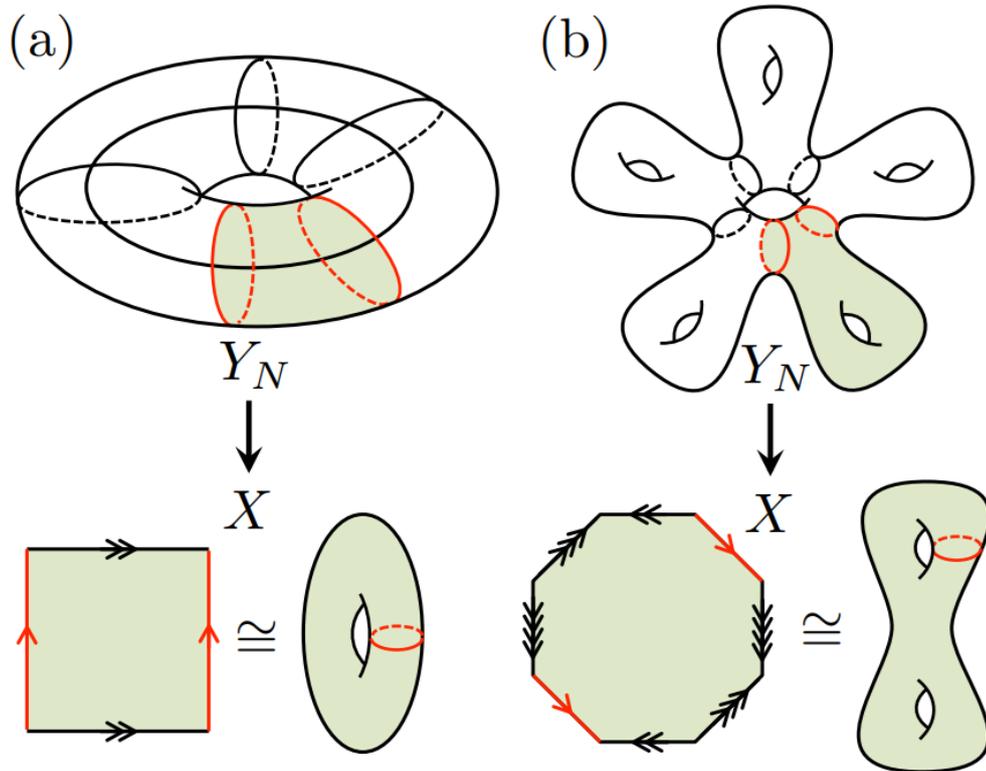


Figura 2.6.: a) Toro formado por la identificación de lados opuestos en un cuadrado. Si agregamos más caras, más cuadrados, la figura resultante sigue siendo un toro. b) En la figura inferior, tenemos una superficie de 2 agujeros obtenida por la identificación de lados opuestos en un octógono, si miramos la figura superior, vemos que añadir más caras al patrón nos lleva a una superficie con un mayor número de agujeros, en este caso una superficie de 6 agujeros. La figura fue tomada de [20].

Subgrupos normales del grupo de traslación

Entenderemos ahora la imposición de condiciones de contorno periódicas a partir de la construcción de un subgrupo normal Γ_{PBC} del grupo de traslaciones Γ definido en la sección previa. Construimos un cluster de N celdas unidades al que le imponemos condiciones de contorno periódicas. Este cluster de N celdas unidades C_{PBC} está formado por triángulos de Schwarz que expresamos en términos del transversal $T_\Gamma(\Gamma_{PBC})$

$$C_{PBC} = \bigcup_{g_i \in T_\gamma(\Gamma_{PBC})} C \cdot g_i. \quad (2.49)$$

De la misma manera que la elección de transversal $T_\Delta(\Gamma)$ determina la celda unidad, la elección de transversal de Γ_{PBC} en Γ nos determina el cluster de celdas unidades. Definir condiciones de contorno periódicas en una única celda unidad significa entonces elegir $\Gamma_{PBC} = \Gamma$, como resultado tenemos una compactificación de la red en una superficie de genus g , un patrón en el lenguaje de la subsección previa. Para encontrar los subgrupos normales de un grupo de traslaciones Γ utilizamos nuevamente el lenguaje de programación GAP, en particular utilizando el algoritmo de Firth-Holt [35] implementado en GAP por el paquete LINS [36]. Para N grande, el número de subgrupos normales y el tiempo de computo incrementa de manera tal que la búsqueda de subgrupos normales se imposibilita. Para evitar este problema se crean subgrupos normales de índice grande a partir de subgrupos normales de menor índice [37].

Como el número de subrupos normales incrementa con el índice, explayaremos ciertos criterios para elegir subgrupos normales apropiados. Consideremos la descomposición en cosets de Γ

$$\Gamma = \bigcup_{g_i \in T_\gamma(\Gamma_{PBC})} g_i \Gamma_{PBC} \quad (2.50)$$

permitiéndonos escribir la red completa a partir del cluster C_{PBC}

$$S = C \cdot \Gamma = C_{PBC} \cdot \Gamma_{PBC}. \quad (2.51)$$

Generalmente Γ_{PBC} no será un grupo de traslación de la red completa. Esto se debe a que es un subgrupo normal de Γ , el grupo de traslaciones, no necesariamente de Δ , el grupo espacial. Si ahora nos restringimos a los $\tilde{\Gamma}$ que son a su vez subgrupos normales de Δ nos aseguramos que el cluster de celdas unidades funcione como celda unidad, la llamamos supercelda [23].

Una vez encontrado el subgrupo normal Γ_{PBC} que nos permite definir un cluster apropiado, aún necesitamos una prescripción para la identificación de condiciones de contorno periódicas adecuadas sobre dicho cluster. Una vez definido un transversal $T_\Gamma(\Gamma_{PBC})$ podemos identificar cada celda unidad dentro del cluster con un elemento g_i en el transversal, etiquetamos la celda $C_i = g_i C_0$, siendo C_0 la celda unidad obtenida con $\Gamma_{PBC} = \Gamma$. Esto nos permite definir además a qué celda unidad nos lleva la traslación $\gamma_\alpha \in \Gamma$. Si existe un elemento $\gamma_{PBC} \in \Gamma_{PBC}$ tal que $g_i \gamma_\alpha = \gamma_{PBC} g_j$ entonces la acción de γ_α sobre la celda C_i nos lleva a la celda C_j , esto nos define las condiciones de contorno periódicas sobre las celdas unidades, ya que vemos a qué celda unidad nos lleva una traslación en una dirección arbitraria. Esto nos

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

permite encontrar la conectividad de las celdas unidades, complementado con la conectividad de los sitios dentro de una celda unidad y con celdas vecinas, que es lo que desarrollamos en la sección anterior, podemos obtener una matriz de vecinos para cada sitio en un cluster C_{PBC} de una red $\{p, q\}$.

2.3.4. Límite termodinámico y superceldas

La restricción a superceldas en vez de clusters de condiciones periódicas de contorno genéricos nos ayuda a formar una secuencia de redes de tamaño cada vez más grande con condiciones de contorno periódicas que tienden al límite termodinámico. Se ha demostrado [38, 39] que una secuencia de clusters de condiciones de contorno periódicas que satisface las siguientes dos condiciones lleva al límite termodinámico

$$\Delta^+ = \Gamma^{(0)} \triangleright \Gamma^{(1)} \triangleright \Gamma^{(2)} \triangleright \dots, \quad (2.52)$$

$$\bigcap_{n \geq 0} \Gamma^{(n)} = \{1\}. \quad (2.53)$$

Como mencionamos, vamos a construir la red a partir de copias de una dada celda unidad generada a partir de un grupo de traslaciones Γ . Normalmente consideramos la celda unidad más pequeña, lo que se ve reflejado en la sección anterior en elegir el grupo de traslaciones de menor índice, pero también podemos tomar una supercelda o una colección de múltiples celdas unidades, generando la red solo con un grupo de traslaciones $\Gamma' \triangleleft \Gamma$. Como vimos antes al estudiar patrones, compactificar una celda unidad dotándola de condiciones de contorno periódicas corresponde a elegir un patrón sobre una variedad \mathcal{M} con g agujeros. Trabajar ahora con superceldas corresponde a elegir el mismo patrón pero con un mayor número de caras, lo que se traslada en una superficie con un mayor número de agujeros. Si partimos de un genus g_{CU} para la celda unidad, la supercelda se compactificará en una superficie con genus

$$g_{SC} = N(g_{CU} - 1) + 1. \quad (2.54)$$

Para obtener secuencias de subgrupos normales como las que necesitamos para asegurar el límite termodinámico podemos primero enumerar todos los subgrupos normales Γ' de un dado grupo triangular hasta un cierto índice y luego comprobar que cumplen las condiciones necesarias. Si bien este proceso es computacionalmente costoso podemos utilizar listas de estos grupos normales ya tabuladas como las encontradas en [40].

Para obtener secuencias aún más largas podemos completar estas búsquedas de subgrupos normales formando intersecciones de grupos normales ya encontrados para generar nuevos grupos [37].

La idea es la siguiente, dado un conjunto $\{\Gamma^{(p)}\}_{p=1}^{n_p}$ de subgrupos normales con índices que varían entre un índice mínimo N_{\min} y un índice máximo N_{\max} , la intersección será un subgrupo normal pero de un índice mayor que N_{\max} . Este método nos permite, en principio, producir subgrupos normales de índices arbitrariamente grande.

2.4. Simulaciones computacionales

En esta última sección daremos una descripción de los distintos métodos de simulaciones computacionales que serán utilizados a lo largo de esta tesis. Si bien las herramientas de teoría de campos, topología y aproximaciones aplicados a la física de la materia condensada son de gran utilidad para obtener resultados analíticos en sistemas magnéticos, en muchas ocasiones no existen soluciones exactas ni aproximaciones razonables para los observables físicos de un sistema y resulta necesario estudiar sus propiedades mediante técnicas de simulaciones computacionales. Una de ellas que será utilizada es el método de Monte Carlo junto con distintos algoritmos como ser Metropolis y parallel tempering.

2.4.1. Simluaciones de Monte Carlo

La principal técnica de simulaciones computacionales utilizada para sistemas clásicos de materia condensada es el método de Monte Carlo. En una simulación de Monte Carlo hacemos que un sistema se mueva a través del espacio de fases pasando por un secuencia de estados $\mu_1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mu_3 \dots$, de manera tal que la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado μ a un dado tiempo t sea igual al peso $w_\mu(t)$ que el estado tendría en el sistema físico real. Para lograr esto necesitamos elegir una dinámica para la simulación, es decir, una regla para cambiar de un estado a otro a lo largo de la simulación.

El principal objetivo en nuestras simulaciones de Monte Carlo será el de calcular el valor de expectación $\langle \mathcal{O} \rangle$ de algún observable \mathcal{O} , como ser la energía interna o la magnetización entre otras. Lo ideal sería tener acceso a todos los estados del sistema físico y calcular el valor de expectación pesando cada estado con su peso de Boltzmann, es decir,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{\mu} \mathcal{O}_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}}}{\sum_{\mu} e^{-\beta E_{\mu}}}. \quad (2.55)$$

pero la multiplicidad de estados en un sistema físico real hace que sea prácticamente imposible. Lo mejor que podemos hacer entonces es tomar este promedio sobre un subconjunto de estados que elegiremos adecuadamente. Lo que haremos es elegir un subconjunto de M estados con una disrtibución de probabilidad p_{μ} , nuestro mejor estimador para la cantidad $\langle \mathcal{O} \rangle$ será entonces

$$\mathcal{O}_M = \frac{\sum_{i=1}^M \mathcal{O}_{\mu_i} p_{\mu_i}^{-1} e^{-\beta E_{\mu_i}}}{\sum_{j=1}^M p_{\mu_j}^{-1} e^{-\beta E_{\mu_j}}} \quad (2.56)$$

Este estimador tiene la propiedad que al aumentar el número de estados M elegidos se aproxima cada vez más al valor de $\langle \mathcal{O} \rangle$ dado por la mecánica estadística del sistema. La estrategia de las simulaciones de Monte Carlo radica en elegir como distribución de probabilidad para los M estados a $p_{\mu} = Z^{-1} e^{-\beta E_{\mu}}$, de manera que el estimador (2.56) se simplifica a

$$\mathcal{Q}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathcal{Q}_{\mu_i}. \quad (2.57)$$

Si bien elegimos esta distribución de probabilidad para los M estados que tomaremos para calcular valores de expectación todavía no sabemos cómo generar estos M estados. En una

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

simulación de Monte Carlo utilizaremos un proceso de Markov repetidamente para generar una cadena de Markov de estados. Empezando con un estado μ utilizamos este proceso para generar un nuevo estado ν con una probabilidad de transición $P(\mu \rightarrow \nu)$, luego utilizamos ν como punto de partida para generar un nuevo estado λ y así sucesivamente. El proceso de Markov se elige de manera tal que cuando se toman cadenas suficientemente largas comenzando de cualquier estado del sistema eventualmente la sucesión de estados sigue una distribución de probabilidad de Boltzmann como buscamos. Para poder lograr esto tenemos que sumar dos condiciones más al proceso de Markov.

Ergodicidad

La condición de ergodicidad es el requerimiento de que el proceso de Markov pueda alcanzar cualquier estado del espacio de fases sin importar el estado inicial del que partimos si hacemos cadenas lo suficientemente largas. Esta condición es necesaria ya que todo estado en la distribución de probabilidad de Boltzmann tiene alguna probabilidad no nula, y si dicho estado fuese inaccesible por la cadena de Markov la probabilidad de alcanzarlo sería nula. Esto no implica que la probabilidad de transición entre dos estados tiene que ser no nula, sino que tiene que existir un camino con transiciones de probabilidad no nula que me lleve entre cualquier par de estados μ y ν .

Balance detallado

La otra condición que tomaremos en nuestro proceso de Markov es la de balance detallado. Esta condición nos asegurará que la probabilidad de distribución que generemos luego de alcanzar el equilibrio sea efectivamente la distribución de Boltzmann. Para eso, definimos primero qué significa alcanzar el equilibrio. El equilibrio se alcanza cuando la tasa en la que el sistema hace una transición desde o hacia un estado μ es la misma, es decir,

$$\sum_{\nu} p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = \sum_{\nu} p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu) \quad (2.58)$$

donde del lado izquierdo de la igualdad tenemos la probabilidad de estar en un estado μ y pasar a otro estado ν cualquiera; mientras que del lado derecho tenemos la probabilidad de estar en un estado ν cualquiera y volver al estado μ . Resulta que esta condición aún no es suficiente para alcanzar la distribución de probabilidad de Boltzmann en el equilibrio, necesitamos aplicar una condición más fuerte

$$p_{\mu} P(\mu \rightarrow \nu) = p_{\nu} P(\nu \rightarrow \mu). \quad (2.59)$$

Esta es la condición que llamamos **balance detallado**. Como queremos alcanzar la distribución de Boltzmann la ecuación de balance detallado nos dice que las probabilidades de transición deben satisfacer

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-\beta(E_{\nu} - E_{\mu})}. \quad (2.60)$$

Vemos que tenemos bastante libertad para la elección de la probabilidad de transición.

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

Podemos aún separar la probabilidad de transición en dos partes

$$P(\mu \rightarrow \nu) = g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu) \quad (2.61)$$

La cantidad $g(\mu \rightarrow \nu)$ es la probabilidad de que dado un estado inicial μ nuestro algoritmo genere un nuevo estado ν , y $A(\mu \rightarrow \nu)$ es la probabilidad de que al haber generado el estado ν lo aceptemos. La ecuación de balance detallado nos deja

$$\frac{P(\mu \rightarrow \nu)}{P(\nu \rightarrow \mu)} = \frac{g(\mu \rightarrow \nu)A(\mu \rightarrow \nu)}{g(\nu \rightarrow \mu)A(\nu \rightarrow \mu)} \quad (2.62)$$

En resumen, lo que hacemos en nuestro algoritmo de Monte Carlo es lo siguiente. Utilizamos un algoritmo que genere nuevos estados ν a partir de un estado inicial μ con algun conjunto de probabilidades $g(\mu \rightarrow \nu)$, luego aceptamos o rechazamos este estado con una probabilidad de aceptación $A(\mu \rightarrow \nu)$ de manera tal que se satisfaga la ecuación de balance detallado.

Vemos que una de las consideraciones mas importantes que tenemos que tener está en la elección de la probabilidad $g(\mu \rightarrow \nu)$ y es lo que definirá los distintos algoritmos que utilizaremos. Una consideración práctica es que tenemos que elegir una probabilidad de selección $g(\mu \rightarrow \nu)$ que nos de probabilidades de aceptación de pasos relativamente alta, ya que si la probabilidad de aceptación es baja nos quedaremos en el mismo estado durante muchos pasos en la cadena y perderemos tiempo de simulación sin explorar nuevos estados del espacio de fases.

2.4.2. Algoritmo de Metrópolis

Uno de los algoritmos que utilizaremos para generar estados es el algoritmo de Metropolis. En el contexto de redes de espines, lo que haremos es utilizar una dinámica de *single-flip*. Elegiremos un sitio al azar en la red y cambiaremos su dirección en ángulo θ en el caso de ser espines de $SO(N)$ o simplemente cambiaremos su signo en el caso de ser espines de tipo Ising. Supongamos que tenemos un sistema de tipo Ising con N sitios, entonces dado un estado μ tenemos N espines para dar vuelta y por ende N nuevos estados ν con igual probabilidad de selección $g(\mu \rightarrow \nu) = \frac{1}{N}$, todos los estados que difieren del estado μ en más de un espín tendrán probabilidad de selección nula. Esto nos deja para la probabilidad de aceptación, de acuerdo a la ecuación de balance detallado

$$\frac{A(\mu \rightarrow \nu)}{A(\nu \rightarrow \mu)} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \quad (2.63)$$

Tenemos muchas opciones para la elección de $A(\mu \rightarrow \nu)$ y tomamos la siguiente

$$A(\mu \rightarrow \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & \text{si } E_\nu - E_\mu > 0 \\ 1 & \text{si } E_\nu - E_\mu \leq 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

Es decir, si el cambio nos disminuye o mantiene la energía la aceptamos, y si la aumenta lo aceptamos con probabilidad $e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)}$.

2.4.3. Parallel tempering

En el capítulo 4 estudiaremos dos modelos en la red hiperbólica, ambos con una característica que dificulta la simulación utilizando únicamente el algoritmo de Metrópolis y es que tienen una degeneración extensiva de sus estados fundamentales. Como vimos antes las simulaciones de Monte Carlo se basan en un concepto principal, generar una cadena de Markov de estados cuya distribución de probabilidad estacionaria sea la distribución de Boltzmann o una distribución de probabilidad p_μ que queramos. El problema con este tipo de simulaciones para los sistemas que trataremos más adelante es que tienden a consumir mucho tiempo de simulación en una región acotada del espacio de fases, mientras que en sistemas con alta frustración geométrica y una degeneración alta del estado fundamental como los que miraremos necesitamos poder movernos ampliamente en el espacio de fases para poder recorrer los estados que más aportan a los valores de expectación que queremos calcular. Lo que sucederá con estos algoritmos es que nos quedaremos atrapados en un mínimo local de energía con una baja probabilidad de transición hacia otro mínimo en una cantidad de pasos razonable para los tiempos de simulación. Necesitamos un algoritmo que nos permita volver a un estado de más alta energía y así poder explorar los distintos mínimos locales.

Entre los métodos disponibles para evitar estas complicaciones destacamos dos. Una manera es utilizar un algoritmo que explore estados de alta energía con una probabilidad mayor a la probabilidad de Boltzmann, aumentando las chances de que el sistema cruce barreras de energía y explore otros mínimos locales de energía. Esta técnica constituye lo que llamamos *entropic sampling*. En el desarrollo de esta tesis tomaremos otra alternativa, que es generar estados que nos permitan pasar por configuraciones muy distintas en pocos pasos de Monte Carlo y de esta manera saltar las barreras de energía. Esta idea es la que nos lleva a las técnicas de *simulated tempering*.

El método de *simulated tempering* fue desarrollado por Marinari y Parisi en 1992 [41] y utilizaremos una variación de esta técnica llamada *parallel tempering*. La idea de este método es realizar diferentes simulaciones de Monte Carlo simultáneamente en un sistema pero a distintas temperaturas. Cada una determinada cantidad de pasos se intercambiarán los estados del sistema en dos simulaciones distintas con una determinada probabilidad elegida de manera tal que se siga satisfaciendo la probabilidad de Boltzmann a una temperatura apropiada. Al intercambiar los estados permitimos que una simulación a una temperatura baja acceda a los estados disponibles de una simulación de temperatura alta, venciendo así la barrera de energía que no nos permite explorar bien la multiplicidad de estados.

Consideremos el caso más simple en el que realizamos dos simulaciones en simultáneo. Una de las simulaciones se encuentra a una temperatura baja, T_B , en la que podemos quedarnos atascados en un mínimo de energía, mientras que la otra se encuentra en una temperatura alta T_A en la que podemos vencer las barreras de energía con facilidad. El algoritmo es entonces el siguiente. En la mayoría de los pasos de la simulación realizamos un paso, por ejemplo con el algoritmo de Metrópolis, en cada copia del sistema. Sin embargo, cada una cierta cantidad de pasos, en vez de hacer un paso de Metrópolis en cada copia, calculamos la diferencia de energía entre cada estado $\Delta E = E_A - E_B$ e intercambiamos sus estados

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

con una probabilidad de aceptación dada por

$$A = \begin{cases} e^{-(\beta_B - \beta_A)\Delta E} & \text{si } \Delta E > 0 \\ 1 & \text{si } \Delta E \leq 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Mostraremos ahora que este algoritmo cumple con la ecuación de balance detallado. Consideremos la probabilidad conjunta $p_{\mu\nu}$ de que el sistema de baja temperatura esté en el estado μ y el de alta temperatura en el estado ν . Queremos que la distribución de equilibrio refleje la distribución de Boltzmann de cada sistema, es decir,

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{Z_B Z_A} e^{-\beta_B E_\mu} e^{-\beta_A E_\nu} \quad (2.66)$$

donde $Z_{A,B}$ es la función de partición de cada sistema. La condición de balance detallado nos dice que podemos lograr esto si nos aseguramos de que las probabilidades de transición $P(\mu\nu \rightarrow \mu'\nu')$ satisfacen

$$\frac{P(\mu\nu \rightarrow \mu'\nu')}{P(\mu'\nu' \rightarrow \mu\nu)} = \frac{p_{\mu'\nu'}}{p_{\mu\nu}} = \frac{e^{-\beta_B E_{\mu'}} e^{-\beta_A E_{\nu'}}}{e^{-\beta_B E_\mu} e^{-\beta_A E_\nu}} \quad (2.67)$$

En la simulación tenemos distintos tipos de transiciones, pasos con algún algoritmo elegido que lleva a cambiar el estado de alguno de los dos sistemas, y los pasos que intercambian los estados de cada sistema. Para los pasos que involucran un único sistema ya sabemos que se cumple balance detallado porque elegimos algún algoritmo que lo cumple, por ejemplo el algoritmo de Metrópolis. En los pasos que involucran el intercambio de estados tenemos que detenernos un segundo. En estos casos las transiciones implican $\mu' = \nu$ y $\nu' = \mu$ por lo que la ecuación de balance detallado es

$$\frac{P(\mu\nu \rightarrow \nu\mu)}{P(\nu\mu \rightarrow \mu\nu)} = \frac{e^{-\beta_B E_\nu} e^{-\beta_A E_\mu}}{e^{-\beta_B E_\mu} e^{-\beta_A E_\nu}} = e^{\beta_B \Delta E} e^{-\beta_A \Delta E} \quad (2.68)$$

Si hacemos que la probabilidad de selección sea constante, por ejemplo al intentar un cambio en intervalos regulares, entonces la ecuación anterior es una condición en las probabilidades de aceptación y la probabilidad de aceptación propuesta lo cumple. Qué tan seguido realizamos un cambio entre copias del sistema es un parámetro a definir y variar en la simulación. Si hacemos cambios muy seguidos corremos el riesgo de que la simulación de baja temperatura vuelva a quedarse trabada en un mínimo local de energía, mientras que si esperamos muchos pasos para hacer un cambio no estamos aprovechando el algoritmo. Un criterio para elegir qué tantos pasos esperamos entre cambios es seguir la autocorrelación de la serie temporal de energías en la simulación de alta temperatura. Nuestro algoritmo debería tratar de hacer un cambio una vez que haya pasado el tiempo de correlación de la simulación de alta temperatura, ya que así nos aseguramos de que estamos explorando un estado con energía lo suficientemente distinta y sin correlación con el estado en el que hicimos el cambio previo.

Existen dos variaciones a este método que utilizaremos. La primera consiste en realizar más pasos de Monte Carlo entre cambios en la simulación de alta temperatura que en la de baja temperatura, esto se debe a que es más probable que la copia de baja temperatura se

2. Topología y geometría hiperbólica en materia condensada

quede atascada en un mínimo de energía local y que lo explore en una cantidad pequeña de pasos, por lo que realizar más pasos es un gasto de recursos computacionales innecesario. Otra variación es la de realizar varias simulaciones en simultáneo en lugar de solo dos, con las simulaciones extras en temperaturas intermedias entre la alta y la baja temperatura. En este caso, cada paso de intercambio lo que hace es intentar un cambio de estados entre simulaciones a temperaturas contiguas.

Por último, mencionamos que una ventaja destacable de este método es que su implementación paralela es inmediata. Podemos realizar cada simulación en procesadores separados que se comunicarán solo cuando se trata de hacer un cambio entre copias, esta implementación paralela disminuye los tiempos de simulación drásticamente.

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar dos de los aportes originales de esta tesis. Estos trabajos se encuentran publicados en las referencias [24, 25] y corresponden a estudios de sistemas magnéticos bidimensionales en presencia de interacciones antisimétricas. En algunos materiales magnéticos con simetría de inversión rota y un acoplamiento espín-órbita apreciable, los momentos magnéticos tienden a alinearse perpendicularmente entre ellos, resultando en estructuras magnéticas quirales. Este alineamiento es debido a una interacción antisimétrica conocida como interacción de Dzyaloshinskii-Moriya [5, 42], DM de ahora en adelante. Cuantitativamente, se corresponde a un término en el Hamiltoniano que puede ser escrito como

$$H_{i,j}^{DM} = \mathbf{D}_{i,j} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j), \quad (3.1)$$

donde \mathbf{D}_{ij} es un vector y es antisimétrico en los índices i, j . Este tipo de interacción se ha vuelto de gran interés en las áreas de sistemas de espines cuánticos, sistemas multiferróicos y espintrónica entre otras [43, 44, 45].

En 1960 Toru Moriya identificó al acoplamiento espín-órbita como el mecanismo microscópico de la interacción DM [5]. La interacción DM ha sido difícil de verificar experimentalmente debido a sus efectos típicamente débiles en comparación con la interacción de intercambio y otros efectos en sistemas magnetoeléctricos. Sin embargo, estudios recientes muestran que en heteroestructuras cuidadosamente diseñadas de sistemas magnéticos quirales, y mediante la aplicación de campos eléctricos adecuados entre otras técnicas, es posible lograr interacciones DM del mismo orden de magnitud que la interacción de intercambio [46, 47, 48]. Además se ha demostrado que la magnitud de la interacción DM puede crecer linealmente con el campo eléctrico aplicado y puede ser modulada [46], abriendo el camino a nuevas aplicaciones tecnológicas.

En sistemas magnéticos cristalinos, las simetrías de la red dictaminan la magnitud y dirección del vector \mathbf{D}_{ij} . Estas simetrías pueden reducirse a las llamadas reglas de Moriya [5] dadas a continuación. Si estamos mirando el acoplamiento entre dos iones en los sitios A y B , con punto medio entre ellos C se cumple

- Cuando un centro de inversión se encuentra en C , $\mathbf{D} = 0$.
- Cuando un plano de reflexión perpendicular a AB pasa por C , $\mathbf{D} \parallel$ al plano, o $\mathbf{D} \perp AB$.
- Cuando hay un plano de reflexión que incluye a A y B , \mathbf{D} es perpendicular al plano.
- Cuando hay una simetría de rotación en un ángulo π sobre un eje perpendicular a AB que pasa por C , \mathbf{D} perpendicular al eje.

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

- Cuando hay una simetría de rotación en un ángulo $2\pi/n$ a lo largo de AB , $\mathbf{D} \parallel AB$.

Estas reglas que determinan la aparición de un vector DM también nos permiten determinar la aparición de interacciones de tipo espín-órbita que veremos más adelante.

3.1. Modelo con interacción DM

En esta primera sección, nos dedicaremos a estudiar la influencia de la interacción DM en el modelo XY y en particular en su estado fundamental. Llamaremos al modelo XY con interacción DM el modelo XYDM y está descrito por el Hamiltoniano

$$H = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} \cdot S_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \cdot (S_{\mathbf{r}} \times S_{\mathbf{r}'})$$

donde \mathbf{r} y \mathbf{r}' son las posiciones de los sitios en una red bidimensional, $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ es la matriz de la interacción de intercambio y $\mathbf{D}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \hat{z}$ es el vector de la interacción DM que tomaremos perpendicular al plano de la red. Al ser los espines vectores clásicos con norma fija podemos identificarlos con el ángulo respecto a un eje arbitrario, $S_{\mathbf{r}} = \cos(\theta_{\mathbf{r}}) \hat{x} + \sin(\theta_{\mathbf{r}}) \hat{y}$. Con esto el hamiltoniano queda escrito

$$H = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \cos(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'}) + D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sin(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'}).$$

Definiendo

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} &= \mathcal{J}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \cos(\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}), & D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} &= \mathcal{J}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sin(\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}), \\ \mathcal{J}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^2 &= D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^2 + J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^2, & \tan(\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) &= \frac{D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}} \end{aligned}$$

con $\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \in [-\pi/2, \pi/2]$ podemos expresar el Hamiltoniano de una forma más similar a la del modelo XY

$$H = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \mathcal{J}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \cos(\theta_{\mathbf{r}} - \theta_{\mathbf{r}'} - \varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}).$$

Cabe destacar que el Hamiltoniano coincide con el de un arreglo de junturas de Josephson estudiado por Teitel et. al.[49] En ese contexto se lo denominó el modelo XY completamente frustrado (FFXY por sus siglas en inglés). El estado fundamental del modelo FFXXY depende del valor del defasaje $\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ y, en ciertos casos, se corresponde a un arreglo periódico de vórtices-antivórtices. La descripción de la transición de fase que ocurre en el modelo FFXXY ha sido ampliamente discutida[50, 51]. En nuestro caso, consideraremos una red cuadrada con interacción a primeros vecinos, acoplamiento ferromagnético, $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = J < 0 \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}'$, y tomaremos al vector $D_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$ con módulo constante pero alternando signos entre enlaces de acuerdo a la figura 3.1. Describiendo los sitios de red como $\mathbf{r}_{n,m} = na\hat{x} + ma\hat{y}$ tenemos $D_{\mathbf{r}_{n,m}, \mathbf{r}_{n,m+a\hat{\mu}}} = (-1)^{n+m} D(\hat{x} - \hat{y}) \cdot \hat{\mu}$, con $\hat{\mu} = \hat{x}, \hat{y}$. Llamamos por conveniencia $\boldsymbol{\eta} = \hat{x} - \hat{y}$. Esto nos permite escribir

$$\mathcal{J}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \frac{J}{\cos(\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'})} < 0$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

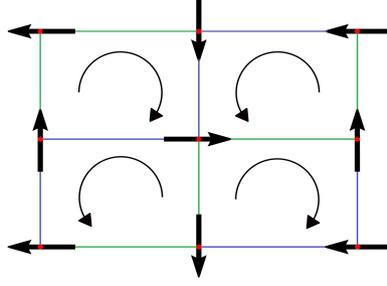


Figura 3.1.: Con flechas negras se encuentran representadas las direcciones de los espines en un arreglo cuadrado de 3×3 . Con círculos rojos se marcan los sitios de red. Los enlaces verdes representan enlaces en donde el vector D apunta hacia afuera de la imagen y los enlaces azules donde apunta hacia adentro. Esta configuración de espines representa un posible estado fundamental para cualquier configuración de D que cumpla $|D| > J$, cualquier rotación de todos los espines en simultáneo un ángulo θ también conforma un estado fundamental. En el centro de las plaquetas se encuentra marcada la orientación de los vórtices, si se intercambian los enlaces verdes con los azules se intercambiarían los vórtices con los antivórtices. Redes de mayor tamaño se pueden obtener repitiendo el mismo esquema de forma periódica.

Y

$$\varphi_{\mathbf{r}_{n,m}, \mathbf{r}_{n,m+a\hat{\mu}}} = (-1)^{n+m} \arctan(D/J) \hat{\eta} \cdot \hat{\mu}.$$

Vemos que $|\varphi_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}| = \varphi = \arctan(D/J)$, igual para todos los enlaces, de modo que a su vez $\mathcal{J}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \mathcal{J} = \frac{J}{\cos(\varphi)} \forall \mathbf{r}, \mathbf{r}'$. Con este análisis obtenemos para el Hamiltoniano

$$H = -\frac{|J|}{\cos(\varphi)} \sum_{n,m,\hat{\mu}} \cos(\theta_{\mathbf{r}_{n,m}} - \theta_{\mathbf{r}_{n,m+a\hat{\mu}}} - (-1)^{n+m} \hat{\eta} \cdot \hat{\mu} \varphi). \quad (3.2)$$

El estado fundamental de este Hamiltoniano es el de una red de vórtices y antivórtices, donde la posición de los (anti)vórtices está fija de acuerdo a la configuración elegida para D . Un cambio global en el signo de \mathbf{D} intercambia vórtices y antivórtices como se ve en la figura 3.1. Esto lo podemos deducir al buscar el mínimo de energía de una configuración de 4 espines en un cuadrado de la red. De acuerdo al Hamiltoniano (3.2), y etiquetando a los vórtices de un cuadrado con $\theta_1, \dots, \theta_4$ de manera antihoraria y comenzando por la esquina inferior izquierda, un extremo en la energía debe cumplir

$$0 = \sin\left(\frac{2\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 - 2\varphi}{2}\right) \quad (3.3)$$

$$0 = 2 \sin\left(\frac{2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_3 - \theta_1 - 2\varphi}{2}\right) \quad (3.4)$$

$$0 = 2 \sin\left(\frac{2\theta_3 - \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2 + 2\varphi}{2}\right), \quad (3.5)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

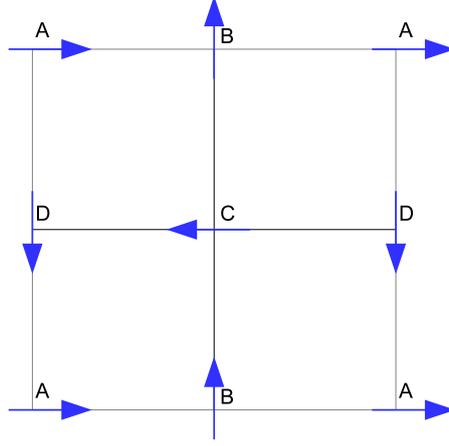


Figura 3.2.: Configuración de estado fundamental para $|D| > J$, se indican las posiciones de cada tipo de espín A, B, C, D utilizado en la descripción de campo medio.

donde pusimos a 0 una posible diferencia de fases global debido a la invarianza $U(1)$ del Hamiltoniano. Configuraciones ferromagnéticas y configuraciones de vórtice con $\Delta\theta_{i+1,i} = \pi/2$ satisfacen la condición anterior para cualquier valor de φ con las siguientes energías

$$E_f = -4 \cos(\varphi) \quad (3.6)$$

$$E_v = -4 \cos(\pi/2 - \varphi). \quad (3.7)$$

Donde es claro ver que para valores de $\varphi < \pi/4$, lo que corresponde a $|D| < |J|$, las soluciones ferromagnéticas corresponden a mínimos de energía; mientras que para $\varphi > \pi/4$ las soluciones de tipo vórtice o antivórtice son mínimos de energía de acuerdo al signo que tome D . Como el signo de D alterna entre cuadrados contiguos vemos que el estado fundamental del sistema es el de un ferromagneto para $|D| < |J|$ y el de una red de vórtices-antivórtices para $|D| > J$. En el caso particular de $|D| = |J|$ cada configuración, la ferromagnética o la de vórtice-antivórtice, tiene la misma energía.

3.1.1. Campo medio

Para comenzar el estudio analítico de este sistema haremos una aproximación de campo medio. Por lo que vimos del estado fundamental del sistema es conveniente dividirlo en cuatro subredes que llamaremos A, B, C, D de acuerdo a la figura 3.2. Para realizar la aproximación de campo medio suponemos una distribución de probabilidad del sistema factorizada, es decir

$$\rho(\{\theta_\sigma\}) = \prod_{\sigma} \prod_{\mathbf{r}_{n,m}^{\sigma}} \rho_{\sigma}(\theta_{\mathbf{r}_{n,m}^{\sigma}})$$

con $\sigma = A, B, C, D$ y $\mathbf{r}_{n,m}^{\sigma} = 2na\hat{x} + 2ma\hat{y} + \mathbf{r}_0^{\sigma}$ siendo $\mathbf{r}_0^A = 0$, $\mathbf{r}_0^B = a\hat{x}$, $\mathbf{r}_0^C = a\hat{x} + a\hat{y}$ y $\mathbf{r}_0^D = a\hat{y}$. Ahora pedimos que esta expresión minimice la energía libre

$$F_{MF} = \text{Tr}[\rho H] + \frac{1}{\beta} \text{Tr}[\rho \ln(\rho)]$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

donde tenemos además la condición de normalización $\text{Tr}[\rho] = 1$. Analizamos primero el término de energía

$$\text{Tr}[\rho H] = \langle H \rangle \quad (3.8)$$

como H tiene interacciones solo a primeros vecinos los espines de las subredes A y C solo interactúan con los de las subredes B y D y viceversa. Por lo tanto podemos reescribir el Hamiltoniano como

$$H = -\frac{|J|}{\cos(\varphi)} \sum_{n,m} f(\theta_{n,m}^A, \theta_{n,m}^B) + f(\theta_{n+1,m}^A, \theta_{n,m}^B) + f(\theta_{n,m}^B, \theta_{n,m}^C) + f(\theta_{n,m}^C, \theta_{n+1,m}^D) \\ f(\theta_{n,m+1}^B, \theta_{n,m}^C) + f(\theta_{n,m}^C, \theta_{n,m}^D) + f(\theta_{n,m}^D, \theta_{n,m+1}^A) + f(\theta_{n,m}^D, \theta_{n,m}^A)$$

siendo

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \left(e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} e^{-i\varphi} + e^{-i\theta_1} e^{i\theta_2} e^{i\varphi} \right).$$

Debido a la estructura del Hamiltoniano, en (3.8) tendremos términos de la forma

$$\left\langle e^{i\theta_{n,m}^\sigma} \right\rangle = m_\sigma e^{i\delta^\sigma}. \quad (3.9)$$

Debido a la invarianza invarianza frente a traslaciones los valores medios dependen solo del tipo de subred y no de la posición. Podemos ver entonces que al tomar la derivada funcional respecto a ρ^A obtendremos

$$\frac{\delta \langle H \rangle}{\delta \rho^A(\theta_{n,m}^A)} = -\frac{|J|}{\cos(\varphi)} (m_B \cos(\theta^A - \delta^B - \varphi) + m_D \cos(\theta^A - \delta^D + i\varphi))$$

mientras que la derivada de la parte entrópica es simplemente

$$\frac{\delta \frac{1}{\beta} \langle \ln(\rho) \rangle}{\delta \rho^A(\theta_{n,m}^A)} = \frac{1}{\beta} \ln(\rho^A)$$

Minimizando la energía libre respecto a ρ^A obtenemos

$$\rho^A(\theta^A) = C_A \exp \left[\frac{\beta |J|}{\cos(\varphi)} (m_B \cos(\theta^A - \delta^B - \varphi) + m_D \cos(\theta^A - \delta^D + \varphi)) \right].$$

Llamemos

$$\mathbf{h}_{\text{eff}}^A = (m_B \cos(\delta^B + \varphi) + m_D \cos(\delta^D - \varphi)) \hat{x} + (m_B \sin(\delta^B + \varphi) + m_D \sin(\delta^D - \varphi)) \hat{y}$$

asi que podemos reescribir a ρ^A como

$$\rho^A(\theta^A) = C_A e^{\frac{\beta |J|}{\cos(\varphi)} \mathbf{h}_{\text{eff}}^A \cdot \mathbf{S}^A}$$

siendo $\mathbf{S}^A = \cos(\theta^A) \hat{x} + \sin(\theta^A) \hat{y}$. Obtenemos la constante de normalización integrando respecto a θ^A

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{\beta |J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^A| \cos(\theta^A - \delta^{h^A})} d\theta^A = \int_{-\pi - \delta^{h^A}}^{\pi - \delta^{h^A}} e^{\frac{\beta |J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^A| \cos(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta} = I_0 \left(\frac{\beta |J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^A| \right)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

siendo entonces $C_A = I_0 \left(\frac{\beta|J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^A| \right)^{-1}$, y donde $I_0(x)$ es la función de Bessel de orden 0. Las distribuciones de probabilidad para los espines de las otras subredes se obtienen de manera similar, de manera que el resultado es el mismo pero con sus correspondientes campos efectivos

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{eff}}^A &= f_c(m_B, m_D)\hat{x} + f_s(m_B, m_D)\hat{y} \\ \mathbf{h}_{\text{eff}}^B &= f_c(m_C, m_A)\hat{x} + f_s(m_C, m_A)\hat{y} \\ \mathbf{h}_{\text{eff}}^C &= f_c(m_D, m_B)\hat{x} + f_s(m_D, m_B)\hat{y} \\ \mathbf{h}_{\text{eff}}^D &= f_c(m_A, m_C)\hat{x} + f_s(m_A, m_C)\hat{y} \end{aligned}$$

deonde $f_c(m_B, m_D) = |m_B| \cos(\delta^B + \varphi) + |m_D| \cos(\delta^D - \varphi)$ y $f_s(m_B, m_D) = |m_B| \sin(\delta^B + \varphi) + |m_D| \sin(\delta^D - \varphi)$ y las magnetizaciones de cada subred las calculamos de manera autoconsistente de acuerdo a su definición. Por la simetría de la red y las interacciones esperamos que la solución sea una de magnetización homogénea $m_\sigma = m \forall \sigma$. Desarrollando (3.9)

$$\langle e^{i\theta^\sigma} \rangle = C_\sigma \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^\sigma e^{i\theta^\sigma + \frac{\beta|J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^\sigma| \cos(\theta^\sigma - \delta^{h_{\text{eff}}^\sigma})} = e^{i\delta^{h_{\text{eff}}^\sigma}} \frac{I_1 \left(\frac{\beta|J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^\sigma| \right)}{I_0 \left(\frac{\beta|J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^\sigma| \right)} = m_\sigma e^{i\delta^\sigma}$$

Lo que nos da un conjunto de ecuaciones trascendentales

$$m_\sigma = \frac{I_1 \left(\frac{\beta|J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^\sigma| \right)}{I_0 \left(\frac{\beta|J|}{\cos(\varphi)} |h_{\text{eff}}^\sigma| \right)} \quad \delta^\sigma = \delta^{h_{\text{eff}}^\sigma}$$

Los campos efectivos se simplifican al suponer homogeneidad de las magnetizaciones, $m_\sigma = m$, y quedan

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{eff}}^A &= 2m \cos\left(\frac{\delta^B + \delta^D}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta^B - \delta^D}{2} + \varphi\right)\hat{x} + 2m \sin\left(\frac{\delta^B + \delta^D}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta^B - \delta^D}{2} + \varphi\right)\hat{y} \\ \mathbf{h}_{\text{eff}}^B &= 2m \cos\left(\frac{\delta^C + \delta^A}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta^C - \delta^A}{2} + \varphi\right)\hat{x} + 2m \sin\left(\frac{\delta^C + \delta^A}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta^C - \delta^A}{2} + \varphi\right)\hat{y} \\ \mathbf{h}_{\text{eff}}^C &= 2m \cos\left(\frac{\delta^B + \delta^D}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta^D - \delta^B}{2} + \varphi\right)\hat{x} + 2m \sin\left(\frac{\delta^B + \delta^D}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta^B - \delta^D}{2} + \varphi\right)\hat{y} \\ \mathbf{h}_{\text{eff}}^D &= 2m \cos\left(\frac{\delta^C + \delta^A}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta^A - \delta^C}{2} + \varphi\right)\hat{x} + 2m \sin\left(\frac{\delta^C + \delta^A}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta^C - \delta^A}{2} + \varphi\right)\hat{y}. \end{aligned}$$

Una vez más, por la simetría de las interacciones esperamos que tengan todos el mismo módulo. Al igualar $|h_{\text{eff}}^A| = |h_{\text{eff}}^C|$ y $|h_{\text{eff}}^B| = |h_{\text{eff}}^D|$ obtenemos

$$\delta^C - \delta^A = n_1\pi \quad \delta^B - \delta^D = n_2\pi$$

donde $n_{1,2} \in \mathbb{Z}$. Es decir, las subredes A y C y las subredes B y D se alinean ya sea de forma ferromagnética o antiferromagnética. Llevando la diferencia entre los ángulos al

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

intervalo $[-\pi, \pi)$ los enteros pueden tomar los valores -1 o 0 . Consideremos primero el caso antiferromagnético para las redes A y C , esto implica para los campos efectivos de la redes B y D lo siguiente

$$\mathbf{h}_{\text{eff}}^B = f_c(m e^{i\delta^C}, m e^{i\delta^C + i\pi})\hat{x} + f_s(m e^{i\delta^C}, m e^{i\delta^C + i\pi})\hat{y} = 2m \sin(\varphi) (-\sin(\delta^C)\hat{x} + \cos(\delta^C)\hat{y}) \quad (3.10)$$

Lo que implica $\tan(\delta^B) = \tan(\delta^{h^B}) = -\cotan(\delta^C)$, que implica $\delta^B = \delta^C + \pi/2$. De igual manera, para h_{eff}^D , obtenemos

$$\mathbf{h}_{\text{eff}}^D = 2m \sin(\varphi) (\sin(\delta^C), -\cos(\delta^C)) = -h_{\text{eff}}^B \quad (3.11)$$

Por lo que $\delta^D = \delta^B + \pi$. Es decir, si uno de los pares de subredes se alinean de manera antiparalela lo mismo sucede con el otro par de subredes y con un ángulo de $\pi/2$ entre ambos pares, dicho de otra manera, encontramos una red de vórtices y antivórtices como fase estable a través de campo medio. De manera similar si pedimos que uno de los pares de subredes sea un ferromagneto, toda la red es un ferromagneto. Queda por destacar que el módulo del campo efectivo depende del valor de φ de la siguiente manera

$$|h_{\text{eff}}|^2 = 4m^2 h(\varphi)^2 = 4m^2 \begin{cases} \cos^2(\varphi) & \text{si } 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \\ \sin^2(\varphi) & \text{si } \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}.$$

Para mirar la transición de fase predicha por campo medio aun tenemos que resolver la ecuación autoconsistente. Podemos encontrar una temperatura de transición analítica mirando la pendiente de ambos lados de la igualdad para $m = 0$, obtenemos una temperatura crítica

$$\beta_C \mathcal{J} h(\varphi) = 1 \rightarrow T_C / \mathcal{J} = h(\varphi)$$

Encontramos entonces que a través del análisis por campo medio el sistema presenta una transición de fase entre una fase desordenada con magnetización nula en cada subred a una fase en donde cada subred se encuentra magnetizada y en la que las orientaciones relativas de cada subred dependen del valor de φ . Un gráfico de la temperatura de transición como función de φ se encuentra en la figura 3.6 con una comparación con los resultados obtenidos por simulaciones de Monte Carlo. Para $\varphi \in [0, \pi/4]$ las subredes están alineadas mientras que para $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$ las subredes forman una red de vórtices y antivórtices. Notemos que para $\varphi = \pi/4$, es decir $D = J$, ambas disposiciones de espines conforman un estado fundamental válido, dando lugar a una posible coexistencia de fases como mencionamos antes.

Notemos que este análisis a través de campo medio nos predice una transición de fase de primer orden a una temperatura dependiente de φ . Sabemos por el teorema de Mermin-Wagner que esto no es posible en sistemas magnéticos bidimensionales con simetrías continuas como es este caso. Aún así, el análisis de campo medio está capturando el pasaje de una fase desordenada a alta temperatura a una fase con un cierto orden ferromagnético, o de vórtice-antivórtice, a baja temperatura. Para estudiar mejor la naturaleza de esta transición tendremos que utilizar otra técnica analítica.

3.1.2. Teoría de campos efectiva

Para comprender la fenomenología que ocurre en la transición de fase de este sistema realizamos una expansión a baja temperatura, lo que nos lleva a una teoría de campos efectiva. Lo haremos siguiendo el trabajo realizado por Savit et. al. en [52] para el modelo XY estándar con algunas modificaciones para adaptarlo a este problema. Comenzamos con la función de partición dada por el Hamiltoniano (3.2)

$$\mathcal{Z} = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k,l} \frac{d\theta_{(k,l)}}{2\pi} \exp \left[\beta \mathcal{J} \sum_{n,m,\mu} \cos(\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu} - (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \varphi) \right]. \quad (3.12)$$

Podemos expandir cada exponencial en la expresión anterior como una serie de funciones de Bessel [53]

$$\begin{aligned} \exp \left[\beta \mathcal{J} \cos(\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu} - (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \varphi) \right] = \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\beta \mathcal{J}) \exp \left[il (\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu} - (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \varphi) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $I_l(\beta \mathcal{J})$ son las funciones de Bessel modificadas de primera especie de orden l . Introduciéndolo en (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k,l} \frac{d\theta_{(k,l)}}{2\pi} \right) \\ \prod_{n,m,\mu} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\beta \mathcal{J}) \exp \left[il(\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu} - (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \varphi) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora podemos intercambiar el orden de la suma sobre l con la productoria sobre n, m, μ , pasando a una suma sobre todos los posibles campos de enteros l , recordando que hay un entero l por enlace de red. El resultado de esto es la función de partición

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \sum_{\{l\}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k,l} \frac{d\theta_{(k,l)}}{2\pi} \right) \\ \prod_{n,m,\mu} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_{l_{n,m,\mu}}(\beta \mathcal{J}) \exp \left[il_{n,m,\mu}(\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu} - (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \varphi) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donde denotamos explícitamente que hay un entero l por enlace de red. Ahora podemos resolver las integrales sobre las variables angulares ya que el argumento e índice de las funciones de Bessel y el término con φ en la exponencial son independientes de θ .

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \sum_{\{l\}} \left(\prod_{n,m,\mu} I_{l_{n,m,\mu}}(\beta \mathcal{J}) \exp \left[-il_{n,m,\mu} (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \varphi \right] \right) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\prod_{k,l} \frac{d\theta_{(k,l)}}{2\pi} \exp \left[\sum_{n,m,\mu} il_{n,m,\mu} (\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu}) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

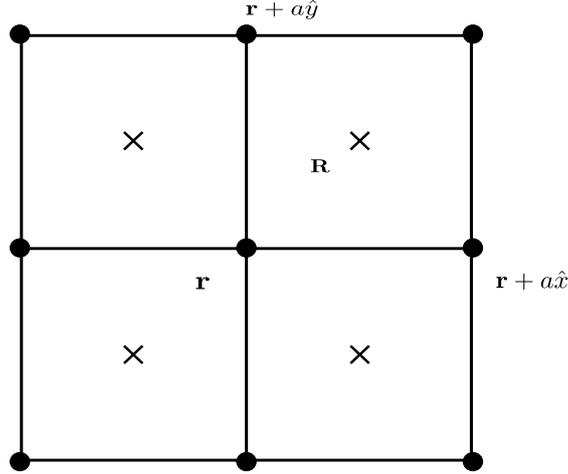


Figura 3.3.: Con círculos negros los sitios de la red sobre la que se define el modelo y con cruces negros los sitios de la red dual.

La suma sobre sitios de red y enlaces que aparece en la integral puede ser reescrita si consideramos que cada variable angular θ aparece 4 veces en la suma, una por cada sitio vecino en la red, de manera que podemos reescribir este exponente como

$$\sum_{n,m,\mu} i l_{n,m,\mu} (\theta_{(n,m)} - \theta_{(n,m)+\mu}) = \sum_{n,m} i (l_{n,m,\hat{x}} - l_{n-1,m,\hat{x}} + l_{n,m,\hat{y}} - l_{n,m-1,\hat{y}}) \theta_{(n,m)} \quad (3.17)$$

Las integrales que nos quedan entonces son integrales sobre un periodo de una exponencial imaginaria, serán nulas a menos que el coeficiente que acompaña a la variable angular en el exponente se anule. Esto nos lleva a que si organizamos los enteros $l_{n,m,\mu}$ como un vector $\mathbf{l}_{n,m} = (l_{n,m,\hat{x}}, l_{n,m,\hat{y}})$ por sitio de red estamos pidiendo que tenga una divergencia discreta nula, es decir,

$$\Delta \cdot \mathbf{l}_{n,m} = l_{n,m,\hat{x}} - l_{n-1,m,\hat{x}} + l_{n,m,\hat{y}} - l_{n,m-1,\hat{y}} = 0. \quad (3.18)$$

Esta condición es satisfecha de manera inmediata si pasamos a un campo de enteros definido sobre la red dual y dado por

$$l_{n,m,\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu \phi_{n,m} \quad (3.19)$$

Para una red cuadrada la red dual puede ser obtenida corriendo la red original medio espaciado de red a en cada dirección, ver figura 3.3. Usando (3.19) en (3.16) e ignorando constantes globales tenemos

$$\mathcal{Z} = \sum_{\phi} \exp \left[\sum_{n,m,\mu} \ln (I_{\epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu \phi_{n,m}}(\beta \mathcal{J})) \right] \exp \left[-i \sum_{n,m,\mu} (-1)^{n+m} \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu \phi_{n,m} \eta \cdot \mu \varphi \right] \quad (3.20)$$

Para n entero $I_n(\beta \mathcal{J})$ tiene la representación [53]

$$I_n(\beta \mathcal{J}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\omega e^{\beta \mathcal{J} \cos(\omega)} \cos(n\omega) \quad (3.21)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

Introducimos esta representación en (3.20) y expandiendo $\cos(n\omega)$ en una serie de potencias de n la función de partición queda escrita como

$$\mathcal{Z} = \sum_{\phi} \exp \left(\sum_{n,m,\mu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{D_p(\beta\mathcal{J})}{p!} (\Delta_{\mu}\phi_{n,m})^{2p} \right) \exp \left[-i \sum_{n,m,\mu} \epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu}\phi_{n,m} \varphi_{\eta} \cdot \mu (-1)^{n+m} \right] \quad (3.22)$$

Las funciones $D_p(\beta\mathcal{J})$ son los cumulantes del conjunto de funciones $T_p(\beta\mathcal{J})$ definidas a partir de

$$T_p(\beta\mathcal{J}) = (-1)^p \frac{p!}{(2p)!} \frac{1}{\pi I_0(\beta\mathcal{J})} \int_0^{\pi} d\omega \omega^{2p} e^{\beta\mathcal{J} \cos(\omega)} \quad (3.23)$$

que surgen de la representación integral de las funciones de Bessel. Para poder reescribir la función de partición que tenemos hasta el momento como una integral funcional sobre un campo ϕ introducimos un tren de deltas de Dirac en forma de serie de exponenciales

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\phi_{n,m} - k) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi s_{n,m} \phi_{n,m}} \quad (3.24)$$

Así podemos promover $\phi_{n,m}$ a un campo escalar que toma cualquier valor real y no solo enteros, resultando en la siguiente función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \sum_s \exp \left[\sum_{n,m,\mu} \frac{D_p(\beta\mathcal{J})}{p!} (\Delta_{\mu}\phi_{n,m})^{2p} + i2\pi s_{n,m} \phi_{n,m} - (-1)^{n+m} i \epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu}\phi_{n,m} \eta \cdot \mu \right] \quad (3.25)$$

El término en la exponencial correspondiente a la interacción DM puede ser reescrito de una forma mas conveniente

$$-i \sum_{n,m,\mu} (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu}\phi_{n,m} = -i \sum_{n,m} (-1)^{n+m} \varphi (2\phi_{n,m} - \phi_{n-1,m} - \phi_{n,m-1}) \quad (3.26)$$

cada valor $\phi_{n,m}$ del campo aparece 4 veces en la suma con el mismo signo, por ende

$$-i \sum_{n,m,\mu} (-1)^{n+m} \eta \cdot \mu \epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu}\phi_{n,m} = -i \sum_{n,m} 4(-1)^{n+m} \varphi \phi_{n,m} \quad (3.27)$$

es un termino lineal en $\phi_{n,m}$ que puede unirse al termino con $s_{n,m}$. Luego, al estar realizando una expansión a baja temperatura nos podemos quedar unicamente con el primer término de la serie de potencias en p ya que los cumulantes tienen la siguiente expresión para $\beta\mathcal{J} \gg 1$

$$T_p(\beta\mathcal{J}) = (-1)^p \frac{p!}{(2p)!} \frac{(2p-1)!!}{(\beta\mathcal{J}^p)} + O((\beta\mathcal{J})^{-p-1}) \quad (3.28)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

Esto nos lleva a la siguiente función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \sum_{\{s\}} \exp \left[\sum_{n,m,\mu} -\frac{1}{2\beta\mathcal{J}} (\Delta_\mu \phi_{n,m})^2 + i2\pi (s_{n,m} - (-1)^{n+m} \frac{2\varphi}{\pi}) \phi_{n,m} \right] \quad (3.29)$$

Vemos que se trata de una teoría Gaussiana en un campo escalar real ϕ acoplado a un campo de enteros $s_{n,m}$. Podemos redefinir este campo de enteros para que contenga el efecto de la interacción DM dando lugar al nuevo campo redefinido

$$Q_{n,m} = s_{n,m} - (-1)^{n+m} \frac{2\varphi}{\pi}. \quad (3.30)$$

Al ser una teoría Gaussiana sobre $\phi_{n,m}$ podemos realizar esta integral funcional pasando al espacio de Fourier. Obtenemos una función de partición solo en el campo de enteros $Q_{n,m}$

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{Q\}} \exp \left[-\frac{\beta\mathcal{J}}{8} \sum_{(n,m),k,l} Q_{(n,m)} V_{(n,m),(k,l)} Q_{(k,l)} \right] \quad (3.31)$$

donde

$$V_{(n,m),(k,l)} = \int_{-\pi}^{\pi} dq_1 dq_2 \frac{e^{iq_1(n-k)+iq_2(m-l)}}{\left(1 - \frac{1}{2} (\cos(q_1) + \cos(q_2))\right)} \quad (3.32)$$

Aproximamos el potencial para $|q|$ chico usando $\left(1 - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \cos(q \cdot \mu)\right) \simeq \frac{1}{2}|q|^2$. Aún así, el potencial tiene una divergencia para $|q| = 0$, la regularizamos reescribiendolo de la siguiente manera

$$V_{(n,m),(k,l)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2d^2q}{|q|^2} \delta_{n,k} \delta_{m,l} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{iq_1(n-k)+iq_2(m-l)}}{q^2} d^2q \quad (3.33)$$

El primer término es divergente y multiplica en la función de partición a $\left(\sum_{n,m} Q_{n,m}\right)^2$ por lo que podemos salvar la divergencia si pedimos $\sum_{n,m} Q_{n,m} = 0$. EL segundo término puede ser aproximado como [54]

$$V_{(n,m),(k,l)} = 8\pi \ln(|r_{n,m} - r_{k,l}|) + \frac{1}{2} \ln(8) + \gamma \quad (3.34)$$

siendo γ la constante de Euler-Mascheroni, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Con esta expresión para el potencial de interacción podemos reescribir finalmente a la función de partición como

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{Q\}} \exp \left[\beta\mathcal{J} \sum_{(n,m),k,l} Q_{n,m} \ln(|r_{n,m} - r_{k,l}|) Q_{k,l} + \frac{\beta\mathcal{J}}{8} \sum_{n,m} \varepsilon_c Q_{n,m}^2 \right] \quad (3.35)$$

Tenemos entonces la función de partición de un gas de Coulomb de carga neutra con cargas definidas por (3.30) y con energía de creación $\varepsilon_c = \frac{1}{2} \ln(8) + \gamma$. El estado fundamental del sistema se da en la ausencia de cargas $Q_{n,m}$ en cada sitio y las excitaciones corresponden a

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

los valores mínimos que puede tomar $Q_{n,m}$, siempre creándose de a pares de signos opuestos para mantener la neutralidad de carga. En los casos extremos de $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$, que corresponden a $D = 0$ y $J = 0$ respectivamente, las cargas $Q_{n,m}$ resultan ser números enteros. En el caso del modelo XY estándar las cargas se reducen a $Q_{n,m} = s_{n,m}$, se asocia cada carga con un vórtice y la magnitud de dicha carga con la vorticidad [52]. El estado de mínima energía es la ausencia de vórtices y la excitación mínima es un par de vórtice-antivórtice de cargas ± 1 a la menor distancia posible. Por otro lado, en el caso dominado por la interacción DM, la carga resultante es $Q_{n,m} = s_{n,m} - (-1)^{n+m}$. En este caso, el estado de mínima energía corresponde nuevamente a la ausencia de cargas $Q_{n,m}$ pero esta vez no implica la ausencia de vórtices. Para mantener la ausencia de cargas es necesario colocar un vórtice o antivórtice en cada plaqueta que conforma la red, de manera que se forma un arreglo periódico, un cristal de vórtices. En este caso la excitación mínima se corresponde nuevamente con $Q_{n,m} = \pm 1$ pero nuevamente su interpretación cambia, en este caso esos valores de cargas implican la aniquilación de un par de vórtices de cargas opuestas, nuevamente separados la menor distancia posible.

3.1.3. Módulo de helicidad

Para estudiar la transición de fase miramos el módulo de helicidad Υ , siguiendo el trabajo de Ohta y Jasnow [55], donde se trabaja a un orden más la expansión a baja temperatura. Como vimos en el capítulo 1 el módulo de helicidad para el modelo estándar está dado por (1.13), esto es, la derivada segunda de la energía libre respecto a un giro en las condiciones de contorno. Procedemos entonces de la misma manera que en la sección anterior pero agregando este cambio en las condiciones de contorno y tomando una interacción de DM con una modulación espacial general dada por una función $f(\mathbf{r})$. Es decir, estamos partiendo de la siguiente función de partición

$$\mathcal{Z} = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k,l} \frac{d\theta_{k,l}}{2\pi} \exp \left[\beta \mathcal{J} \sum_{n,m,\mu} \cos(\theta_{n,m} - \theta_{n,m+\mu} - f_{\mu}(\mathbf{r}) + v_{\mu}) \right] \quad (3.36)$$

Realizando las mismas transformaciones que en la sección anterior obtenemos

$$\mathcal{Z} = \sum_{\phi} \exp \left[\sum_{n,m,\mu} \ln (I_{\epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu} \phi_{n,m}}(\beta \mathcal{J})) \right] \exp \left[-i \sum_{n,m,\mu} f_{\mu}(\mathbf{r}) \epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu} \phi_{n,m} - v_{\mu} \epsilon_{\mu\nu} \Delta_{\nu} \phi_{n,m} \right] \quad (3.37)$$

Introduciendo un tren de deltas de Dirac y haciendo el mismo desarrollo en cumulantes para el primer término que en la sección previa obtenemos

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \sum_s \exp \left[\sum_{n,m,\mu} \sum_p \frac{D_p(\beta \mathcal{J})}{p!} (\Delta_{\mu} \phi_{n,m})^{2p} + i 2\pi s_{n,m} \phi_{n,m} - i \hat{z} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}) \times \Delta \phi \right] \quad (3.38)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

Si llamamos $B(\mathbf{r}) = \sum_{\square} \mathbf{f}(\mathbf{r})$, la suma sobre los lados de una plaqueta de $f(\mathbf{r})$, y nos quedamos a segundo orden en la suma en p obtenemos

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \sum_s \exp \left[\sum_{\mathbf{r}} D_1(\beta\mathcal{J}) \Delta\phi^2 + \frac{D_2(\beta\mathcal{J})}{2} (\Delta\phi)^4 + i2\pi(s - \frac{B}{2\pi})\phi - i\mathbf{v} \times \Delta\phi \right]$$

Llamamos $M(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) - \frac{B(\mathbf{r})}{2\pi}$ al igual que en la sección anterior. De igual manera que el caso particular de la configuración de DM elegida en este trabajo, si se toma una dependencia espacial genérica para la interacción de DM obtenemos un resultado similar, hemos redefinido las cargas efectivas del sistema, modificandolas con la suma sobre plaquetas de la interacción de DM. Podemos evaluar el término cuadrático perturbativamente expresando primero las funciones en espacio de fourier. Sin pérdida de generalidad tomamos $\mathbf{v} = v\hat{x}$ y lo escribimos como $\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \rightarrow v_x = \Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r} - \hat{x})$ e introducimos la siguiente notación para las transformadas de Fourier

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \phi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

por ende

$$\Delta_\mu\phi = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \phi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} (1 - e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\mu}}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \phi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} g_\mu(\mathbf{q}).$$

Cada termino de la exponencial en la integral funcional será entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{r}} D_1(\beta\mathcal{J}) \Delta\phi^2 &= \sum_{\mathbf{r}} D_1(\beta\mathcal{J}) \int \frac{d^2q_1 d^2q_2}{(2\pi)^4} \phi(\mathbf{q}_1) \phi(\mathbf{q}_2) e^{i(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)\cdot\mathbf{r}} g_\mu(\mathbf{q}_1) g_\mu(\mathbf{q}_2) \\ \sum_{\mathbf{r}} i2\pi M(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) &= i2\pi \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^2q_1 d^2q_2}{(2\pi)^4} M(\mathbf{q}_1) \phi(\mathbf{q}_2) \\ -i \sum_{\mathbf{r}} (\Phi(\mathbf{r}+\hat{x}) - \Phi(\mathbf{r})) \Delta_y\phi &= -i \sum_{\mathbf{r}} \int \frac{d^2q_1 d^2q_2}{(2\pi)^4} \phi(\mathbf{q}_1) \Phi(\mathbf{q}_2) e^{i(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)\cdot\mathbf{r}} (1 - e^{-i\mathbf{q}\cdot\hat{x}}) (1 - e^{-i\mathbf{q}\cdot\hat{y}}) \end{aligned}$$

Las sumas en \mathbf{r} en cada término nos dan una delta de Dirac, obtenemos finalmente para la parte Gaussiana.

$$H_G = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} (D_1(\beta\mathcal{J}) |g_\mu(\mathbf{q})|^2 \phi(\mathbf{q}) \phi(-\mathbf{q}) - i\phi(\mathbf{q}) j(-\mathbf{q}))$$

donde $j(\mathbf{q}) = -2\pi M(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{q}) g_x(-\mathbf{q}) g_y(\mathbf{q})$. Mientras que para la parte de $\Delta_\mu\phi^4$ obtenemos

$$H_I = \sum_{\mathbf{r}} \frac{D_2(\beta\mathcal{J})}{2} \Delta\phi^4 = \frac{D_2(\beta\mathcal{J})}{2} \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^2q_i}{(2\pi)^2} \phi(\mathbf{q}_i) V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$$

con

$$V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) = (2\pi)^2 \delta(\sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_i) \sum_{\mu} \prod_{i=1}^4 g_\mu(\mathbf{q}_i)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

Obtenemos entonces para la función de partición

$$\mathcal{Z} = \sum_s \int \mathcal{D} \exp [H_G + H_I]$$

Podemos resolver ahora la integral funcional tomando H_I como una perturbación y $j(\mathbf{q})$ como una fuente. Lo expresaremos como una exponencial de un hamiltoniano efectivo \mathcal{H} por lo que calculamos el logaritmo de la función de partición de los campos continuos. En definitiva, necesitamos hacer la suma sobre todos los diagramas conectados a primer orden en D_2 y exponenciarla. Esto nos permite obtener

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \sum_s \exp(\mathcal{H}(s, j))$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s, j) = & -\frac{1}{2D_1} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{j(\mathbf{q})j(-\mathbf{q})}{|g_\mu(\mathbf{q})|^2} + \\ & \frac{D_2}{4!D_1^4} \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^2q_i}{(2\pi)^2} U(q_1, q_2, q_3, q_4) |g_\mu(q)g_\mu(q)^*|^2 j(q_1)j(q_2)j(q_3)j(q_4) \\ & - \frac{6D_2}{4!D_1^3} \int \frac{d^2q d^2k}{(2\pi)^4} U(k, -k, q, -q) g_\mu^2(k) j(q) j(-q) \end{aligned}$$

donde

$$U(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{g_\mu(k_i)\delta(k_i)}{\prod_{i=1}^4}$$

A orden cuadrático en Φ la energía libre correspondiente es

$$\begin{aligned} \ln(\mathcal{Z}) = & \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} |\Phi(k)|^2 \hat{f}(k) \\ & \left(\frac{1}{2D_1} - \frac{D_2}{4!D_1^3} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \hat{V}(k, q) + \frac{(2\pi^2) \langle |M(k)|^2 \rangle}{D_1^2 f(k)} + \frac{\pi^2 D_2}{D_1^4} \int_q \hat{V}(k, q) \frac{\langle |M(q)|^2 \rangle}{f(q)} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Donde conocemos las funciones de correlación entre cargas solo para los casos $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$ en los que decaen exponencialmente y definimos además

$$\hat{V}(k, q) = f(-k)U(k, -k, q, -q)f(-q) \quad \hat{f}(k) = |f_{xy}(k)|^2 f(k) \quad (3.40)$$

De esta expresión para la energía libre podemos obtener el módulo e helicidad como

$$\beta\Upsilon = \frac{1}{D_1} + \frac{4D_2}{4D_1^3} \quad (3.41)$$

Que desarrollando a orden lineal en la temperatura toma la forma

$$\Upsilon/\mathcal{J} = 1 - \frac{T}{4\mathcal{J}} \quad (3.42)$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

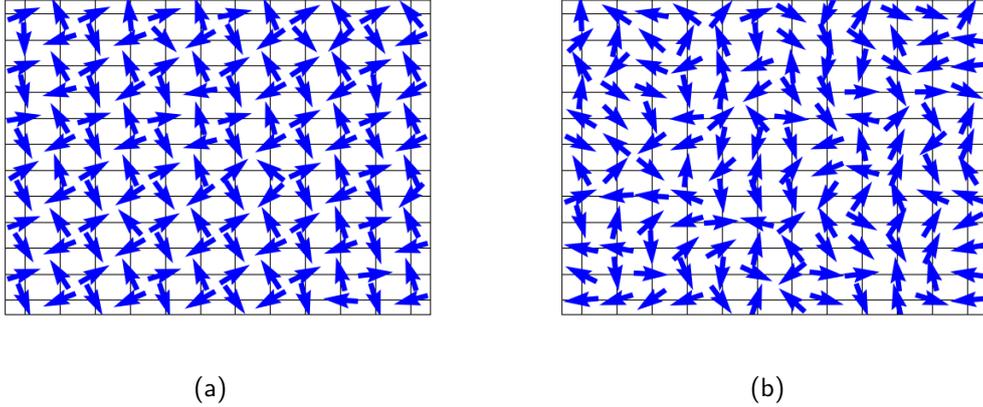


Figura 3.4.: Las flechas azules representan espines en una red de 12×12 . Las configuraciones fueron obtenidas mediante simulaciones de Monte Carlo para el sistema con $\varphi \simeq \pi/2$, $J \ll D$. En (a) una configuración típica a $T/\mathcal{J} = 0,05$, notemos que se encuentra repleta de vórtices y antivórtices en un arreglo periódico. En (b) una configuración típica a $T/\mathcal{J} = 1,8$, en este caso el sistema está desordenado y, si bien la densidad de vórtices no es idénticamente nula, la red de vórtices ya no está presente.

Verificaremos esta expresión en la sección siguiente a través de simulaciones de Monte Carlo. Recordemos que para llegar a la misma fue necesario conocer la correlación entre cargas y que la misma decaiga exponencialmente con la temperatura. Esto solo sabemos que es válido para los casos $J = 0$ y $D = 0$, para los casos intermedios el módulo de helicidad podría ser diferente.

3.1.4. Simulaciones de Monte Carlo

Para estudiar algunas de los resultados analíticos dados en las secciones anteriores se estudió el sistema a través de simulaciones de Monte Carlo. En particular, se estudió el módulo de helicidad como función de la temperatura y tamaño de red para determinar la presencia de una transición de fase del tipo BKT al igual que en el modelo XY estándar. En primer lugar, podemos verificar la aparición de un estado fundamental de red de vórtices a baja temperatura para sistemas con $|D| > J$. En la figura 3.4b vemos una configuración de equilibrio de una red de 12×12 espines a $T/\mathcal{J} = 1,8$ y $J \ll |D|$, vemos que la red está desordenada y no hay presencia de redes de vórtices, sin embargo, en la figura 3.4a podemos observar la red periódica de vórtices. Esperamos entonces que para los casos $|D| > J$ haya una transición entre un sistema paramagnético desordenado a alta temperatura y una red de vórtices a baja temperatura.

Para verificar la naturaleza de esta transición se calculó de manera directa el módulo de helicidad para distintos valores de φ en configuraciones que estabilizan redes de vórtices, $\varphi > \pi/4$, y en algunas configuraciones que no lo hacen, $\varphi < \pi/4$. En la figura 3.5 vemos el

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

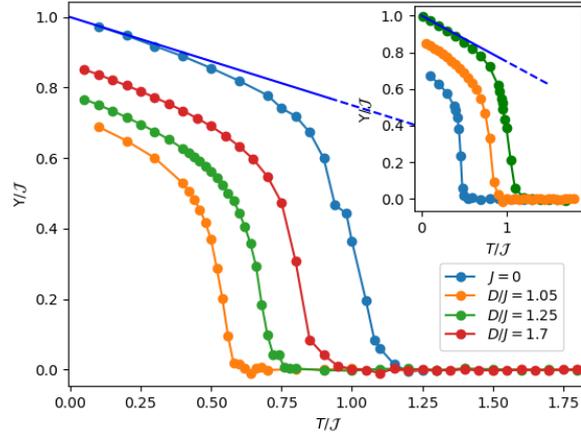


Figura 3.5.: Módulo de helicidad como función de la temperatura para distintos valores de la razón D/J , con $D > J$. En el inset el módulo de helicidad para casos con $D < J$. En ambas figuras se ve cómo Υ presenta un salto a una temperatura finita, propio de una transición de BKT.

módulo de helicidad Υ/J para distintos valores de D/J , todos con $D > J$, para una red de 32×32 espines. Observamos que en todos los casos Υ se anula al aumentar la temperatura, consistente con una transición de fase del tipo BKT. El cambio con la temperatura es suave y no un cambio abrupto pero esto puede deberse a efectos del tamaño finito. Para verificar esto último esperamos que el módulo de helicidad escalee con el tamaño de la misma manera que para el modelo XY estándar ya que el escaleo con el tamaño se basa en la dualidad con un gas de Coulomb, que también es válida para el modelo XYDM.

En lo expuesto en el capítulo 1 vimos cómo las ecuaciones del grupo de renormalización para el modelo XY muestran que el módulo de helicidad Υ en un sistema de tamaño infinito presenta un salto universal del valor $\Upsilon(T_c) = \frac{2}{\pi}T_c$ a 0 a una cierta temperatura crítica T_c dependiente del sistema. Aprovechando la dualidad con el gas de Coulomb se puede verificar[9] que Υ posee una dependencia con el tamaño del sistema dada por

$$\frac{\Upsilon(N, T)}{TJ} = \frac{\Upsilon^\infty(T)}{TJ} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\ln(N) + C} \right) \quad (3.43)$$

siendo C una constante a determinar, N el número de sitios y $\Upsilon^\infty(T)$ el módulo de helicidad en el sistema de tamaño infinito. Si el sistema atraviesa una transición de fase del tipo BKT a una temperatura T_c deberíamos obtener $\Upsilon^\infty(T_c)/(T_cJ) = \frac{2}{\pi}$.

Para determinar la temperatura de transición a distintos valores de φ seguimos la estrategia desarrollada por Weber y Minnhagen en [56]. Calculamos $\Upsilon(N, T)$ para tamaños de sistema que varían entre 32×32 y 128×128 espines y temperaturas en rangos que contengan el valor aproximado en el que vemos que Υ presenta un salto. Para un dado T ajustamos $\Upsilon(N, T)/T$ a la expresión en (3.43). Encontramos luego a qué valor de T , $\Upsilon^\infty/T = \frac{2}{\pi}$. Para el caso $D \gg J$ encontramos $\frac{2}{\pi} - 0,03 < \Upsilon^\infty/T < \frac{2}{\pi} + 0,03$ para temperaturas en

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

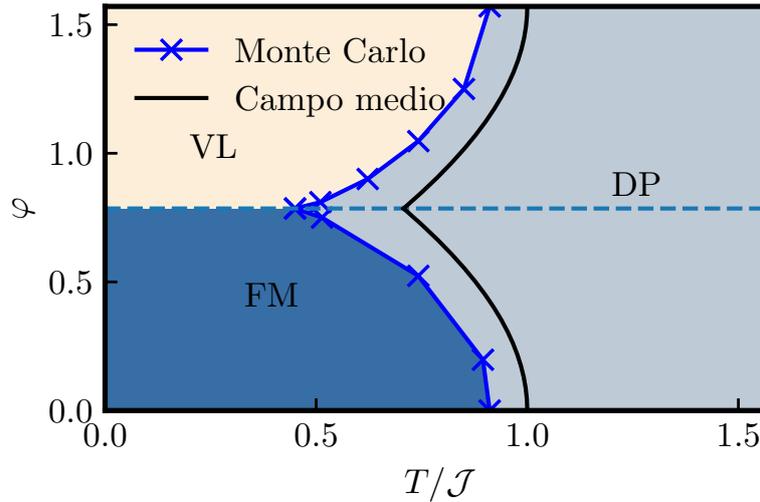


Figura 3.6.: Diagrama de fases obtenido mediante simulaciones de Monte Carlo y mediante el análisis de campo medio. En línea azul la línea de transiciones de tipo BKT obtenidas numéricamente y en línea negra la aproximación por campo medio. Separamos el diagrama en tres fases, una fase de baja temperatura de red de vórtices denotada con VL , una fase de baja temperatura ferromagnética denotada con FM y una fase de alta temperatura desordenada denotada con DP .

el rango $0,885 < T/D < 0,9$. Por lo tanto, por este método podemos estimar T_c como $T_c = 0,892(8)D$. Lo mismo se realizó para distintos valores de D/J y los resultados se presentan en la figura 3.6 con un diagrama de fases que contiene además lo esperado por el análisis hecho con campo medio en secciones anteriores.

3.1.5. Fenomenología y diagrama de fases

Concluimos esta sección con un análisis de la fenomenología y el diagrama de fases del sistema. Vemos que para $D \gg J$ el sistema sufre una transición de fase a temperatura finita con el mismo salto universal que la transición de BKT pero ahora medida por excitaciones topológicamente triviales. En este régimen vimos que la correlación entre cargas decae exponencialmente con la temperatura de la misma manera que en el modelo XY sin interacción DM. Para valores de φ intermedios pero aún con $D > J$, es decir $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ podemos ver que la configuración de mínima energía del sistema es tal que en cada plaqueta hay un vórtice o antivórtice de forma alternada y periódica. Las excitaciones mínimas del sistema se obtienen desarmando un par de vórtice-antivórtice en la red, de manera contraria a lo que ocurre en el modelo XY sin interacción DM en el que la transición de fase ocurre por la aparición de un par de excitaciones topológicamente no triviales. A medida que la temperatura se eleva más pares de cargas son creadas, lo que implica una mayor destrucción de pares de vórtices-antivórtices, esto se verificó utilizando simulaciones de Monte Carlo en la figura 3.7 y calculando la densidad de vórtices para cada temperatura. Eventualmente esta aparición de

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

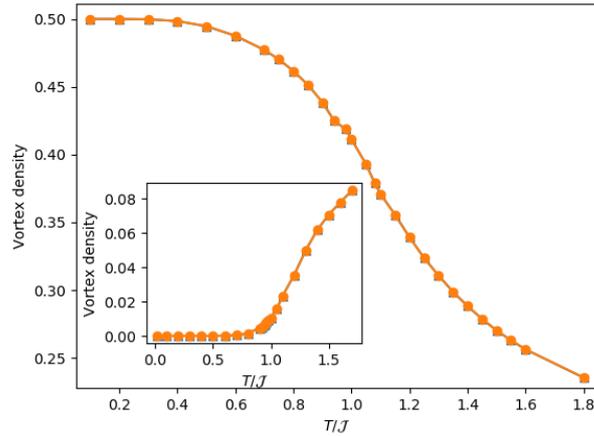


Figura 3.7.: Densidad de vórtices y antivórtices como función de la temperatura para $D \gg J$ (y $J \gg D$ en el inset) vemos como ambas densidades coinciden a toda temperatura, confirmando la neutralidad de carga, y como las densidades disminuyen con la temperatura en el caso $D \gg J$ y aumentan con la temperatura en el caso $J \gg D$

cargas decorrelaciona el sistema de la misma manera en la que los vórtices decorrelacionan el sistema en el modelo XY. Destacamos que la red se desarma en un sentido inverso en el que lo hace en el modelo XY, en este caso son las excitaciones triviales las que decorrelacionan el sistema y no los vórtices, es por esto que denominamos a la transición como transición de BKT inversa, o iBKT.

3.2. Dinámica de electrones sobre la red

Las interacciones antisimétricas estudiadas hasta ahora no solo influyen en las configuraciones de los espines en los sistemas magnéticos sino también en la interacción entre estos y la dinámica de electrones que puedan moverse sobre la red, entrando en juego a través de una interacción del tipo espín-órbita. Una de las características más marcadas de este tipo de interacción es la aparición del efecto Hall anómalo, caracterizado por la presencia de una conductividad de Hall en ausencia de un campo magnético externo, por ejemplo en sistemas con una magnetización neta. Las configuraciones magnéticas como la resultante en el estado fundamental del modelo XYDM expuesto en la sección anterior poseen una magnetización neta nula, sin embargo el efecto Hall anómalo aún puede ser observado en ciertas situaciones. En ambos casos, el efecto Hall puede ser descrito por una fase de Berry no trivial adquirida por los estados electrónicos que lleva a una curvatura de Berry no nula. Existen varios ejemplos de sistemas magnéticos con estados magnéticos colineales, como Mn_3Sn [57] y Mn_3Ge [58] que exhiben una conductividad de Hall alta[59, 60, 61].

El efecto Hall anómalo en antiferromagnetos coplanares sugiere la presencia de una curva-

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

tura de Berry asociada a un acoplamiento espín-órbita. Es así que el efecto del acoplamiento espín-órbita puede ser interpretado en términos de una magnetización efectiva con una contribución neta a la curvatura de Berry [62].

Recientemente, Zhang et. al. en [63] han mostrado que la introducción de un acoplamiento espín-órbita a nivel efectivo en las amplitudes de hopping genera una contribución a la fase de Berry en el espacio recíproco lo que lleva a una curvatura de Berry no nula para acoplamientos adecuados. El efecto del acoplamiento espín-órbita se tiene en cuenta introduciendo un conjunto de matrices de rotación $SU(2)$, $U_{i,j}$, que rotan a los espines de los electrones en el salto entre los sitios i y j .

En esta sección estudiaremos el efecto Hall anómalo en una red triangular coloreada (CT por sus siglas en inglés) con una configuración magnética coplanar con magnetización nula. La red CT es una red triangular con amplitudes de hopping a primeros vecinos no uniformes que puede ser mapeada a una teselación triangular de tres colores que exhibe una estructura de bandas similar a la red de Kagomé [64]. Como es sabido, distintos fenómenos interesantes son asociados a la red de Kagomé [65, 66, 67], como ser frustración, conos de Dirac, y bandas planas, que son ingredientes importantes para fases de fuerte correlación. Debido a que la estructura de bandas de la red CT es muy similar a la estructura de bandas de la red de Kagomé es que esperamos que estos fenómenos de la red de Kagomé estén presentes también en la red CT. Recientemente, se ha mostrado que el compuesto Cu-dicianobenceno, que presenta una estructura CT en su red con un estado ferromagnético, presenta un fuerte efecto Hall anómalo. En este sistema, una estructura de bandas con curvatura de Berry no trivial emerge como consecuencia del acoplamiento espín-órbita y la similitud con la red de Kagomé. Hasta donde conocemos, la red CT antiferromagnética no ha sido estudiada aún y será detallada en la siguiente sección.

3.2.1. Modelo y estructura de bandas

El modelo consiste de una red triangular con espaciado de red a . Las celdas magnéticas están compuestas por tres sitios formando una estructura de 120° como en la figura 3.8. Los enlaces que conectan dos sitios dentro de una celda magnética (líneas negras en la figura 3.8) están caracterizados por una amplitud de hopping t_1 y un acoplamiento espín-órbita; mientras que los enlaces que conectan sitios de celdas vecinas están caracterizados por una amplitud de hopping t_2 sin acoplamiento espín-órbita (líneas azules en la figura 3.8). El efecto de la textura magnética es tomado en cuenta a través de un acoplamiento de Hund de magnitud J entre el espín de los electrones y los momentos magnéticos localizados de espín S . El acoplamiento espín-órbita es tratado aquí en el contexto de una teoría efectiva como lo discutido en [63]. El Hamiltoniano tiene entonces la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_t + \mathcal{H}_J \\ \mathcal{H}_t &= \sum_{j,k} \left(t_{kj} \mathbf{c}_k^\dagger U_{kj} \mathbf{c}_j + t_{jk}^* \mathbf{c}_j^\dagger U_{jk}^\dagger \mathbf{c}_k \right) \\ \mathcal{H}_J &= -\frac{JS}{2} \sum_j \mathbf{c}_j^\dagger \boldsymbol{\sigma} \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{n}_j\end{aligned}\tag{3.44}$$

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

Los \mathbf{c}_j son espinores de dos componentes

$$\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} c_{j,\uparrow} \\ c_{j,\downarrow} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_j^\dagger = \begin{pmatrix} c_{j,\uparrow}^\dagger & c_{j,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

El espín localizado en el sitio j está representado por el vector \mathbf{n}_j que toma tres posibles valores llevando a una red tripartita como se muestra en la figura 3.8. El acoplamiento espín-órbita es introducido de manera efectiva en la matriz de $SU(2)$ U_{kj} con dos parámetros para cada enlace que conecta los sitios k y j . Como U_{kj} representa una rotación del espín del electrón la podemos escribir en términos de un vector unitario \mathbf{a}_{kj} que da la dirección de la rotación y el ángulo α_{kj} de la rotación, que es una medida de la intensidad del acoplamiento. Las podemos escribir como

$$U_{kj} = \exp \left[-i \frac{\alpha_{kj}}{2} \mathbf{a}_{kj} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{kj} \right] \quad (3.46)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es un vector de matrices de Pauli. En esta formulación efectiva la dirección de los vectores \mathbf{a}_{kj} que caracteriza el acoplamiento espín-órbita puede ser deducida siguiendo las reglas para la interacción DM [5] que mencionamos al principio de este capítulo. De acuerdo a estas reglas, el plano de reflexión \mathcal{M}_z paralelo a la red haría que los vectores \mathbf{a}_{kj} sean perpendiculares al plano de la misma, pero consideraremos a la red embebida en una estructura tridimensional que rompe esta simetría. La presencia de los planos de reflexión \mathcal{M}_i perpendiculares a los enlaces intraceldas y que pasa por el punto de medio de dichos enlaces hace que los vectores \mathbf{a}_{kj} sean paralelos a los \mathcal{M}_i en dichos enlaces. Con estas consideraciones tomamos los \mathbf{a}_{kj} como

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{1}{2} \cos(\phi) \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\phi) \hat{y} + \sin(\phi) \hat{z} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{a}_{23} = -\cos(\phi) \hat{x} + \sin(\phi) \hat{z} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{a}_{13} = \frac{1}{2} \cos(\phi) \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\phi) \hat{y} + \sin(\phi) \hat{z} \quad (3.49)$$

Donde ϕ es el ángulo entre los vectores y el plano de la red.

Hasta ahora, este modelo corresponde a una red CT general con acoplamiento espín-órbita y podría ser considerada como el escenario para una gran variedad de fenómenos moviéndonos en las distintas regiones del espacio de parámetros. Sin embargo, limitaremos nuestros resultados al caso particular $|t_1| \leq |t_2|$. Por un lado, porque encontramos que para $|t_1| > |t_2|$ la conductividad de Hall se ve altamente suprimida en presencia del acoplamiento espín-órbita como se ve en la figura 3.13. Por otro lado, el caso $|t_1| \leq |t_2|$ tiene potenciales realizaciones experimentales como discutiremos más adelante.

La estructura magnética de 120° tiene una degeneración dada por las dos posibles quiralidades que se observan en la figura 3.8. La presencia de una interacción DM puede romper esta degeneración seleccionando un estado con quiralidad definida por lo que, sin pérdida de generalidad, nos mantendremos en el caso de quiralidad positiva.

Si bien la estructura de bandas se modifica al variar ϕ las características topológicas de las bandas se mantienen invariantes así que sin perder generalidad tomamos $\phi = 0$.

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

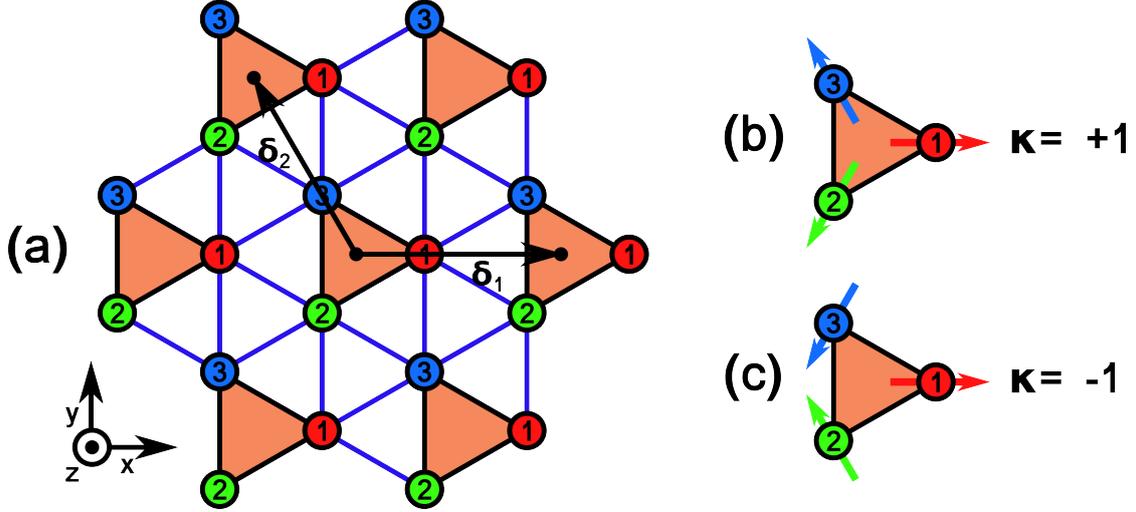


Figura 3.8.: (a) La red triangular con plaquetas marcadas en naranja representando las celdas magnéticas. Los enlaces intra-plaquetas (líneas negras) corresponden a una amplitud de hopping t_1 con acoplamiento espín-órbita. Los enlaces entre plaquetas (líneas azules) corresponden a una amplitud de hopping t_2 . Los espines de cada sitio están etiquetados con los números 1, 2, 3. Los vectores $\delta_{1,2}$ representan los vectores primitivos de la red de Bravais. La estructura magnética tiene dos posibles quiralidades compatibles indicadas en las figuras (b) y (c).

Describimos las propiedades del modelo a través del Hamiltoniano en (3.44) que en espacio de Fourier está dado por una matriz de 6×6 entradas

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} -\frac{JS}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1 & H_{12}^\dagger & H_{13} \\ H_{12} & -\frac{JS}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2 & H_{23}^\dagger \\ H_{13}^\dagger & H_{23} & -\frac{JS}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_3 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

con

$$\begin{aligned} H_{13} &= t_1 U_{13} + t_2 \left(e^{-ik \cdot (\delta_1 + \delta_2)} + e^{-ik \cdot \delta_2} \right) \\ H_{12} &= t_1 U_{12} + t_2 \left(e^{-ik \cdot (\delta_1 + \delta_2)} + e^{-ik \cdot \delta_1} \right) \\ H_{23} &= t_1 U_{23} + t_2 \left(e^{-ik \cdot \delta_2} + e^{ik \cdot \delta_1} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

siendo $\delta_{1,2}$ los vectores primitivos de la red como se marca en la figura 3.8.

La estructura electrónica más general consiste en 6 bandas que, para $J = 0, \alpha = 0$ se unen en un menor número de bandas degeneradas. Estudiaremos algunos límites particulares del modelo y para esto vamos a considerar $t_1 + t_2 = 1$ y parametrizar la diferencia entre ambos con un parámetro λ tal que $t_1 = (1 + \lambda)/2$ y $t_2 = (1 - \lambda)/2$ con $-1 \leq \lambda \leq 1$.

Consideramos en primer lugar el caso $\lambda = 1$ ($t_2 = 0$), $J = 0, \alpha = 0$. En esta situación el sistema consiste de una serie de plaquetas triangulares independientes ya que la amplitud de

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

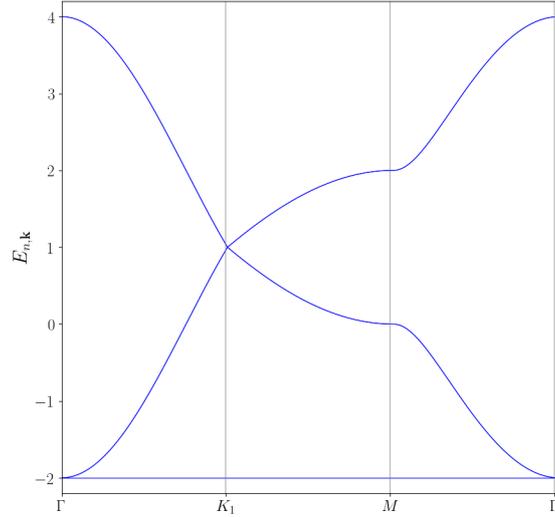


Figura 3.9.: Estructura de bandas en el caso $t_1 = 0$, $J = 0$, $\alpha = 0$. La estructura se asemeja a la de la red de Kagomé con dos cruces de bandas y tres bandas doblemente degeneradas.

hopping a plaquetas vecinas es nula, esto lleva a que los estados electrónicos estén localizados en cada plaqueta. Esto se ve en la estructura de bandas que está formada por dos bandas planas, la superior con degeneración doble y la inferior con degeneración cuadruple. Al activar el acoplamiento Hund se levantan algunas degeneraciones pero las bandas siguen siendo planas, lo mismo sucede al activar el acoplamiento espín-órbita con un $\alpha \neq 0$.

En el otro extremo, si tomamos $\lambda = -1$ ($t_1 = 0$) con $J = 0$ y $\alpha = 0$ la estructura de bandas se asemeja a la estructura de bandas de la red de kagomé con 3 bandas doblemente degeneradas y un cruce de niveles en los puntos Γ y K como se ve en la figura 3.9. Para cualquier valor de $-1 < \lambda < 0$ estos cruces se mantienen y no se generan nuevos. Es importante destacar aquí que el acoplamiento espín-órbita actúa a través de la amplitud de hopping t_1 , así que en cualquier caso en el que $t_1 = 0$ el acoplamiento espín-órbita no tiene ningún efecto sobre la estructura de bandas. Fuera de estos límites, la introducción de acoplamiento Hund y espín-órbita levanta las degeneraciones y los cruces de bandas formando gaps en la estructura electrónica como se verá en más detalle en la siguiente sección. Estudiaremos el regimen $-1 < \lambda < 0$ y discutiremos el efecto del acoplamiento espín-órbita sobre la estructura de bandas y la conductividad de Hall.

3.2.2. Conductividad de Hall anómala

Como la conductividad de Hall σ_{xy} está relacionada a la topología de las bandas electrónicas comenzamos haciendo un análisis topológico de la estructura. Para esto, consideramos el Hamiltoniano en espacio de Fourier dado por (3.50). Sin pérdida de generalidad tomamos $\alpha = 0,2\pi$ en lo que resta de este capítulo.

Como se mencionó en la sección anterior, al modificar el valor de las amplitudes de Hopping

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

y del acoplamiento Hund algunos cruces de bandas son levantados y formamos gaps en la estructura, caracterizando una transición entre fases con y sin gap en la estructura de bandas. Para caracterizar estas transiciones calculamos el numero de Chern C_n de la n -ésima banda, con $n = 1, \dots, 6$. El conjunto de los números de Chern puede ser calculado a partir de

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_S \Omega^n(\mathbf{k}) d^2k \quad (3.52)$$

donde $\Omega^n(\mathbf{k})$ es la curvatura de Berry. La misma la podemos expresar en términos de la conexión de Berry $A_{k_\mu}^n(\mathbf{k})$ para la n -ésima banda según

$$\Omega^n(\mathbf{k}) = \partial_{k_x} A_{k_y}^n - \partial_{k_y} A_{k_x}^n \quad (3.53)$$

$$A_{k_\mu}^n = \langle n(\mathbf{k}) | \partial_{k_\mu} | n(\mathbf{k}) \rangle \quad (3.54)$$

Los numeros de Chern se calcularon numericamente discretizando la zona de brillouin y calculando la fase de Berry en cada plaqueta discreta en espacio k siguiendo los métodos numéricos desarrollados por Fukui-Hatsugai-Suzuki en [68].

Para valores $\lambda > 0$ el sistema es trivial topológicamente hablando, es decir, $C_n = 0 \forall n$. Para valores de $\lambda < 0$ encontramos numeros de Chern no nulos para distintas bandas. Por ejemplo en la figura 3.10 se encuentra la estructura de bandas con los números de Chern para algunos valores representativos a bajo acoplamiento Hund y alto acoplamiento Hund y en la figura 3.11 se encuentra la curvatura de Berry para los mismos valores de parámetros. Cuando la estructura magnética es rotada uniformemente un ángulo θ alrededor de un vector perpendicular al plano de la red la estructura de bandas se modifica. La conductividad de Hall para un nivel de Fermi dentro de un gap de bandas da un salto como función de θ , variando de -1 a 1 , similar al comportamiento mencionado en [62]. Cada banda mantiene su caracter topológico no trivial para cualquier valor de θ así que mantenemos la estructura mostrada en la figura 3.8 con quiralidad positiva.

Hasta ahora hemos visto que la presencia del acoplamiento espín-órbita da lugar a bandas no triviales para ciertos valores de amplitudes de Hopping. Analizamos entonces como consecuencia de estos resultados la conductividad de Hall. La misma está dada por

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi h} \int_{B.Z.} \sum_n f(E_n(\mathbf{k})) \Omega^n(\mathbf{k}) d^2k \quad (3.55)$$

donde $f(E_n(\mathbf{k}))$ es la distribución de Fermi-Dirac y la suma es sobre todas las bandas. A baja temperatura aproximamos la distribución de Fermi como un salto y calculamos la conductividad de Hall como función del nivel de Fermi ϵ_f para distintos valores de J a $\lambda = -0,6$ fijo como se ve en la figura 3.10.

Podemos ver entonces que con el modelo planteado aquí se pueden obtener grandes contribuciones a la conductividad de Hall como consecuencia de la no trivialidad de la estructura de bandas. Es interesante notar que incluso en el límite de acoplamiento de Hund bajo la conductividad de Hall es grande. Más aún, la conductividad puede ser hasta el doble que la conductividad en el regimen de J alto como se ve en la figura 3.10. Una conductividad de Hall cuantizada se obtiene en los gaps indicando por franjas violetas en la figura 3.10,

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

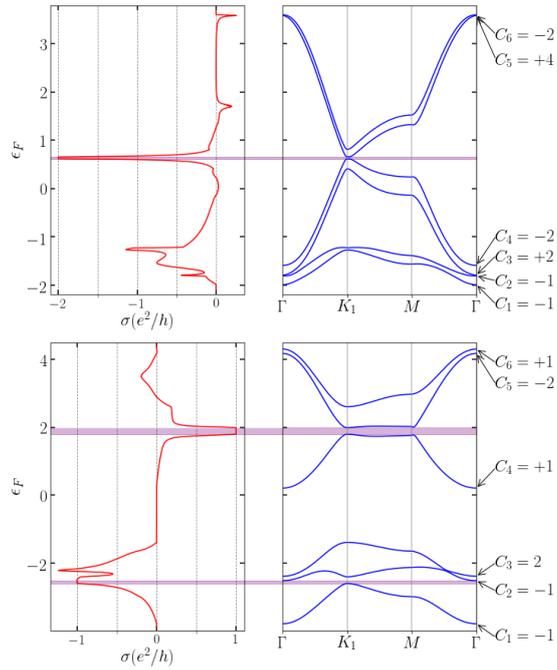


Figura 3.10.: En ambas figuras se muestra la estructura de bandas, conductividad de Hall, gaps y numeros de Chern. En la figura de la izquierda las magnitudes anteriores para $\lambda = -0,6$ y $J = 0,4$, mientras que la figura de la derecha muestra la estructura de bandas para el mismo valor de λ con $J = 8$. Cada banda de energía está etiquetada con su número de Chern.

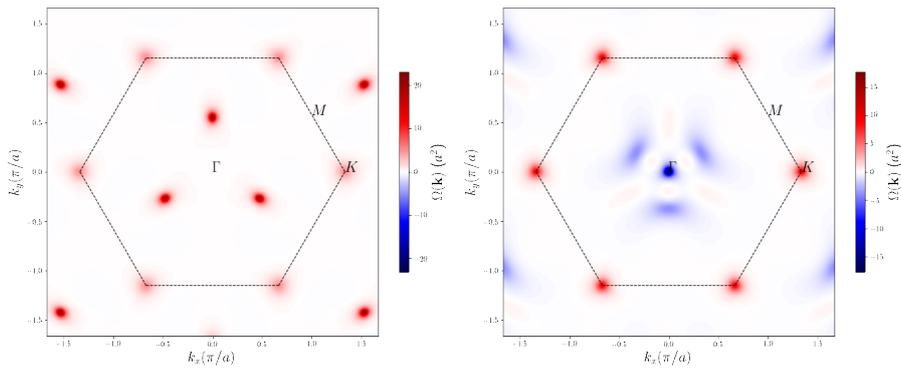


Figura 3.11.: En ambas figuras se muestra la curvatura de Berry para distintas bandas de energía.

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

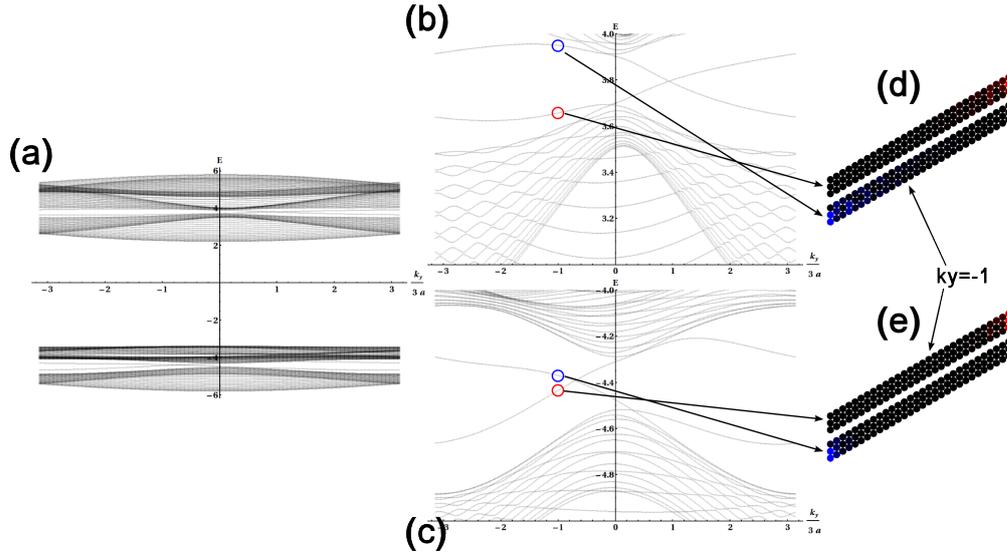


Figura 3.12.: (a) La estructura de bandas para una cinta de 30 sitios de largo. (b) Detalle de la estructura para $E \simeq 3,8$ (c) Detalle de la estructura de bandas para $E \simeq -4,4$. Los estados de borde para $k_y = -1$ en las bandas de mayor (d) y menor energía (e) están marcados. Con rojo (estados del borde derecho) y azul (estados del borde izquierdo) marcamos las amplitudes del cuadrado y la función de onda en el correspondiente sitio.

$\sigma_{xy} = Ce^2/h$ donde $C = \sum_n C_n$ y el índice n incluye a todas la bandas con energías por debajo del gap. Esta cuantización de la conductividad de Hall es una marca de la estructura topológica no trivial de las bandas electrónicas y sugiere la presencia de estados de borde robustos. La magnitud de los plateaus en la conductividad de Hall es proporcional al número de estados de borde quirales. Esperamos al menos uno y dos estados quirales de borde para los parámetros expuestos en la figura 3.10. Para mostrar esto, consideramos una cinta de 30 sitios de largo, a lo largo de la dirección $\hat{v} = \sqrt{3}2\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}$ e infinita en la dirección \hat{y} . La estructura de bandas para esta cinta se muestra en la figura 3.12. La estructura está formada por dos agrupamientos de bandas con un gran gap entre medio. Hay tres gaps mas pequeños y dentro de estos podemos encontrar los estados de borde que los atraviezan conectando los grupos de bandas.

Como para $\lambda > 0$ todos los números de Chern son nulos el valor absoluto de la conductividad de Hall es órdenes de magnitud menor que el obtenido para $\lambda < 0$ como se ve en la figura 3.13. Algo muy distinto sucede cuando apagamos el acoplamiento espín-órbita haciendo $\alpha = 0$. En este caso, ambos $C_n = 0 \forall n$ y $\sigma_{xy} = 0$, algo que evidencia el papel relevante del acoplamiento espín órbita tanto para la aparición de una estructura topológicamente no trivial como para la aparición de la conductividad de Hall no nula.

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

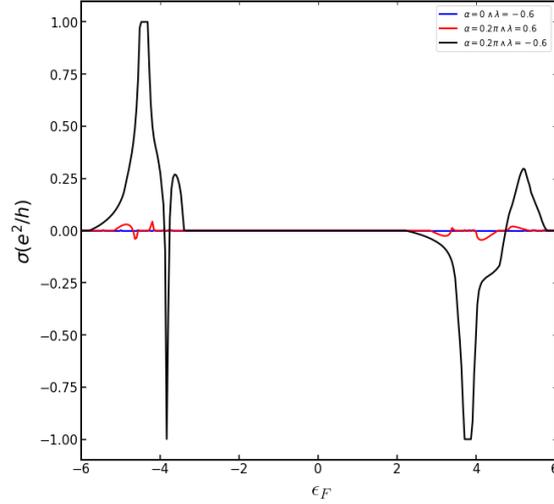


Figura 3.13.: Conductividad de Hall para tres configuraciones distintas de parámetros con acoplamiento de Hund fijo a $J = 8$. Cuando el acoplamiento espín-órbita es nulo, la conductividad de Hall es nula. Si aumentamos el acoplamiento espín-órbita la conductividad de Hall aumenta pero adquiere valores significativos solo para $\lambda \leq 0$, lo que corresponde a $t_2 \geq t_1$.

3.2.3. Posibles realizaciones

Además de los casos estudiados en las secciones anteriores hemos encontrado que incluso para $t_1 = t_2$ la conductividad de Hall posee un marcado plateau. Esto lleva la posibilidad de verificar la aparición del efecto Hall anómalo en un antiferromagneto triangular convencional, siempre y cuando la interacción espín-órbita pueda ser adecuadamente introducida en cada plaqueta triangular. Este efecto puede ser inducido por la adsorción de átomos de metales de transición en los sitios de red vacíos de una monocapa de metales de transición. En la referencia [69] este proceso lleva a la aparición de una interacción DM entre los momentos magnéticos que forman la red triangular. Así que esperamos que el acoplamiento espín-órbita considerado aquí pueda ser inducido a través de este mismo mecanismo. Este mismo mecanismo de adsorción puede ser aplicado a los casos más generales de $t_1 \neq t_2$. Esto fue considerado en [64] donde los autores mostraron que átomos de oro adsorbidos en una monocapa del compuesto Ca_2N lleva a una estructura de bandas como la de la red de Kagome, lo que requiere $|t_1| < |t_2|$.

La configuración magnética considerada aquí es característica de distintos antiferromagnetos frustrados. En particular, el modelo XY en una red triangular antiferromagnética posee este estado como estado fundamental. Sin embargo, en el Hamiltoniano de Heisenberg únicamente con interacciones de intercambio simétricas, hay muchos posibles estados en esta clase de configuraciones. Además de la degeneración dada por la simetría $SO(3)$ global, que corresponde a diferentes orientaciones de la configuración magnética planar, hay un grado de libertad extra dado por la quiralidad que distingue a las configuraciones en dos clases de equivalencia como lo mostrado en la figura 3.8. Una quiralidad en particular puede ser

3. Interacción antisimétrica en sistemas magnéticos

seleccionada por las interacciones del tipo DM. Este tipo de procesos puede suceder, por ejemplo, en el antiferromagneto triangular $\text{Ba}_3\text{NbFe}_3\text{Si}_2\text{O}_{14}$ [70]. En resumen, los diferentes ingredientes clave del modelo considerado se encuentran en distintos materiales electrónicos y magnéticos. Unir todos estos ingredientes en un único material puede ser difícil. Pero sin embargo, como hemos mencionado antes, la estructura de bandas emergente de la red CT es muy similar a la de red de Kagomé, esto nos provee un escenario alternativo en el que estos distintos ingredientes puedan realizar de manera efectiva la red CT aquí considerada [64].

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

Dada la introducción a distintos aspectos de las redes hiperbólicas en el capítulo 2 nos enfocaremos en la definición de modelos de sistemas magnéticos sobre espacios con curvatura negativa y cómo esta curvatura afecta a las propiedades del sistema. En una primera sección abordaremos un modelo de Ising antiferromagnético en redes triangulares hiperbólicas, y en una segunda sección, analizaremos un modelo fractones en el plano hiperbólico.

Si bien modelos de Ising ferromagnéticos en redes hiperbólicas han sido ampliamente estudiados en las últimas décadas [71, 72, 73, 74], estos estudios se restringieron, con pocas excepciones, a redes hiperbólicas con condiciones de contorno libres. Como se dijo en el capítulo 2, al considerar efectos de tamaño finito en sistemas sobre redes hiperbólicas la cantidad de sitios en el borde aumenta extensivamente. Para poder estudiar de manera más directa las propiedades del bulk y poder comparar con su análogo Euclídeo, adoptaremos condiciones de contorno periódicas. Hasta donde sabemos, el modelo de Ising antiferromagnético en este tipo de redes aún no ha sido estudiado.

Para afrontar el problema del aumento extensivo de los sitios de borde tomaremos dos enfoques. En primer lugar escoger las condiciones de contorno periódicas adecuadas para una red hiperbólica, lo que es una tarea no trivial. Para ser concretos y como existen infinitas redes hiperbólicas posibles nos centraremos en el estudio del modelo de Ising antiferromagnético en la red $\{3, 7\}$ con condiciones de contorno periódicas. En segundo lugar analizaremos las propiedades del borde, para esto miraremos el modelo de fractones en una segunda sección, nos centraremos en la red $\{5, 4\}$ con algunas menciones a redes $\{p, 4\}$.

4.1. Modelo de Ising antiferromagnético

Nos interesará en primer lugar estudiar los efectos que tienen definir sistemas en planos con curvatura negativa sobre la frustración geométrica. En el caso del espacio Euclídeo el ejemplo más claro de frustración geométrica es el modelo de Ising antiferromagnético en una red triangular, red $\{3, 6\}$, este modelo se caracteriza por tener un estado fundamental con degeneración extensiva, lo que se refleja en una entropía de temperatura $T = 0$ no nula. Es por esto que elegiremos el menor valor de q compatible con una teselación del plano hiperbólico hecha con triángulos, esto es, elegiremos estudiar el modelo de Ising antiferromagnético en la red $\{3, 7\}$. Esta elección tiene otra ventaja, recientemente ha sido posible realizar experimentalmente teselaciones de este tipo en circuitos eléctricos [21] y en circuitos de QED [75], lo que facilitaría una posible realización experimental.

Definimos el modelo de Ising antiferromagnético a partir del Hamiltoniano

$$H = J \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (4.1)$$

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

con $J > 0$, la suma sobre primeros vecinos y h un campo magnético transversal externo. Estudiaremos un escaleo de tamaño finito con condiciones de contorno periódicas adecuadas.

Siguiendo lo expuesto en el capítulo 2, debemos definir la celda de Bravais adecuada, encontrar su grupo Γ de traslaciones y subgrupos normales adecuados. La celda natural compuesta por 7 triángulos compartiendo un vértice no admite una identificación de lados de a pares y, por lo tanto, necesitamos tomar un polígono mayor en el plano hiperbólico que admita condiciones adecuadas. Como veremos en la siguiente sección, el polígono mínimo compatible es un polígono de 14 lados con 24 vértices de la red $\{3, 7\}$ en su interior. Para explorar el sistema con porciones mayores del plano hiperbólico utilizaremos el algoritmo de superceldas introducido en el capítulo 2.

4.1.1. Construcción de condiciones de contorno periódicas

Como se mencionó, trabajaremos con la red hiperbólica $\{3, 7\}$, según (2.31) su grupo espacial es

$$\Delta^+(2, 3, 7) = \langle x, y, z | xyz, x^2, y^7, z^3 \rangle \quad (4.2)$$

podemos encontrar sus subgrupos normales utilizando el lenguaje GAP, pero los primeros se encuentran tabulados en [40] de donde vemos que el grupo cociente con un subgrupo normal de menor índice es el dado por (2.39), que repetimos acá

$$\Delta^+/\Gamma = \langle x, y, z | x^2, y^3, xyz, z^{-3}xyz^{-3}, yxzyxzy^{-1}zy^{-1}z^{-1}xz \rangle, \quad (4.3)$$

con índice 168. Este índice nos está indicando el número de triángulos de Schwarz con una dada orientación en la celda unidad; como cada vértice de la teselación es compartido por $q = 7$ triángulos de Schwarz este subgrupo normal conforma una celda unidad con 24 vértices, lo que en el lenguaje de patrones desarrollado en el capítulo anterior nos permite obtener el número de triángulos en la celda unidad y, más aún, el genus de la superficie que se teselará con esta celda unidad. Obtenemos

$$pF = qV \rightarrow F = \frac{7}{3}24 = 56 \quad (4.4)$$

la característica de Euler de la teselación es, según (2.47)

$$\chi = 56 \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{7} \right) = -4 \quad (4.5)$$

lo que implica un genus $g = 3$. De modo que al imponer condiciones de contorno adecuadas sobre una celda unidad de 56 triángulos se obtiene una variedad compacta de genus $g = 3$. De manera equivalente, podemos decir que teselamos el plano hiperbólico con copias de esta celda unidad de 56 triángulos y 24 vértices mediante la sucesiva aplicación de elementos del subgrupo normal $\Gamma \triangleleft \Delta^+$, cuya presentación podemos obtener a partir de pensarlo como el núcleo del homomorfismo dado por (4.3), esto nos lleva al grupo de traslaciones

$$\Gamma_{\{3,7\}} = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 | \gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_6\gamma_5\gamma_1\gamma_4\gamma_3\gamma_5^{-1}\gamma_4^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_6^{-1}\gamma_1^{-1} \rangle. \quad (4.6)$$

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

Notemos que si bien es un espacio bidimensional el número de traslaciones no equivalentes es 6. Nos detenemos un momento a analizar la celda unidad obtenida para poder identificar la celda de Bravais correspondiente.

Tenemos ahora todos los ingredientes necesarios para poder construir condiciones de contorno periódicas. Lo haremos dando la matriz de adyacencia de la red bajo las PBC. Partamos de una única celda unidad, podemos construirla a partir de la sucesiva aplicación de elementos del grupo puntual (4.3) sobre el triángulo de Schwarz fundamental, esto nos da un etiquetado de cada vértice como se ve en la figura 4.1. Observemos que la celda unidad es un polígono regular de 14 lados, lo que nos está indicando que la celda de Bravais correspondiente a la red $\{3, 7\}$ es la red $\{14, 7\}$. Tenemos también con este etiquetado la lista de primeros vecinos de cada vértice, en el apéndice A tenemos en detalle la matriz de adyacencia para una celda unidad y cómo construimos los subgrupos en el lenguaje GAP. Separamos las conexiones de la matriz de adyacencia entre las que son sobre la misma celda unidad, sin atravesar un lado, y las que atraviesan un lado, ya que estas últimas dependerán de las condiciones de contorno.

Al trabajar en el lenguaje de superceldas, tenemos que cada supercelda está formada por un número N_c de celdas unidades. Las conexiones entre celdas unidades las podemos obtener a partir de la determinación de subgrupos normales del grupo de traslación Γ . Como vimos en el capítulo anterior buscaremos subgrupos $\Gamma_{PBC} \triangleleft \Gamma$ que a su vez cumplan $\Gamma_{PBC} \triangleleft \Delta^+$, lo que nos permite hacer un correcto escaleo con el tamaño.

La lista de subgrupos normales que forman un escaleo con tamaño finito y la descripción en detalle de cómo fueron encontrados se deja para el apéndice A. Para esta sección, nos es suficiente con mencionar que encontramos una secuencia de subgrupos normales $\Delta^+ = \Gamma^0 \triangleleft \Gamma^1 \triangleleft \dots \triangleleft \Gamma^4$. Cada Γ^n se corresponde con una red con un número de sitios $N_s = 8^{n-1}24$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

4.1.2. Estado fundamental

Antes de comenzar a estudiar el sistema con simulaciones de Monte Carlo estudiaremos los posibles estados fundamentales de forma analítica. La red está formada por espines de Ising que interactúan antiferromagnéticamente unibacos en los vértices de cada triángulo, por lo que la frustración geométrica es evidente y tiene el mismo origen que en el plano Euclídeo. Al tener polígonos con un número impar de lados, es imposible satisfacer todos los enlaces en simultáneo, la configuración de menor energía corresponde a 2 enlaces satisfechos y 1 insatisfecho por triángulo, como vemos en la figura 4.1. Si F es el número de triángulos, dadas las condiciones de contorno periódicas tenemos que cada lado es compartido con otro triángulo, por lo que la energía total del sistema en el estado fundamental será

$$E_{gs} = -F/2 \quad (4.7)$$

si tomamos la energía por espín tenemos que dividir por V , pero por estar tomando patrones sobre superficies tenemos que $V = \frac{3}{7}F$, por lo que la energía por sitio en el estado fundamental es

$$e_{gs} = -\frac{7}{6}. \quad (4.8)$$

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

Notemos que este mismo análisis es válido para cualquier teselación hecha por polígonos regulares de p lados, con p impar, y número de coordinación q , en ese caso la energía por espín del estado fundamental será

$$e_{\text{gs}}^{\{p,q\}} = -\frac{q}{2p}. \quad (4.9)$$

Notemos que p necesariamente tiene que ser impar ya que si es par no hay frustración geométrica. Es decir podemos alternar en cada polígono fundamental espines con orientación opuestas y satisfacer el mínimo de energía en cada enlace, llevando a un estado fundamental sin una degeneración extensiva.

4.1.3. Simulaciones de Monte Carlo

Estudiamos ahora el sistema a través de simulaciones de Monte Carlo con las condiciones de contorno periódicas desarrolladas anteriormente. Debido a la degeneración extensiva del estado fundamental realizamos las simulaciones de Monte Carlo con el método de parallel tempering para poder explorar el máximo posible del espacio de fases. Estudiaremos el modelo a campo externo h/J nulo. En este caso estudiamos el calor específico como función de la temperatura observando la presencia de un pico cercano a $k_B T/J = 1$, como se ve en la figura 4.2, sin embargo este pico no crece con el número de sitios, lo cual nos señala que no está ocurriendo un cambio de fase en el sistema. Este tipo de picos en el calor específico ocurren también en el modelo de Ising antiferromagnético en la red triangular en espacio Euclídeo y son típicos de sistemas tipo hielos de espín, nos están indicando que comienza a satisfacerse la condición de dos espines en la misma dirección y uno en la dirección contraria para cada triángulo. Por debajo de la temperatura del pico del calor específico nos encontramos en la variedad del estado fundamental.

Otra cantidad a estudiar sin campo magnético externo es la entropía como función de la temperatura. A altas temperaturas esperamos que cada configuración de espines sea igual de probable y que, por lo tanto, la entropía por espín sea $\ln(2)$. Como vimos en la sección anterior, el estado fundamental tiene una degeneración extensiva, lo que se traduce en una entropía a temperatura cero no nula. Podemos calcular esta entropía a partir de la integral del calor específico obtenido por simulaciones de Monte Carlo como

$$S(T) = S(T = \infty) - \int_T^\infty \frac{C_v(\tilde{T})}{\tilde{T}} d\tilde{T} \quad (4.10)$$

Obtenemos una entropía residual no nula para la red triangular $\{3, 7\}$, en particular para la red de mayor tamaño obtuvimos $S(T = 0)/N = 0,2261$. Podemos notar aquí diferencias con el caso antiferromagnético en la red triangular en el plano Euclideo. Para la red $\{3, 6\}$ la entropía de temperatura cero es $S = 0,32306$ [76], mayor a la que obtuvimos para la red $\{3, 7\}$. Esto puede deberse a que, al tener un número de coordinación más alto, el número de constraints sobre las configuraciones pertenecientes al estado fundamental es más alto, resultando en un menor número de configuraciones en el fundamental y por lo tanto una entropía menor.

Para mostrar la influencia de las condiciones de contorno periódicas en el problema realizamos el mismo tipo de simulaciones de Monte Carlo, para el sistema con condiciones de

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

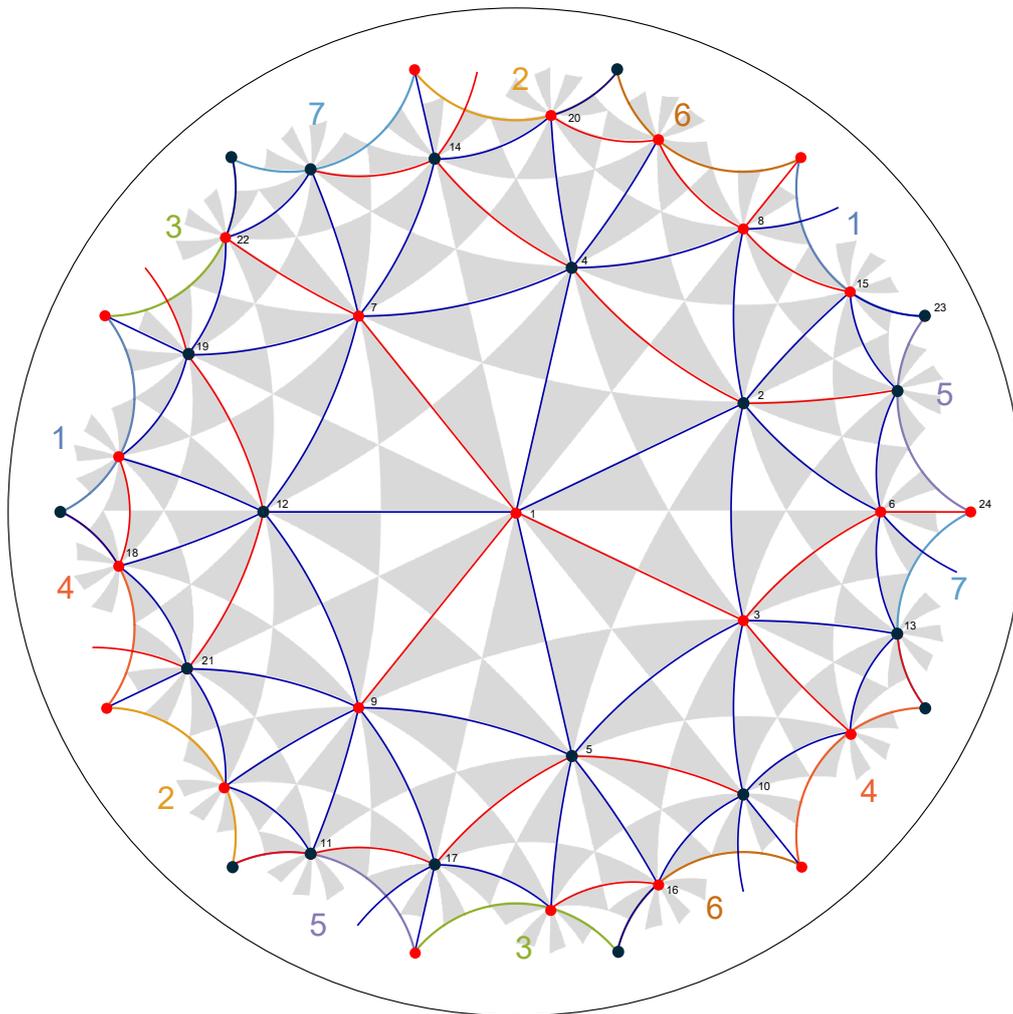


Figura 4.1.: Celda unidad de la teselación $\{3,7\}$ obtenida a partir del grupo de traslaciones dado por (4.6). La celda unidad es un polígono regular de 14. Dadas las condiciones de contorno periódicas cada lado se encuentra identificado con otro de acuerdo a las etiquetas y colores en la imagen. La celda unidad está conformada por 24 vértices dados por los vértices de triángulos de Schwarz que se encuentran marcados en gris y blanco. En el modelo de Ising antiferromagnético estudiado se coloca un espín de Ising en cada vértice, en rojo y azul se encuentran marcadas las orientaciones de los espines para un estado fundamental obtenido a través de simulaciones de Monte Carlo. Están a su vez marcados con rojo los enlaces de primeros vecinos insatisfechos y en azul los satisfechos.

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

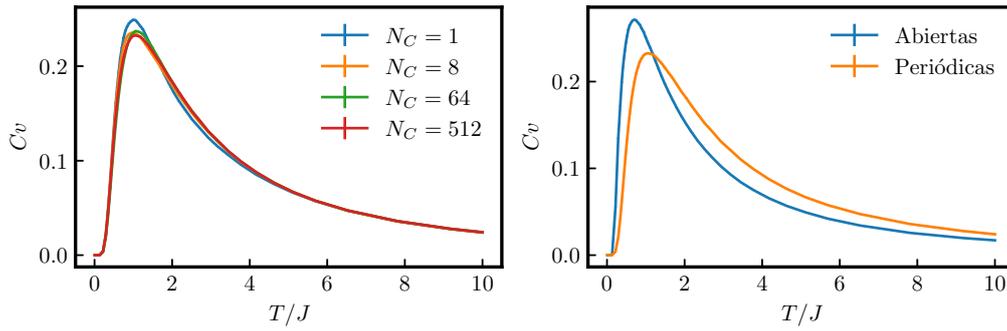


Figura 4.2.: Calor específico para el modelo de Ising antiferromagnético en la red $\{3,7\}$. En la figura de la izquierda para distintos tamaños de red y con condiciones de contorno periódicas. En la figura de la derecha la comparación entre las condiciones de contorno periódicas y abiertas, la forma del calor específico es similar para ambos casos, teniendo un pico que no escala con el tamaño del sistema.

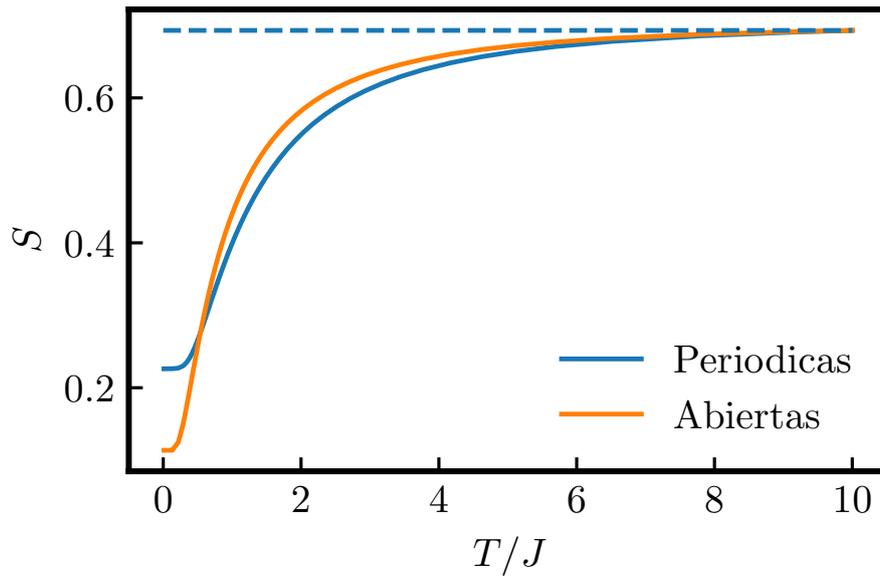


Figura 4.3.: Entropía como función de la temperatura para la red $\{3,7\}$ con condiciones abiertas y periódicas en las redes más grandes utilizadas, $N_s = 12288$ para las condiciones y periódicas y $N_s = 960$ para las abiertas. En ambos casos observamos una entropía por espín no nula para la temperatura cero, $s(T = 0) \simeq 0,2261$ para las condiciones periódicas y $s(T = 0) = 0,1136$ para las condiciones abiertas. La línea punteada es la entropía de temperatura infinita.

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

contorno abiertas. Realizamos las simulaciones para sistemas de tamaños $N_s = 48, 363, 960$ siendo N_s el número de vértices en la red. La comparación del calor específico entre las condiciones de contorno abiertas y las condiciones de contorno periódicas para el tamaño de sistema mayor se encuentran en la figura 4.2 y la comparación de las entropías en la figura 4.3. Se observan cambios considerables entre la forma del calor específico y de la entropía, destacando que la entropía de temperatura cero es mucho menor para el caso de condiciones de contorno abiertas.

4.1.4. Aproximación de campo medio

Para estudiar de manera analítica las propiedades del modelo de Ising antiferromagnético en este tipo de redes utilizamos un acercamiento ya propuesto para el modelo de Ising antiferromagnético en la red triangular en el plano Euclídeo. Es importante destacar la importancia de las condiciones de contorno periódicas en este contexto. Si tomamos condiciones de contorno abiertas la proporción entre sitios de borde y sitios bulk tiende a una constante, muy distinto a lo sucedido en el plano Euclídeo. En el caso de la red $\{3, 7\}$ podemos calcular esta constante y es $N_{\partial} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Como los sitios de borde no poseen número de coordinación 7 el número de coordinación medio en la red de tamaño infinito con condiciones abiertas es $\langle z \rangle = 7 - \sqrt{5} \simeq 4,764$. El método de campo medio que utilizaremos depende principalmente del número de coordinación en la red, por lo que esperamos que los resultados difieran significativamente entre utilizar condiciones abiertas y condiciones periódicas.

Es interesante que se puede estudiar sin mayor problema el número de coordinación medio y proporción de sitios de borde sobre total de sitios como función de q para una teselación triangular hiperbólica con condiciones de contorno abiertas. Lo haremos siguiendo un desarrollo similar al utilizado en [77] para estudiar la carga central de una CFT en el plano hiperbólico. Los detalles de estos cálculos se dejan para el apéndice A. Pero se obtiene

$$N_{\partial}(l, q) = (3(q-4) \quad 3) \begin{pmatrix} q-5 & 1 \\ q-6 & 1 \end{pmatrix}^{l-1} \quad (4.11)$$

$$N_T(l, q) = 3 + \sum_{\tilde{l}=1}^l N_{\partial}(\tilde{l}, q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Siendo $N_T(l)$ y $N_{\partial}(l)$ la cantidad de sitios totales y de borde respectivamente. Obtenemos también la proporción de sitios de borde respecto al total y el número de coordinación medio

$$n_{\partial}(l, q) = N_{\partial}(l, q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / N_T(l, q) = \frac{1}{2} \left(6 - q + \sqrt{(q-6)(q-2)} \right) \quad (4.13)$$

$$\langle z \rangle (l, q) = \left[q \left(N_T(l, q) - N_{\partial}(l, q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + N_{\partial}(l, q) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] / N_T(l, q) = q + n_{\partial}(l, q) \begin{pmatrix} 3 - q \\ 4 - q \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Resulta paradójico pero es interesante notar que el número de coordinación medio disminuye con q , teniendo como límite $\langle z \rangle (N \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty) = 4$. Esto se debe a que en el límite de $q \rightarrow \infty$ la proporción de sitios de borde con número de coordinación 4 tiende a 1.

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

Continuando con la prescripción de campo medio que utilizaremos en esta sección, vamos a utilizar la llamada Hard Spin Mean Field [78], que ha demostrado tener éxito en el estudio del modelo de Ising antiferromagnético en el plano Euclídeo, capturando de manera correcta la ausencia de una transición de fase a campo nulo y demostrando ser una buena herramienta para calcular la entropía del estado fundamental de manera aproximada. La aproximación se basa en la siguiente relación exacta para una red con número de coordinación q

$$\langle \sigma_0 \rangle = \left\langle \tanh \left(\frac{h - \sum_{r=1}^q \sigma_r}{T} \right) \right\rangle \quad (4.15)$$

siendo σ_0 un spin central y σ_r cualquiera de sus q vecinos. La aproximación de campo medio sigue de (4.15) reemplazando $\langle \tanh(\cdot) \rangle$ por $\tanh \langle \cdot \rangle$. Lo que haremos nosotros es evaluar el lado derecho de (4.15) suponiendo que las distribuciones de probabilidad de los espines a primeros vecinos son independientes. Suponiendo una magnetización homogénea m tenemos

$$m = \langle \sigma_r \rangle = P(\sigma_r = 1)P(\sigma_r = -1) \quad (4.16)$$

y por ende

$$P(\sigma_r = \pm 1) = \frac{1 \pm m}{2}. \quad (4.17)$$

Llamemos ahora ν^+ el número de primeros vecinos con espín positivo y ν^- el número de vecinos de σ_0 con espín negativo. Podemos escribir de manera inmediata la distribución de probabilidad de ν^+ como

$$P(\nu^+ = n) = P(\nu^- = q - n) = p_n^{(q)} \left(\frac{1 + m}{2} \right) \quad (4.18)$$

donde p_n es la distribución binomial

$$p_n^N(x) = \binom{N}{n} x^n (1 - x)^{N-n}. \quad (4.19)$$

Si la cantidad de espines vecinos a σ_0 que toman valor positivo es n entonces la suma de los espines vecinos será

$$\sum_{r=1}^q \sigma_r = \nu^+ - \nu^- = n - (q - n) = 2n - q. \quad (4.20)$$

Con esta información podemos reescribir (4.15) como

$$m = \sum_{n=0}^q \tanh \left(\frac{h - 2n + q}{T} \right) p_n^{(q)} \left(\frac{1 + m}{2} \right) \quad (4.21)$$

lo que nos deja una ecuación trascendental para la magnetización que podemos resolver numericamente para distintos valores de T y h . Evidentemente el sistema es invariante frente al cambio $m \rightarrow -m$ y $h \rightarrow -h$ por lo que resolvemos únicamente para $h \geq 0$ y

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

a distintas temperaturas. Destacamos el resultado para $T = 0$ donde podemos resolver de manera analítica (4.21). Tomando el límite $T \rightarrow 0$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tanh \left(\frac{h - 2n + q}{T} \right) = \text{sgn} (h - 2n + q). \quad (4.22)$$

Notemos que a q y h fijos el cambio en signo de la expresión anterior se da para $n = \frac{h-q}{2}$. Si $n < \frac{h-q}{2}$ tomará signo positivo, mientras que si $n > \frac{h-q}{2}$ será negativo. Notemos que, dado q par, para todo campo $2(k-1) < h_k < 2k$ con $k = 1, 2, \dots, q/2$ tendremos la misma magnetización; mientras que si q es impar tendremos una magnetización para $h_k < 1$ y otras para $2k-1 < h_k < 2k+1$ con $k = 1, 2, \dots, (q-1)/2$. Los valores particulares de la magnetización para cada q los obtenemos de resolver numericamente la expresión

$$m_k = \sum_{n=0}^{k+2} p_n^{(q)} \left(\frac{1+m_k}{2} \right) - \sum_{n=k+3}^q p_n^{(q)} \left(\frac{1+m_k}{2} \right). \quad (4.23)$$

En la figura 4.4 se ven las curvas de magnetización como función del campo externo a distintas temperaturas para $q = 7$ que es nuestro principal caso de interés. Vemos que el comportamiento límite de la magnetización para $T \rightarrow 0$ es el de una función escalón como dijimos antes con los siguientes valores de magnetización

$$m \simeq \begin{cases} m_0 = 0 & \text{si } h < 1 \\ m_1 = 0,1874 & \text{si } 1 \leq h < 3 \\ m_2 = 0,3809 & \text{si } 3 \leq h < 5 \\ m_3 = 0,5931 & \text{si } 5 \leq h < 7 \\ m_4 = 1 & \text{si } 7 \leq h \end{cases} \quad (4.24)$$

En la figura 4.4 vemos una comparación de los resultados de campo medio con resultados analíticos para una red con una única celda unidad, es decir una red con 24 sitios. Si bien esta red está lejos del límite termodinámico podemos observar diferencias respecto al resultado de campo medio. Una de las aproximaciones tomadas para el análisis por campo medio es tomar una magnetización uniforme, es decir, $\langle \sigma_{\mathbf{r}} \rangle = m \forall \mathbf{r}$. Por los resultados conocidos para la red triangular en el plano Euclídeo esperamos que esta aproximación no sea precisa y que sea necesario considerar una magnetización no homogénea y dividir la red total en subredes. Sin embargo, esta consideración no es simple de realizar ya que cada celda unidad contiene 24 sitios, por lo que la división en subredes debería considerar 24 sitios no equivalentes, lo que hace esta mejora a la aproximación poco factible. Por esta razón seguiremos con el análisis de magnetización uniforme.

Esto nos permite comparar la energía del estado fundamental bajo esta aproximación y compararla con la energía que ya hemos calculado previamente de manera analítica. Partimos de

$$\begin{aligned} e(T=0, m=0) &= e(T=0, m=1) - \int_0^1 h(T=0, m) dm \\ e(T=0, m=0) &= 7/2 + 2(m_1 + m_2 + m_3) - 7 \simeq -1,1772 \end{aligned} \quad (4.25)$$

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

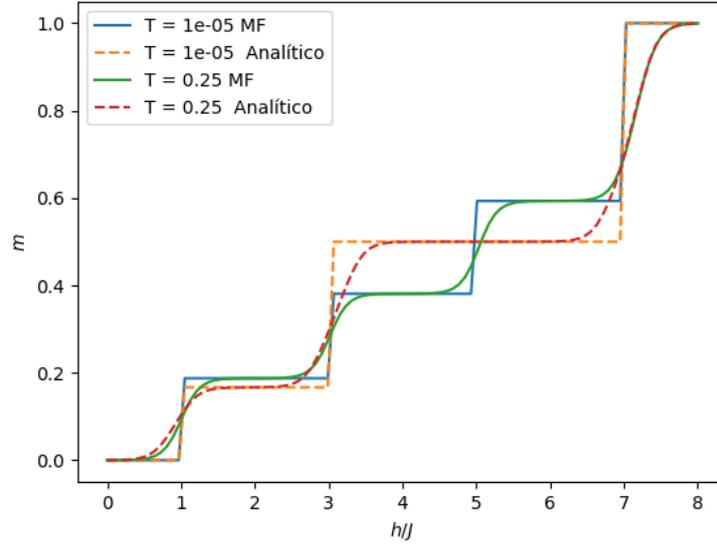


Figura 4.4.: En línea sólida las curvas de magnetización como función del campo externo h para el modelo de Ising antiferromagnético en una red hiperbólica $\{3, 7\}$ obtenidas como la solución de la ecuación trascendental (4.21). Vemos distintos plateaus de magnetización que se suavizan a medida que aumentamos la temperatura. En línea punteada las curvas de magnetización obtenidas calculando de forma analítica la función de partición para un sistema con una única celda unidad de 24 espines. Vemos que los resultados difieren respecto a los obtenidos por campo medio, posiblemente indicando una magnetización no-homogénea y la necesidad de dividir el sistema en subredes.

en unidades de J . Recordemos, el valor exacto es $-1,1666J$ por lo que la aproximación de campo medio no se encuentra muy alejada.

Para evaluar la entropía a campo nulo y temperatura nula necesitamos partir de la siguiente identidad de la termodinámica

$$s(T = 0, m = 0) = s(T = 0, m = 1) + \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial T}(T = 0, m) dm. \quad (4.26)$$

donde la entropía del sistema con magnetización 1 se anula. Necesitamos entonces calcular la derivada del campo respecto a la temperatura a temperatura nula, notemos lo siguiente. Si la magnetización se encuentra entre los valores $m_k < m < m_{k+1}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, de (4.24) entonces el campo toma el valor $h_k = 2(k + 1) - 1$. A su vez, si miramos la expresión que se encuentra dentro de la tangente hiperbólica en (4.21) obtenemos el valor

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

correspondiente a la magnetización h_k si tomamos $n = k + 4$. Por lo tanto, podemos escribir

$$m = \tanh \left[\frac{h_k(T, m) - h_k(0, m)}{T} \right] p_{k+4}^{(7)} \left(\frac{1+m}{2} \right) + \sum_{n \neq k+4}^7 \tanh \left[\frac{h_k(T, m) - 2n + 7}{T} \right] p_n^{(7)} \left(\frac{1+m}{2} \right) \quad (4.27)$$

De donde obtenemos la derivada a temperatura nula por definición

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{h_k(T, m) - h_k(0, m)}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} \operatorname{atanh} \frac{m - \sum_{n \neq k+4}^7 \tanh \left[\frac{h_k(T, m) - 2n + 7}{T} \right] p_n^{(7)} \left(\frac{1+m}{2} \right)}{p_{k+4}^{(7)} \left(\frac{1+m}{2} \right)} \quad (4.28)$$

El límite del lado derecho ya lo conocemos, tendremos una función signo para la tangente hiperbólica y obtenemos

$$\left. \frac{\partial h(T, m)}{\partial T} \right|_{T=0} = \operatorname{atanh} \left(\frac{m - P_{(0)}^{(k+3)}((1+m)/2) + P_{(k+5)}^{(7)}((1+m)/2)}{p_{k+4}^{(7)} \left(\frac{1+m}{2} \right)} \right) \quad (4.29)$$

para todo $m \in [m_k, m_k + 1]$ y donde hemos definido

$$P_{(n_1)}^{(n_2)}((1+m)/2) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} p_n^{(7)} \left(\frac{1+m}{2} \right) \quad (4.30)$$

si $n_1 < n_2$ y $P_{(n_1)}^{(n_2)} = 0$ si $n_1 > n_2$. Con un poco de álgebra podemos reescribir esta expresión para la derivada como

$$\left. \frac{\partial h(T, m)}{\partial T} \right|_{T=0} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\frac{1+m}{2} - P_0^{k+3} \left(\frac{1+m}{2} \right)}{-\frac{1+m}{2} + P_0^{k+4} \left(\frac{1+m}{2} \right)} \right]. \quad (4.31)$$

Podemos reemplazar esto en la expresión para la entropía obteniendo

$$s(T=0, m=0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \int_{m_k}^{m_{k+1}} \left(\ln \left| \frac{1+m}{2} - P_0^{k+3} \left(\frac{1+m}{2} \right) \right| - \ln \left| \frac{1+m}{2} - P_0^{k+4} \left(\frac{1+m}{2} \right) \right| \right) dm \quad (4.32)$$

y por último hacemos un cambio de variable a $x = \frac{1+m}{2}$ obteniendo

$$s(T=0, m=0) = \sum_{k=0}^3 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\ln |x - P_0^{k+3}(x)| - \ln |x - P_0^{k+4}(x)| \right) dx \quad (4.33)$$

Podemos calcular estas integrales de manera numérica utilizando el siguiente resultado

$$\int \ln(\rho(x)) dx = \operatorname{Re} \left[x \ln(a_g) + \sum_{i=1}^g (x - z_i) (\ln(x - z_i) - 1) \right] + cte \quad (4.34)$$

4. Modelo de Ising en el plano hiperbólico

donde $\rho(x)$ es un polinomio en x de grado g , z_i es la i -ésima raíz que en general es compleja y a_g es el coeficiente de la potencia más grande. Determinamos entonces la entropía a temperatura nula a partir de encontrar las raíces de una serie de polinomios encontrando

$$s(T = 0, m = 0) = 0,308582. \quad (4.35)$$

Este resultado se encuentra por encima del resultado numerico obtenido a través de simulaciones de Monte Carlo donde obtuvimos $s(T = 0, m = 0) \simeq 0,2314$ para el sistema de mayor tamaño, siendo igual una buena aproximación y, como esperábamos, es una mejor aproximación para el caso de condiciones de contorno periódicas que para las condiciones de contorno abiertas. Destacamos que se predice correctamente que la entropía del modelo de Ising antiferromagnético en la red $\{3, 7\}$ es menor a la de la red $\{3, 6\}$ en el plano Euclídeo.

4.2. Resultados y discusión

Hemos logrado determinar condiciones de contorno periódicas adecuadas para sistemas magnéticos definidos en el plano hiperbólico y hemos estudiado su influencia en un modelo de Ising antiferromagnético en la red $\{3, 7\}$, comparándolas con condiciones de contorno abiertas. La fenomenología que observamos mediante simulaciones de Monte Carlo es similar a la de la red $\{3, 6\}$ en el plano Euclídeo, mostrando una entropía residual no nula a bajas temperaturas y sin evidencia de una transición de fase. Observamos a su vez una marcada diferencia entre los resultados para las condiciones de contorno periódicas y para las condiciones de contorno abiertas, sugiriendo que la mayor influencia del espacio hiperbólico en estos sistemas magnéticos radica en la posibilidad de tener números de coordinación mayores que en las redes regulares en el plano Euclídeo. En el caso de las condiciones de contorno periódicas el número de coordinación es idéntico para cada sitio e igual q en una red $\{3, q\}$ como las estudiadas, mientras que para las condiciones periódicas tenemos sitios de borde con número de coordinación menor que representan una proporción macroscópica del sistema, haciendo que el número de coordinación promedio sea significativamente menor.

La obtención de resultados analíticos es compleja en este tipo de redes. En este trabajo utilizamos una aproximación de tipo campo medio, suponiendo una magnetización uniforme en la red, para obtener una aproximación a la entropía residual a temperatura nula. Se ha utilizado un acercamiento similar para trabajar con la red triangular en el plano Euclídeo [78], observándose que estos resultados pueden verse mejorados al aprovechar que la red se puede subdividir en tres subredes. Para el caso de la red hiperbólica $\{3, 7\}$ cada celda unidad contiene 24 sitios no equivalentes, por lo que, en principio, una división de la red total en subredes implicaría 24 subredes distintas, lo que hace este tipo de análisis poco factibles.

Otra posibilidad a futuro para un estudio analítico de estos sistemas consiste en estudiar sistemas duales. En [79] han estudiado la aplicación de la dualidad de Kramers-Wannier a sistemas hiperbólicos. En este caso, para estudiar los sistemas duales, es necesario definir modelos que tengan en cuenta los ciclos no contraíbles en la red, propios de la compactificación a variedades con una topología no trivial. Este tipo de estudios es prometedor para poder comprender la influencia de la curvatura de la red en las propiedades físicas del sistema y se deja para un trabajo a futuro.

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

La correspondencia AdS/CFT se destaca ofreciendo una relación profunda entre teorías de gravedad en el espacio-tiempo AdS y fenómenos críticos en teorías de campos conformes (CFT) en el borde [10, 80, 81]. Esta dualidad ha servido como herramienta para abordar preguntas de la física de altas energías, gravedad cuántica, termodinámica de agujeros negros y sistemas cuánticos fuertemente correlacionados, revolucionando la manera de entender conceptos fundamentales en la física de la materia condensada[82, 11].

En los últimos años han aparecido sistemas en donde la materia condensada y las teoría de gravedad se encuentran. Los fractones son cuasipartículas con movilidad intrínsecamente restringida [83, 84]. En su forma sin gap, las teorías de gauge en redes de fractones se desarrollaron para emular la gravedad linealizada [85, 86], mientras que los órdenes fractónicos con gap surgieron de la búsqueda de códigos de corrección de errores cuánticos.

En el caso de superficies con curvatura negativa, el modelo de fractones hiperbólico (HFM) une las teorías de materia fractónica y varios modelos de AdS/CFT, destacando redes de tensores holográficas[87] y modelos de bit-thread[88] entre otros.

En el trabajo realizado en esta tesis nuestra motivación es aprovechar esta conexión entre gravedad, holografía y sistemas fuertemente correlacionados. Analizaremos las propiedades físicas de los estados de borde del HFM y mostraremos, tanto numérica como analíticamente, que dichos estados de borde exhiben características propias de una CFT tanto en su entropía de entrelazamiento como en su correlación. Luego, y como resultado principal, introduciremos defectos en el bulk de la red hiperbólica. Estos defectos pueden ser interpretados como bordes abiertos para los fractones y actúan como análogos de agujeros negros en el espacio AdS. Verificaremos esta última afirmación mostrando que generan una temperatura emergente para los estados de borde de la CFT, directamente proporcional al perímetro del agujero negro y en acuerdo con los resultados para CFTs a temperatura finita obtenidos por Calabrese-Cardy[89]. El HFM nos provee entonces de un Hamiltoniano de bulk bien definido, donde la física de la materia fractónica emula cuantitativamente la física de agujeros negros en un espacio AdS.

5.1. Modelo de fractones en el plano Euclídeo

Queremos definir los modelos de fractones en el plano hiperbólico pero, para introducir el tema, comenzamos con una discusión del modelo de fractones en una red cuadrada en el plano Euclídeo. Consideremos una red cuadrada con un espín de Ising en el centro de cada cuadrado. Para los cuatro espines que se encuentran en los cuadrados que comparten un

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

vértice definimos un operador

$$\mathcal{O}_p = \prod_{i=1}^4 S_i, \quad (5.1)$$

donde $S_i = \pm 1$. El hamiltoniano del modelo de fractones clásicos está definido como la suma de dichos operadores sobre todos los vértices internos de la red

$$\mathcal{H} = - \sum_p \mathcal{O}_p \quad (5.2)$$

siendo p los vértices internos del sistema, es decir, los que no están en el borde. Si la red es de $L_x \times L_y$ sitios entonces habrá $(L_x - 1)(L_y - 1)$ vértices. Este modelo ha sido previamente estudiado en otros contextos, por ejemplo, como modelo dual [90] al modelo de ocho vértices [91] y también como modelo de ciertos sistemas en el contexto de vidrios de espín [92, 93]. El modelo de fractones tiene varias propiedades destacables referidas a sus estados fundamentales, su entropía de entrelazamiento y excitaciones presentes en el sistema que pasaremos a mencionar a continuación.

Notemos en primer lugar la degeneración subextensiva del estado fundamental. Los estados fundamentales del modelo de fractones son configuraciones de espines clásicos en donde todos los operadores \mathcal{O}_p toman el valor 1. Podemos generar todos los posibles estados fundamentales partiendo del estado fundamental trivial de todos los espines alineados en la misma dirección, digamos $S_i = 1 \forall i$. Notemos que si trazamos una línea recta en la dirección x o y que pase por los lados de los cuadrados de la red y damos vuelta todos los espines a un lado de la recta vamos a dar vuelta 0, 2 o 4 espines en cada operador, por lo que los valores de los \mathcal{O}_p se mantienen invariantes y mantenemos la misma energía, es decir, obtuvimos otro estado fundamental; podemos mirar con más detalle este procedimiento en la figura 5.1. Notemos que si la red está conformada por L_x rectas verticales y L_y rectas horizontales, el número de posibles estados fundamentales es

$$\Omega = 2^{L_x + L_y - 1}, \quad (5.3)$$

ya que para cada recta podemos elegir dar vuelta los espines a uno u otro lado. Esto nos deja una entropía para el estado fundamental dada por

$$S = \ln(\Omega) = 2(L_x + L_y - 1)\ln(2). \quad (5.4)$$

Notemos que la entropía escala con el tamaño del borde del sistema, es decir, es subextensiva.

Si miramos ahora las excitaciones sobre el estado fundamental la excitación mínima que podemos tener es invertir el signo de un único operador \mathcal{O}_p y manteniendo el signo de todos los demás. Podemos construir este tipo de excitaciones a partir de cualquier estado fundamental si tomamos dos líneas que se intersecan y dividen la red en 4 partes y luego damos vuelta los espines en un único cuadrante. Al realizar este procedimiento, solo afectamos al operador que se encuentra en la intersección de las dos rectas, al que le dimos vuelta un único espín por lo que cambiamos su signo. A las excitaciones de este tipo las llamamos *fractón*, notemos que están localizadas en la intersección de dos líneas y que, en el límite

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

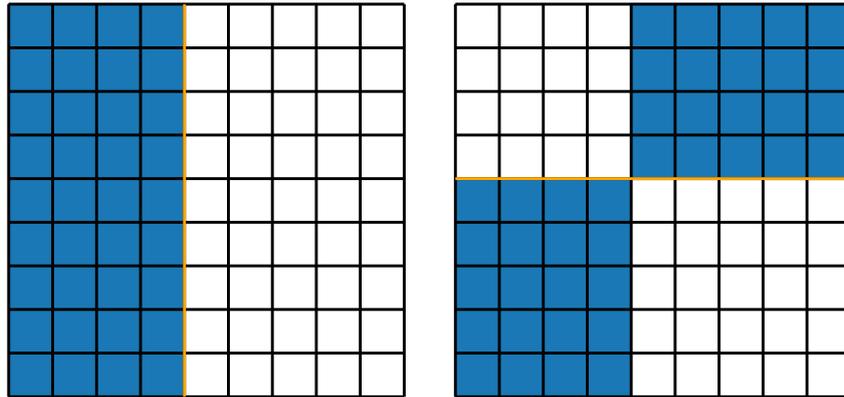


Figura 5.1.: Figuras de estados fundamentales del modelo de fractones en la red cuadrada. En el centro de cada cuadrado ubicamos un espín de Ising, asociamos cuadrados azules con espines $S_i = 1$ y blancos con espines $S_i = -1$. En la figura izquierda vemos un estado fundamental obtenido luego de trazar la recta marcada en naranja y dar vuelta los espines a su derecha, partiendo del estado $S_i = 1 \forall i$. Notemos que los operadores \mathcal{O}_p que se encuentran a la izquierda de la recta naranja no han cambiado porque no cambiaron ninguno de sus espines; los operadores que se encuentran sobre la recta no han cambiado porque se dieron vuelta dos espines, los dos a la derecha de la recta naranja; mientras que los operadores que se encuentran a la derecha de la recta naranja no han cambiado porque se dieron vuelta todos sus espines. En la figura derecha otro estado fundamental obtenido a partir del primero dando vuelta los espines que se encuentran arriba la de la recta horizontal naranja.

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

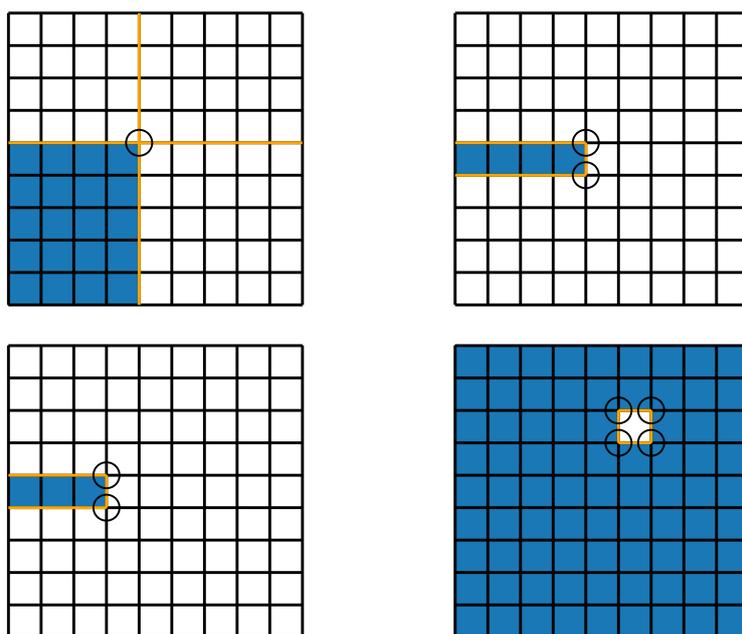


Figura 5.2.: Distintos tipos de fractones el modelo de fractones en la red cuadrada. *a)* Un fractón obtenido a partir de la intersección de dos rectas. *b)* Dos fractones ligados. *c)* Movilidad de los dos fractones ligados al dar vuelta un unico espín. *d)* Fractones con movilidad obtenidos de dar vuelta un unico espín en un fondo ferromagnetico.

de tamaño infinito, se obtienen a partir de operaciones que se vuelven *no-locales*, en el sentido que involucran infinitos espines. Cualquier operación local, es decir dar vuelta un número finito de espines en el sistema, creará más de un fractón. Más aún, los fractones son inmóviles en el sistema ya que no hay operaciones locales que lo muevan sin crear nuevos fractones y aumentar la energía. Para crear y para mover un fractón es necesario realizar operaciones no-locales. Este tipo de excitaciones dificulta el estudio de estos sistemas a través de simulaciones de Monte Carlo ya que, por lo menos, es necesario tomar tipos de actualizaciones de red en el algoritmo de Monte Carlo que involucren un número macroscópico de espines ya que los algoritmos llamados de *single-flip* generaran excitaciones de alta energía y llevarán a posibles problemas de ergodicidad.

Existen además estados ligados de fractones que tienen movilidad como vemos en la figura 5.2. Podemos crear estados ligados de fractones dando vuelta los espines en una franja. Este estado ligado puede moverse en un subsistema unidimensional dando vuelta un único espín.

Finalmente tenemos estados de 4 fractones ligados dando vuelta un único espín y es libre de moverse en cualquier dirección.

Más allá de los posibles tipos de excitación acá mencionados, es destacable que las operaciones de creación de un único fractón, si bien involucran un número macroscópico de espines, afectan un único operador \mathcal{O}_p , por lo tanto, podemos explorar toda el espacio de

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

fases mediante la sucesiva creación de fractones. Más aún, podemos pasar a una descripción del sistema en términos únicamente de las variables \mathcal{O}_p . Como los operadores están desacoplados podemos calcular de manera directa la densidad de fractones como función de la temperatura

$$\rho_f(\beta) = \frac{1}{e^{2\beta} + 1}. \quad (5.5)$$

Por las simetrías del sistema que mencionamos la mayoría de las funciones de correlación son nulas y no tenemos ruptura espontánea de simetría. Por ejemplo, la función de correlación de dos puntos

$$\langle \sigma_{i,j} \sigma_{i+x,j+y} \rangle = \delta_{x,0} \delta_{y,0}. \quad (5.6)$$

Es claro que debe ser nula si x o y son no-nulos ya que podemos dar vuelta la fila $i+x$ o la columna $j+y$ cambiando el signo de la función de correlación pero manteniendo la energía del sistema. Podemos definir de todos modos funciones de correlación que adquieren valores no nulos, serán las que respeten las simetrías del sistema, y definiremos unas similares para el sistema de fractones en el plano hiperbólico. Si definimos la función de correlación de 4 puntos dada por

$$C_4(x, y) = \langle \sigma_{i,j} \sigma_{i+x,j} \sigma_{i,j+y} \sigma_{i+x,j+y} \rangle, \quad (5.7)$$

vemos que es independiente de i, j en un sistema con invarianza traslacional que, como nuestras condiciones de contorno son abiertas, se traduce en puntos lo suficientemente lejanos al borde o sistemas lo suficientemente grandes. La simetrías del hamiltoniano implican que esta es la única función de correlación no-trivial y no-nula.

El valor del producto $\sigma_{i,j} \sigma_{i+x,j} \sigma_{i,j+y} \sigma_{i+x,j+y}$ está dado por la paridad del número plaquetas excitadas en la región rectangular que definen estos cuatro espines. Podemos tomar $x > 0$ e $y > 0$ y escribir

$$\sigma_{i,j} \sigma_{i+x,j} \sigma_{i,j+y} \sigma_{i+x,j+y} = \prod_{x'=0}^{x-1} \prod_{y'=0}^{y-1} p_{i+x',j+y'}. \quad (5.8)$$

Este producto es $+1$ si hay un número par de plaquetas excitadas y -1 si hay un número impar. Aquí vemos una señal de defectos topológicos, si hay una única excitación en la región rectangular definida por los cuatros espines, el valor de la correlación es -1 sin importar el tamaño y posición de la región, de manera similar a lo que sucedía con los vórtices en el modelo XY .

5.2. Modelo de fractones en la red hiperbólica $\{5, 4\}$

5.2.1. Simetrías del sistema

Pasamos en esta sección a describir el modelo de fractones en una red hiperbólica los resultados originales obtenidos. Muchas de las propiedades destacadas en la sección anterior se mantienen cuando pasamos a una red hiperbólica. Comenzaremos describiendo el sistema en la red $\{5, 4\}$ pero podremos extender el modelo de fractones para cualquier red hiperbólica $\{p, q\}$. Obtenemos el Hamiltoniano colocando un espín de ising en el centro de

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

cada pentágono de la red y definiendo el mismo operador en cada vértice que para el caso Euclídeo

$$\mathcal{O}_p = \prod_{i=1}^4 S_i, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{H} = - \sum_p \mathcal{O}_p. \quad (5.10)$$

Al analizar el sistema en el caso Euclídeo obtuvimos distintos estados fundamentales dividiendo el sistema mediante rectas perpendiculares. En el caso hiperbólico haremos lo analogo dividiendo al sistema con geodésicas que se intersecan.

Contrario a lo que hicimos en la sección anterior, en este caso nos interesará estudiar el borde del sistema por lo que consideraremos sistemas con condiciones de contorno abiertas y definiremos de manera univoca los poligonos del borde y los poligonos interiores. Los poligonos están formados por geodésicas y si tomamos N_g geodésicas tendremos $2N_g$ poligonos de borde.

De manera similar al caso Euclídeo, la degeneración del estado fundamental está dada por el número de geodésicas

$$\Omega = 2^{N_g+1} \quad (5.11)$$

$$S = \ln(\Omega) = (N_g + 1)\ln(2) \quad (5.12)$$

De igual manera que para el caso Euclídeo, la entropía de temperatura cero escala con el tamaño del borde del sistema, sin embargo, en este caso el borde del sistema aumenta de manera extensiva, por lo que la entropía del punto cero es no nula incluso en el límite termodinámico. Al igual que antes, partimos del estado fundamental trivial y podemos pobtener todos los otros estados fundamentales trazando geodésicas y dando vueltas los espines a un lado u otro de la geodésica, ver figura 5.3.

Excitaciones de un único fractón pueden ser creadas dando vuelta el signo de un único operador \mathcal{O}_p manteniendo el resto invariante. Logramos esto eligiendo dos geodésicas que se intersecan, dividiendo el sistema en 4 regiones y dando vuelta los espines en uno de estos cuadrantes. Al igual que antes, es topológica en el sentido que se requiere dar vuelta un número macroscópico de espines para crear estas excitaciones. Aplicando sucesivamente estas operaciones de creación de fractones podemos crear sistemas con más excitaciones, ver figura 5.4.

También es interesante ver una formulación equivalente de este modelo llamada modelo de vértices. Definimos flechas binarias, denotadas E_e , en los lados de la red como

$$E_e = S_{e,l}S_{e,r} \quad (5.13)$$

siendo $S_{e,l(r)}$ los espines en los pentágonos que comparten ese lado. Como el estado fundamental se obtiene cuando $\mathcal{O}_p = 1$ para todo operador \mathcal{O}_p , en términos de los E_e la condición es $E_1 = E_2$ y $E_3 = E_4$. En el lenguaje del modelo de vértices los estados fundamentales se obtienen cuando todas la flechas en una misma geodésica apuntan en la misma dirección, cada geodésica puede tomar una dirección independientemente de las otras.

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

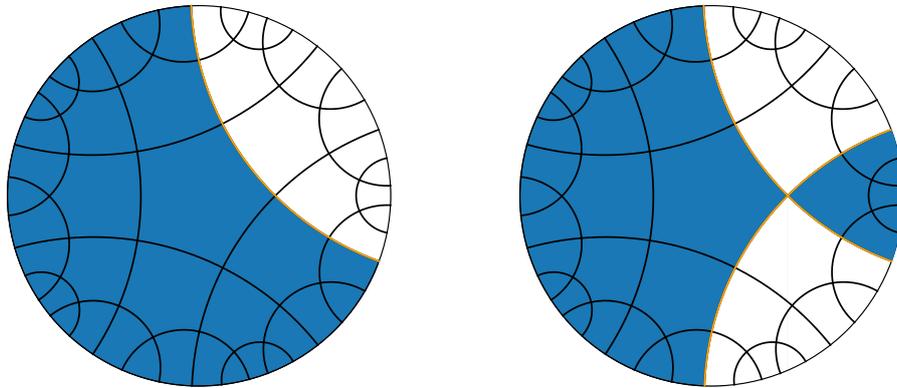


Figura 5.3.: Dos ejemplos de estados fundamentales en el modelo de fractones en la red hiperbólica $\{5, 4\}$. Ambos se obtienen luego de dar vuelta todos los espines a un lado de las geodésicas marcadas en naranja. A los polígonos del borde no se les denotan todos sus lados para identificarlos rápidamente.

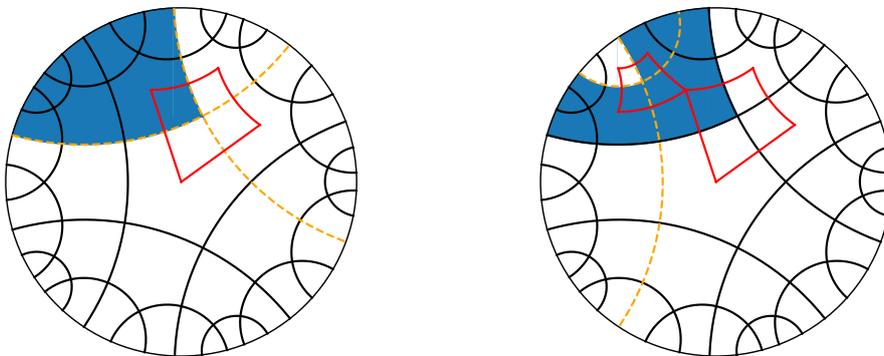


Figura 5.4.: En la figura de la izquierda una red hiperbólica $\{5, 4\}$ con un fractón marcado con un cuadrado hiperbólico rojo, obtenido de dar vuelta los espines en un cuadrante de los generados a partir de las geodésicas marcadas en naranja. En la figura de la derecha el mismo sistema con un fractón extra obtenido a partir de dar vuelta los espines en un cuadrante definido por las geodésicas marcadas en naranja. Notemos que agregar un nuevo fractón no afecta al fractón previo.

5.2.2. Correlaciones no-nulas

En el modelo de fractones en el plano Euclídeo pudimos definir una correlación de 4 puntos no-nula. Era la única correlación no trivial y no nula. En el caso hiperbólico, las funciones de correlación de dos puntos son nulas también pero podremos definirnos funciones de correlación de 4 puntos en el borde. Definimos

$$c(n, d) = \frac{1}{L} \langle \sigma_n \sigma_{n+1} \sigma_{n+d} \sigma_{n+d+1} \rangle = \langle E_n E_{n+d} \rangle \quad (5.14)$$

donde σ_n es el espín de Ising en el sitio n -ésimo del borde y medimos la distancia d entre espines como la cantidad de polígonos entre σ_n y σ_{n+d} a lo largo del borde del sistema, ver figura. Notemos que si E_n y E_{n+d} son los extremos de una misma geodésica entonces toman el mismo valor en el estado fundamental, por lo que podemos calcular esta correlación analíticamente y es proporcional al número de geodésicas de un dado ancho d .

Podemos obtener el número total de geodésicas as de un dado ancho d , los detalles para obtener esto se encuentran en el apéndice A. Obtuvimos una expresión matricial para el número de polígonos de borde, dividiéndolos en dos tipos

$$\begin{pmatrix} n_a(l) & n_b(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{l-2} \quad (5.15)$$

Donde l es el número de capas y comenzamos con $l = 2$. De manera similar obtuvimos la cantidad de geodésicas en la red a una dada cantidad de capas l , está dado por

$$\begin{pmatrix} n_\alpha(l) & n_\beta(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{l-2} \quad (5.16)$$

Ya que las geodésicas de tipo α encierran dos polígonos a y uno b , mientras que la β encierran 2 polígonos a y 2 polígonos b podemos determinar la distancia entre los extremos de una geodésica de tipo α o β en la capa l , dado que la geodésica comenzó en la capa m

$$d^\alpha(l, m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{l-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$d^\beta(l, m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{l-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Vemos entonces que la correlación estará formada por dos tipos de puntos, α y β que siguen expresiones distintas, dados por la cantidad de geodésicas de un tipo o de otro

$$\left(\frac{c^\alpha(N, m)}{L(N)} \quad \frac{c^\beta(N, m)}{L(N)} \right) = \frac{1}{n_a(l) + n_b(l)} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^m \quad (5.19)$$

con $2 < m < N$. Lo que haremos ahora es invertir la relación $d(m)$ para obtener $m(d)$ y luego reemplazarlo en $c(m)$ para obtener la correlación como función de la distancia, pero antes de hacerlo notemos que esperamos una relación $c \propto d^{-1}$, al menos para el límite de

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

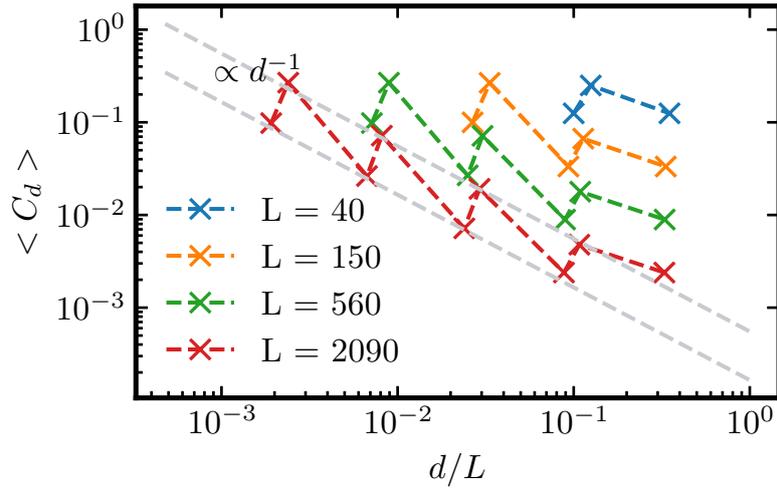


Figura 5.5.: Correlación como función de la distancia para distintos valores de polígonos de borde L , se encuentran graficados solo los valores no nulos de la correlación. En líneas gris y puntuadas los comportamientos asintóticos para l grande obtenidos en (5.21) para el tamaño más grande, proporcionales a d^{-1} como es esperable para una CFT.

tamaño infinito, debido a la dualidad AdS/CFT. En la figura 5.5 tenemos los resultados obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo para la correlación como función de la distancia a distintos tamaños de red donde podemos observar dos tipos de puntos, ambos con un decaimiento algebraico, como esperamos por el desarrollo anterior. Las expresiones para $c^{\alpha(\beta)}(d, l)/N_{\partial}(l)$ son muy complicadas, pero podemos tomar un desarrollo asintótico para $l \rightarrow \infty$ obteniendo para las geodésicas de tipo α y β

$$c^{\alpha}(l, d)/L \simeq \frac{(1 + 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{-l}}{10} \frac{1}{d} \quad (5.20)$$

$$c^{\beta}(l, d)/L \simeq \frac{2(2 + \sqrt{3})^{1-l}}{5} \frac{1}{d} \quad (5.21)$$

Que corresponde a un decaimiento algebraico como esperábamos.

5.2.3. Holografía y entropía de entrelazamiento

Nos interesa estudiar también la entropía de entrelazamiento del borde del sistema, siguiendo lo realizado en [94]. La correspondencia AdS/CFT es una dualidad entre una teoría gravitacional en un espacio AdS de $(d + 1)$ dimensiones con una teoría CFT en su borde.

La fórmula de Ryu-Takayanagi nos da una conexión entre la geometría del espacio AdS y el entrelazamiento de los estados de borde de una teoría CFT. Suponiendo que la CFT está definida en el borde de algún espacio AdS, dada una región A en el borde, la entropía de

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

entrelazamiento S_A queda determinada por la superficie mínima γ_A cuyos extremos coinciden con A

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N} \quad (5.22)$$

Como estamos trabajando con un modelo clásico y no cuántico tenemos que definir un análogo a la entropía de entrelazamiento, este será la información mutua; de igual manera, la superficie mínima será reformulada a una cadena mínima en la red hiperbólica.

La información mutua mide cuanta información es compartida entre dos subsistemas y está definida como

$$I(A, B) = S(A) + S(B) - S(A \cup B), \quad (5.23)$$

donde A y B son dos subsistemas y S es la entropía de Shannon. $S(A \cup B)$ es la entropía de la unión de los dos subsistemas.

Describimos ahora como calcular la información mutua, al menos en el estado fundamental. Para una bipartición del borde en regiones conectadas la información mutua obedece la fórmula de Ryu-Takayanagi

$$I(A; A^c) = \ln(2) |\gamma_A| \quad (5.24)$$

siendo $|\gamma_A| = \text{Area}(\gamma_A)$. Para calcular la información mutua necesitamos calcular la entropía de cada subsistema y la del borde completo.

Notemos que podemos aproximar la longitud de γ_A , medida en unidades del lado de cada pentágono, como la cantidad de geodésicas que parten de una porción del borde del sistema y terminan en la otra porción, ver figura 5.6, obteniendo la figura 5.7 para la entropía de entrelazamiento. Esperamos además que esta entropía de entrelazamiento coincida con lo obtenido por Calabrese-Cardy en [89], para una CFT a temperatura nula y de tamaño finito, esto es, que cumpla

$$S_0(l) = \frac{c}{3} \ln \left(\frac{1}{\pi \tilde{a}} \sin(l\pi) \right) \quad (5.25)$$

siendo $l = d/L$. Realizamos un ajuste de las curvas de entropía de entrelazamiento obtenidas en la figura 5.7 a la ecuación (5.25). A partir del ajuste obtuvimos el valor de c , que es llamado carga central en el lenguaje de una CFT, como función del tamaño, tendiendo a un valor límite, este valor límite se encuentra en acuerdo con lo calculado en [77], en donde se utiliza un acercamiento similar al utilizado en esta tesis para el calculo de la correlación del borde. En la figura 5.8 vemos un gráfico de la carga central y el parámetro \tilde{a} de (5.25) como función del tamaño del sistema. La carga central toma un valor límite de $c \simeq 4,74$, coincidiendo con lo obtenido analíticamente en [77].

5.2.4. Agujeros negros como defectos en la red

Pasaremos a estudiar ahora la CFT a temperatura finita y no a temperatura nula como hemos hecho hasta aquí. Lo estudiamos desde la mirada de la dualidad AdS/CFT, en este lenguaje, estudiar la CFT a distintas temperaturas finitas equivale a estudiar la teoría de gravedad dual con un agujero negro de distintos radios. El equivalente en los sistemas de fractones clásicos y definidos en una red discreta corresponde a tomar defectos en la red de

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

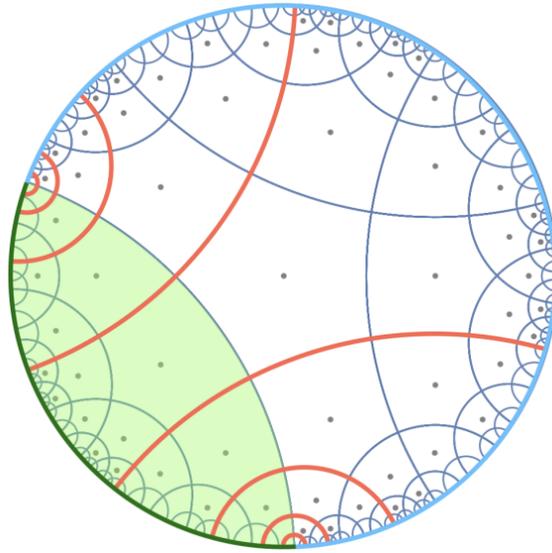


Figura 5.6.: Información mutua como análogo clásico de la entropía de entrelazamiento cumpliendo con la ecuación de Ryu-Takayanagi (5.22). La calculamos como el número de geodésicas que parten de una porción de borde A (en verde oscuro) a su complemento A^c (en celeste). Las geodésicas compartidas están marcadas en naranja y su número es $N_{g-\gamma}$, son también el número de geodésicas que intersecan a la curva γ que es la curva mínima que une los extremos de A , $N_{g-\gamma}$ nos da una aproximación de la longitud de γ medida en unidades de la distancia entre primeros vecinos en la red.

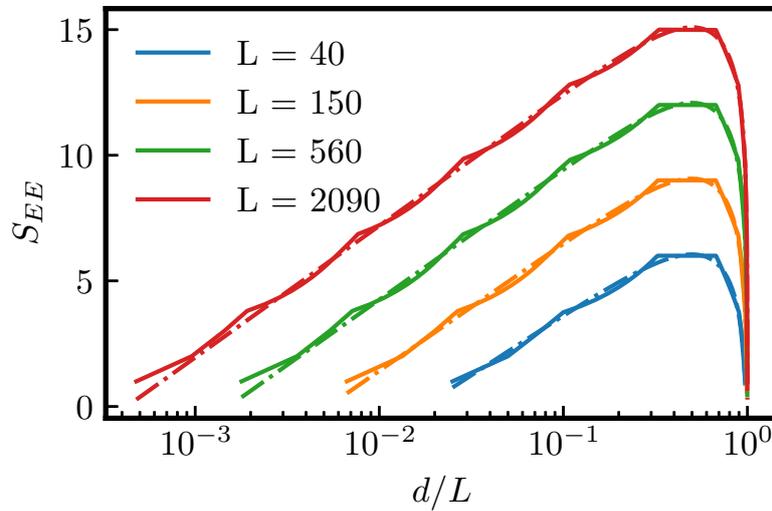


Figura 5.7.: Entropía de entrelazamiento del estado fundamental calculada utilizando (5.24) para distintos tamaños de red como función de la distancia reducida en el borde d/L . En línea punteada el ajuste a la ecuación de Calabrese-Cardy (5.25).

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

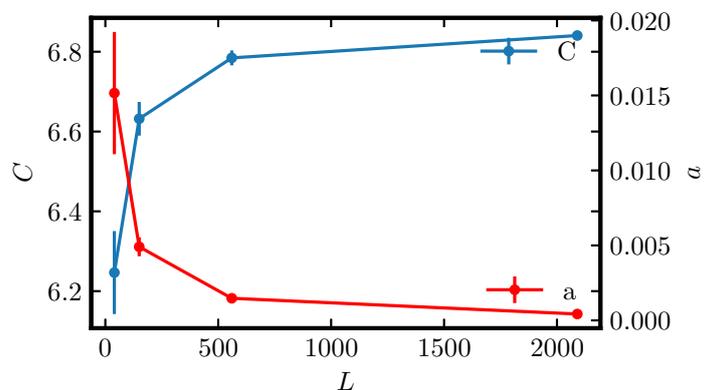


Figura 5.8.: Carga central c y parámetro a como función del tamaño del sistema obtenidos a través de cuadrados mínimos a la ecuación (5.25). La carga central se acerca a un valor límite $c \simeq 4,74$ coincidiendo con lo obtenido en [77].

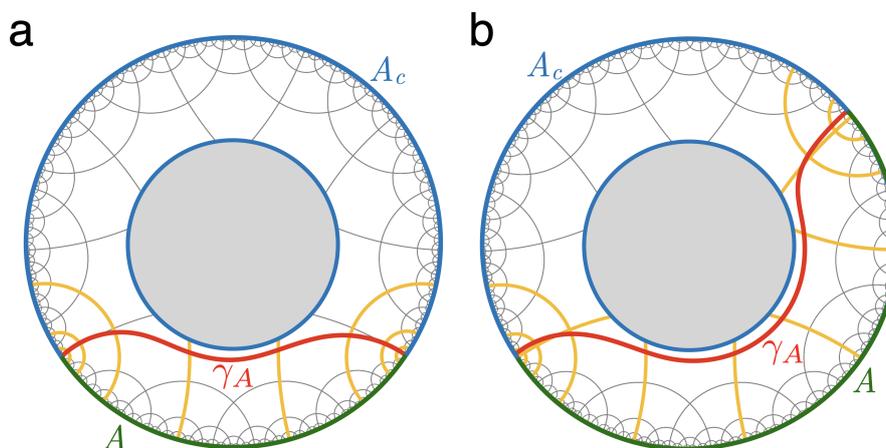


Figura 5.9.: a) Modelo de fractones hiperbólico con un defecto en color gris. Las geodésicas que conectan A , en verde, con su complemento A_c , en celeste, están marcadas en amarillo y contribuyen a la entropía de entrelazamiento. Notemos que la curva mínima que une los extremos de A se ve deformada por la presencia del defecto y no es un arco de circunferencia. b) La misma figura para una región de borde mayor, mostrando como la superficie mínima cambia.

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

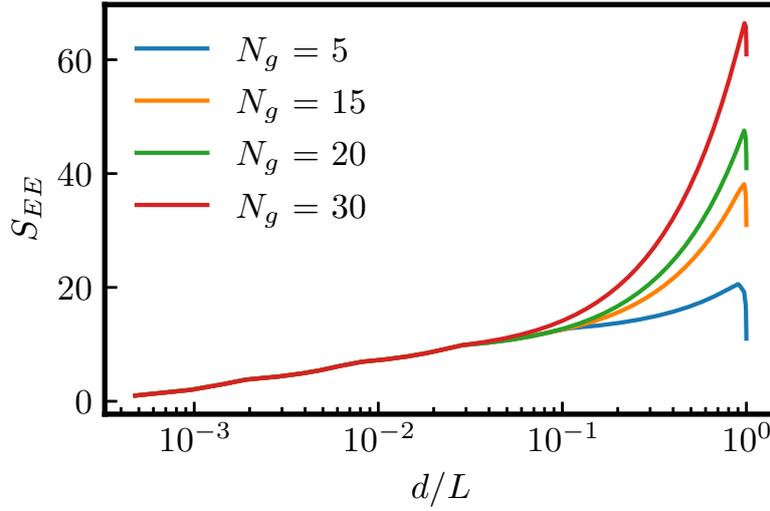


Figura 5.10.: Entropía a distintos tamaños de defectos como función de d/L

distintos tamaños. Los tamaños disponibles para estos defectos serán discretos y aproximaremos la longitud de su perímetro de manera similar a lo que hicimos para calcular (5.24), a partir de la cantidad de geodésicas que los cruzan. Bajo estas definiciones, calculamos la información mutua en presencia de un defecto como la cantidad de geodésicas que cruzan de una porción de borde a su complemento, sin contar las que atraviesan el defecto, más las geodésicas que atraviesan el defecto, sin importar si van de un subsistema a otro, en la figura 5.9 se encuentra un esquema de la red con un defecto. Al igual que en el caso de temperatura nula, podemos utilizar el resultado obtenido por Calabrese-Cardy para una CFT,

$$S(l, \beta) = \frac{c}{3} \ln \left(\frac{\beta}{\pi \tilde{a}} \sinh \left(\frac{l\pi}{\beta} \right) \right). \quad (5.26)$$

Como esta expresión para la entropía fue obtenida para sistemas de tamaño infinito esperamos que solo sea válida para $l \ll 1$ en nuestro sistema. Debido a que las constantes c y \tilde{a} son propias de la teoría sin importar si estamos a temperatura finita o no, podemos utilizar los valores obtenidos a temperatura nula para ajustar las curvas a temperatura finita teniendo β como único parámetro libre. Notemos que estamos obteniendo β en unidades de L . En la figura 5.10 vemos la entropía como función de d/L a distintos tamaños de defecto, obteniendo un gran acuerdo con (5.26).

Dado que agregar defectos en la red es equivalente a agregar agujeros negros y estamos trabajando en un espacio AdS bidimensional estos agujeros negros deberían corresponderse con agujeros negros del tipo BTZ [95] y esperamos que la temperatura de Hawking del agujero negro, y por ende la temperatura de la CFT en el borde, sea proporcional a su radio [96]. En la figura 5.11 vemos los resultados obtenidos para la temperatura como función del tamaño del defecto, obteniendo una clara dependencia lineal como esperábamos.

Por último, podemos analizar la dependencia de la correlación del borde con la aparición de un defecto en la red a distintos tamaños de defectos. Esto lo vemos en la figura 5.12

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

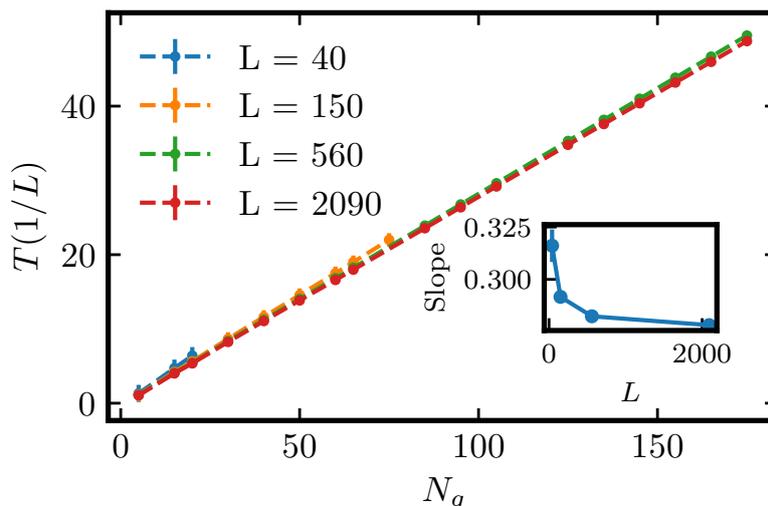


Figura 5.11.: Temperatura obtenida del ajuste de las curvas en la figura 5.10 a la ecuación (5.26) como función del tamaño del defecto medido en la cantidad de geodésicas que lo atraviesan. Encontramos un gran acuerdo con la dependencia lineal esperada y vemos que la constante de proporcionalidad entre la temperatura y el tamaño del defecto se aproxima a un valor límite para $L \rightarrow \infty$.

donde observamos, como es esperado para una CFT, un comportamiento como una ley de potencias con la distancia para toda temperatura, la principal diferencia es que al aumentar el tamaño del defecto, que equivale a aumentar la temperatura, ciertos valores de correlación que eran no-nulos pasan a ser nulos.

5.3. Perspectiva a futuro y generalización de resultados

Podemos generalizar lo obtenido en las secciones anteriores a otras redes hiperbólicas. Comencemos con las redes del tipo $\{p, 4\}$ con $p > 5$. Los resultados obtenidos hasta ahora continúan sin mucha modificación, podemos seguir definiendo geodésicas en el sistema y obtener distintos estados fundamentales a partir de dar vuelta los espines a un lado u otro de la geodésica, como vemos en la figura para las redes $\{6, 4\}$ y $\{7, 4\}$. Los resultados obtenidos para la correlación y entropía de entrelazamiento se mantienen, modificando los valores específicos de la carga central y temperaturas obtenidas como función de p . Notemos también que es posible generalizar el tratamiento analítico para la correlación en términos de los distintos tipos de polígonos y geodésicas del sistema, solo cambiando los valores específicos que toman las matrices de inflación de polígonos y geodésicas, dadas en (5.15) y (5.16) respectivamente, y la cantidad inicial de polígonos y geodésicas. Un resultado general como función de p se encuentra en el apéndice A. Estas consideraciones nos permiten obtener un resultado analítico para la función de correlación para tamaños grandes para cada p ,

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

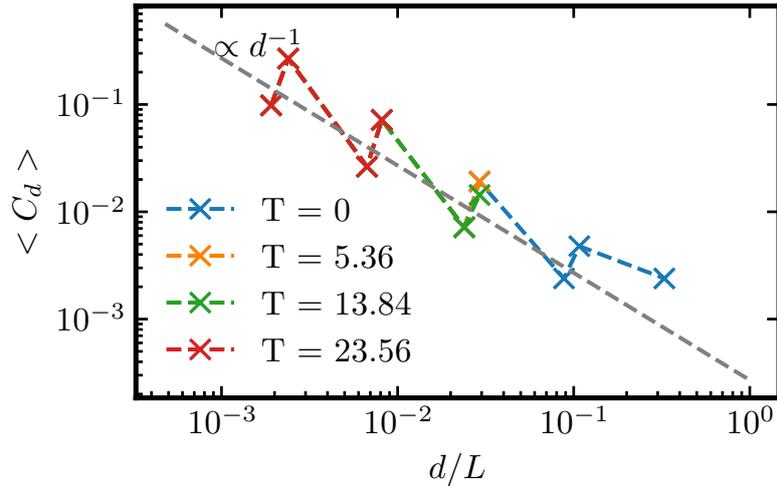


Figura 5.12.: Correlación como función de la distancia d/L en el borde a distintos tamaños de defecto, y por ende a distintas temperaturas. Vemos el mismo comportamiento de ley de potencias para toda temperatura con la diferencia que ciertos valores de correlación pasan a ser nulos a medida que aumentamos la temperatura.

obtenemos

$$c_p^\alpha(d)/L = \frac{3 - 4g(p)}{2L} \frac{1}{d/L} \quad (5.27)$$

siendo $g(p) = \frac{1}{\sqrt{(p-4)(p-2)}}$.

Para valores pares de $q \neq 4$ definimos el Hamiltoniano de igual manera. Dado cada vértice interior en la red definimos un operador \mathcal{O}_p como el producto de las variables de Ising Z_i en los polígonos que rodeen ese vértice, como se ve en la figura 5.13 y, una vez más, el estado fundamental se obtiene al hacer que cada operador valga $\mathcal{O}_p = 1$. Podemos obtener distintos estados fundamentales a partir de operaciones de simetría pero, esta vez, los distintos estados fundamentales se obtendrán al definir fractales en la red como el dado en la figura 5.13 para la red $\{5, 6\}$. Para construir estos fractales comenzamos en un vértice arbitrario, seleccionamos $q/2$ lados no contiguos que lo unen a sus primeros vecinos y repetimos el proceso con los vecinos así elegidos; definimos luego la porción de red delimitada por el fractal y damos vuelta los espines en su interior.

Por último, para valores impares de q la definición de estados fundamentales y simetrías del sistema es difícil de interpretar, podemos ver un estado fundamental y algunas simetrías en la figura 5.13.

Un análisis completo del modelo de fractones en estos últimos dos tipos de redes es un trabajo en desarrollo y algunos resultados se encuentran en [98, 97].

5. Modelo de fractones en el plano hiperbólico

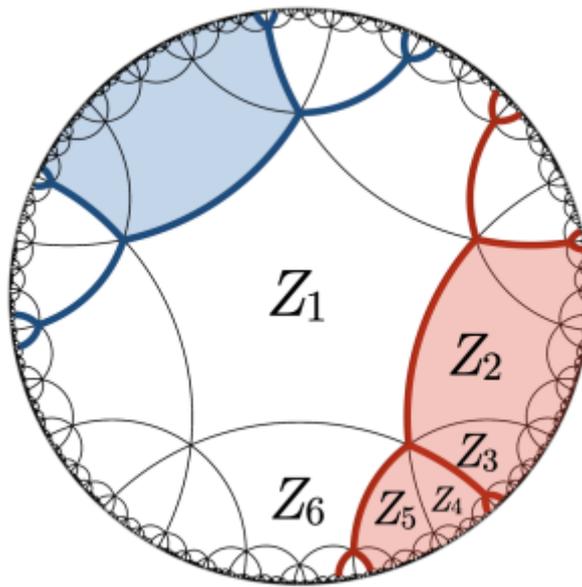


Figura 5.13.: Fractales en rojo y azul para la red $\{5, 6\}$ a partir de los cuales podemos definir operaciones de simetría que consisten en dar vuelta los espines coloreados en rojo y azul en cada caso. Figura tomada de [97]

6. Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos estudiado distintos sistemas magnéticos en donde la topología no solo sirve como una herramienta matemática técnica para su caracterización sino también teniendo profundas consecuencias en la física observada. En los sistemas físicos aquí estudiados, estas propiedades topológicas se exhibieron de diversas maneras. Sirvieron para la descripción de las excitaciones fundamentales del sistema, como por ejemplo los vórtices en el modelo XY estudiado en el capítulo 3 o los fractones estudiados en el capítulo 5. A su vez, tuvieron consecuencias drásticas al estudiar la conductividad de Hall de un modelo de tight-binding en el capítulo 3, estando la conductividad de Hall completamente determinada por un conjunto de invariantes topológicos de la estructura de bandas. Por último se manifestó en la propia estructura del espacio base al considerar condiciones de contorno periódicas en el plano hiperbólico, compactificando al espacio base en una superficie con una topología no trivial cuyas consecuencias se manifestaron en las propiedades físicas estudiadas en un modelo de Ising antiferromagnético en el capítulo 4.

En este trabajo se estudiaron distintos sistemas físicos, con una diversidad de fenómenos, pero todos unidos por la aplicación de distintos conceptos de la topología para un estudio adecuado de los mismos. Planteamos a continuación los resultados más importantes de cada caso y perspectivas a futuro en cada uno de los temas estudiados.

En el capítulo 3 se estudió el modelo XY con interacción DM en el plano euclídeo. Obtuvimos que, bajo ciertas condiciones para la modulación espacial de la interacción DM, se obtiene una red de vórtices y antivórtices a baja temperatura. Al aumentar la temperatura del sistema observamos que esta red de vórtices desaparece al desarmarse los vórtices de a pares llevando a cabo una transición de fase que cae en la clase de universalidad de la transición BKT. Esta fenomenología resulta interesante y en gran contraste con la fenomenología observada en el modelo XY, en este último la transición de fase ocurre entre una fase con orden de cuasi-largo alcance y una baja densidad de vórtices con carga total neutra, a una fase sin orden y con un gas de vórtices desapareados. Es destacable que pudimos aproximar la temperatura de esta transición mediada por defectos topológicos utilizando una aproximación de campo medio.

En el modelo propuesto en esta tesis, la fenomenología observada resulta ser muy distinta a la del modelo XY. Si bien la transición de fase también se encuentra mediada por defectos topológicos, esta transición se da en un sentido inverso al que ocurre en el modelo XY. En el modelo XYDM partimos a baja temperatura de una fase plagada de defectos topológicos, sin movilidad y con carga total neutra, ya que esta configuración minimiza la energía. A medida que la temperatura aumenta, los defectos topológicos van desapareciendo pero de a pares, manteniendo la neutralidad de carga, y es esta ausencia de defectos la que prolifera en el sistema destruyendo el orden de cuasi-largo alcance. Es destacable que el modelo XY constituye un límite del modelo aquí planteado y sin embargo esta fenomenología tan dispar

6. Conclusiones

se captura bajo la misma teoría de campos descrita por la dualidad que encontramos entre un gas de Coulomb de cargas neutras y el sistema estudiado.

En el capítulo 3, en una segunda sección, se analizó qué sucede con la dinámica de electrones en redes en el espacio plano con interacciones antisimétricas sobre un fondo con una configuración magnética no trivial. Se estudió en particular un modelo de tight-binding en una red triangular coloreada. Obtuvimos que la aparición de términos de interacción del tipo espín órbita o DM son ingredientes claves para la obtención de una conductividad de Hall topológica no nula. En estos modelos la topología aparece en la estructura de bandas al considerar los llamados números de Chern de las bandas. La aparición de números de Chern no triviales implica una conductividad de Hall no nula y está intrínsecamente ligada a las interacciones del tipo espín órbita. Usualmente la conductividad de Hall aparece en sistemas magnéticos con magnetización total no nula, sin embargo, en los últimos años se han comenzado a estudiar sistemas magnéticos con magnetización total nula que aun así exhiben una conductividad de Hall no solo no-nula sino que también cuantizada. Los mecanismos por los cuales la conductividad de Hall topológica se hace presente en estos sistemas no se comprenden aún por completo, nuestro aporte al tema muestra concreto ejemplo en el que las interacciones antisimétricas, en este caso haciéndose presente a través de la interacción de espín-órbita, son necesarias para la aparición de esta conductividad de Hall. Aún así cabe destacar si bien estas interacciones son necesarias no son suficientes.

Realizamos un análisis de la factibilidad de realizaciones experimentales del modelo propuesto. Observamos que es necesaria una compleja interacción entre la geometría de la red y los distintos tipos de interacciones presentes en el sistema físico para la aparición de una conductividad de Hall topológica no nula en ausencia de magnetización neta. Pero, si bien es necesaria una multiplicidad de interacciones en el sistema, son interacciones realizables en sistemas físicos reales y en meta-materiales, en donde con unos pocos parámetros de control podemos obtener un diagrama de fases con una gran variedad de fases topológicas y observables físicos de utilidad práctica, destacando en particular la obtención de plateaus en la conductividad de Hall.

En los capítulos 4 y 5 trabajamos con modelos de sistemas magnéticos definidos sobre teselaciones del plano hiperbólico. Estas teselaciones del plano hiperbólico tienen una característica crucial que las diferencia del plano Euclídeo: los sitios de borde representan una proporción apreciable del total del sistema haciendo que los efectos de borde adquieran un rol más importante en la física observada. Bajo estas condiciones decidimos tomar dos acercamientos distintos: el primero, desahacernos de los sitios de borde al tomar condiciones de contorno periódicas; el segundo, analizar en particular el borde y ver cómo determina la física del bulk.

Al considerar condiciones de contorno periódicas sucede algo que sería inesperado en el plano Euclídeo, si tomamos porciones más grandes de red las condiciones de contorno periódicas implican una compactificación a superficies con topologías no triviales distintas. En lugar de obtener un toro para cualquier tamaño de red como sucede en el plano Euclídeo obtenemos superficies con un número mayor de agujeros. En esta tesis estudiamos la influencia de esta topología no trivial en un sistema magnético de tipo Ising con acoplamientos antiferromagnéticos, y observamos que la física se encuentra principalmente determinada el número de coordinación de la red. Esto lo vemos al estudiar la entropía residual a tempe-

6. Conclusiones

ratura nula, tanto numericamente como por medio de una aproximación de Hard Sphere Mean Field. Al comparar este resultado analítico con los resultados numéricos obtenidos con el sistema con condiciones de contorno periódicas y el sistema con condiciones de contorno abiertas vemos grandes diferencias. La aproximación toma como punto de partida que cada sitio de red posee el mismo número de coordinación, en el caso de las condiciones de contorno abiertas esto no es así, los sitios de borde poseen un número de coordinación menor y, como dijimos antes, la proporción de sitios de borde respecto del total no se anula en el límite termodinámico. Esta diferencia clave hace que los resultados analíticos se asemejen más a los resultados de condiciones de contorno periódicas en donde el sistema no tiene borde y por ende todos los sitios tienen el mismo número de coordinación.

Si bien por lo que estudiamos de sistemas magnéticos en redes hiperbólicas la mayor diferencia respecto al plano Euclídeo se dio por el número de coordinación medio la red esperamos que esta topología no trivial tenga un rol más drástico al trabajar con sistemas como el modelo XYDM estudiado en esta tesis. El análisis es el siguiente, si definimos el modelo XYDM en el plano hiperbólico y consideramos las interacciones que tienen lugar tenemos que tener cuidado con la curvatura del propio espacio base, esta curvatura nos obliga a realizar un transporte paralelo de los vectores en cada posición introduciendo un defasaje en la interacción de intercambio, como han considerado en el modelo XY en [99], similar al defasaje que introduce un campo magnético o la propia interacción DM. Desde este punto de vista vemos que la curvatura del espacio influirá fuertemente en las interacciones del sistema y por ende, esperamos, en la física observada. Más aún, al considerar condiciones de contorno periódicas estaremos compactificando el espacio base en superficies distintas al toro como es el caso del plano Euclídeo, obteniendo superficies con un mayor número de agujeros, y esperamos que esto tenga consecuencias cruciales sobre el número de defectos topológicos que se exhiban en la red. El análisis del modelo XYDM definido sobre una red hiperbólica es un trabajo en desarrollo [100].

Como último trabajo en esta tesis se estudió un modelo de fractones sobre redes hiperbólicas, en colaboración con Ludovic Jaubert y Han Yan ampliando los trabajos de éste último realizados en [94, 98]. Estos resultados están en proceso de publicación [26]. En este caso no consideramos condiciones de contorno periódicas en la red hiperbólica sino que trabajamos con condiciones de contorno abiertas y estudiamos las consecuencias de tener un borde con un número macroscópico de sitios. En este caso la topología vuelve a aparecer en las excitaciones disponibles en el sistema, en este tipo de modelos las excitaciones son llamadas fractones y son topológicas en el sentido que implican un cambio macroscópico en el sistema y no pueden ser borradas por modificaciones locales. Nuestro objetivo al estudiar este modelo fue analizar la influencia que tiene el borde sobre los estados de bulk de un sistema definido en una red hiperbólica y tomarlo como un modelo útil para la verificación de la correspondencia AdS/CFT. Encontramos expresiones analíticas para la correlación entre espines en el borde del sistema que se corresponde con lo esperado para una CFT. Vimos a su vez que la correspondencia se verifica, obteniendo una dependencia lineal entre el radio de un agujero negro en el espacio AdS y la temperatura de la CFT al estudiar la entropía de entrelazamiento. El trabajo realizado reproduce relaciones esperadas entre la existencia de un agujero negro en el bulk del espacio AdS y una CFT a temperatura finita en el borde del mismo, para el caso particular de un sistema de materia fractónica con bordes abiertos,

6. Conclusiones

a través de un Hamiltoniano bien definido.

Con perspectiva a futuro, notamos que el trabajo realizado sienta las bases para un mayor análisis de la relación entre defectos en la red y una temperatura emergente en el borde. La relación entre este modelo y holographic tensor networks sugiere potenciales realizaciones experimentales de estos conceptos en simulaciones cuánticas y circuitos eléctricos, asentándose como una prometedora oportunidad para testear conceptos de holografía y gravedad en un ambiente de laboratorio controlado.

En resumen, la topología resultó ser una herramienta indispensable para la descripción de la física observable en los sistemas magnéticos aquí considerados. Reafirmamos en esta tesis su necesidad para la descripción de fenómenos físicos ampliamente estudiados como la transición de fase de BKT y la conductividad de Hall topológica. Más aún, vimos que al analizar sistemas magnéticos en el plano hiperbólico el espacio mismo adquiere una topología no trivial si se imponen condiciones de contorno periódicas adecuadas. Esta área de la física de la materia condensada se encuentra en auge en los últimos años, con potenciales aplicaciones experimentales descubiertas recientemente. constituye una manera novedosa de la aplicación de la topología en la física y en esta tesis doctoral realizamos un aporte a esta área aún en amplio desarrollo.

A. Apéndice

A.1. Condiciones de contorno periódicas en redes hiperbólicas

La obtención de condiciones de contorno periódicas correctas para una teselación del plano hiperbólico es un área de investigación activa y que nos tomó el grueso del capítulo 2.4. Trataremos de aclarar el mecanismo mediante el cual se obtuvieron las condiciones de contorno utilizadas en esta tesis para la red $\{3, 7\}$.

Como vimos antes, para obtener condiciones de contorno periódicas en porciones del plano hiperbólico de tamaños cada vez más grandes necesitamos una secuencia de subgrupos normales Γ^n que cumplan con lo siguiente

$$\Delta^+(2, 3, 7) = \Gamma^0 \triangleleft \Gamma^1 \triangleleft \Gamma^2 \dots \quad (\text{A.1})$$

cumpliendo además $\Delta^+(2, 3, 7) \triangleleft \Gamma^n \forall n$. Para obtener esta secuencia definimos el grupo $\Delta^+(2, 3, 7)$ en el language de programación GAP como el grupo libre en los generadores x, y, z junto con los relators adecuados, en este caso la lista de relators es $[x^2, y^3, z^7, xyz]$. Luego, utilizando el paquete LINS podemos obtener una lista de todos los subgrupos normales de Δ^+ hasta un determinado índice. Esto se ve así

```
LoadPackage("LINS");
F := FreeGroup("x", "y", "z");
G := F/[F.1^2, F.2^3, F.3^7, F.1*F.2*F.3];
linsList := LowIndexNormalSubgroupsSearchForAll(G, 100000);
subGroups := List(linsList);
```

Obtenemos una lista de los subgrupos normales que tienen índices menores 100000 en este caso. Luego, podemos verificar las relaciones de normalidad que necesitamos. Es decir, partimos del subgrupo normal de menor índice, Γ^1 , que en este caso tiene índice 168, y comprobamos que algún otro subgrupo normal Γ en la lista cumpla $\Gamma^1 \triangleleft \Gamma$, de ser así lo agregamos a la sucesión, $\Gamma^2 = \Gamma$, y continuamos con subgrupos que cumplan $\Gamma^2 \triangleleft \Gamma$. Con este procedimiento obtuvimos una lista de subgrupos normales que dan lugar a compactificaciones de genus 3, 17, 131, 1300. También con GAP podemos encontrar los grupos puntuales que estos grupos de traslación definen, es decir $G^n = \Delta^+(2, 3, 7)/\Gamma^n$ como un grupo de presentación finita en los generadores x, y, z con una determinada lista de relators. Por ejemplo,

A. Apéndice

en el caso de los primeros grupos normales obtenidos para la red $\{3, 7\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
 G^1 &= \Delta^+(2, 3, 7)/\Gamma^1 = \langle x, y, z | (yxz)^2 (y^{-1}z)^2 z^{-2}xz \rangle \\
 G^2 &= \Delta^+(2, 3, 7)/\Gamma^2 = \langle x, y, z | \\
 &\quad (xzy)^2 (xy^{-1}z^{-1})^4, \\
 &\quad (zyx)^2 xz^{-1} xzy^{-1} z^{-1} xy^{-1} z^{-2} xzy^{-1} z^{-1} xy^{-1} z^{-2} xz \rangle \\
 G^3 &= \Delta^+(2, 3, 7)/\Gamma^3 = \langle x, y, z | (xy^{-1}z^{-1})^4 (xzy)^4, (xzy^{-1}z^{-2})^3 (xz^2yz^{-1})^3 \rangle
 \end{aligned}$$

además de los relators de $\Delta^+(2, 3, 7)$. Dada esta lista de grupos puntuales podemos construir las condiciones de contorno utilizando el paquete HyperCells. Lo que hacemos es definir la celda primitiva correspondiente al grupo puntual de menor orden, G^1 en este caso, y como los siguientes subgrupos son subgrupos normales de G^1 podemos encontrar las siguientes condiciones de contorno como superceldas en esta celda unidad. Lo que obtenemos es una secuencia de 1, 8, 64 y 512 celdas unidad, que se corresponden con 24, 192, 1536 y 12288 sitios de red, lo que nos permite hacer un escaleo de tamaño finito razonable. Del paquete hypercells obtenemos directamente una lista de interacciones y un etiquetado para cada sitio.

A.2. Porciones abiertas del plano hiperbólico

A.2.1. Redes triangulares

Al estudiar el modelo de fractones en el plano hiperbólico el modelo de Ising antiferromagnético nos interesó poder definir porciones finitas y abiertas del plano hiperbólico. Para esto, seguimos un desarrollo ya utilizado en otros trabajos [101, 77, 102] que consiste en generar sucesivas capas de una dada teselación a partir de dividir a los vértices, geodésicas o polígonos en el borde de una condición inicial. Comencemos con la red $\{3, 7\}$. La porción mínima que podríamos tomar es un único triángulo central. Podemos generar sucesivas capas generando nuevos vecinos para los sitios de borde de manera que tengan número de coordinación q , en la figura A.1 vemos la secuencia de las 3 primeras capas generadas. EN cada caso podemos describir el borde del sistema con una secuencia de letras o, a, b de acuerdo al tipo de sitios de borde presentes. Con esta notación la capa inicial será ooo , y la siguiente $baaabaaabaaa$. Notemos que las siguientes capas se generan de acuerdo a las siguientes reglas de sustitución para las letras

$$\begin{aligned}
 o &\rightarrow baaa \\
 a &\rightarrow aab \\
 b &\rightarrow ab
 \end{aligned}$$

Notemos que luego de la segunda capa no se generan más vértices del tipo o , por lo que podemos obviarlos y trabajar solo con los a y b . Podemos describir la cantidad de vértices de borde de forma matricial según

$$\begin{pmatrix} n_a(l) & n_b(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{l-2} \tag{A.2}$$

A. Apéndice

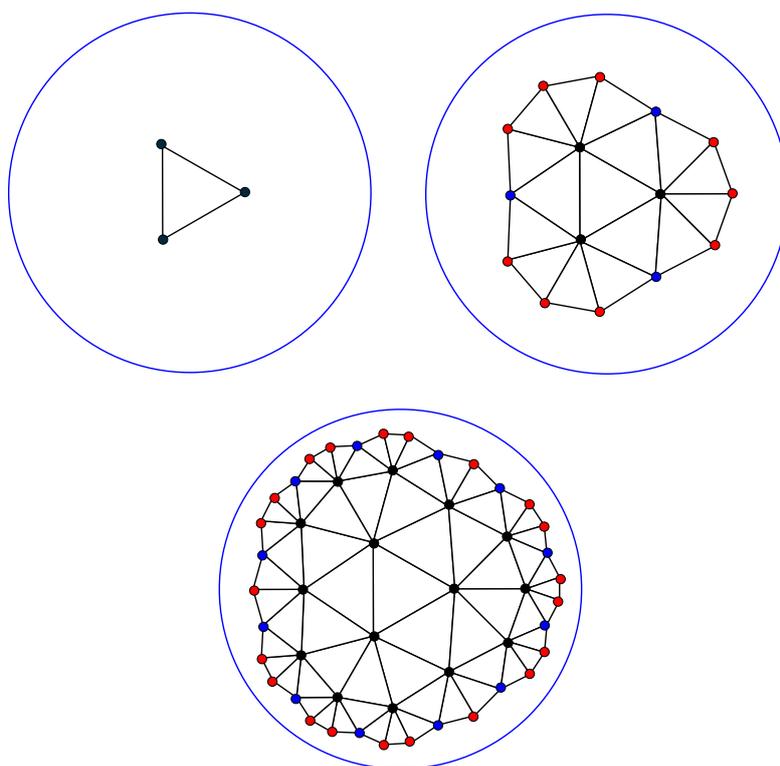


Figura A.1.: Secuencia de procciones de teselación del plano hiperbólico con 1,2 y 3 capas. En círculos negros los sitios con la totalidad de sus vecinos generados, en rojo los sitios con número de coordinación 3 (tipo a) y en azul los sitios con número de coordinación 4 (tipo b). Vemos que la primera capa es la única que contiene sitios con número de coordinación 2. Los llamamos de tipo o

A. Apéndice

siendo n_a y n_b el número de sitios de borde con número de coordinación 3 y 4 respectivamente, el vector $(9 \ 3)$ representa la cantidad de sitios de cada tipo en la capa 2 y l es el número de capas, contando el triángulo inicial como la capa 1.

Podemos obtener entonces algunas cantidades de interés. La proporción de sitios de borde respecto a los totales es inmediata, el número total de sitios será

$$N(l) = 3 + \sum_{\tilde{l}=2}^l n_a(\tilde{l}) + n_b(\tilde{l}) \quad (\text{A.3})$$

Mientras que la cantidad de sitios de borde es $N_\partial(l) = n_a(l) + n_b(l)$. Tenemos expresiones analíticas cerradas para ambos que son las siguientes

$$N(l) = 3 \left(-2 + \frac{(3 - \sqrt{5})^l}{2^l} + \frac{(3 + \sqrt{5})^l}{2^l} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$N_\partial(l) = 2^{-1-l} \left(-3 (3 - \sqrt{5})^l (1 + \sqrt{5}) + 3 (-1 + \sqrt{5}) (3 + \sqrt{5})^l \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} N_\partial(l)/N(l) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

Donde vemos que en el límite de tamaño infinito más de la mitad de los sitios de red son sitios de borde.

Este procedimiento nos permite obtener el número de coordinación medio, ya que los vértices de tipo a tienen número de coordinación 3 y los vértices de tipo b tienen número de coordinación 4 tenemos

$$\langle z \rangle (l) = \frac{3n_a(l) + 4n_b(l) + 7(N(l) - n_a(l) - n_b(l))}{N(l)} = 7 - 4 \frac{n_a(l)}{N(l)} - 3 \frac{n_b(l)}{N(l)} \quad (\text{A.8})$$

En el límite de tamaño infinito es $\langle z \rangle = 7 - \sqrt{5}$. Mucho menor que para la red con condiciones de contorno periódicas.

A partir del gráfico en la figura A.1 podemos generalizar a redes triangulares con número de coordinación q . Al generar la primera capa a partir del polígono inicial, necesitamos que cada uno de los vértices formando el triángulo inicial completen su lista de q vecinos, cada vértice generará un sitio que comparte con un vecino de al lado y otros $q - 4$ que no, de modo que para los vértices iniciales con coordinación 2 tenemos

$$o \rightarrow ba^{q-4} \quad (\text{A.9})$$

Los vértices con número de coordinación 3 necesitan generar $q - 3$ vecinos nuevos, dos los comparten con sitios adyacentes y son de coordinación 4, los otros serán de coordinación 3. Para los vértices de tipo b tenemos algo similar pero partiendo de coordinación 4 así que

$$a \rightarrow a^{q-5}b \quad (\text{A.10})$$

$$b \rightarrow a^{q-6}b \quad (\text{A.11})$$

A. Apéndice

De igual manera que antes, los sitios de tipo o solo se encuentran en la capa inicial, por lo que podemos escribir para una red $\{3, q\}$

$$(n_a(l) \quad n_b(l)) = (3(q-4) \quad 3) \begin{pmatrix} q-5 & 1 \\ q-6 & 1 \end{pmatrix}^l \quad (\text{A.12})$$

Obtenemos una vez más el número de coordinación medio y la fracción de vértices de borde respecto al total en el límite de tamaños grandes

$$n_{\partial}(q) = \frac{(q-6) \left(2 - q + \sqrt{12 - 8q + q^2}\right)}{2\sqrt{12 - 8q + q^2}} \quad (\text{A.13})$$

$$\langle z \rangle (q) = q - \sqrt{(q-6)(q-2)}. \quad (\text{A.14})$$

Es interesante ver que los límites para q yendo a infinito de ambas cantidades están bien definidos y son 1 y 4 respectivamente. Es decir, si el número de coordinación de la teselación que utilizamos aumenta, el número de coordinación medio disminuye.

A.2.2. Redes $\{5, 4\}$

Para las redes $\{5, 4\}$ hacemos un tratamiento similar pero mirando pentágonos y geodésicas en lugar de vértices. Escribimos el borde de la red como una secuencia de letras a, b que representan pentágonos, en este caso, los polígonos de borde formados por 3 geodésicas y el borde de la red se identifican con la letra a y los que están formados por 2 geodésicas y el borde del disco con la letra b , ver figura A.2. Esta separación nos discrimina las geodésicas en dos, las que encierran dos polígonos b y un polígono a , que llamamos de tipo α , y las que encierran dos polígonos a y 2 polígonos b , que llamamos del tipo β .

La construcción de la red se sigue de manera similar al caso $\{3, 7\}$, pero ahora con la siguiente regla para sustituir letras

$$a \rightarrow aba \quad (\text{A.15})$$

$$b \rightarrow ababa \quad (\text{A.16})$$

Lo que se traduce en las siguientes expresiones para la cantidad de polígonos de borde

$$(n_a(l) \quad n_b(l)) = (5 \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{l-2} \quad (\text{A.17})$$

siendo $l = 1$ la capa con un único polígono y en la capa 2 hay 5 polígonos de cada tipo. Esto nos permite calcular la proporción de polígonos de borde respecto al total

$$\lim_{l \rightarrow \infty} N_{\partial}(l)/N(l) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \quad (\text{A.18})$$

De manera similar podemos ver la cantidad de geodésicas de tipo α y de tipo β en cada capa

$$(n_{\alpha}(l) \quad n_{\beta}(l)) = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{l-2} \quad (\text{A.19})$$

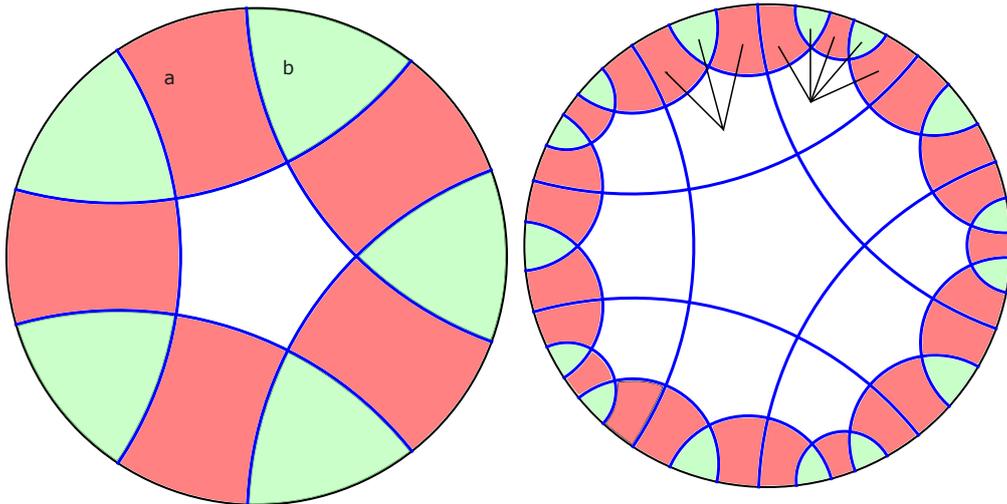


Figura A.2.: Izquierda: Red $\{5, 4\}$ mínima formada por un polígono central y 10 polígonos de borde. A los polígonos de borde los separamos en dos tipos, a que están formados por 3 geodésicas y marcados en color rosa y b formados por 2 geodésicas y marcados en color verde. Las redes de mayor tamaño se forman haciendo una secuencia en la que cada polígono de borde genera nuevos polígonos. Derecha: Siguiendo tamaño de red en donde los polígonos de borde del tipo a generaron 2 polígonos de tipo a y uno de tipo b y los polígonos del tipo b generaron 3 polígonos del tipo a y 2 del tipo b . Los polígonos que en la primera capa eran de borde ahora pasan a ser de bulk y están denotados en blanco.

A. Apéndice

Donde usamos que las geodésicas α generan 1 geodésica de tipo α y 2 de tipo β y las geodésicas de tipo β generan 1 de tipo α y 3 de tipo β .

Veamos qué se puede generalizar a redes con polígonos de p lados y número de coordinación 4. Notamos primero que seguimos teniendo polígonos de tipo a y b con la misma definición, en cada generación los polígonos de tipo a forman $p-3$ polígonos de tipo a y $p-4$ polígonos de tipo b , mientras que los de tipo a generan $p-2$ y $p-3$, y lo hacen de forma alternada. Es decir

$$a \rightarrow (ab)^{p-4}a \quad (\text{A.20})$$

$$b \rightarrow (ab)^{p-3}a \quad (\text{A.21})$$

Esto nos permite escribir

$$\begin{pmatrix} n_a(l) & n_b(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-3 & p-4 \\ p-2 & p-3 \end{pmatrix}^{l-2} \quad (\text{A.22})$$

Volvemos a tener separadas las geodésicas en geodésicas de tipo α que encierran 2 b y un a y de tipo β que encierran dos y dos. Las geodésicas α generarán $2(p-4) - 1$ geodésicas α y 2 β . Las β generan 3 β y $3(p-4) - 2$ α . Inicialmente hay p geodésicas α . Con esta información podemos obtener la cantidad de geodésicas a un tamaño de red l

$$\begin{pmatrix} n_\alpha(l) & n_\beta(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(p-4) - 1 & 2 \\ 3(p-4) - 2 & 3 \end{pmatrix}^{l-2} \quad (\text{A.23})$$

Bibliografía

- [1] V. Berezinsky, "Destruction of long range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group. i. classical systems," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 32, pp. 493–500, 1970.
- [2] V. Berezinsky, "Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. ii. quantum systems." *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 61, p. 610, 1972.
- [3] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems," *Journal of Physics C: Solid State Physics*, vol. 6, no. 7, p. 1181, 1973.
- [4] F. Wegner, "Spin-ordering in a planar classical heisenberg model," *Zeitschrift für Physik*, vol. 206, no. 5, pp. 465–470, 1967.
- [5] T. Moriya, "New mechanism of anisotropic superexchange interaction," *Physical Review Letters*, vol. 4, no. 5, p. 228, 1960.
- [6] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, "New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance," *Physical review letters*, vol. 45, no. 6, p. 494, 1980.
- [7] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics.*, Cambridge University Press, 1995.
- [8] L. Benfatto, C. Castellani, and T. Giamarchi, "Beresinskii-kosterlitz-thouless transition within the sine-gordon approach: the role of the vortex-core energy," *arXiv preprint arXiv:1201.2307*, 2012.
- [9] P. Minnhagen, "The two-dimensional coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films," *Reviews of modern physics*, vol. 59, no. 4, p. 1001, 1987.
- [10] J. Maldacena, "The large-n limit of superconformal field theories and supergravity," *International journal of theoretical physics*, vol. 38, no. 4, pp. 1113–1133, 1999.
- [11] S. A. Hartnoll, A. Lucas, and S. Sachdev, *Holographic quantum matter.*, MIT press, 2018.
- [12] S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence," *Physical review letters*, vol. 96, no. 18, p. 181602, 2006.
- [13] G. Vidal, "Entanglement renormalization," *Physical review letters*, vol. 99, no. 22, p. 220405, 2007.
- [14] T. G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König, and U. Leonhardt, "Fiber-optical analog of the event horizon," *Science*, vol. 319, no. 5868, pp. 1367–1370, 2008.
- [15] L. J. Garay, J. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller, "Sonic analog of gravitational black holes in bose-einstein condensates," *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 22, p. 4643, 2000.

Bibliografía

- [16] R. Schützhold and W. G. Unruh, "Hawking radiation in an electromagnetic waveguide?" *Physical review letters*, vol. 95, no. 3, p. 031301, 2005.
- [17] B. Horstmann, B. Reznik, S. Fagnocchi, and J. I. Cirac, "Hawking radiation from an acoustic black hole on an ion ring," *Physical review letters*, vol. 104, no. 25, p. 250403, 2010.
- [18] I. Boettcher, A. V. Gorshkov, A. J. Kollár, J. Maciejko, S. Rayan, and R. Thomale, "Crystallography of hyperbolic lattices," *Physical Review B*, vol. 105, no. 12, p. 125118, 2022.
- [19] J. Maciejko and S. Rayan, "Hyperbolic band theory," *Science advances*, vol. 7, no. 36, p. eabe9170, 2021.
- [20] J. Maciejko and S. Rayan, "Automorphic bloch theorems for hyperbolic lattices," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 119, no. 9, p. e2116869119, 2022.
- [21] P. M. Lenggenhager, A. Stegmaier, L. K. Upreti, T. Hofmann, T. Helbig, A. Vollhardt, M. Greiter, C. H. Lee, S. Imhof, H. Brand *et al.*, "Simulating hyperbolic space on a circuit board," *Nature communications*, vol. 13, no. 1, p. 4373, 2022.
- [22] P. M. Lenggenhager, "Emerging avenues in band theory: multigap topology and hyperbolic lattices," Ph.D. dissertation, ETH Zurich, 2023.
- [23] P. M. Lenggenhager, J. Maciejko, and T. Bzdušek, "Non-abelian hyperbolic band theory from supercells," *Physical Review Letters*, vol. 131, no. 22, p. 226401, 2023.
- [24] A. Costa Duran and M. Sturla, "Vortex lattice in two-dimensional chiral XY ferromagnets and the inverse Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition," *Physical Review B*, vol. 102, no. 10, p. 100406, 2020.
- [25] A. Costa Duran, S. A. Osorio, and M. B. Sturla, "Anomalous hall effect in the coplanar antiferromagnetic coloring-triangular lattice," *Physical Review B*, vol. 106, no. 4, p. 045101, 2022.
- [26] A. C. Duran, M. Sturla, L. D. C. Jaubert, and H. Yan, "Conformal boundary as holographic dual to the hyperbolic fracton model," 2024. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/2411.05662>
- [27] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics.*, CRC press, 2018.
- [28] A. Altland and B. D. Simons, *Condensed matter field theory.*, Cambridge university press, 2010.
- [29] M. V. Berry, "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes," *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 392, no. 1802, pp. 45–57, 1984.
- [30] S.-s. Chern, "A simple intrinsic proof of the gauss-bonnet formula for closed riemannian manifolds," *Annals of mathematics*, pp. 747–752, 1944.
- [31] J. Zak, "Berry's phase for energy bands in solids," *Physical review letters*, vol. 62, no. 23, p. 2747, 1989.
- [32] D. Vanderbilt, *Berry phases in electronic structure theory: electric polarization, orbital magnetization and topological insulators.*, Cambridge University Press, 2018.
- [33] E. B. García, A. F. Costa, and E. Martínez, *Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups.*, Cambridge University Press, 2001, vol. 287.
- [34] G. Group *et al.*, "Gap system for computational discrete algebra," 2007.

Bibliografía

- [35] D. Firth, "An algorithm to find normal subgroups of a finitely presented group, up to a given finite index," Ph.D. dissertation, University of Warwick, 2005.
- [36] F. Rober, "Gap package LINS," <https://github.com/gap-packages/LINS>, 2020.
- [37] T. Tummuru, A. Chen, P. M. Lenggenghager, T. Neupert, J. Maciejko, and T. Bzdušek, "Hyperbolic non-abelian semimetal," *arXiv preprint arXiv:2307.09876*, 2023.
- [38] F. R. Lux and E. Prodan, "Spectral and combinatorial aspects of cayley-crystals," in *Annales Henri Poincaré*, Springer, 2023, pp. 1–40.
- [39] F. R. Lux and E. Prodan, "Converging periodic boundary conditions and detection of topological gaps on regular hyperbolic tessellations," *Physical Review Letters*, vol. 131, no. 17, p. 176603, 2023.
- [40] M. Conder, "Quotients of triangle groups acting on surfaces of genus 2 to 101," 2007.
- [41] E. Marinari and G. Parisi, "Simulated tempering: a new monte carlo scheme," *Europhysics letters*, vol. 19, no. 6, p. 451, 1992.
- [42] I. Dzyaloshinsky, "A thermodynamic theory of "weak" ferromagnetism of antiferromagnetics," *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 4, no. 4, pp. 241–255, 1958.
- [43] A. Hoffmann and S. D. Bader, "Opportunities at the frontiers of spintronics," *Physical Review Applied*, vol. 4, no. 4, p. 047001, 2015.
- [44] S. Emori, E. Martinez, K.-J. Lee, H.-W. Lee, U. Bauer, S.-M. Ahn, P. Agrawal, D. C. Bono, and G. S. Beach, "Spin hall torque magnetometry of dzyaloshinskii domain walls," *Physical Review B*, vol. 90, no. 18, p. 184427, 2014.
- [45] I. A. Sergienko and E. Dagotto, "Role of the dzyaloshinskii-moriya interaction in multiferroic perovskites," *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, vol. 73, no. 9, p. 094434, 2006.
- [46] H. Yang, O. Boule, V. Cros, A. Fert, and M. Chshiev, "Controlling dzyaloshinskii-moriya interaction via chirality dependent atomic-layer stacking, insulator capping and electric field," *Scientific reports*, vol. 8, no. 1, pp. 1–7, 2018.
- [47] H. T. Nembach, J. M. Shaw, M. Weiler, E. Jué, and T. J. Silva, "Linear relation between heisenberg exchange and interfacial dzyaloshinskii–moriya interaction in metal films," *Nature Physics*, vol. 11, no. 10, pp. 825–829, 2015.
- [48] H.-B. Luo, H.-B. Zhang, and J. P. Liu, "Strong hopping induced dzyaloshinskii–moriya interaction and skyrmions in elemental cobalt," *npj Computational Materials*, vol. 5, no. 1, pp. 1–6, 2019.
- [49] S. Teitel, "The two-dimensional fully frustrated xy model," in *40 Years of Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Theory*, World Scientific, 2013, pp. 201–235.
- [50] S. Lee and K.-C. Lee, "Phase transitions in the fully frustrated xy model studied with use of the microcanonical monte carlo technique," *Physical Review B*, vol. 49, no. 21, p. 15184, 1994.
- [51] G. Cristofano, V. Marotta, P. Minnhagen, A. Naddeo, and G. Niccoli, "New results on the phase diagram of the ffx model: A twisted cft approach," in *Path Integrals—New Trends And Perspectives*, World Scientific, 2008, pp. 518–524.
- [52] R. Savit, "Vortices and the low-temperature structure of the x- y model," *Physical Review B*, vol. 17, no. 3, p. 1340, 1978.

Bibliografía

- [53] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.*, US Government printing office, 1948, vol. 55.
- [54] A. M. Schakel, *Boulevard of broken symmetries: effective field theories of condensed matter.*, World Scientific Publishing Company, 2008.
- [55] T. Ohta and D. Jasnow, "Xy model and the superfluid density in two dimensions," *Physical Review B*, vol. 20, no. 1, p. 139, 1979.
- [56] H. Weber and P. Minnhagen, "Monte carlo determination of the critical temperature for the two-dimensional xy model," *Physical Review B*, vol. 37, no. 10, p. 5986, 1988.
- [57] S. Nakatsuji, N. Kiyohara, and T. Higo, "Large anomalous hall effect in a non-collinear antiferromagnet at room temperature," *Nature*, vol. 527, no. 7577, pp. 212–215, 2015.
- [58] A. K. Nayak, J. E. Fischer, Y. Sun, B. Yan, J. Karel, A. C. Komarek, C. Shekhar, N. Kumar, W. Schnelle, J. Kübler *et al.*, "Large anomalous hall effect driven by a nonvanishing berry curvature in the noncolinear antiferromagnet mn₃ge," *Science advances*, vol. 2, no. 4, p. e1501870, 2016.
- [59] H. Chen, Q. Niu, and A. H. MacDonald, "Anomalous hall effect arising from noncollinear antiferromagnetism," *Physical review letters*, vol. 112, no. 1, p. 017205, 2014.
- [60] J. Kübler and C. Felser, "Non-collinear antiferromagnets and the anomalous hall effect," *Europhysics Letters*, vol. 108, no. 6, p. 67001, 2014.
- [61] Y. Zhang, Y. Sun, H. Yang, J. Železný, S. P. Parkin, C. Felser, and B. Yan, "Strong anisotropic anomalous hall effect and spin hall effect in the chiral antiferromagnetic compounds Mn₃ X (X= Ge, Sn, Ga, Ir, Rh, and Pt)," *Physical Review B*, vol. 95, no. 7, p. 075128, 2017.
- [62] O. Busch, B. Göbel, and I. Mertig, "Microscopic origin of the anomalous hall effect in noncollinear kagome magnets," *Physical Review Research*, vol. 2, no. 3, p. 033112, 2020.
- [63] S.-S. Zhang, H. Ishizuka, H. Zhang, G. B. Halász, and C. D. Batista, "Real-space berry curvature of itinerant electron systems with spin-orbit interaction," *Physical Review B*, vol. 101, no. 2, p. 024420, 2020.
- [64] S. Zhang, M. Kang, H. Huang, W. Jiang, X. Ni, L. Kang, S. Zhang, H. Xu, Z. Liu, and F. Liu, "Kagome bands disguised in a coloring-triangle lattice," *Physical Review B*, vol. 99, no. 10, p. 100404, 2019.
- [65] K. Ohgushi, S. Murakami, and N. Nagaosa, "Spin anisotropy and quantum hall effect in the kagomé lattice: Chiral spin state based on a ferromagnet," *Physical Review B*, vol. 62, no. 10, p. R6065, 2000.
- [66] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim, "Experimental observation of the quantum hall effect and berry's phase in graphene," *nature*, vol. 438, no. 7065, pp. 201–204, 2005.
- [67] E. Tang, J.-W. Mei, and X.-G. Wen, "High-temperature fractional quantum hall states," *Physical review letters*, vol. 106, no. 23, p. 236802, 2011.
- [68] T. Fukui, Y. Hatsugai, and H. Suzuki, "Chern numbers in discretized brillouin zone: efficient method of computing (spin) hall conductances," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 74, no. 6, pp. 1674–1677, 2005.

Bibliografía

- [69] W. Fang, A. Raeliarijaona, P.-H. Chang, A. A. Kovalev, and K. D. Belashchenko, "Spirals and skyrmions in antiferromagnetic triangular lattices," *Physical Review Materials*, vol. 5, no. 5, p. 054401, 2021.
- [70] A. Zorko, M. Pregelj, A. Potočnik, J. Van Tol, A. Ozarowski, V. Simonet, P. Lejay, S. Petit, and R. Ballou, "Role of antisymmetric exchange in selecting magnetic chirality in $\text{Ba}_3\text{NbFe}_3\text{Si}_2\text{O}_{14}$," *Physical Review Letters*, vol. 107, no. 25, p. 257203, 2011.
- [71] R. Rietman, B. Nienhuis, and J. Oitmaa, "The ising model on hyperlattices," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 25, no. 24, p. 6577, 1992.
- [72] C. C. Wu, "Ising models on hyperbolic graphs," *Journal of statistical physics*, vol. 85, pp. 251–259, 1996.
- [73] C. C. Wu, "Ising models on hyperbolic graphs ii," *Journal of Statistical Physics*, vol. 100, pp. 893–904, 2000.
- [74] J. A. d'Auriac, R. Mélin, P. Chandra, and B. Douçot, "Spin models on non-euclidean hyperlattices: Griffiths phases without extrinsic disorder," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, no. 4, p. 675, 2001.
- [75] A. J. Kollár, M. Fitzpatrick, and A. A. Houck, "Hyperbolic lattices in circuit quantum electrodynamics," *Nature*, vol. 571, no. 7763, pp. 45–50, 2019.
- [76] G. Wannier, "Antiferromagnetism. the triangular ising net," *Physical Review*, vol. 79, no. 2, p. 357, 1950.
- [77] A. Jahn, Z. Zimborás, and J. Eisert, "Central charges of aperiodic holographic tensor-network models," *Physical Review A*, vol. 102, no. 4, p. 042407, 2020.
- [78] A. Pelizzola and M. Pretti, "Properties of some mean-field-like approximations for the triangular ising antiferromagnet," *Physical Review B*, vol. 60, no. 14, p. 10134, 1999.
- [79] B. Placke and N. P. Breuckmann, "Random-bond ising model and its dual in hyperbolic spaces," *Physical Review E*, vol. 107, no. 2, p. 024125, 2023.
- [80] E. Witten, "Anti de sitter space and holography," *arXiv preprint hep-th/9802150*, 1998.
- [81] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," *Physics Letters B*, vol. 428, no. 1-2, pp. 105–114, 1998.
- [82] J. Zaanen, Y. Liu, Y.-W. Sun, and K. Schalm, *Holographic duality in condensed matter physics*, Cambridge University Press, 2015.
- [83] M. Pretko, X. Chen, and Y. You, "Fracton phases of matter," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 35, no. 06, p. 2030003, 2020.
- [84] R. M. Nandkishore and M. Hermele, "Fractons," *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 295–313, 2019.
- [85] M. Pretko, "Emergent gravity of fractons: Mach's principle revisited," *Physical Review D*, vol. 96, no. 2, p. 024051, 2017.
- [86] H. Yan, O. Benton, L. D. Jaubert, and N. Shannon, "Rank-2 $u(1)$ spin liquid on the breathing pyrochlore lattice," *Physical Review Letters*, vol. 124, no. 12, p. 127203, 2020.
- [87] A. Jahn, M. Gluza, F. Pastawski, and J. Eisert, "Holography and criticality in match-gate tensor networks," *Science advances*, vol. 5, no. 8, p. eaaw0092, 2019.
- [88] B. Swingle, "Entanglement renormalization and holography," *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, vol. 86, no. 6, p. 065007, 2012.

Bibliografía

- [89] P. Calabrese and J. Cardy, "Entanglement entropy and quantum field theory," *Journal of statistical mechanics: theory and experiment*, vol. 2004, no. 06, p. P06002, 2004.
- [90] S. Vijay, J. Haah, and L. Fu, "Fracton topological order, generalized lattice gauge theory, and duality," *Physical Review B*, vol. 94, no. 23, p. 235157, 2016.
- [91] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics.*, Elsevier, 2016.
- [92] R. L. Jack, L. Berthier, and J. P. Garrahan, "Static and dynamic length scales in a simple glassy plaquette model," *Physical Review E*, vol. 72, no. 1, p. 016103, 2005.
- [93] J. P. Garrahan and M. Newman, "Glassiness and constrained dynamics of a short-range nondisordered spin model," *Physical Review E*, vol. 62, no. 6, p. 7670, 2000.
- [94] H. Yan *et al.*, "Hyperbolic fracton model, subsystem symmetry, and holography," *Physical Review B*, vol. 99, no. 15, p. 155126, 2019.
- [95] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "Black hole in three-dimensional spacetime," *Physical review letters*, vol. 69, no. 13, p. 1849, 1992.
- [96] Y.-P. Zhang, S.-W. Wei, and Y.-X. Liu, "Topological approach to derive the global hawking temperature of (massive) btz black hole," *Physics Letters B*, vol. 810, p. 135788, 2020.
- [97] H. Yan, C. B. Jepsen, and Y. Oz, "*p*-adic holography from the hyperbolic fracton model," *arXiv preprint arXiv:2306.07203*, 2023.
- [98] H. Yan *et al.*, "Hyperbolic fracton model, subsystem symmetry, and holography. II. the dual eight-vertex model," *Physical Review B*, vol. 100, no. 24, p. 245138, 2019.
- [99] S. K. Baek, H. Shima, and B. J. Kim, "Curvature-induced frustration in the $x y$ model on hyperbolic surfaces," *Physical Review E*, vol. 79, no. 6, p. 060106, 2009.
- [100] A. Lastretti, A. Costa Duran, and M. B. Sturla, "XY model on hyperbolic tessellations," *En preparación*, 2024.
- [101] D. Saraidaris and A. Jahn, "Critical spin models from holographic disorder," *arXiv preprint arXiv:2409.17235*, 2024.
- [102] P. Basteiro, G. Di Giulio, J. Erdmenger, J. Karl, R. Meyer, and Z.-Y. Xian, "Towards explicit discrete holography: Aperiodic spin chains from hyperbolic tilings," *SciPost Physics*, vol. 13, no. 5, p. 103, 2022.