Sistemas Dinámicos y Aplicaciones

Mariano A. Ferrari[1,3], José M. Urriza[2], Paola A. Bonfili[1], M. Cecilia Pérez[1], Estela A. Saavedra[1], Diana I. Roberts[1], Sonia M. Soulier[1]

[1] Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.
Puerto Madryn, Argentina. Tel: +54 280-4472885

[2] Departamento de Informática, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.
[3] Centro Nacional Patagónico - CONICET

mferrari7@gmail.com, josemurriza@unp.edu.ar, p_bonfili@hotmail.com

Resumen

La Teoría de sistemas dinámicos abarca una gran variedad de problemas, técnicas y aplicaciones, y ha crecido en estrecha vinculación con otras disciplinas. Este proyecto se propone avanzar en el conocimiento referido a algunas líneas de investigación y sus aplicaciones:

- *Análisis de oscilaciones en sistemas dinámicos.*

- *Modelos no lineales y dinámica de poblaciones.*

- *Sistemas dinámicos no lineales, discretos y determinísticos, vinculados a sistemas de tiempo real.*

Contexto

El proyecto es financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco y el equipo de trabajo está integrado por docentes de las distintas sedes de dicha Universidad.

Introducción

La Teoría de sistemas dinámicos ha tenido un crecimiento continuo a través del siglo XX, desde los trabajos de Poincaré y Birkhoff, integrando durante su desarrollo una amplia variedad de técnicas matemáticas. La teoría ha crecido, a su vez, siempre vinculada con otras disciplinas en un continuo intercambio de problemas, técnicas y aplicaciones. Particularmente, en los últimos cuarenta años hubo un creciente interés en el estudio de sistemas dinámicos no lineales, el desarrollo de herramientas computacionales para estudiar estos sistemas, y la aplicación de estas herramientas a un número importante de problemas que abarcan temas de física, biología, ecología, economía, ingeniería y ciencias de la computación [6].

Los sistemas dinámicos autónomos suelen representarse a través de ecuaciones diferenciales, en su versión continua:

$$x'(\mathrm{t}) = f(x(t))$$

o ecuaciones en diferencia en su versión discreta:

$$x(t) = f(x(t\text{-}1)),$$

dónde en ambos casos $x(t)$ representa la evolución de un vector a través del tiempo.

Análisis de Oscilaciones en Sistemas Dinámicos

Los comportamientos oscilatorios aparecen en una gran cantidad de sistemas que modelan aplicaciones de ingeniería y biología. Para determinar las condiciones que producen las oscilaciones, ya sea para evitarlas, reducirlas o modificarlas, se requieren métodos apropiados [13,15]. Es de particular interés y aplicación el estudio de la dinámica y la caracterización de *bifurcaciones* en sistemas continuos cuyos modelos pueden formularse a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las bifurcaciones se producen cuando, al variar los parámetros, la estructura cualitativa del sistema cambia radicalmente, apareciendo o desapareciendo, por ejemplo, puntos de equilibrio o ciclos límite.

Dinámica de poblaciones y monitoreo de especies silvestres

En los últimos veinte años la utilización de modelos matemáticos en el análisis poblacional y, en ecología en general, se ha transformado en un componente importante para la investigación de los procesos y estructuras subyacentes. Los modelos son una forma de integrar la gran variedad de datos disponibles en un marco cuantitativo que permite evaluar el estado actual y las consecuencias de diferentes acciones de manejo y conservación.

Más allá de la descripción de un sistema dinámico determinista, que puede ayudar a entender e interpretar la evolución de una población, en general los datos de muestreo presentan un nivel de incertidumbre y complejidad que debe ser tenido en cuenta y no pueden ser contrastados directamente con el modelo determinista. La inferencia y predicción requiere el entendimiento no solo del componente dinámico sino también de la estocasticidad inherente al proceso y a la obtención de los datos [4]. Un esquema general puede representarse a través de dos ecuaciones, correspondientes al proceso y observación del sistema respectivamente:

$$x(t) = f(x(t-1)) + \varepsilon(t)$$
$$y(t) = g(x(t)) + w(t)$$

Donde $y(t)$ representa las observaciones, $\varepsilon(t)$ los errores de proceso o estocasticidad ambiental y $w(t)$ los errores de observación. La función g sintetiza las características del muestreo con los desvíos sistemáticos asociados. Ambas funciones, f y g, pueden tener varios parámetros a estimar, además de la variación estocástica, lo que presenta un marco complejo donde evaluar y proyectar los posibles escenarios presentes y futuros. En este contexto cobra vital importancia el desarrollo de herramientas computacionales de análisis y simulación para la aplicación y validación de los modelos implementados.

Existen localmente datos de monitoreo y estudios poblacionales referidos a especies silvestres. Estos datos presentan características particulares y requieren para su interpretación el desarrollo de herramientas teóricas específicas [5]. El monitoreo de especies silvestres es una práctica fundamental para la protección del medio ambiente y la biodiversidad y es de esperar que el desarrollo de modelos particulares favorezca la construcción de mejores herramientas de predicción y control, y la detección de posibles amenazas para el medio ambiente.

Sistemas discretos y determinísticos aplicados en Sistemas de Tiempo Real.

Los Sistemas de Tiempo Real se caracterizan como sistemas dinámicos no lineales, discretos y determinísticos [22]. Su estudio permitirá desarrollar herramientas matemáticas de análisis, buscando reducir el número de iteraciones, los intervalos de búsqueda de las soluciones y otros problemas relacionados. En particular, este tipo de sistemas modela el comportamiento bajo algunas disciplinas de planificación de los Sistemas de Tiempo Real. La planificación de tareas es, en la actualidad, un componente importante en las comunicaciones multimedia, los sistemas de control, la exploración espacial, etc. Por ello, es importante reducir el costo de cálculo de los modelos implementados.

Líneas de Investigación y Desarrollo

El trabajo del grupo se centra principalmente en el desarrollo teórico matemático de los problemas vinculados a las líneas de investigación planteadas así como el estudio de los problemas relacionados con la aplicación de los modelos desarrollados y la evaluación y validación de dichos modelos a través de simulaciones experimentales.

Existen distintas formas de abordar el estudio de las oscilaciones en sistemas no lineales, en esta nuestro trabajo se combinarán la teoría de control [2, 15, 16] y la teoría de singularidades [1, 10, 21] con el fin obtener herramientas de análisis más eficaces. La bifurcación de Hopf es uno de los comportamientos oscilatorios más simples donde el ciclo límite que aparece, puede ser estable o inestable, dando lugar a diferentes comportamientos [13].

Por otro lado la teoría de sistemas autónomos, monótonos y homogéneos, tanto en el caso discreto como continuo [9, 11, 18] conformará la base sobre la que construir y analizar modelos deterministas de dinámica poblacional procurando una progresiva complejización de los mismos. Se procurará además la inclusión de componentes estocásticos que permitan considerar los errores de observación y proceso [3], así como las características de los datos de muestreo [14].

En los Sistemas de Tiempo Real los algoritmos de cálculo de planificabilidad y de cálculo de tiempo ocioso se basan en la búsqueda iterativa de un punto fijo del sistema dinámico. Consecuentemente, el estudio de estos sistemas procura la reducción del intervalo de búsqueda y el número de iteraciones para reducir el costo computacional de los algoritmos [22].

Resultados y Objetivos

- *Determinar condiciones de definición y no degeneración para caracterizar y clasificar bifurcaciones dinámicas en el dominio frecuencia* [10,15].

Se han realizado avances en relación a las Bifurcaciones de Hopf [20] y Bifurcaciones de Hopf generalizadas [19]. Se espera aplicar estos resultados en sistemas que modelan circuitos diodo túnel sincronizados en serie [12], y la aparición de múltiples ciclos límites locales en sistemas polinomiales [17].

- *Desarrollar modelos generales aplicables a la descripción dinámica de poblaciones silvestres.*

Se han estudiado y aplicado modelos no lineales de dos sexos que incluyen factores sociales en la descripción del sistema de apareamiento [7]. Estos factores pueden tener profundas influencias sobre la dinámica y no se ha desarrollado aún un marco general de análisis que permita integrar la estructura social con el sistema de apareamiento en la demografía.

- *Desarrollar herramientas matemáticas y computacionales relacionadas con el monitoreo y la evaluación de especies silvestres, que integren las características y complejidad de los datos de muestreo disponibles.*

Se han evaluado series temporales de abundancia de la Población del Elefante marino del Sur en Península Valdés en un marco estocástico y se ha utilizado un modelo para la proyección de escenarios posibles para la tendencia futura de la población [8].

- *Desarrollar modelos y algoritmos aplicables a los Sistemas de Tiempo Real.*

Formación de Recursos Humanos

Se prevé la finalización de dos tesis de Maestría en Matemática y la realización de un par de cursos de posgrado, uno de los cuales se encuentra en etapa de evaluación dictado por Dr. Jorge Moiola y contó con la participación de docentes y alumnos de la Universidad y profesionales del medio.

Referencias

[1] Bonfili, P. 1999. *Teoria de Singularidades en el estudio de Bifurcación*. Tesis de Magister. Universidad Nacional del Sur.

[2] Chen, G. Ed. 1999. *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, CRC Press, Boca Raton, Estados Unidos.

[3] Clark, James S. 2007. *Models for ecological data*. Princeton University Press.

[4] Clark, J.S. y Bjørnstad, O.N. 2004. Population time series: process variability, observation errors, missing values, lags, and hidden states. *Ecology* 85(11), 3140-3150.

[5] Croxall, J.P., F. Quintana, M.A. Ferrari. 2008. Indicadores: Tendencias de las poblaciones de especies seleccionadas, en: *Estado de Conservación del Mar Patagónico y Áreas de Influencia - versión electrónica*. Puerto Madryn, Argentina. Edición del Foro para la Conservación del Mar Patagónico y Áreas de Influencia, disponible: http://www.marpatagonico.org

[6] Devaney, R.L., 1989. *An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd edn*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. USA.

[7] Ferrari, M.A, M.N. Lewis, M.A. Pascual, C. Campagna. 2009. Interdependence of social structure and demography in the Southern elephant seal colony of Península Valdés, Argentina. *Marine Mammal Science* 25(3), 681-692.

[8] Ferrari, M.A., C. Campagna, M.N. Lewis. 2010. Projecting demographic scenarios for a southern elephant seal population, en: Gil-Lafuente A., J. Merigó, *Computational intelligence in business and economics, Proceedings of the MS'10 International Conference*, Barcelona, España. World Scientific Publishing Co.

[9] Gaubert, S. y Gunawardena, J., 2004. The Perron-Frobenius theorem for homogeneous, monotone functions. *Transactions of the American Mathematical Society* 356, 4931-4950.

[10] Golubitsky, M. y Schaeffer D.G. 1985. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory I*, Applied Math. Sciences, Vol. 51, Springer-Verlag, Nueva York.

[11] Hadeler, K. P., Waldstätter, R. y Wörz-Busekros, A. 1988. Models for pair formation in bisexual populations. *Journal of Mathematical Biology* 26, 635-649.

[12] Heinrich, M., T. Dahms, V. Flunkert, *et al*. 2010. Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements. *New Journal of Physics*, Vol. 12 no. 113030.

[13] Kuznetsov, Yu.A. 2004. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Math. Sciences, Vol. 112, tercera edición, Springer-Verlag, Nueva York.

[14] Little, R.J.A. y D.B. Rubin. 2002. *Statistical analysis with missing data 2nd ed*. Wiley-Interscience.

[15] Mees A. I. 1981. *Dynamics of Feedback Systems*. John Wiley and Sons, Chichester.

[16] Moiola, J.L. y Chen G.R. 1996. *Hopf Bifurcation Analysis. A Frequency Domain Approach*, World Scientific Series on Nonlinear Sciences, Vol. 21, World Scientific Pub., Singapur.

[17] Pei Yu and Guanrong Chen Nonlinear Dynamics. 2008. Computation of focus values with applications. *Nonlinear Dynamics*, Volume 51, Number 3, pp. 409-427.

[18] Smith, Hal L. 1995. *Monotone Dynamical Systems*. American Mahematical Society.

[19] Torresi, A.; Bonfili, P.; Calandrini, G. L. *et al*. 2011. Generalized Hopf bifurcation using a frequency-domain formulation. *International Journal Of Bifurcation And Chaos* 0218-1274

[20] Torresi, A.; Calandrini, G. L.; Bonfili, P.; Moiola, J.L. 2011. Caracterización de formas normales de bifurcaciones de Hopf en el dominio frecuencia. Actas III Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI´2011).

[21] Torresi, A.; Calandrini G.L. y Moiola, J.L. 2009. El método gráfico de Hopf y la teoría de singularidades. XIII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, Universidad Nacional de Rosario, Rosario, pp. 335-340.

[22] Urriza, J.M.; Cayssials, R. y Orozco, J. D. 2008. Modelado de Sistemas de Tiempo Real Planificados por RM o DM: Caracterización y Análisis. XXXIV Conferencia Latinoamericana de Informática. CLEI 2008 Santa Fe, Argentina.