Variables de estado, una metodología de enseñanza

Attilio Gabriel – Lavagna María Elba
IMAPeC. Departamento de Fisicomatemática.
Facultad de Ingeniería de la U.N.L.P 1 y 47. La Plata. Argentina
melavagna@yahoo.com.ar gabrielattilio@infovia.com.ar

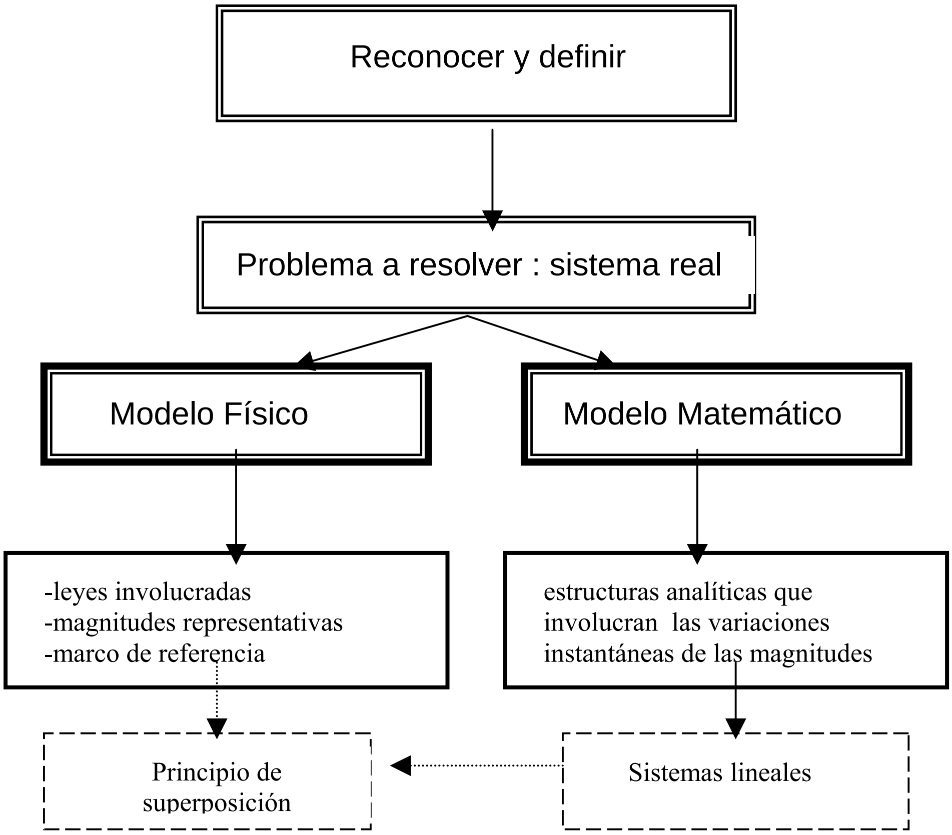
Sumario:
La propuesta que se presenta de enseñanza, para cursos básicos de la carrera de ingeniería, tiende a fortalecer la adquisición del conocimiento significativo de magnitudes que se emplean en los cursos de Física y Matemática.
La misma se desarrolla en iguales tiempos académicos que el empleado en la enseñanza tradicional de estos conceptos. Pero existe una diferencia sustancial en relación a la complejidad y generalidad de los problemas a resolver a favor de esta nueva presentación y tratamiento de las magnitudes escalares y vectoriales.
Esto se debe a que con el apoyo en el aula de programas como el Matlab, Maple, Derive, etc, los alumnos pueden concentrar su atención en el análisis del diseño del modelo que describe la situación problemática, en los resultados tanto numéricos como gráficos, ya que los cálculos simplemente los realizan a través de estos programas.

Palabras claves: metodología – escalares – vectores – variables de estado - Matlab

Introducción:
En los cursos de Física y Matemática básica se trabaja con modelos vectoriales para ciertas magnitudes y modelos escalares para otras.
La importancia de que estas magnitudes sean comprendidas en toda su dimensión , no se logra solo con definirlas para su representación analítica y gráfica en tres dimensiones. Existen casos especiales de relevancia tanto conceptual como operativo, en que la magnitud vectorial no esta limitada al espacio euclidiano. En general estos casos no se analizan en los cursos básicos, precisamente por su complejidad operativa.
La pregunta es, ***¿se debe sólo tratar los sistemas más simples en la formación básica, o apoyándonos con herramientas informáticas, tratar casos más generales y por lo tanto más comparable con los casos reales?***
Pensamos que el alumno actual tiene el beneficio de la tecnología informática y por lo tanto debe poder desempeñarse de acuerdo a este adelanto .
Tampoco se prepara en general al alumno para que integre el modelo físico con herramientas matemáticas que contengan magnitudes de n dimensiones.
Un ejemplo es que en Electromagnetismo clásico por lo dicho anteriormente, cuando se estudia el comportamiento de la materia frente a los campos, la misma siempre se considera homogénea e isótropa. Es decir las propiedades de la materia están representadas por valores escalares. Pero si el medio no cumpliese con estas condiciones enunciadas, dichas propiedades se deben representar con otro tipo de magnitud como los vectores o, más general, los tensores cartesianos.
Este planteo se puede pensar que acumularía tiempo académico en el desarrollo de las materias, pero no es necesario que esto ocurra, solo se debe replantear el material a trabajar y la metodología en la clase introduciendo las herramientas que nos brindan los utilitarios como el Matlab , el Matemática o el Maple, en los cuales se pueden operar con vectores y tensores en espacios de más de tres dimensiones, en tiempos reales de clase para su calculo. La realización de actividades con esta estructura, nos brinda la posibilidad de iniciar al alumno en los diseños matriciales, que son

estructuras básica que se emplean para generar modelos matemáticos que representen sistemas reales, tarea importante para un profesional de la Ingeniería.

Propuesta de trabajo en el aula



En nuestro trabajo nos limitaremos a estudiar fenómenos que se puedan tratar como sistemas lineales. La importancia de estos sistemas se basan en el numero de situaciones en la Física que son representados de esta manera y en donde es válido el Principio de Superposición.
Estos sistemas son estudiados en la curricula actualmente en la mayoría de los cursos universitarios básico, mediante un modelo matemático basado en las magnitudes como por ejemplo en la Mecánica lo son la posición, la velocidad y la aceleración. Las anteriores magnitudes estarán relacionadas mediante ecuaciones diferenciales, las cuales o los alumnos a esa altura de la carrera no están aun en posibilidades de resolver o que no tendrán solución exacta.
Nuestra propuesta es que se comience con situaciones muy sencillas que puedan ser representadas mediante el **modelo de variable de estado**, que llevan a modelos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que en su mayoría tendrán soluciones que se podrán simular mediante los programas de calculo informáticos .

“ Un modelo de estado es un modelo de ecuación diferencial que se expresa en un formato especial que ofrece un método unificado para el estudio de sistemas. El modelo de estado es particularmente ventajoso cuando se aplica a simulación y el modelo de estado lineal proporciona el fundamento matemático para un importante conjunto de técnicas de análisis y diseño. Si un sistema es lineal el modelo de estado se puede expresar utilizando la ecuación matricial que mantiene el mismo formato sin tomar en consideración el orden del sistema”. [1]

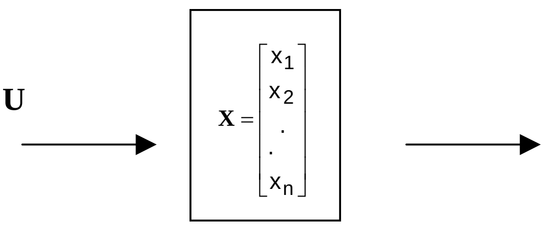
[1] ***Paul H. Lewis-Chang Yang. Sistemas de control en Ingeniería. Editorial Prentice Hall. 1999***

Este modelo nos brinda la importante posibilidad de ampliar la idea de vector ya no desde el punto de vista geométrico (como se la inicia en la Matemática básica) , sino de considerarlo como un ente matemático representado por una n-upla, cuyas componentes ya no son segmentos orientados en direcciones particulares; en los tipos de sistemas elegidos, podemos definir vectores cuyas componentes son variables del sistema que llamaremos **variables de estado**. Estas variables de estado deben ser seleccionadas cuidadosamente de forma que cualquiera de ellas no sean combinación lineal de las otras.
Mediante este modelo, llegaremos a representar al sistema mediante una ecuación vectorial de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A\,X} + \mathbf{B\,U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C\,X} + \mathbf{D\,U} \end{cases}$$

- ✓ **X** es el vector de la variable de estado
- ✓ $\dot{\mathbf{X}}$ es el vector variación temporal de la variable de estado
- ✓ **U** es un vector determinado por las interacciones exteriores o entradas al sistema
- ✓ **Y** es un vector constituido por las variables de salida que nos interesa conocer del sistema
- ✓ **A, B, C, D** son matrices representativas del sistema.

El sistema se puede así representar de forma sencilla como un bloque que contendrá las variables de estado, una o varias entradas representadas por el vector **U** y la salida, representada por el vector **Y**.



De la lectura de ecuaciones lineales diferenciales del modelo, se concluye que :

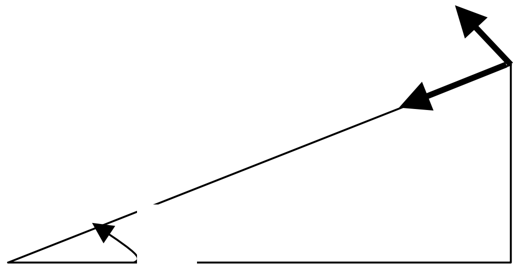
- ✓ La primera ecuación nos permite visualizar la evolución temporal del sistema mediante una relación lineal entre las variables de entrada y de estado.
- ✓ La segunda ecuación da la relación lineal entre la variables de salida con las variables de entrada y de estado.

El tamaño de los vectores y matrices involucradas dependerá del sistema analizado.

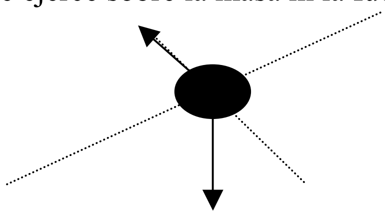
Ejemplos desarrollados utilizando modelos lineales de variables de estado
Los tres ejemplos que se desarrollan en orden de complejidad se desarrollan de acuerdo con lo establecido en el esquema de la introducción

I- Cuerpo que cae sobre un plano inclinado sin roce
Se analiza el movimiento de una partícula de masa m sobre un plano inclinado de ángulo α sin roce.
A-Lo resolvemos en forma tradicional
El sistema de ejes coordenados cartesianos asociado al plano es tal que el eje x es paralelo a la superficie del plano y el eje y es normal a la superficie del plano

Condiciones iniciales :
a- la posición coincide con el origen de coordenadas elegido
b- la partícula parte desde el reposo



Interacciones con agentes exteriores:
a-La superficie del plano, la cual al no tener roce solo ejercerá sobre el cuerpo de masa m una fuerza perpendicular que denominamos normal (N)
b-El planeta Tierra, que ejerce sobre la masa m la fuerza de atracción gravitatoria o peso (P)



Por otro lado, al trabajar con el modelo de Tierra plana consideramos que la fuerza de atracción gravitatoria tiene la dirección vertical y adopta el valor (con masa m constante) m g , donde g = 9. 81 $\frac{m}{s^2}$ constante.

Trabajando dentro del marco newtoniano, al aplicar la segunda ley de Newton obtenemos

$$\sum \vec{F} = \frac{d\left(m\,\vec{v}\right)}{dt} = m\,\frac{d^2\,\vec{r}}{dt^2}$$

La anterior es una ecuación no algebraica, que tiene por incógnita la función $\vec{r}(t)$, que es una función vectorial que representa el vector posición en función del tiempo. La trabajaremos por sus componentes cartesianas.

Trabajando con el sistema de ejes coordenados indicado, llegamos a dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\sum F_x = P\ \mathrm{sen}\ \alpha = m\,a_x = m\,\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}$$

$$\sum F_y = N - P\cos\alpha = m\,a_y = m\,\frac{d^2\,y(t)}{dt^2}$$

En nuestra situación, el cuerpo solo se mueve sobre el plano o sea en la dirección del eje x , entonces la componente de la aceleración $a_y = 0$.Por lo tanto,

$$\sum F_x = g \operatorname{sen} \alpha = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\sum F_y = N - P \cos \alpha = 0$$

Por ser sencillas , podemos resolverlas integrando cada termino, entonces

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = \int \frac{d^2 x(t)}{dt^2} dt = \int g \operatorname{sen} \alpha \, dt \Rightarrow \frac{d\,x(t)}{dt} = g \operatorname{sen} \alpha \; t + C_1$$

$$\frac{dy\,(t)}{dt} = \int \frac{d^2 y\,(t)}{dt^2} dt = C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes que dependerán de las condiciones iniciales para la velocidad. En nuestro caso, C1 = C2 =0, por partir el cuerpo desde el reposo. Entonces, queda que

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = g \operatorname{sen} \alpha \; t$$

$$\frac{dy\,(t)}{dt} = 0$$

Volviendo a integrar , llegamos a que

$$x(t) = \int \frac{d\,x(t)}{dt} dt = g \operatorname{sen} \alpha \, \frac{t^2}{2} + C_3$$

$$y(t) = \int \frac{dy\,(t)}{dt} dt = C_4$$

donde C_3 y C_4 son otra vez constantes que dependerán de las condiciones iniciales para la velocidad. En nuestro caso, C3 = C4 =0

Por lo tanto, la ecuación de la posición del cuerpo en función del tiempo será

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = g \operatorname{sen} \alpha \, \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

lo que representa la ecuación paramétrica de una recta y la función velocidad en función del tiempo estará dada por

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = g \operatorname{sen} \alpha \; t \\ v_y(t) = 0 \end{cases}$$

B- Lo resolvemos con el modelo de variable de estado

Observamos que al plantear el problema a partir de las magnitudes posición y velocidad, nos condujo a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, que en este caso por integración directa fueron fáciles de resolver. Pero no siempre será de esa forma.

Formularemos el problema desde el punto de vista del modelo de variables de estado para poder aplicar una simulación mediante el programa Matlab.

En nuestro problema, consideraremos solo el movimiento en la dirección del plano. Por lo tanto solo trabajaremos con la ecuación: $\ddot{x} = g \operatorname{sen} \alpha$

Entonces, adoptaremos como variables de estado a :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$

A partir de las definiciones de las variables de estados , podemos escribir las ecuaciones diferenciales del problema de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

Las anteriores ecuaciones constituyen nuestro modelo de variables de estado.
Se lleva a la forma matricial en donde se distinguen dos elementos :

- ✓ el término que representa las variables de estado.
- ✓ el término que representa las variables exteriores o de entrada.

Se forma un vector **X** de 1 columna y tantas filas como variables de estado tenga el sistema ; en nuestro problema es de 2 filas .Se lo anota como un vector de 2 x 1.

De igual manera al vector $\dot{\mathbf{X}}$ que tenga por filas a las derivadas primeras de las variables de estado.
Se arma la matriz **A** con tantas filas y columnas como variables de estado tenga el sistema. Sus elementos serán los valores que multipliquen en las ecuaciones de primer orden a las variables de estado , colocadas en orden.
El elemento a $_{i\,j}$ es el que se encuentra en la fila correspondiente a la derivada de la variable de estado i y que multiplique en la ecuación diferencial a la variable de estado j.
Al armar la matriz **B** , debemos tener en cuenta solo las interacciones del sistema con agentes exteriores que llamaremos entradas , en nuestro caso de g.
Esta matriz tendrá tantas filas como variables de estado y tantas columnas como agentes exteriores. Para nosotros hay solo una .Podemos entonces escribir las anteriores ecuaciones como la suma de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + g \operatorname{sen} \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, como vector salida se considera al vector cuyas componentes son la posición x y la velocidad v. Entonces la ecuación de salida es :

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En nuestro caso, la ecuación de salida no depende de las variables de entrada.
El Matlab trae un paquete que permite simular la actuación del sistema bajo una entrada constante durante todo el tiempo, como es en este caso. Dicha función es el escalón unitario o STEP

```
% simulación de un movimiento en un plano inclinado
% ingreso de los datos
g = 10;
n = input ('Entre el número de simulaciones a realizar');
for  i = 1:n
alfa = input('ángulo de inclinación alfa = ');
%entrada de las matrices del sistema
A=[0 1;0 0];
B=[0 ;g*sin(alfa)];
C=[1 0;0 1];
D=[0;0];
tiempo=[0:0.1:9.9];
x=step(A,B,C,D);
figure(1)
plot(tiempo',x(1:100,1))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('posición')
figure(2)
plot(tiempo',x(1:100,2))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('velocidad')
hold on
end
grid
hold off
```

II- Movimiento armónico simple
Este tipo de movimiento esta representado por una ecuación de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0$$

donde x (t) es la posición en función del tiempo , ω_n es la frecuencia natural o característica del sistema. Por ejemplo, para un sistema masa-resorte, sabemos que $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; para un péndulo ideal, $\omega_n = \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Esta ecuación diferencial de segundo orden se podría resolver por métodos conocidos del Análisis Matemático. Pero es más sencillo llevarlo a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y la respuesta del sistema interpretarla por la simulación que nos brinda la herramienta informática como es el Matlab.
Se trabaja con la ecuación característica, se seleccionan como las variables de estado

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$

por lo que tendremos el sistema de ecuaciones de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 \end{cases}$$

que nos conducen al siguiente sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Cómo variables de salida podemos adoptar la posición x y la velocidad v , entonces por las transformaciones adoptadas tendremos que

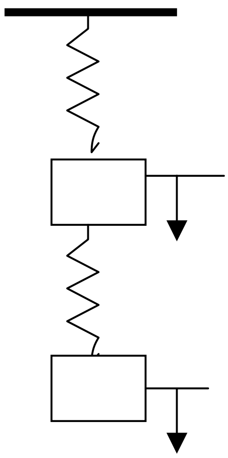
$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Como es sabido de la Física elemental , aquí es necesario trabajar con condiciones iniciales; formaremos un vector llamado $\mathbf{x_o}$, constituido por una columna y tantas filas como condiciones iniciales se requieran. En nuestro caso se requieren solo dos.
El paquete Matlab trae dentro la función INITIAL, que nos simulara la evolución del sistema bajo condiciones iniciales.
A continuación colocamos el programa construido para simular el MAS de un sistema masa-resorte.

```
% Simulación de MAS
% entrada de datos
k=input( 'constante del resorte');
m=input('masa del sistema ');
wn=sqrt(k/m);
A=[0 1;-1*wn*wn 0];
B=[0;0];
C=[1 0;0 1];
D=[0;0];
tiempo=[0:0.1:9.9];
% introducir las condiciones iniciales
xi=input('posicion inicial=');
vi=input('velocidad inicial=');
xo=[xi;vi];
x=initial(A,B,C,D,xo);
figure(1)
plot(tiempo',x(1:100,1))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('posición')
figure(2)
plot(tiempo',x(1:100,2))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('velocidad')
```

III- Movimiento de dos masas

Se simula el movimiento de un sistema más complicado, el de dos masa unidas por resortes, esquematizado en el gráfico siguiente



Las ecuaciones para cada masa , de acuerdo con la segunda ley de Newton , forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - k_2 (y_1 - y_2) - k_1 y_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - k_2 (y_2 - y_1) \end{cases}$$

Trabajando un poco con la anterior, llegamos a que

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = g - \dfrac{k_2}{m_1}(y_1 - y_2) - \dfrac{k_1}{m_1} y_1 \\ \ddot{y}_2 = g - \dfrac{k_2}{m_2}(y_2 - y_1) \end{cases}$$

La resolución de este sistema por integración directa es más compleja y difícil. Por lo tanto, son en estas situaciones donde se valoriza la potencialidad del método de variables de estado.
Se definen las siguientes de variables de estado

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{x}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

con lo que se tiene que las ecuaciones diferenciales se expresan como

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = g - \dfrac{k_2}{m_1}(x_1 - x_3) - \dfrac{k_1}{m_1} x_1 \\ \dot{x}_4 = g - \dfrac{k_2}{m_2}(x_3 - x_1) \end{cases}$$

Esto puede ser llevado a una ecuación vectorial adoptando un vector **X** , donde sus componentes serán x_1,x_2,x_3 y x_4 . También aparecerá su vector derivado.
La matriz **A** , definida como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & 0 & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y la matriz} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como vector de entrada que depende de agentes exteriores, tendremos solo la acción del peso, mediante la aceleración de la gravedad, entonces **U** = [g] .

Como variables de salida, adoptamos y1, v1, y2 y v2.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ v_1 \\ y_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Programa en Matlab para la simulación del sistema de dos masas

```
% entrada de datos
k1=input( 'constante del resorte 1');
k2=input( 'constante del resorte 2');
m1=input('masa del sistema 1 ');
m2=input('masa del sistema 2 ');
c1=-1*(k1+k2)/m1;
c2=k2/m1;
c3=k2/m2;
A=[0 1 0 0;c1 0 c2 0;0 0 0 1;c3 0 -1*c3 0 ];
B=[0;1;0;1];
C=[1 0 0 0;0 1 0 0; 0 0 1 0;0 0 0 1];
D=[0;0;0;0];
tiempo=[0:0.1:9.9];
% introducir las condiciones iniciales
xi1=input('posicion inicial de 1=');
vi1=input('velocidad inicial de 1=');
xi2=input('posicion inicial de 2=');
vi2=input('velocidad inicial de 2=');
xo=[xi1;vi1;xi2;vi2];
x=initial(A,B,C,D,xo);
figure(1)
plot(tiempo',x(1:100,1))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('posición')
title('función posición del cuerpo 1 en función del tiempo ')
figure(2)
plot(tiempo',x(1:100,2))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('velocidad')
title('función velocidad del cuerpo 1 en función del tiempo ')
figure(3)
plot(tiempo',x(1:100,3))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('velocidad')
title('función posición del cuerpo 2 en función del tiempo ')
figure(4)
plot(tiempo',x(1:100,4))
grid
xlabel('tiempo')
ylabel('velocidad')
title('función velocidad del cuerpo 2 en función del tiempo ')
```

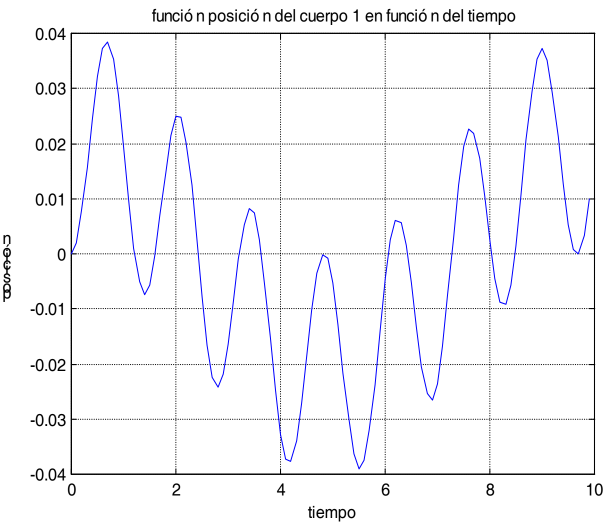
Presentamos a continuación graficos resultantes de una simulación del sistema, con los siguientes datos

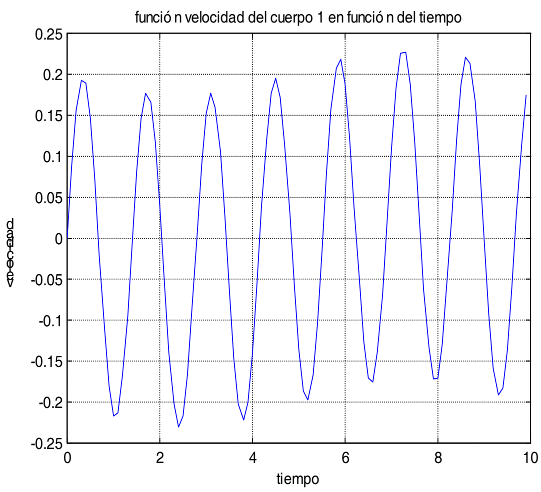
constante del resorte 1= 1000 ,constante del resorte 2=10

masa del sistema 1 =10 , masa del sistema 2 = 5

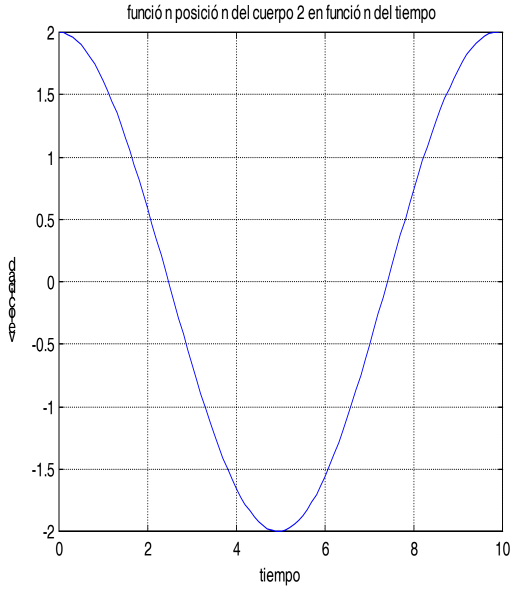
posicion inicial de 1=0 velocidad inicial de 1=0

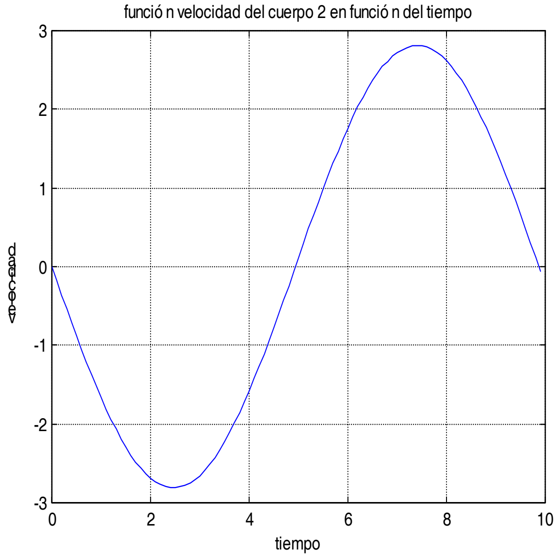
posicion inicial de 2=2 velocidad inicial de 2=0





Gráficas de la simulación del cuerpo 1





Gráficas de la simulación del cuerpo 2

Conclusión:

La transferencia al aula de esta propuesta debería iniciarse en la materia donde el concepto de derivada esté dentro del programa. Es importante que el alumno realice la ejercitación de la estructura matemática pura del modelo de variables de estado, porque de esta manera cuando estudie los contenidos físicos, podrá concentrar su aprendizaje en el diseño matricial que represente la situación problemática planteada, sobre el conocimiento operativo adquirido con las herramientas informáticas en los cursos de matemática.

Es de destacar una vez más que el tratamiento de los temas desarrollados, utilizando los programas de calculo informáticos, independiente del tema, son generadores de aptitudes y actitudes en el alumno, como por ejemplo: familiarizarse con el trabajo grupal, autoaprendizaje, desarrollar la iniciativa de investigar el problema variando condiciones iniciales o de contorno, ya que se optimizan los tiempos de calculo y gráfica ....

Se debe sumar que el uso de utilitarios de calculo, permite al alumno analizar la respuesta de sistemas complejos sin conocer la solución analítica del problema matemático, tarea de interpretación muy importante para dar soluciones de sistemas reales .

Pero tal vez el más importante aprendizaje con esta propuesta sea la de incentivar al diseño, en este caso matricial, a un alumno de ingeniería ya que su trabajo profesional en general es analizar y solucionar problemas donde el número de variables no son precisamente las dimensiones euclidianas.

Bibliografia

LEWIS, Paul y YANG, Chang. Sistemas de control en Ingeniería. Madrid, Prentice Hall, 1997; capítulo IV

OGATA,Katsuhito, Ingeniería de Control.Madrid,Prentice Hall,1999.

ETTER,Delores,Solución de problemas en Ingenieria con Matlab, Méjico,Prentice Hall,1997

TIPLER,Paúl, Física , Barcelona,Reverté,1992, Tomo I y II