



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

Tesis Doctoral

**PROYECCIONES OBLICUAS
y
COMPLEMENTOS DE SCHUR**

Aplicaciones a problemas de cuadrados mínimos, teoría de marcos y
teoría de muestreo

JORGE ABEL ANTEZANA

2006

**Director: Dr. Demetrio Stojanoff
Codirector: Dr. Gustavo Corach**

A mis padres

Índice General

| | |
|--|-----------|
| Introducción | v |
| 1 Operadores sobre espacios de Hilbert | 1 |
| 1.1 Nociones básicas de la teoría de operadores | 1 |
| 1.1.1 Tres topologías localmente convexas | 2 |
| 1.1.2 Teorema espectral | 4 |
| 1.2 Ángulo entre subespacios cerrados | 6 |
| 1.3 Inversas generalizadas. | 9 |
| 1.4 Módulo mínimo reducido | 11 |
| 2 Proyecciones oblicuas y complemento de Schur | 15 |
| 2.1 Teorema de factorización de Douglas. | 15 |
| 2.2 Complemento de Schur en espacios de Hilbert. | 17 |
| 2.3 Proyecciones A -autoadjuntas y compatibilidad | 23 |
| 2.4 Compatibilidad y el complemento de Schur. | 27 |
| 3 Marcos en espacios de Hilbert | 29 |
| 3.1 Definiciones básicas | 29 |
| 3.2 Marcos de Riesz y marcos de Riesz condicionados | 32 |
| 3.3 Marcos de Gabor. | 33 |
| 3.4 Marcos con operador de síntesis idempotente | 35 |
| 4 Proyecciones A-autoadjuntas y marcos de Riesz | 39 |
| 4.1 Problemas de cuadrados mínimos y proyecciones A -autoadjuntas. | 39 |
| 4.2 Proyecciones escaleadas en espacios de dimensión infinita. | 44 |
| 4.3 Aplicaciones a la teoría de marcos | 55 |
| 5 Proyecciones A-autoadjuntas en la teoría de muestreo | 63 |
| 5.1 Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo | 63 |
| 5.1.1 Generación de espacios con núcleo reproductivo | 64 |
| 5.2 Muestreo en espacios de Hilbert | 65 |
| 5.2.1 Nociones básicas | 65 |
| 5.2.2 Procesos de reconstrucción escaleados y regularizados | 70 |
| 5.2.3 Muestreo en espacios de Hilbert reproductivos | 74 |



| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.3 | Un problema de momentos | 77 |
| 6 | Complemento de Schur generalizado | 79 |
| 6.1 | Operadores complementables | 81 |
| 6.2 | Complemento de Schur | 84 |
| 6.3 | Suma y resta paralelas | 90 |
| 6.4 | Fórmulas para el complemento de Schur bilateral | 93 |
| 7 | Complemento de Schur espectral | 97 |
| 7.1 | El orden espectral | 97 |
| 7.2 | Definición del complemento de Schur espectral y sus propiedades básicas . . | 99 |
| 7.3 | Propiedades espectrales del $\rho(A, \mathcal{S})$ | 103 |
| 7.3.1 | Algoritmo para calcular $\rho(A, \mathcal{S})$ en términos de la descomposición es- pectral de A cuando $\dim \mathcal{H} < \infty$ | 106 |
| 7.4 | El caso $\dim \mathcal{S} = 1$ | 108 |
| 7.4.1 | Complejidad de Kolmogorov | 111 |
| 7.5 | Algunos ejemplos. | 114 |

Introducción

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su producto interno y $L(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores lineales acotados definidos sobre \mathcal{H} , y $L(\mathcal{H})^+$ el cono de operadores semidefinidos positivos. Entre los operadores de $L(\mathcal{H})$, el conjunto de proyecciones, i.e. el conjunto de los operadores $Q \in L(\mathcal{H})$ tales que $Q^2 = Q$, ha sido extensamente estudiado desde los comienzos de la teoría espectral. La aplicación de las proyecciones en estadística, teoría de marcos y geometría compleja, entre otras áreas de la matemática, mantiene el interés en esta clase de operadores. Dentro del conjunto de proyecciones, se distingue el subconjunto de las autoadjuntas, denominadas usualmente ortogonales debido a la descomposición del espacio \mathcal{H} que inducen su rango y su núcleo. Es claro que este subconjunto depende fuertemente del producto interno, pues de este dependen las nociones de ortogonalidad y autoadjunción. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ es inversible y definimos:

$$\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ resulta ser un producto interno equivalente al original desde el punto de vista métrico y topológico, pero la noción de ortogonalidad varía. Un momento de reflexión muestra que una proyección Q es autoadjunta respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ si y sólo si $AQ = Q^*A$. Evidentemente, que una proyección cumpla esta condición no es equivalente a que sea autoadjunta, razón por la cual el conjunto de proyecciones ortogonales respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ no coincide con el de proyecciones ortogonales respecto al producto interno original. Sin embargo, dado un subespacio cerrado \mathcal{S} , existe una única proyección A -autoadjunta sobre \mathcal{S} . Dicha proyección está asociada a la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{S} \dot{+} A(\mathcal{S})^\perp$, donde, como fácilmente se puede comprobar, $A(\mathcal{S})^\perp$ es el subespacio formado por los vectores de \mathcal{H} ortogonales a \mathcal{S} con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Cuando el operador positivo A no es inversible, la existencia de una proyección sobre un subespacio cerrado \mathcal{S} que sea autoadjunta respecto al ahora pseudo-producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ es un problema más sutil e interesante. Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ y un subespacio cerrado \mathcal{S} de \mathcal{H} , el conjunto

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{Q \in \mathcal{Q} : R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A\},$$

puede contener un único elemento, infinitos o ninguno. Diremos que el par (A, \mathcal{S}) es compatible si $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ no es vacío. Si el par es compatible, en el conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ se distingue una proyección, que denominaremos $P_{A, \mathcal{S}}$, que es la asociada a la descomposición

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \dot{+} \left(A(\mathcal{S})^\perp \cap (\mathcal{S} \cap A(\mathcal{S})^\perp)^\perp \right).$$



La noción de compatibilidad, distintas caracterizaciones de la misma, como así también diversas fórmulas para la proyección $P_{A,\mathcal{S}}$ han sido estudiadas por Corach, Maestripieri y Stojanoff en [44], [45] y [46]. En particular demostraron que la compatibilidad del par (A, \mathcal{S}) se puede determinar a partir del ángulo de Dixmier entre los subespacios $\overline{A(\mathcal{S})}$ y \mathcal{S} , o a partir del ángulo de Friedrich entre $N(A)$ y \mathcal{S} si el operador A posee rango cerrado. Recordemos que dados dos subespacios cerrados \mathcal{M} y \mathcal{N} del espacio de Hilbert \mathcal{H} , el ángulo de Dixmier entre estos subespacios es el ángulo en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno está definido por:

$$c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

mientras que el ángulo de Friedrich entre ellos, es el ángulo en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno está definido por:

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}), y \in \mathcal{N} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\},$$

Un estudio desde el punto de vista geométrico de la variedad de proyecciones es realizado en [7]. Allí, entre otras cosas, se interpreta geoméricamente el conjunto de operadores positivos e inversibles A tales que una dada proyección Q resulta A -autoadjunta. Vale la pena recordar que dicho conjunto es no vacío, pues siempre el operador $A = Q^*Q + (I - Q)^*(I - Q)$ se encuentra en dicho conjunto.

Las proyecciones están íntimamente relacionadas con las denominadas inversas generalizadas. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert y denotemos por medio de $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al espacio de todos los operadores lineales y acotados de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 . Dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se dice que $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ es una inversa generalizada de T si

$$TBT = T \quad \text{y} \quad BTB = B.$$

Es relativamente fácil ver, a partir de la definición, que TB es una proyección cuyo rango es $R(T)$ y BT es una proyección cuyo núcleo es $N(T)$. Aquella B para la cual tanto TB como BT son autoadjuntas se denomina inversa generalizada de Moore-Penrose, y suele denotarse T^\dagger . Cómo TB es una proyección sobre $R(T)$, es una condición necesaria para la existencia de inversas generalizadas que T tenga rango cerrado. Se puede ver que también es suficiente (ver sección 1.3 Teorema 1.3.2). Es interesante notar que si P es una proyección sobre $R(T)$ y Q es una proyección cuyo núcleo es $N(T)$ entonces

$$B = QT^\dagger P \tag{1}$$

es la inversa generalizada que cumple $TB = P$ y $BT = Q$.

Resulta claro que, dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, la inversa generalizada de Moore-Penrose dependerá de los (pseudo) productos internos que consideremos en los espacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 . Consideremos en \mathcal{H}_1 la forma sesquilineal semidefinida positiva inducida por un operador semidefinido positivo $A_1 \in L(\mathcal{H}_1)$ y en \mathcal{H}_2 la forma sesquilineal semidefinida positiva inducida por un operador semidefinido positivo $A_2 \in L(\mathcal{H}_2)$. Luego, si los pares $(A_1, N(T))$ y $(A_2, R(T))$ son



compatibles, entonces existe una única inversa generalizada de T , que denotaremos T_{A_1, A_2}^\dagger , que satisface

$$TT_{A_1, A_2}^\dagger = P_{A_2, R(T)} \quad \text{y} \quad T_{A_1, A_2}^\dagger T = I - P_{A_1, N(T)}.$$

En efecto, de acuerdo a (1), $T_{A_1, A_2}^\dagger = (I - P_{A_1, N(T)})T^\dagger P_{A_2, R(T)}$.

Tanto las proyecciones como las inversas generalizadas han sido extensamente estudiadas durante los últimos 50 años y aparecen en numerosos problemas de matemática: problemas de cuadrados mínimos, teoría de marcos, teoría de muestreo, teoría de circuitos, etc.

Como hemos notado, para utilizar las técnicas que involucran inversas generalizadas es necesario que los operadores involucrados posean rangos cerrados. Por otro lado, si uno quiere considerar una proyección sobre cierto subespacio, el mismo debe ser cerrado. Esto, en espacios de dimensión infinita, puede resultar un problema técnico importante. Es bien sabido que, en tales espacios, puede ocurrir que la suma de subespacios cerrados no sea un subespacio cerrado o que el producto de operadores con rango cerrado no sea un operador con rango cerrado. Esto hace que, en algunos casos, sea difícil generalizar a espacios de Hilbert cualesquiera propiedades y/o conceptos desarrollados en espacios de dimensión finita, donde todos los subespacios son cerrados. Sin embargo, obtener esta clase de generalizaciones resulta conveniente cuando los datos involucrados en el problema que estamos estudiando son arbitrariamente grandes en tamaño y/o dimensión.

Uno de los principales objetivos de este trabajo es mostrar una serie de casos donde la compatibilidad y la noción de ángulo entre subespacios son la clave para extender ciertos resultados clásicos del análisis matricial a espacios de Hilbert infinito dimensionales. Estos conceptos se hallan implícitos en espacios de dimensión finita, donde todo par (A, \mathcal{S}) es compatible y todo par de subespacios cerrados $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ posee ángulo de Friedrich no nulo. Es por esta razón que muchas veces pasan desapercibidos. Sin embargo, como veremos a lo largo de este trabajo, la extensión de ciertos resultados se basa en una correcta formulación de las condiciones de compatibilidad y de ángulos entre los subespacios intervinientes. Tal es el caso de conocido teorema de Ben-Tal Teboulle, que establece que las soluciones de los problemas de cuadrados mínimos escaleados se encuentran en la cápsula convexa de las soluciones de algunos subsistemas cuadrados no singulares del sistema sin escalear. Bajo hipótesis adecuadas de compatibilidad y de ángulos entre subespacios, en el capítulo 4 extenderemos este resultado a espacios de Hilbert de dimensión infinita. Como veremos, dicha extensión se relaciona con objetos que aparecen en la teoría de marcos y ciertos problemas de momentos. Por otro lado, una formulación correcta de las condiciones de compatibilidad nos permitirá extender la noción de complemento de Schur de matrices a operadores acotados entre espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , y sendos subespacios cerrados $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ (ver capítulo 6). Extensiones de este tipo sólo habían sido hechas, para operadores positivos y un único subespacio por Anderson y Trapp [5]. La noción que nosotros definimos, bajo condiciones de compatibilidad que en espacios de dimensión finita se verifican automáticamente, extiende y unifica las antes mencionadas, y posee las mismas propiedades que el complemento de Schur de matrices. También introducimos la noción de complemento de Schur espectral, donde las proyecciones, a través de las denominadas resoluciones espectrales, también juegan un papel relevante.



El segundo de los objetivos que perseguimos en este trabajo es mostrar que, en algunos casos, las técnicas desarrolladas en torno a las proyecciones A -autoadjuntas, inversas generalizadas y las nociones de ángulo entre subespacios permiten un enfoque más sencillo de algunos problemas. Tal es el caso de ciertos modelos de muestreo y reconstrucción lineal de señales. En el capítulo 5 veremos como un enfoque basado en la técnicas antes mencionados nos permite mejorar ciertas estimaciones del error producido en el proceso de reconstrucción, como así también responder un interrogante planteado por Smale y Zhou en [111]. Un resumen más detallado de los resultados originales de este trabajo se encuentra en la segunda parte de esta introducción.

El trabajo se encuentra organizado del siguiente modo: en los capítulos 1, 2 y 3 se desarrollan los preliminares necesarios para los desarrollos posteriores mientras que en los capítulos 4, 5, 6 y 7 se concentran principalmente los resultados originales. A continuación describiremos brevemente como se hallan distribuidos los resultados preliminares. El capítulo 1 empieza con las definiciones y resultados básicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert, continuando con la definición y propiedades elementales de la noción de ángulos entre subespacios, inversas generalizadas y módulo mínimo reducido. El capítulo 2 comienza con el teorema de factorización de Douglas, que constituye una herramienta importantísima que en varios casos sustituye el uso de inversas generalizadas. Posteriormente introducimos la noción de complemento de Schur, proyecciones A -autoadjuntas y compatibilidad recordando los resultados más importantes. Dicho capítulo concluye con una sección destinada a mostrar la forma en que la compatibilidad se relaciona con el complemento de Schur en el caso de operadores positivos, lo cual constituye la principal motivación para la generalización del complemento de Schur a espacios de Hilbert que realizaremos en el capítulo 6. Finalmente, en el capítulo 3 recordamos las definiciones básicas relacionadas con la teoría de marcos en espacios de Hilbert. En general no incluimos las demostraciones de los resultados mencionados en las secciones preliminares, salvo que las demostraciones sean novedosas. Tal es el caso de las secciones 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2 y por su puesto la sección 3.4 donde también hay resultados nuevos.

Descripción de los resultados originales del trabajo.

Los resultados originales de este trabajo se encuentran en la sección 3.4 y en los capítulos 4, 5, 6 y 7. Los mismos están basados en los trabajos [8], [9], [10], [11], [12], [13] y [14].

Resumen de los resultados de la sección 3.4

En esta sección se trata de caracterizar aquellos marcos $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cierto espacio de Hilbert tales que existe una extensión $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$, una base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{K} y una proyección $Q \in L(\mathcal{K})$ (no necesariamente autoadjunta) tal que:

$$f_n = Q e_n. \quad (2)$$



Recordemos que dado un espacio de Hilbert (separable) \mathcal{H} , una sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un marco para \mathcal{H} , o más generalmente, para cierto subespacio cerrado \mathcal{W} de \mathcal{H} , si existen constantes $A, B > 0$ tales que, para todo $f \in \mathcal{W}$:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (3)$$

Las cotas óptimas A, B para la ecuación (3) se denominan cotas del marco \mathcal{F} . El marco se denomina ajustado si $A = B$, y se dice que se trata de un marco de Parseval si $A = B = 1$. El operador de síntesis asociado a \mathcal{F} es el operador $T : \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $T(e_n) = f_n$, donde $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denota la base canónica de ℓ^2 . El exceso de \mathcal{F} es el número cardinal $e(\mathcal{F}) = \dim N(T)$.

Un conocido teorema de Han y Larson [65] establece que una sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{H} es un marco de Parseval para \mathcal{H} si y sólo si existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en una extensión $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ tal que $f_n = P_{\mathcal{H}} b_n$, $n \in \mathbb{N}$, donde $P_{\mathcal{H}} \in L(\mathcal{K})$ es la proyección ortogonal sobre \mathcal{H} . El principal resultado de esta sección extiende el teorema de Han y Larson del siguiente modo: un marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{H} con cotas $1 \leq A \leq B$ proviene de un sistema ortonormal, no necesariamente completo, en una extensión $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$, a través de un proyección no necesariamente ortogonal de \mathcal{K} sobre \mathcal{H} . Si el exceso de \mathcal{F} es infinito, el sistema ortonormal puede elegirse completo. Para marcos con exceso finito y cotas $1 \leq A \leq B$, el sistema ortonormal puede elegirse completo si y sólo si $\dim R(TT^* - I) \leq e(\mathcal{F})$. Este resultado, en particular, completa un trabajo previo de Casazza, Han y Larson [34].

Resumen de los resultados del capítulo 4

En este capítulo se estudian las denominadas proyecciones e inversas generalizadas escaleadas, las cuales son utilizadas en problemas de optimización, estadística y procesamiento de señales.

Frecuentemente, si A es una matriz de $m \times n$ real o compleja cuyas columnas son linealmente independientes y D es una matriz diagonal, entonces las inversas generalizadas escaleadas adoptan las formas $(ADA^t)^{-1}AD$, $(ADA^t)^\dagger AD$, $(ADA^*)^{-1}AD$ or $(ADA^*)^\dagger AD$, de acuerdo al cuerpo asociado al problema y a las diferentes hipótesis de inversibilidad. Fórmulas análogas valen para las proyecciones escaleadas. En general D es una matriz positiva e inversible y A es una matriz de $m \times n$ ($m \geq n$) cuyas columnas son linealmente independientes.

En una serie de trabajos, Stewart [113], O'Leary [100], Ben-Tal y Tabouille [20], Hanke y Neumann [66], Forsgren [56], Gonzaga y Lara [62], Forsgren and Spörre [57], Wei [121], [120], [119], [118] han estudiado y calculado cantidades del tipo

$$\sup_{D \in \Gamma} \|\gamma(D, A)\|,$$

donde Γ denota cierto subconjunto de matrices positivas inversibles y $\gamma(D, A)$ es alguna de las inversas generalizadas escaleadas mencionadas anteriormente. En los trabajos de Forsgren



y Spörre [56], [57], el lector encontrará abundante información sobre la historia y los motivos por los cuales se desea estimar esta clase de supremos.

No obstante, debemos decir que las referencias antes citadas sólo consideran el caso finito dimensional. Es por ello que, a lo largo del capítulo 4, nos propondremos extender estos resultados a espacios de Hilbert de dimensión infinita. Para ello, exhibiremos un enfoque diferente de esta teoría, válido aún en el contexto finito dimensional, basado en las técnicas y resultados sobre proyecciones A -autoadjuntas. El estudio de las proyecciones escaleadas desde el punto de vista de las proyecciones A -autoadjuntas nos permite obtener demostraciones más sencillas de algunos resultados ya conocidos; por otro lado, posee la ventaja de que estas demostraciones pueden ser fácilmente extendidas a contextos más generales, también importantes en las aplicaciones.

Un conocido resultado de Ben-Tal y Teboulle establece que las soluciones de los problemas de cuadrados mínimos escaleados se encuentran en la cápsula convexa de las soluciones de algunos subsistemas cuadrados no singulares. Remitimos al lector a los trabajos de Ben-Tal y Teboulle [20], o [56], [121] donde encontrará la siguiente formulación de este resultado. Sea A una matriz de $m \times n$ ($m \geq n$) cuyas columnas son linealmente independientes. Denotemos por medio de $J(A)$ al conjunto de todas las proyecciones ortogonales diagonales de $m \times m$ tales que $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$ es biyectiva. Entonces, para cada matriz diagonal de $m \times m$ positiva e inversible D ,

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D = \sum_{Q \in J(A)} \left(\frac{\det(D_Q) |\det(A_Q)|^2}{\sum_{P \in J(A)} \det(D_P) |\det(A_P)|^2} \right) A(QA)^{-1}Q \quad (4)$$

donde A_Q (resp. D_Q) es QA (resp. QD) considerada como una submatriz cuadrada de A (resp. D).

En la sección 4.1 mostramos que, para cada matriz diagonal, positiva e inversible D y $Q \in J(A)$, si $\mathcal{S} = R(A)$, entonces:

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D = P_{D,\mathcal{S}} \quad \text{y} \quad A(QA)^{-1}Q = P_{Q,\mathcal{S}}.$$

Recordemos que $P_{D,\mathcal{S}}$ y $P_{Q,\mathcal{S}}$ denotan, respectivamente, las proyecciones D -autoadjuntas y Q -autoadjuntas distinguidas, cuyo rango es \mathcal{S} . Luego, la fórmula de Ben-Tal y Teboulle's (4) puede reescribirse del siguiente modo: si $R(A) = \mathcal{S}$, para toda matriz diagonal, positiva e inversible D ,

$$P_{D,\mathcal{S}} \in \text{co}\{P_{Q,\mathcal{S}} : Q \in J(A)\}.$$

Esto implica, en particular, que $\sup_{D \in \mathcal{D}_n^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| \leq \max_{Q \in J(A)} \|P_{Q,\mathcal{S}}\|$. La misma desigualdad fue demostrada independientemente por O'Leary en [100], mientras la desigualdad inversa fue inicialmente demostrada por Stewart [113]. Una pequeña generalización del resultado de Stewart se demuestra en esta sección. También aquí, usando técnicas de proyecciones A -autoadjuntas, damos una demostración sencilla y conceptual de un resultado de Gonzaga and Lara [62] sobre proyecciones escaleadas.



En la sección 4.2, extendemos la noción de compatibilidad de un subespacio cerrado, con respecto a ciertos subconjuntos de $L(\mathcal{H})^+$. Dado $\Gamma \subseteq L(\mathcal{H})^+$ y un subespacio cerrado \mathcal{S} , decimos que \mathcal{S} es compatible con Γ si (D, \mathcal{S}) es compatible para todo $D \in \Gamma$ y se satisface la condición de Stewart:

$$\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D, \mathcal{S}}\| < \infty.$$

Fijada una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} , \mathcal{D} denota el álgebra de operadores diagonales con respecto a \mathcal{B} , i.e. $D \in \mathcal{D}$ si existe una sucesión acotada (λ_n) de números complejos tal que $De_n = \lambda_n e_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Consideremos:

1. \mathcal{D}^+ , el conjunto de elementos positivos e inversibles en \mathcal{D} (i.e. todos los $\lambda_n > \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$),
2. $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, el conjunto de las proyecciones en \mathcal{D} (i.e. $\lambda_n = 0$ o 1),
3. $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$, el conjunto de elementos en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ con rango finito,
4. $\mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})$, el conjunto de elementos $Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ tales que $R(Q) \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$,

demostramos que un subespacio cerrado \mathcal{S} es compatible con todos estos conjuntos o no lo es con ninguno. En el primer caso, diremos que \mathcal{S} es compatible con la base \mathcal{B} (o \mathcal{B} -compatible).

Damos una caracterización completa de los subespacios compatibles con \mathcal{B} en terminos del ángulo de Friedrichs, y obtenemos generalizaciones de los resultados de Ben-Tal y Teboulle y de Stewart y O'Leary.

A continuación resumimos los principales resultados de esta sección. Para ello, es necesario fijar algo de notación: sea \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Dado $J \subseteq \mathbb{N}$, por medio de \mathcal{H}_J denotamos el subespacio cerrado generado por el conjunto $\{e_n : n \in J\}$ y por medio de P_J a la proyección ortogonal sobre \mathcal{H}_J . Si $J = \{1, \dots, n\}$, usaremos \mathcal{H}_n y P_n en vez de \mathcal{H}_J y P_J . Entonces:

1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - i. \mathcal{S} es compatible con \mathcal{D}^+ ;
 - ii. $\sup\{c[\mathcal{S}, \mathcal{H}_J] : J \subseteq \mathbb{N}\} < 1$;
 - iii. $\sup\{c[\mathcal{S}, \mathcal{H}_J] : J \subseteq \mathbb{N} \text{ y } J \text{ es finito}\} < 1$;
 - iv. Todos los pares (P_J, \mathcal{S}) son compatibles y $\sup\{\|P_{P_J, \mathcal{S}}\| : J \subseteq \mathbb{N}\} < \infty$;

En este caso, dado $D \in \mathcal{D}^+$ resulta

$$P_{D, \mathcal{S}} \in \overline{\text{co}\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})\}},$$

donde la clausura se toma respecto a la topología fuerte de operadores. En particular

$$\sup\{\|P_{D, \mathcal{S}}\| : D \in \mathcal{D}^+\} = \sup\{\|P_{P_J, \mathcal{S}}\| : J \subseteq \mathbb{N}\} = \left(1 - \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)]^2\right)^{-1/2}.$$



2. \mathcal{S} es compatible con \mathcal{B} si y sólo si
 - i. $\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n}$ y
 - ii. para todo $n \in \mathbb{N}$, el subespacio $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n$ es compatible con \mathcal{B} y existe $M > 0$ tal que $\sup\{\|P_{P_J, \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n}\| : J \subseteq \mathbb{N}\} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $\dim \mathcal{S} < \infty$, entonces \mathcal{S} es compatible con \mathcal{B} si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_n$.

La noción de compatibilidad con una base ortonormal \mathcal{B} es bastante restrictiva. Sin embargo, la clase de subespacios que son compatibles con una base dada tiene interés propio. En efecto, como veremos en la sección 4.3, los subespacios de codimensión infinita \mathcal{B} -compatibles son los núcleos de los operadores de síntesis de los denominados marcos de Riesz (ver Capítulo 3 para las definiciones y [29], [30], [33], [36], [39] o [43] para más información y aplicaciones de los marcos de Riesz). En esta sección también estudiamos los denominados marcos de Riesz condicionados y la relación entre los marcos de Riesz y cierta clase de marcos duales.

Resumen de los resultados del capítulo 5

En este capítulo aplicamos las técnicas de proyecciones A -autoadjuntas a los problemas de muestreo y reconstrucción de una señal. Básicamente, la teoría de muestreo estudia la posibilidad de reconstruir una función (señal) a partir de los valores que esta toma en cierta sucesión contenida en el dominio de la función. Si la función en cuestión h es un elemento de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , el proceso de muestreo puede pensarse como el resultado de considerar el producto interno de h con cierta sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores de \mathcal{H} . La sucesión $\{\langle h, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ que de este modo se obtiene constituye la información que brinda el muestreo de la señal, a partir de la cual, se intenta reconstruir h .

Puede decirse que la teoría moderna de muestreo comienza con el artículo de Claude Shannon *Communication in the presence of noise* publicado en 1949, en donde aparece el siguiente resultado (ver [110]):

... Si una señal $f(t)$ no contiene frecuencias mayores que ω ciclos por segundo, entonces $f(t)$ está completamente determinada por sus valores $f(n/2\omega)$, $n \in \mathbb{Z}$, y puede ser reconstruida a partir de estos valores del siguiente modo:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2\omega}\right) \frac{\text{sen}\pi(2\omega t - n)}{\pi(2\omega t - n)} \quad (5)$$

Cuando Shannon publicó este resultado era consciente de que existían versiones equivalentes al mismo ya publicadas (él menciona esto en su artículo). Una de tales versiones apareció en un trabajo de Whittaker sobre funciones cardinales [122]. Por otro lado, en la literatura rusa, este resultado fue introducido en la teoría de comunicaciones por Kotel'nikov (ver [82] [83]). Es por esto que hoy en día se lo conoce como el teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov

El hecho de que $f(t)$ no contenga frecuencias mayores que ω ciclos por segundo puede reformularse diciendo que la transformada de Fourier de f posee soporte en $[-2\pi\omega, 2\pi\omega]$. Se



puede ver que el conjunto de tales funciones, que denotaremos \mathcal{PW} , resulta un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$. Más aún, como posteriormente notara G. H. Hardy, el conjunto de las funciones $\frac{\text{sen}\pi(2\omega t - n)}{\pi(2\omega t - n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, es una base ortonormal del subespacio \mathcal{PW} . Dicha base posee la siguiente interesante propiedad:

$$f\left(\frac{n}{2\omega}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\text{sen}\pi(2\omega t - n)}{\pi(2\omega t - n)} dt = \left\langle f, \frac{\text{sen}\pi(2\omega(\cdot) - n)}{\pi(2\omega(\cdot) - n)} \right\rangle. \quad (6)$$

Luego, en el teorema de Shannon, el espacio de Hilbert es el espacio \mathcal{PW} , denominado espacio de Paley-Wiener, y la sucesión respecto a la cual se realiza el muestreo es una base ortonormal.

Con el desarrollo del análisis no armónico, las bases ortonormales, en algunos casos, fueron reemplazadas por los denominados marcos. Esto, entre otras cosas, llevó a que se realizaran nuevos modelos de muestreo. Recientemente, S. Li y H. Ogawa [85], Y. Eldar [53], y Y. Eldar y T. Werther [54], entre otros, consideraron el siguiente esquema abstracto de muestreo (lineal): sean \mathcal{W} y \mathcal{M} dos subespacios cerrados de cierto espacio de Hilbert (separable) \mathcal{H} , y supongamos que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$, donde $\dot{+}$ significa que la suma es directa. Para \mathcal{M} consideramos un marco $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con respecto al cual se muestrean los elementos de \mathcal{H} y para \mathcal{W} se toma un marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con respecto al cual se realiza el proceso de reconstrucción. Llamemos F y G a los operadores de síntesis de \mathcal{F} y \mathcal{G} respectivamente. Bajo estas hipótesis, se puede probar que dado $h \in \mathcal{H}$ existe un único $h_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$ que satisface para todo $n \in \mathbb{N}$ el siguiente requerimiento de consistencia:

$$\langle h, g_n \rangle = \langle h_{\mathcal{W}}, g_n \rangle. \quad (7)$$

Más aún, en [40] Christensen y Eldar demostraron que $h_{\mathcal{W}} = F(G^*F)^\dagger G^*f$

Recientemente Smale y Zhou [111] propusieron cómo medir si los datos obtenidos al muestrear una señal con los elementos de \mathcal{G} son “suficientes” para reconstruirla con los elementos de \mathcal{F} . De acuerdo a esta medida, \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} si

$$\inf \{ \|G^*F(z)\| : z \in N(F)^\perp \quad \|z\| = 1 \} > 0.$$

La condición de que \mathcal{G} provea suficiente información con respecto a \mathcal{F} es más débil que pedir que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$. Esto plantea el problema de que no exista $f \in \mathcal{W}$ que cumpla el requerimiento de consistencia (7). No obstante, si $d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} = G^*(h)$, se puede probar que el vector $h_{\mathcal{W}}$, antes definido, resuelve el siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h_{\mathcal{W}}, g_n \rangle - d_n|^2 = \min_{h \in \mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 \quad (8)$$

Mirado desde este punto de vista, el problema de reconstrucción puede verse como un problema de interpolación donde $h_{\mathcal{W}}$ es el vector (función) que mejor ajusta al vector (a la función) h entre todos los vectores (funciones) de \mathcal{W} .



Un modelo un poco más general del proceso de reconstrucción, consiste en tomar $\alpha > 0$ y una sucesión $\{\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos acotados superiormente. Luego, se pide que el vector que se obtenga tras la reconstrucción $h_{\mathcal{W}, \alpha, \omega}$ minimice el siguiente problema de cuadrados mínimos:

$$\min_{h \in \mathcal{W}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \right), \quad (9)$$

En este modelo, los datos obtenidos en el proceso de muestreo son ponderados por medio de los ω_n mientras que el término $\alpha \|h\|^2$ introduce una regularización del problema. Este problema fue estudiado por Smale y Zhou en [111] utilizando técnicas variacionales. Basados en estos métodos, cuando $h \in \mathcal{W}$, Smale y Zhou encontraron una estimación del error que introduce la regularización, dejando planteado problema de encontrar una estimación de la misma índole cuando $h \notin \mathcal{W}$.

En este trabajo, nosotros elegimos un enfoque del problema que utiliza las técnicas de las inversas generalizadas y las proyecciones A -autoadjuntas. Esto nos permite dar una posible respuesta al interrogante planteado por Smale y Zhou (Proposición 5.2.11), que mejora la obtenida en [111] en el caso en que $h \in \mathcal{W}$.

Por otro lado, nuestro enfoque permite vincular el modelo de Eldar y Werter con el de Smale y Zhou. Es un hecho interesante que el operador $F(G^*F)G^*$, encontrado por Eldar y Werter, resulte ser la proyección $P_{GG^*, \mathcal{W}}$ y que $(G^*F)G^* = F_{I, GG^*}^\dagger$. Por otra parte, son estos mismos operadores los que están vinculados con el el problema 8 bajo la hipótesis de que \mathcal{G} provee suficiente información respecto a \mathcal{F} (ver Proposiciones 5.2.6 y 5.2.8). Respecto a esta noción, en la Proposición 5.2.4, demostramos que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. \mathcal{G} provee suficiente información respecto a \mathcal{F} .
2. G^*F posee rango cerrado y $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$.
3. $c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] < 1$.
4. $c[\mathcal{W}^\perp, \mathcal{M}] < 1$ y $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M} = \mathcal{H}$.

Esto por un lado nos permite concluir que la medida de suficiente información de Smale y Zhou relaja las hipótesis de que $\mathcal{H} = \mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp$ de Christensen y Eldar en el siguiente sentido: si bien $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ se permite que la suma de los mismos pueda ser un subespacio cerrado propio de \mathcal{H} . Por otro lado, de los items 3 y 4 resulta claro que la condición de suficiente información no depende de los marcos \mathcal{F} y \mathcal{G} elegidos, sino que sólo depende de una cuestión de ángulos entre los subespacios \mathcal{W} y \mathcal{M} .

Dado que los procesos de muestreo suelen modelarse en los denominados espacios de Hilbert reproductivos, al comienzo del capítulo damos un brevísimo resumen de la teoría de estos espacios y en la sección 5.3 reescribimos los resultados antes mencionados en el contexto de estos espacios.

El capítulo concluye con el estudio del siguiente problema de momentos: dado un marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para \mathcal{H} y $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$, nos preguntamos si existe $g \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\langle g, f_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Siguiendo la terminología introducida en [123], a la sucesión $\{\langle g, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ la denominaremos sucesión de momentos de g , mientras que al espacio de todas las sucesiones de momentos lo denominaremos espacio de momentos. La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puede provenir del muestreo de una función, o bien ser los datos a partir de los cuales se quiere ajustar una función. Luego, este problema está directamente relacionados con los problemas de reconstrucción e interpolación antes discutidos.

Está claro que el problema momentos en general no siempre tiene solución. En efecto, basta notar que el espacio de momentos coincide con ℓ^2 si y sólo si \mathcal{F} es una base de Riesz. De no ser así, para que el problema posea solución, la dependencia entre los vectores de \mathcal{F} también debe manifestarse en los coeficientes a_n . Cuando dicha solución no existe, se busca la más próxima en algún sentido. Por ejemplo, con respecto a la distancia usual de ℓ^2 , i.e. se busca $g \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle g, f_k \rangle|^2 = \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle h, f_k \rangle|^2.$$

Pero también, si $D \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ es un operador positivo e inversible tal que $De_n = \omega_n e_n$, podemos buscar la solución más próxima con respecto a la distancia que se obtiene al reescalar el producto interno de $\ell^2(\mathbb{N})$ con D , es decir, buscar g_D tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle g, f_k \rangle|^2 = \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle h, f_k \rangle|^2.$$

Sea $J(\mathcal{F})$ el conjunto formado por los subconjuntos finitos I de \mathbb{N} tales que los vectores $\{f_i : i \in I\}$ son linealmente independiente, y sea g_I el único vector de $\{f_i : i \in I\}$ que satisface

$$\langle g_I, f_i \rangle = a_i \quad \forall i \in I,$$

Entonces, el principal resultado de esta última sección es una aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, y muestra que si el marco \mathcal{F} es un marco de Riesz, o equivalentemente, si el espacio de momentos es compatible con la base canónica de ℓ^2 , entonces $g_D \in \overline{\text{co}\{g_I : I \in J(\mathcal{F})\}}^{\|\cdot\|}$.

Resumen de los resultados del capítulo 6

El capítulo 6 está dedicado a generalizar dos operaciones, relacionadas con la teoría de circuitos: la suma paralela de matrices y el complemento de Schur de matrices (o matriz cortocircuito). En [1], W. N. Anderson Jr. y R. J. Duffin definieron, para matrices semidefinidas positivas A y B la suma paralela $A : B = A(A + B)^\dagger B$. La motivación para estudiar esta operación, y su nombre, provienen del siguiente hecho: si dos n -puertos puramente resistivos, con matrices de impedancia A y B , son conectados en paralelo (ver figura 1), entonces $A : B$ es la matriz de impedancia de la conexión en paralelo. Deber mencionarse que la matriz de impedancia de un puerto puramente resistivo es semidefinida positiva. Por otro lado, en [4]



Anderson definió, para una matriz de $n \times n$ positiva A y un subespacio \mathcal{S} de \mathbb{C}^n , la matriz cortocircuito de A por \mathcal{S} , que nosotros denotaremos $\Sigma(A, \mathcal{S})$. Supongamos que A es una matriz de bloques $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, donde A_{11} es un bloque de $k \times k$ y A_{22} es un bloque de $(n - k) \times (n - k)$. Si \mathcal{S} es el subespacio generado por los primeros k vectores de la base canónica, entonces

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^\dagger A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde recordemos que \dagger denota la inversa generalizada de Moore-Penrose. (Algunos autores definen $\Sigma(A, \mathcal{S})$ como la transformación lineal de \mathcal{S} en \mathcal{S} omitiendo los ceros). El nombre cortocircuito proviene del hecho de que esta operación produce la impedancia de un n-puerto resistivo cuando algunas de sus entradas son cortocircuitadas a tierra (ver figura 2).

Aquí A es la impedancia del puerto original y $\Sigma(A, \mathcal{S})$ es la impedancia del mismo luego de haber cortocircuitado algunas de sus entradas. Ambas operaciones han sido estudiadas, para operadores (semidefinidos) positivos, en el contexto de espacios de Hilbert (ver la nota histórica al comienzo del capítulo 6).

En este capítulo extendemos la noción de complemento de Schur a operadores acotados entre dos espacios de Hilbert diferentes, dado un subespacio cerrado fijo en cada uno de ellos. La solución que obtenemos, que denominamos complemento de Schur bilateral, utiliza la noción de complementabilidad débil, que es un refinamiento de un concepto definido por T. Ando [6] en dimensión finita y generalizada por D. Carlson y E. V. Haynworth [28]. El complemento de Schur bilateral ha sido estudiado en dimensión finita por S. K. Mitra y M. L. Puri [97] (ver también los trabajos de H. Goller [61] y Mitra y Prasad [95], quienes refinaron algunos resultados de [97]). Sin embargo, sus métodos dependen fuertemente de la existencia de inversas generalizadas, razón por la cual no pueden ser utilizadas para operadores que no poseen rango cerrado.

El segundo objetivo es extender la noción suma paralela a pares de operadores lineales acotados entre espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 . En espacios de dimensión finita esto ha sido estudiado por C. R. Rao y S. K. Mitra [99], y Mitra y K. M. Prasad [95]. No obstante, nuevamente las inversas generalizadas son la principal herramienta que ellos utilizan.

El capítulo está organizado del siguiente modo: en la sección 6.1 recordamos la definición de complementabilidad, damos diversas caracterizaciones de la misma, algunas de las cuales son originales aún en dimensión finita, y concluimos introduciendo la noción de complementabilidad débil. A partir de la complementabilidad débil, en la sección 6.2 definimos el complemento de Schur bilateral, definición que extiende y unifica las actualmente conocidas, y demostramos las propiedades usuales. La sección 6.3 está destinada al estudio de la suma y diferencia paralelas. Una de las principales ventajas de nuestro enfoque es que la diferencia paralela se puede expresar en términos de la suma paralela, razón por la cual, hereda todas sus propiedades automáticamente y no es necesario, como usualmente se hacía, demostrar cada una de ellas nuevamente. Finalmente, en la sección 6.4 exhibimos algunas fórmulas del complemento de Schur en términos de la suma y diferencia paralela.

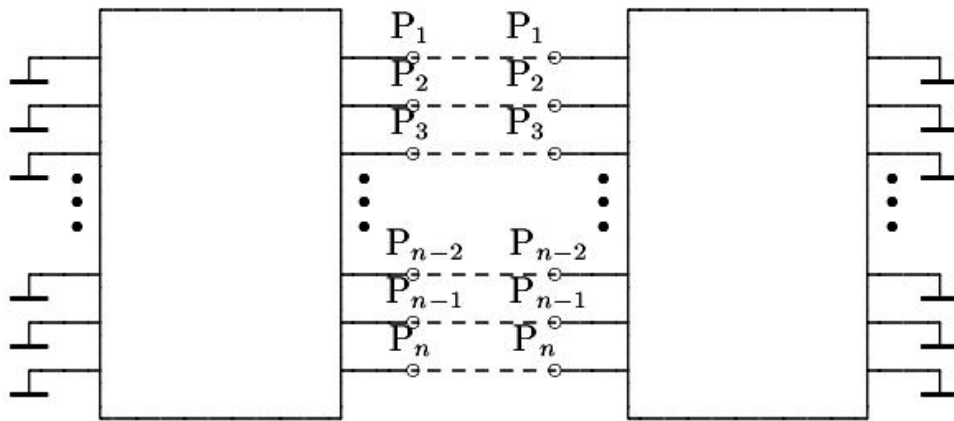


Figura 1: Esquema de la conexión en paralelo de dos n-puertos.

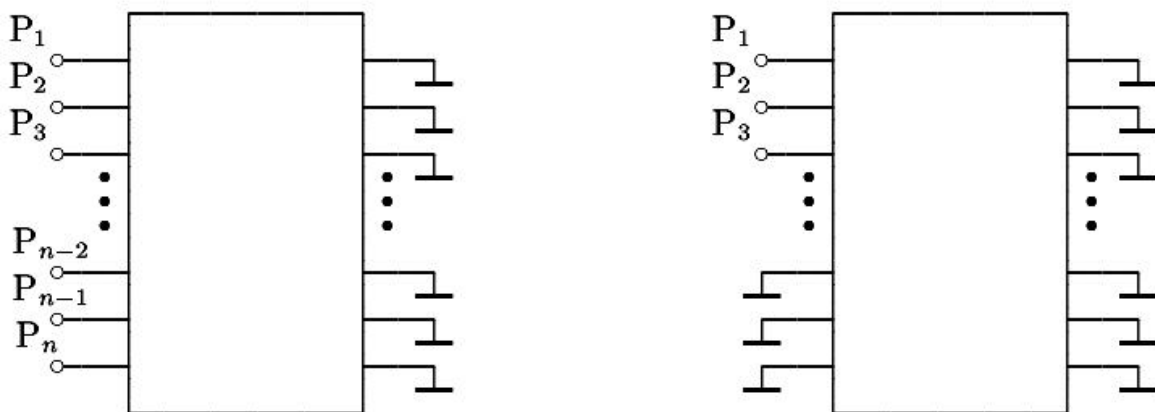


Figura 2:



Resumen de los resultados del capítulo 7

Finalmente, y continuando con el estudio del complemento de Schur, dado un operador $A \in L(\mathcal{H})^+$ y un subespacio cerrado \mathcal{S} de \mathcal{H} , si $\Sigma(A, \mathcal{S})$ denota el complemento de Schur de A con respecto a \mathcal{S} , entonces, la aplicación $t \rightarrow \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}$, definida para $t > 0$, es decreciente respecto al orden usual. Por lo tanto, existe el límite cuando $t \rightarrow \infty$, al cual denotaremos $\rho(A, \mathcal{S})$ y llamaremos complemento de Schur espectral. Este operador será el objeto de estudio de este capítulo.

Las propiedades del complemento de Schur espectral están íntimamente relacionadas con el denominado orden espectral. Recordemos que dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, se dice que A es menor que B respecto al orden espectral, lo cual denotaremos por medio de $A \preceq B$, si $A^m \leq B^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. El orden espectral fue extensamente estudiado por M. P. Olson en [101], donde demostró, entre otras, la siguiente caracterización del mismo: dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $A \preceq B$ si y sólo si $f(A) \leq f(B)$ para toda función continua y creciente $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

En la primera sección del capítulo 7 recordamos esta y otras caracterizaciones del orden espectral. En particular, si el espacio \mathcal{H} tiene dimensión finita, exhibimos una nueva caracterización del orden espectral que se basa en la siguiente observación: si $A, B \in L(\mathcal{H})$, $A \leq B$ y $AB = BA$ entonces $A \preceq B$. Nuestra caracterización asegura que si A, B son matrices de $n \times n$ semidefinidas positivas, entonces $A \preceq B$ si y sólo si existen $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ y una sucesión de matrices semidefinidas positivas $\{D_i\}_{0 \leq i \leq k}$ tales que, $D_0 = A$, $D_k = B$, $D_i \leq D_{i+1}$ y $D_i D_{i+1} = D_{i+1} D_i$ ($i = 0, \dots, k-1$).

En la sección 7.2 demostramos las propiedades básicas del $\rho(A, \mathcal{S})$. Por ejemplo, demostramos que para todo $t > 0$,

$$\rho(A^t, \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})^t. \quad (10)$$

Esta propiedad, que no es compartida por el complemento de Schur $\Sigma(A, \mathcal{S})$, es una de las principales razones para estudiar el operador $\rho(A, \mathcal{S})$.

Por otro lado, el orden espectral permite obtener una caracterización del complemento de Schur espectral que se vincula con la definición de Krein, Anderson y Trapp del complemento de Schur: $\rho(A, \mathcal{S})$ es el mayor elemento $D \in L(\mathcal{H})^+$ (con respecto a ambos órdenes \leq y \preceq) tal que $D \preceq A$ y $R(D) \subseteq \mathcal{S}$ (ver Teorema 7.2.6). Esto nos permite obtener, entre otros, los siguientes resultados: dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ y dos subespacios cerrados \mathcal{S} y \mathcal{T} de \mathcal{H} ,

1. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ entonces $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq \rho(A, \mathcal{T})$.
2. Si $A \preceq B$ entonces $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq \rho(B, \mathcal{S})$.
3. $\rho(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = \rho(\rho(A, \mathcal{S}), \mathcal{T})$.

Por otro lado, estudiamos las propiedades espectrales del operador $\rho(A, \mathcal{S})$ (sección 7.3). El principal resultado da una caracterización completa de $\rho(A, \mathcal{S})$ en términos de la resolución espectral a izquierda de A : para todo $\lambda > 0$

$$\aleph_{[\lambda, \infty)}(\rho(A, \mathcal{S})) = \aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}}, \quad (11)$$



donde si P y Q son dos proyecciones ortogonales, entonces $P \wedge Q$ denota la proyección a la intesección de los rangos de P y Q . En particular, a partir de esta identidad podemos deducir los siguientes resultados (en ellos consideramos a $\rho(A, \mathcal{S})$ actuando sobre \mathcal{S}):

1. $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(A)$.
2. $f(\rho(A, \mathcal{S})) = \rho(f(A), \mathcal{S})$, para toda función f definida en $[0, +\infty)$ creciente, positiva y continua a derecha.
3. $\lambda_{\min}(A)P_{\mathcal{S}} \leq \rho(A, \mathcal{S})$, donde $\lambda_{\min}(C) = \min \sigma(C)$, para $C \in L(\mathcal{H})^+$.
4. $\lambda_{\min}(\rho(A, \mathcal{S})) = \min\{\mu \in \sigma(A) : P_{\mathcal{S}} \aleph_{[\mu, \mu+\varepsilon]}(A) \neq 0 \ \forall \varepsilon > 0\}$.

Por otro lado, (11) nos permite elaborar, para matrices, un algoritmo (finito) que a partir de la descomposición espectral de A obtiene la de $\rho(A, \mathcal{S})$.

El caso $\dim \mathcal{S} = 1$ es particularmente interesante y es por eso que dedicamos la sección 7.4 a estudiarlo. Si \mathcal{S} es el subespacio generado por el vector unitario x , denotamos por medio de $\rho(x, A)$ al único número no negativo tal que $\rho(A, \mathcal{S}) = \rho(x, A) P_{\mathcal{S}}$. A continuación resumimos algunos de los resultados obtenidos:

1. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $x \in \mathcal{H}$ es un vector unitario, entonces

$$\rho(x, A) = \min \left\{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{[\mu, \mu+\varepsilon]}(A)x \neq 0 \ \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

2. $\rho(x, A) = \max\{\lambda \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A))\}$.
3. Si A es inversible, entonces $\rho(x, A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^{-m}x\|^{-1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|A^{-m}x\|^{-1/m}$.
4. Si $R(A)$ es cerrado y $x \in R(A)$, entonces, $\rho(x, A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(A^\dagger)^m x\|^{-1/m}$, donde A^\dagger denota la inversa generalizada de Moore-Penrose de A . Si $x \notin R(A)$, entonces $\rho(x, A) = 0$.
5. Si $\sigma_{sh}(A) = \{\rho(x, A) : \|x\| = 1\}$, entonces

$$\sigma_{sh}(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_{pt}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \forall \varepsilon > 0, \aleph_{[\lambda, \lambda+\varepsilon]}(A) \neq 0\},$$

donde $\sigma_{pt}(A)$ denota el espectro puntual de A , i.e el conjunto de autovalores de A y $\sigma_+(A)$ es el conjunto de puntos en $\sigma(A)$ que son límite por derecha de alguna sucesión de $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$. Esto muestra que $\sigma_{sh}(A)$ es denso en $\sigma(A)$, pero $\sigma_{sh}(A) \neq \sigma(A)$ en general.

6. $\rho(x, A) \neq 0$ si y sólo si $x \in R_0(A) := \bigcup_{\lambda > 0} R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)) \subseteq R(A)$.

En [60], J. I. Fujii and M. Fujii definieron la complejidad de Kolmogorov:

$$K(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\langle A^n x, x \rangle)}{n} = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}. \quad (12)$$



para una matriz positiva e inversible A y un vector unitario x , y demostraron varias propiedades de K . Se puede probar que, si \mathcal{S} es el subespacio generado por x , entonces

$$K(A, x) = \log \rho(x, A^{-1})^{-1}.$$

Esto muestra que el complemento de Schur espectral puede utilizarse para generalizar el concepto de complejidad de Kolmogorov en dos sentidos: por un lado, a operadores (inversibles) sobre espacios de dimensión infinita; por otro lado, a subespacios \mathcal{S} no necesariamente unidimensionales. En ambos casos, la extensión de la complejidad de Kolmogorov hereda, mutatis mutandis, las propiedades del complemento de Schur espectral.

Finalmente, se analiza qué ocurre con la complejidad de Kolmogorov si el operador $A \in L(\mathcal{H})^+$ no es inversible. En tal caso, dado $x \in \mathcal{H}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$, denotamos por

$$k(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n},$$

de modo que, $k(A, x) = \exp K(A, x)$ si $K(A, x)$ está definido como en la ecuación (12). Nuestra definición no utiliza logaritmos para evitar el valor $-\infty$.

Si $x \in \mathcal{H}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$, demostramos:

1. Si $\|x\| = 1$, entonces la sucesión $\langle A^n x, x \rangle^{1/n}$ es creciente. Por lo tanto, para todo $x \in \mathcal{H}$, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}$.
2. $k(A, x) = k(A, ax)$ para todo $0 \neq a \in \mathbb{C}$.
3. $k(A, x) = k(A, \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x)$ para todo $\lambda > 0$ tal que $\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x \neq 0$.
4. $k(A, x) \neq 0$ (i.e. $K(A, x) \neq -\infty$) si y sólo si $P_{\overline{R(A)}} x \in R_0(A) \setminus \{0\}$.
5. Si $x \neq 0$, entonces $k(A, x) \in \sigma(A)$. Más aún,

$$\{k(A, x) : x \neq 0\} = \{\lambda \in \sigma(A) : \aleph_{(\lambda + \varepsilon, \lambda]}(A)x \neq 0, \forall \varepsilon > 0\},$$

que es denso en $\sigma(A)$.

6.

$$\begin{aligned} k(A, x) &= \min \{ \lambda \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{(-\infty, \lambda]}(A)) \} \\ &= \max \{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{(\mu - \varepsilon, \mu]}(A)x \neq 0 \forall \varepsilon > 0 \} \\ &= \sup \{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{[\mu, \infty)}(A)x \neq 0 \}. \end{aligned}$$

7. Si el $R(A)$ es cerrado, entonces

- i. Si $x \in R(A)$ entonces $k(A, x) = \rho(x, A^\dagger)^{-1}$.
- ii. Si $x \notin R(A)$, pero $Px \neq 0$, donde $P = P_{R(A)}$, entonces

$$k(A, x) = k(A, Px) = \rho\left(\frac{Px}{\|Px\|}, A^\dagger\right)^{-1}.$$

Capítulo 1

Operadores definidos en espacios de Hilbert.

1.1 Nociones básicas de la teoría de operadores

En esta sección expondremos algunos resultados básicos sobre espacios de Hilbert y el álgebra de operadores acotados sobre dicho espacio, aprovechando esto para introducir la notación básica necesaria para discutir los temas de esta tesis.

A lo largo de este trabajo \mathcal{H} denotará un espacio de Hilbert complejo cuyo producto interno simbolizaremos por medio de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. El álgebra de operadores (lineales) acotados será denotada por $L(\mathcal{H})$, la subálgebra (real) de operadores autoadjuntos por $L_{sa}(\mathcal{H})$, el grupo de operadores inversibles por $GL(\mathcal{H})$ y el cono de operadores positivos por $L(\mathcal{H})^+$. Dado $A \in L(\mathcal{H})$, $R(A)$ denota el rango o imagen de A , $N(A)$ el núcleo de A , A^* el adjunto de A , $\sigma(A)$ el espectro de A , $\rho(A)$ el radio espectral de A y $\|A\|$ la norma espectral de A . Si $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, $\lambda_{min}(A) = \min \sigma(A) = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$. Por otro lado, dados dos operadores autoadjuntos A y B , $A \leq B$ si $B - A \in L(\mathcal{H})^+$. De aquí en adelante, cuando nos refiramos al orden usual nos estaremos refiriendo a este orden inducido por el cono de operadores positivos.

Dado un subespacio cerrado \mathcal{S} de \mathcal{H} , $P_{\mathcal{S}}$ denotará la proyección ortogonal (i.e. autoadjunta) sobre \mathcal{S} . Si P y Q son proyecciones ortogonales, $P \wedge Q$ denota la proyección ortogonal sobre $R(P) \cap R(Q)$. Si $B \in L(\mathcal{H})$ satisface que $P_{\mathcal{S}} B P_{\mathcal{S}} = B$, consideraremos la compresión de B a \mathcal{S} , (i.e. la restricción de B a \mathcal{S} como un operador lineal de \mathcal{S} en \mathcal{S}), y diremos que pensamos a B actuando sobre \mathcal{S} . Usualmente haremos esto cuando querramos considerar el espectro de B sólo en término de su acción sobre \mathcal{S} . Por ejemplo, si $B \geq \lambda P_{\mathcal{S}}$ para cierto $\lambda > 0$, entonces $0 \notin \sigma(B)$, si pensamos a B actuando en \mathcal{S} . Por otro lado, usaremos el hecho de que todo par de subespacios cerrados $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ de \mathcal{H} induce una representación de los elementos de $L(\mathcal{H})$ por matrices de 2×2 en bloques, del siguiente modo

$$\begin{array}{c} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{array} \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \quad (1.1)$$

de modo tal que si P y Q son las proyecciones ortogonales sobre \mathcal{S} y \mathcal{T} respectivamente



$A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = QAP : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$, $A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} = QA(1 - P) : \mathcal{S}^\perp \rightarrow \mathcal{T}$, etc. Cuando recurramos a este tipo de representación matricial, nos referiremos a la descomposición que induce el par $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, o simplemente la descomposición inducida por \mathcal{S} cuando $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Recíprocamente, dados operadores $A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$, $A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} : \mathcal{S}^\perp \rightarrow \mathcal{T}$, etc., es posible definir un operador $A \in L(\mathcal{H})$, al cual denotaremos en forma matricial como en (1.1). En forma análoga, cuando los operadores estén definidos de un espacio de Hilbert \mathcal{H}_1 en otro \mathcal{H}_2 , construiremos operadores en $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ a los cuales representaremos en forma matricial. Notar que cuando $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$)

$$\begin{pmatrix} (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}})^* & (A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}})^* \\ (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^* & (A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^* \end{pmatrix},$$

es la matriz que representa a A^* .

En general, usaremos letras mayúsculas para los operadores, letras minúsculas para los vectores y letras griegas minúsculas para los escalares.

1.1.1 Tres topologías localmente convexas

Recordemos rápidamente algunos aspectos elementales sobre las topologías localmente convexas en espacios vectoriales. En primer lugar recordemos que una **seminorma** en un espacio vectorial (complejo) \mathcal{V} es una función $p : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$ tal que:

- $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in \mathcal{V}$.
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$.

Sea $\{p_i : i \in I\}$ una familia de seminormas definidas en \mathcal{V} . La topología en \mathcal{V} inducidas por estas seminormas es la menor topología con respecto a la cual cada una de ellas es continua en el origen; en esta topología, una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de vectores de \mathcal{V} converge a $x \in \mathcal{V}$ si y sólo si $p_\alpha(x - x_\alpha) \rightarrow 0$ para cada $i \in I$. Las topologías inducidas por seminormas se denominan **topologías localmente convexas**, mientras que el espacio vectorial dotado de una tal topología se denomina **espacio localmente convexo**.

Observación 1.1.1. Usualmente se suele pedir también que $\bigcap_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} : p_i(x) = 0\} = \{0\}$ con el objetivo de que la topología en cuestión resulte Hausdorff. \blacktriangle

Topología débil en \mathcal{H}

Definición 1.1.2. La topología débil en \mathcal{H} es la topología localmente convexa definida por la familia de seminormas $\{p_x : x \in \mathcal{H}\}$, donde para todo $x \in \mathcal{H}$

$$p_x(y) = |\langle x, y \rangle| \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Es claro que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in \mathcal{H}$ débilmente, lo cual notaremos $x_\alpha \xrightarrow{w} x$, si para todo $y \in \mathcal{H}$ se verifica que

$$\langle x_\alpha, y \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle x, y \rangle.$$



En particular si la red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ converge a $x \in \mathcal{H}$ en norma, entonces también lo hace respecto a la topología débil (por ello la denominación débil). Por otro lado, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.1.3. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una red de vectores de \mathcal{H} y $x \in \mathcal{H}$. Luego, si $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w} x$ entonces $Tx_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w} Tx$.*

Un conocido resultado de Alaoglu establece que la bola unitaria del espacio dual de un espacio de Banach es compacta con la topología débil estrella. En el caso de espacios reflexivos, como por ejemplo los espacios de Hilbert, dicho resultado se extiende a la topología débil.

Teorema 1.1.4. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Entonces, la bola unitaria cerrada, i.e. $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$, resulta compacta respecto a la topología débil.*

Finalmente, notemos que si el espacio de Hilbert \mathcal{H} es separable, i.e posee una base ortonormal numerable, la topología débil es metrizable en subconjuntos acotados de \mathcal{H} . En efecto, dado $R > 0$, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en la bola cerrada de radio R . Entonces $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle (x - y), x_n \rangle|,$$

es una métrica, la cual define en $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq R\}$ un topología que coincide con la inducida por la topología débil del espacio \mathcal{H} .

Topologías débil y fuerte de operadores

Definición 1.1.5. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. La **topología débil de operadores** es la topología localmente convexa definida sobre $L(\mathcal{H})$ por las seminormas $\{p_{x,y} : x, y \in \mathcal{H}\}$, donde $p_{x,y}(A) = |\langle Ax, y \rangle|$ para todo $A \in L(\mathcal{H})$. La **topología fuerte de operadores** es la topología definida en $L(\mathcal{H})$ por la familia de seminormas $\{p_x : x \in \mathcal{H}\}$, donde $p_x(A) = \|Ax\|$ para todo $A \in L(\mathcal{H})$.

Al igual que la topología débil en \mathcal{H} , las topologías débil y fuerte de operadores son metrizable en conjuntos acotados si el espacio \mathcal{H} es separable. También es fácil ver que una red $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de operadores de $L(\mathcal{H})$ converge a un operador $A \in L(\mathcal{H})$ en la topología débil de operadores, lo cual denotaremos $A_\alpha \xrightarrow[x]{\text{wOT}} A$, si y sólo si, para todo $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle A_\alpha x, y \rangle \xrightarrow[\alpha]{} \langle Ax, y \rangle.$$

Análogamente, se puede ver que $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ converge al operador A en la topología fuerte de operadores, lo cual denotaremos $A_\alpha \xrightarrow[x]{\text{SOT}} A$, si y sólo si, para todo $x \in \mathcal{H}$

$$\|A_\alpha x\| \xrightarrow[\alpha]{} \|Ax\|.$$

La siguiente proposición relaciona las convergencias antes mencionadas con el orden usual de operadores.



Proposición 1.1.6. *Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente (resp. decreciente) de operadores autoadjuntos acotados superiormente (resp. inferiormente). Entonces, existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T$ en la topología fuerte de operadores.*

Como mencionamos anteriormente, el teorema de Alaoglu establece que la bola unitaria del dual de un espacio de Banach es débil estrella compacta. En el caso de $L(\mathcal{H})$, su predual resulta ser el espacio de los operadores traza. Luego, por un argumento de densidad, se puede ver que en subconjuntos acotados de $L(\mathcal{H})$ la convergencia débil estrella basta testearla con los operadores de rango uno. A partir de esta observación, no es difícil verificar que, en los subconjuntos acotados, la topología débil estrella inducida por los operadores traza coincide con la topología débil de operadores. De aquí el siguiente resultado:

Teorema 1.1.7. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Entonces, la bola unitaria cerrada de $L(\mathcal{H})$, i.e. $\{T \in L(\mathcal{H}) : \|T\| \leq 1\}$, resulta compacta respecto a la topología débil de operadores.*

1.1.2 Teorema espectral

Probablemente uno de los teoremas más importantes en la teoría de espacios de Hilbert es el teorema espectral para operadores autoadjuntos. Dado un conjunto localmente compacto X , por medio de $\mathcal{B}(X)$ denotaremos al conjunto de funciones definidas en X , medibles Borel y acotadas.

Teorema 1.1.8 (Cálculo funcional). *Dado $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, existe una única aplicación $\phi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(\mathcal{H})$ tal que:*

1. ϕ es un $*$ -morfismo (i.e. ϕ es un morfismo de álgebras tal que $\phi(\bar{f}) = \phi(f)^*$).
2. $\|\phi(f)\| \leq \|f\|_\infty$, en particular ϕ es continua.
3. Si $f(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\phi(f) = A$.
4. Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ puntualmente y la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, entonces $\phi(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{WOT} \phi(f)$.
5. Si $Ax = \lambda x$ entonces $\phi(f)x = f(\lambda)x$.
6. Si $f \geq 0$ entonces $\phi(f) \geq 0$.
7. Si $AB = BA$, para toda $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\phi(f)B = B\phi(f)$.

Con el objeto de simplificar la notación escribiremos $f(A)$ en vez de $\phi(f)$. Otra manera de formular el teorema espectral tiene que ver con las denominadas medidas espectrales que definiremos a continuación:

Definición 1.1.9. Sea X un conjunto, \mathfrak{X} una σ -álgebra de subconjuntos de X y \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Una medida espectral es una función $E : \mathfrak{X} \rightarrow L(\mathcal{H})$ tal que:



- Para cada $\Delta \in \mathfrak{X}$, $E(\Delta)$ es una proyección ortogonal.
- $E(\emptyset) = 0$ y $E(X) = I$.
- $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ para todo $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{X}$.
- Si $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son subconjuntos de \mathfrak{X} dos a dos disjuntos, entonces

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n),$$

donde la convergencia de la serie es respecto a la topología fuerte de operadores.

Notemos que en particular, si definimos $E_{x,y} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle,$$

entonces $E_{x,y}$ resulta una medida compleja de variación total menor o igual a $\|x\|\|y\|$.

A partir del Teorema 1.1.8, es fácil ver que dado $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, se puede definir una medida espectral sobre los borelianos de la recta del siguiente modo:

$$E(\Delta) = \aleph_{\Delta}(A),$$

donde \aleph_{Δ} denota la función característica del conjunto Δ . La recíproca también vale, y ese es el contenido de la siguiente versión del teorema espectral.

Teorema 1.1.10 (Medidas espectrales). *Dada una medida espectral E definida en los borelianos de la recta y con soporte compacto, existe un único operador $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ tal que*

$$E_A(\Delta) = \aleph_{\Delta}(A).$$

Una notación muy utilizada que vincula ambos teoremas es la siguiente: sea $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, E su medida espectral y $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible borel y acotada, entonces:

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f dE.$$

Esta notación está motivada por el hecho de que para cada $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\langle f(A)x, y \rangle = \int_{\sigma(A)} f dE_{x,y}.$$

Asociadas a las medidas espectrales se encuentran las resoluciones espectrales.

Definición 1.1.11. Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathcal{H})$, diremos que f es una resolución espectral a derecha (resp. a izquierda) si



1. Existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $f(\lambda) = 0$ si $\lambda < m$ y $f(\lambda) = I$ si $\lambda > M$ (resp. $f(\lambda) = I$ para $\lambda < m$ y $f(\lambda) = 0$ para $\lambda > M$).
2. $f(\lambda)$ es una proyección ortogonal (i.e. autoadjunta), para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Si $\lambda \leq \mu$ entonces $f(\lambda) \leq f(\mu)$ (resp. $f(\lambda) \geq f(\mu)$) respecto al orden usual.
4. f es continua a derecha (resp. a izquierda).

Las resoluciones espectrales son algo así como el correlato no conmutativo de las funciones de acumulación. Un resultado clásico de la teoría espectral, similar al teorema 1.1.10, asegura que dada una resolución espectral f , existe un único operador $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ tal que f es su resolución espectral, lo cual significa que

$$f(\lambda) = E_A((-\infty, \lambda]) = \aleph_{(-\infty, \lambda]}(A) \quad (1.2)$$

(resp. $f(\lambda) = E_A([\lambda, \infty)) = \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)$). Recíprocamente, si $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, la función f definida por la ecuación (1.2) es una resolución espectral a derecha (resp. a izquierda).

La relación entre resoluciones espectrales a izquierda y a derecha esta dada por la siguiente identidad: si $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, entonces $E_A([-\lambda, \infty)) = E_{-A}((-\infty, \lambda])$. Por otro lado, si f es una resolución espectral a izquierda, entonces $g(\lambda) = f(-\lambda)$ es una resolución espectral a derecha. Luego, si A es el operador asociado a g , entonces $-A$ es el operador asociado a f .

Cabe mencionar que si $\dim \mathcal{H} < \infty$ los teoremas espectrales antes mencionados se reducen al conocido teorema espectral para matrices autoadjuntas de álgebra lineal. En tal caso, recordemos que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, donde $\sigma_p(A)$ denota el conjunto de autovalores de A también conocido con el nombre de espectro puntual de A . El lector interesado en más detalles sobre la teoría espectral de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert, como así también en otros cálculos funcionales es remitido a los excelentes libros de Kadison y Ringrose [78] y Pedersen [104].

Teniendo a mano el teorema espectral, podemos mencionar el siguiente resultado que será de gran utilidad. El lector interesado encontrará una demostración del mismo en [103] (Proposición 2.3.2).

Proposición 1.1.12. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta$ para ciertas constantes positivas α y β . Entonces, si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en $L_{sa}(\mathcal{H})$ tal que $A_\lambda \xrightarrow[\lambda]{SOT} A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, se tiene que $f(A_\lambda) \xrightarrow{SOT} f(A)$, i.e. $f : L_{sa}(\mathcal{H}) \rightarrow L_{sa}(\mathcal{H})$ es continua respecto a la topología SOT. En particular $f(t) = t^r$ para $0 \leq r \leq 1$ es SOT-continua en $L(\mathcal{H})^+$.*

1.2 Ángulo entre subespacios cerrados

A continuación consideraremos dos nociones de ángulo entre subespacios de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sugerimos al lector interesado referirse al trabajo de Deutsch [48] como así



también a los libros de Kato [79] y Havin and Jöricke [69] para más detalles. A lo largo de esta sección \mathcal{M} y \mathcal{N} serán dos subespacios cerrados fijos de \mathcal{H} . Por medio de $\tilde{\mathcal{M}}$ y $\tilde{\mathcal{N}}$ denotaremos a los subespacios definidos del siguiente modo:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}).$$

Por otro lado, $\mathcal{M}_1 = \{\xi \in \mathcal{M} : \|\xi\| = 1\}$.

Definición 1.2.1 (Friedrichs). El ángulo de Friedrichs entre \mathcal{M} y \mathcal{N} es el ángulo en $[0, \pi/2]$ cuyo coseno está definido por

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle \xi, \eta \rangle| : \xi \in \tilde{\mathcal{M}}, \eta \in \tilde{\mathcal{N}} \text{ and } \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}.$$

El seno de este ángulo se define de la forma usual como $s[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = (1 - c[\mathcal{M}, \mathcal{N}])^{1/2}$.

Definición 1.2.2 (Dixmier). El ángulo de Dixmier entre \mathcal{M} y \mathcal{N} es el ángulo en $[0, \pi/2]$ cuyo coseno está definido por

$$c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle \xi, \eta \rangle| : \xi \in \mathcal{M}, \eta \in \mathcal{N} \text{ and } \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}$$

Proposición 1.2.3.

1. $0 \leq c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] \leq c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] \leq 1$
2. $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c_0[\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{N}] = c_0[\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{N}}] = c_0[\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{N}}]$
3. $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{N}, \mathcal{M}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$
4. $c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}\|^{1/2}$.
5. $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\tilde{\mathcal{N}}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} - P_{(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp}\|$.

Demostración. La mayoría de estos resultados sobre ángulos son consecuencia inmediatamente de la definición. La única excepción es la identidad $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$, la cual será demostrada más adelante cuando hayamos definido ciertas nociones que nos permitirán dar una demostración corta y conceptual (ver Proposición 1.4.4). ■

Proposición 1.2.4. *El seno entre los subespacios \mathcal{M} y \mathcal{N} puede caracterizarse del siguiente modo:*

$$s[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = d(\tilde{\mathcal{M}}_1, \mathcal{N}) = d(\tilde{\mathcal{N}}_1, \mathcal{M}).$$



Demostración. Por la Proposición 1.2.3, podemos suponer que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, i.e., $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$. Por la definición del seno y la Proposición 1.2.3, $s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]^2 = 1 - \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\|^2$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{M}_1, \mathcal{N})^2 &= \inf\{\|P_{\mathcal{N}^\perp} x\|^2 : x \in \mathcal{M}_1\} = \inf\{1 - \|P_{\mathcal{N}} x\|^2 : x \in \mathcal{M}_1\} \\ &= 1 - \sup\{\|P_{\mathcal{N}} x\|^2 : x \in \mathcal{M}_1\} = 1 - \|P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}\|^2 = 1 - \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\|^2, \end{aligned}$$

puesto que $d(x, \mathcal{N}) = \|P_{\mathcal{N}^\perp} x\|$, para cada $x \in \mathcal{H}$. ■

Observación 1.2.5. Sea \mathcal{M} un subespacio cerrado y \mathcal{N} un subespacio tal que $\dim \mathcal{N} < \infty$ y $\mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{M}$. Entonces $\tilde{\mathcal{N}}_1$ es compacta (y $\neq \emptyset$), y por lo tanto $0 < d(\tilde{\mathcal{N}}_1, \mathcal{M}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$, o sea que $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] < 1$. Sin embargo, si ambos subespacios tienen dimensión infinita, bien puede pasar que \mathcal{M} y \mathcal{N} tengan “ángulo nulo” aunque $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Agregar ejemplo y comentario sobre cómo son todos los ejemplos de pares de subespacios con ángulo malo.

Corolario 1.2.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ es cerrado.
2. $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] < 1$.
3. Existe $c_0 > 0$ tal que, para $\xi \in \mathcal{M}$ y $\eta \in \tilde{\mathcal{N}}$, $\|\xi + \eta\| \geq c_0 \|\xi\|$.

Más aún, la mejor constante para (3) es $c_0 = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$.

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$, pues $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus \tilde{\mathcal{N}}$. Cuentas no muy complicadas muestran que

$$c_0 = \sup\{c \geq 0 : \|\xi + \eta\| \geq c\|\xi\|, \forall \xi \in \mathcal{M}, \eta \in \tilde{\mathcal{N}}\} = d(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}].$$

Supongamos que $c_0 > 0$. Dada una sucesión $\xi_n + \eta_n \in \mathcal{M} + \mathcal{N}$ que converge a ρ , entonces $\|\xi_n - \xi_m\| \leq c_0^{-1} \|\xi_n + \eta_n - \xi_m - \eta_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. Por lo tanto, $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \in \mathcal{M}$ y $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho - \xi \in \mathcal{N}$. Luego, $\rho \in \mathcal{M} + \mathcal{N}$. Recíprocamente, si $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ es cerrado, entonces la proyección Q de $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ sobre \mathcal{M} definida por $Q(\xi + \eta) = \xi$ es acotada. En consecuencia, podemos tomar $c_0 = \|Q\|^{-1} > 0$. ■

Corolario 1.2.7 (Ljance-Ptak). *Supongamos que $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ y sea $Q \in L(\mathcal{H})$ la proyección sobre \mathcal{M} con núcleo \mathcal{N} . Entonces*

$$\|Q\| = \left(1 - \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\|^2\right)^{-1/2} = \left(1 - c[\mathcal{M}, \mathcal{N}]\right)^{-1/2} = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]^{-1} \quad (1.3)$$

Demostración. La fórmula (1.3) se deduce de la última parte de la prueba anterior. ■

Dadas dos proyecciones ortogonales P y Q , muchas veces estamos tentados a pensar que la proyección sobre $R(P) \cap R(Q)$ es simplemente PQ . Lamentablemente esto sólo es cierto cuando P y Q conmutan. En general, lo que se puede decir es lo siguiente:



Proposición 1.2.8 (Kayalar-Weinert [80]; ver también [48]). Sean P y Q dos proyecciones ortogonales definidas sobre \mathcal{H} . Entonces,

$$\|(PQ)^k - P \wedge Q\| = c[R(P), R(Q)]^{2k-1}$$

donde, como ya hemos mencionado anteriormente, $P \wedge Q$ denota la proyección ortogonal sobre $R(P) \cap R(Q)$.

Demostración. Sean $\tilde{P} = P(1 - P \wedge Q)$ y $\tilde{Q} = Q(1 - P \wedge Q)$. Luego,

$$\begin{aligned} \|(PQ)^k - P \wedge Q\|^2 &= \|(PQ)^k(1 - P \wedge Q)\|^2 = \|(\tilde{P}\tilde{Q})^k\|^2 \\ &= \|(\tilde{Q}\tilde{P})^k(\tilde{P}\tilde{Q})^k\| = \|(\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q})^{2k-1}\| = \|\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q}\|^{2k-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la Proposición 1.2.3, se tiene que $\|\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q}\| = c[R(P), R(Q)]^2$. Por lo tanto

$$\|(PQ)^k - P \wedge Q\|^2 = c[R(P), R(Q)]^{2(2k-1)},$$

lo cual concluye la demostración. ■

1.3 Inversas generalizadas.

Definición 1.3.1. Dados $A, B \in L(\mathcal{H})$, decimos que B es una inversa generalizada de A si

$$ABA = A \quad \text{y} \quad BAB = B.$$

Al conjunto de inversas generalizadas de A lo denotaremos por medio de $GI(A)$. ▲

Teorema 1.3.2. Sea $A \in L(\mathcal{H})$.

1. Si $B \in GI(A)$, entonces

i AB es un proyector (oblicuo) con $R(AB) = R(A)$.

ii BA es un proyector (oblicuo) con $N(BA) = N(A)$.

2. A tiene rango cerrado si y sólo si $GI(A) \neq \emptyset$.

3. En tal caso, para cada par $P, Q \in L(\mathcal{H})$ de proyectores oblicuos tales que $R(P) = R(A)$ y $N(Q) = N(A)$, existe un único $B \in GI(A)$ tal que $AB = P$ y $BA = Q$.

Demostración.

1. Sea $B \in GI(A)$. Entonces

$$(BA)^2 = BABA = BA \quad \text{y} \quad (AB)^2 = ABAB = AB.$$

Es claro que $R(AB) \subseteq R(A)$. Pero también $R(A) = R(ABA) \subseteq R(AB)$. Por otra parte, $N(A) \subseteq N(BA) \subseteq N(ABA) = N(A)$.



2. Si $B \in GI(A)$, entonces $R(A) = R(AB)$, que es cerrado al ser la imagen de un proyector. La recíproca se deducirá del ítem 3, aplicado a los proyectores $P = P_{R(A)}$ y $Q = I - P_{N(A)}$.
3. Supongamos que $R(A)$ es cerrado, y sean $P, Q \in L(\mathcal{H})$ proyectores oblicuos tales que $R(P) = R(A)$ y $N(Q) = N(A)$. Llamemos $\mathcal{S} = N(P)$ y $\mathcal{T} = R(Q)$. Luego $N(A) \oplus \mathcal{T} = \mathcal{H}$, y por ende $A|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow R(A)$ es inversible. Llamemos $B_0 : R(A) \rightarrow \mathcal{T}$ a su inversa, y definamos

$$B : \mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus R(A) \rightarrow N(A) \oplus \mathcal{T} = \mathcal{H} \quad \text{por} \quad B(x \oplus y) = B_0 y, \quad x \in \mathcal{S}, y \in R(A).$$

Como B_0 es acotado, por el teorema de la imagen abierta, se deduce que $B \in L(\mathcal{H})$. En efecto, $\|B\| \leq \|B_0\| \|P\|$, porque $B(z) = B_0(Pz)$, $z \in \mathcal{H}$. Por otra parte, cálculos elementales muestran que $B \in GI(A)$, $AB = P$ y $BA = Q$.

■

Definición 1.3.3. Dado $A \in L(\mathcal{H})$ con rango cerrado, se llama A^\dagger al único elemento de $GI(A)$ tal que $A^\dagger A$ y AA^\dagger son proyectores autoadjuntos.

Corolario 1.3.4. Dado $A \in L(\mathcal{H})$, $R(A)$ es cerrado si y sólo si $R(A^*)$ es cerrado. Más aún, $SI(A^*) = \{B^* : B \in SI(A)\}$. En particular $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$.

Demostración. La igualdad $SI(A^*) = \{B^* : B \in SI(A)\}$ se deduce directamente de la definición de inversa generalizada. Luego la primera parte es consecuencia del Teorema 1.3.2. La última, del hecho de que $(A^\dagger)^*$ verifica las condiciones de la definición de $(A^*)^\dagger$. ■

Corolario 1.3.5. Sea $A \in L(\mathcal{H})$ un operador con rango cerrado, P una proyección cuyo rango es $R(A)$ y Q un proyección cuyo núcleo es $N(A)$. Entonces $B = QA^\dagger P$ es la única inversa generalizada tal que $AB = P$ y $BA = Q$.

Demostración. En efecto, por un lado

$$BA = B = QA^\dagger PA = QA^\dagger A = QP_{N(A)^\perp} = Q(I - P_{N(A)}) = Q.$$

y por otro

$$(AB)^* = P^* A^{*\dagger} Q^* A^* = P^* A^{*\dagger} A^* = P^* P_{R(A)} = (P_{R(A)} P)^* = P^*.$$

■

Ejemplos 1.3.6.

1. Si $A \in GL(\mathcal{H})$, entonces $GI(A) = \{A^{-1}\}$. En particular, $A^\dagger = A^{-1}$.
2. Si $U \in L(\mathcal{H})$ es una isometría parcial (i.e., U es isométrico en $N(U)^\perp$), entonces $U^\dagger = U^*$.



3. Si A es normal y $R(A)$ es cerrado, entonces A conmuta con A^\dagger .

4. Si $A \in L(\mathcal{H})$ tiene $R(A)$ cerrado, y $S \in GL(\mathcal{H})$, entonces

$$GI(SAS^{-1}) = \{SBS^{-1} : B \in GI(A)\},$$

pero no es fácil averiguar quién es $(SAS^{-1})^\dagger$.

5. Si $A \in L(\mathcal{H})$ tiene $R(A)$ cerrado, y $V, W \in \mathcal{U}(n)$, entonces $(VAW)^\dagger = W^*A^\dagger V^*$.

6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal $A = \text{diag}(x)$ para cierto $x \in \mathbb{C}^n$, entonces $A^\dagger = \text{diag}(x^\dagger)$, donde $x^\dagger \in \mathbb{C}^n$ está dado por

$$x_i^\dagger = \begin{cases} x_i^{-1} & \text{si } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_i = 0. \end{cases}$$

7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $\text{rk}(A) = k$. Si $V, W \in \mathcal{U}(n)$ verifican $A = W^*\Sigma(A)V$, entonces,

$$A^\dagger = V^*\Sigma(A)^\dagger W = V^*\text{diag}(s_1(A)^{-1}, \dots, s_k(A)^{-1}, 0, \dots, 0)W.$$

▲

La siguiente, es un caso particular de una identidad demostrada por Stewart en [114].

Proposición 1.3.7. Sean $A, B \in L_{sa}(\mathcal{H})$ operadores con rango cerrado. Entonces:

$$B^\dagger - A^\dagger = -B^\dagger(B - A)A^\dagger + (I - B^\dagger B)(B - A)(A^\dagger)^2 + (B^\dagger)^2(B - A)(I - AA^\dagger).$$

En particular, si $R(B) \subseteq R(A)$,

$$B^\dagger - A^\dagger = -B^\dagger(B - A)A^\dagger + (I - B^\dagger B)(B - A)(A^\dagger)^2.$$

1.4 Módulo mínimo reducido

Definición 1.4.1. El *módulo mínimo reducido* $\gamma(T)$ de un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se define como

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \in N(T)^\perp\} \quad (1.4)$$

▲

Proposición 1.4.2. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ (no nulo). Entonces:

1. T tiene rango cerrado si y sólo si $\gamma(T) > 0$.

2. $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. Más aún, si T tiene rango cerrado, entonces $\gamma(T) = \|T^\dagger\|^{-1}$.



Demostración.

1. Si T tiene rango cerrado, por el teorema del gráfico cerrado, $T : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$ es inversible y la inversa es acotada. Claramente la norma de la inversa coincide con $(\gamma(T))^{-1}$, razón por la cual $\gamma(T) > 0$. Recíprocamente si $\gamma(T) > 0$, $T|_{N(T)^\perp}$ es acotado inferiormente. Por lo tanto $R\left(T|_{N(T)^\perp}\right)$ es cerrado. Como $R\left(T|_{N(T)^\perp}\right) = R(T)$ la recíproca queda demostrada.
2. Si T fuera inversible, $T^\dagger = T^{-1}$ (que es la única inversa generalizada de T) y, por otra parte,

$$\gamma(T) = \inf \{ \|y\| : \|T^{-1}y\| = 1 \} = \inf \left\{ \frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} : x \neq 0 \right\} = \|T^{-1}\|^{-1}.$$

Si $R(T)$ es cerrado, $T^\dagger|_{R(T)} : R(T) \rightarrow N(T)^\perp$ es la inversa de $T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$.

Por lo tanto, razonando como en el caso anterior, se obtiene que $\gamma(T) = \|T^\dagger\|^{-1}$ (se usa que $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$, por lo que $\|T^\dagger|_{R(T)}\| = \|T^\dagger\|$). Además, como $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$, se tiene que

$$\gamma(T^*) = \|(T^*)^\dagger\|^{-1} = \|(T^\dagger)^*\|^{-1} = \|T^\dagger\|^{-1} = \gamma(T).$$

■

Proposición 1.4.3. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} subespacios cerrados de \mathcal{H} . Entonces

$$\gamma(P_{\mathcal{M}^\perp}P_{\mathcal{N}}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$$

Demostración. Sea $\mathcal{R} = \mathcal{M}^\perp$. Dado que $N(P_{\mathcal{R}}P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}^\perp \oplus (\mathcal{N} \cap \mathcal{M})$, se tiene

$$N(P_{\mathcal{R}}P_{\mathcal{N}})^\perp = \mathcal{N} \cap (\mathcal{N} \cap \mathcal{M})^\perp = \tilde{\mathcal{N}}.$$

Luego, por la Proposición 1.2.3,

$$\gamma(P_{\mathcal{R}}P_{\mathcal{N}}) = \inf_{x \in \tilde{\mathcal{N}}_1} \|P_{\mathcal{R}}x\| = \inf_{x \in \tilde{\mathcal{N}}_1} d(x, \mathcal{M}) = d(\tilde{\mathcal{N}}_1, \mathcal{M}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}].$$

■

Proposición 1.4.4. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} subespacios cerrados de \mathcal{H} . Entonces

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp].$$

Demostración. Recordemos que para todo $T \in L(\mathcal{H})$, $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. Entonces, por la Proposición 1.4.3,

$$s[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp] = \gamma(P_{\mathcal{M}^\perp}P_{\mathcal{N}^\perp}) = \gamma(P_{\mathcal{N}^\perp}P_{\mathcal{M}^\perp}) = s[\mathcal{N}, \mathcal{M}] = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}].$$

En consecuencia, $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$.

■



Proposición 1.4.5. Sean $A, B \in L(\mathcal{H})$ operadores con rango cerrado. Entonces,

$$\gamma(A)\gamma(B) s [N(A), R(B)] \leq \gamma(AB) \leq \|A\| \|B\| s [N(A), R(B)] \quad (1.5)$$

Dividiremos la demostración de esta Proposición en varias partes. En primer lugar, enunciaremos una consecuencia simple de (1.4):

Lema 1.4.6. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ un operador con rango cerrado y S un operador inversible. Entonces,

$$\|S^{-1}\|^{-1}\gamma(T) \leq \gamma(ST) \leq \|S\|\gamma(T).$$

Más aún, la misma fórmula vale si reemplazamos S^{-1} por S^\dagger , si pedimos que $R(S)$ sea cerrado y que $R(T) \subseteq N(S)^\perp$.

A continuación, demostraremos un caso particular de la Proposición 1.4.5.

Lema 1.4.7. Sean $U, V \in L(\mathcal{H})$ isometrías parciales. Entonces, $\gamma(UV) = s [N(U), R(V)]$

Demostración. Sea $\mathcal{M} = R(V)$ y $\mathcal{N} = N(U)^\perp$. Por un lado,

$$\gamma(UV)^2 = \gamma(UVV^*U^*) = \gamma(UP_{\mathcal{M}}U^*) = \gamma(P_{\mathcal{M}}U^*UP_{\mathcal{M}}) = \gamma(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}).$$

Por otro lado, $N(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}) = N(P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^\perp \oplus (\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{M})$. Por lo tanto, obtenemos que

$$\gamma(UV)^2 = \gamma(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}) = \inf \left\{ \left\| (P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}})x \right\| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{M} \ominus (\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{M}) \right\}.$$

Pero, si consideramos $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{M} \ominus (\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{M})}$, la cadena de igualdades precedente nos dice que $\gamma(UV)^2 = \min \sigma (P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}})$. En consecuencia, por la Proposición 1.2.3, resulta que $\gamma(UV) = s [N(U), R(V)]$. ■

Demostración de la Proposición 1.4.5. Sean $A^* = U^*|A^*|$ y $B = V|B|$ las descomposiciones polares de A^* y B respectivamente. Como, $|A^*|$ y $|B|$ poseen rango cerrado, $R(U) = R(|A^*|)$, y $R(V^*) = R(|B|)$, y usando el Lema 1.4.6 se tiene que

$$\gamma(AB) = \gamma(|A^*|UV|B|) \leq \| |A^*| \| \gamma(UV|B|) = \|A\| \gamma(|B|V^*U^*) \leq \|A\| \|B\| \gamma(UV),$$

y análogamente

$$\gamma(AB) = \gamma(|A^*|UV|B|) \geq \gamma(|A^*|) \gamma(UV|B|) = \gamma(A) \gamma(|B|V^*U^*) \geq \gamma(A) \gamma(B) \gamma(UV).$$

Finalmente, por el Lema 1.4.7, $\gamma(UV) = s [N(U), R(V)] = s [N(A), R(B)]$, y por ende

$$\gamma(A)\gamma(B) s [N(A), R(B)] \leq \gamma(AB) \leq \|A\| \|B\| s [N(A), R(B)].$$

■

Corolario 1.4.8. Sean $A, B \in L(\mathcal{H})$ operadores con rango cerrado. Entonces, AB tiene rango cerrado si y sólo si $c [R(B), N(A)] < 1$.



Capítulo 2

Proyecciones oblicuas y complemento de Schur

2.1 Teorema de factorización de Douglas.

Teorema 2.1.1 (Douglas). Sean $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ y $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Entonces son equivalentes:

1. $R(A) \subseteq R(B)$
2. $AA^* \leq \lambda BB^*$ para algún $\lambda \geq 0$
3. $A = BC$ para cierto operador acotado C .

Más aún, existe un único operador C tal que $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)}$. A dicho operador nos referiremos como la **solución reducida** de la ecuación $A = BX$. Dicha solución reducida satisface además las siguientes propiedades:

- i $\ker C = \ker A$
- ii $\|C\|^2 \min\{\lambda : AA^* \leq \lambda BB^*\}$

Demostración.

3 \Rightarrow 1) Es claro.

3 \Rightarrow 2) Como todo $D \in L(\mathcal{H}_3)^+$ verifica que $D \leq \|D\|I$, se tiene que

$$AA^* = BCC^*B^* \leq \|CC^*\|BB^*$$

2 \Rightarrow 3) La condición $AA^* \leq \lambda BB^*$ es equivalente a que $\|A^*x\| \leq \lambda^{1/2}\|B^*x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_3$. En particular, $\ker(B^*) \subseteq \ker(A^*)$. Por lo tanto, es posible definir $T : R(B^*) \rightarrow R(A^*)$ del siguiente modo:

$$T(B^*x) = A^*x .$$



Es claro que T está bien definido y es lineal. Como $\|A^*x\| \leq \lambda^{1/2}\|B^*x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_3$, deducimos que T es acotado ($\|Ty\| \leq \lambda^{1/2}\|y\|$, $y \in R(B^*)$). Extendemos T (manteniendo su nombre) a $\overline{R(B^*)}$ por continuidad y luego a todo \mathcal{H}_2 como cero en $R(B^*)^\perp$. Queda que $T \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, con $\|T\| \leq \lambda^{1/2}$. Es claro que $A^* = TB^*$, lo cual muestra que el operador que estamos buscando es $C = T^* \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Notar que $R(C) \subseteq \ker T^\perp \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^\perp$.

1 \Rightarrow 3) La condición $R(A) \subseteq R(B)$ permite asegurar que para todo $x \in \mathcal{H}_1$ existe un único $y \in \ker B^\perp$ tal que $Ax = By$. Definamos $C : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ como $Cx = y$. Para ver que $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ basta verificar que su gráfico es cerrado. Sea (x_n, y_n) ($n \in \mathbb{N}$) una sucesión de puntos en el gráfico de C tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ e $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$, luego

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} By_n = By$$

es decir (x, y) pertenece al gráfico de C .

Es claro que la inclusión $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^\perp$ identifica unívocamente al operador C , puesto que $BC = A$ y B es inyectivo en $\ker B^\perp$. Observar que tanto el C construido en (1 \Rightarrow 3) como el construido en (2 \Rightarrow 3) cumplen esa inclusión, y por ende coinciden.

Verifiquemos ahora este C satisface (i) y (ii). Como, $A = BC$, vemos que $\ker C \subseteq \ker A$. Por otro lado, si $x \in \ker A$, entonces el único $y \in \ker B^\perp$ tal que $By = Ax = 0$ es $y = 0$, por lo que $Cx = 0$. Esto muestra que $\ker A \subseteq \ker C$. Por otro lado, vimos en (2 \Rightarrow 3) que $\|C\| = \|T\| \leq \lambda^{1/2}$, para todo λ tal que $AA^* \leq \lambda BB^*$. La otra desigualdad es clara, puesto que $AA^* = BCC^*B^* \leq \|C\|^2 BB^*$. ■

Corolario 2.1.2. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces $R((AA^*)^{1/2}) = R(A)$.

Demostración. Dado que $AA^* = (AA^*)^{1/2}((AA^*)^{1/2})^*$, usando la equivalencia entre (1) y (2) del Teorema de Douglas se tiene que $R((AA^*)^{1/2}) = R(A)$. ■

Corolario 2.1.3. Sean $A, B \in L(\mathcal{H})$ Entonces $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{1/2})$

Demostración. Consideremos en $L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ el operador

$$T := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $R(T) = R(A) + R(B)$ y que $R((TT^*)^{1/2}) = R((AA^* + BB^*)^{1/2})$. Luego, usando el corolario 2.1.2, se tiene que $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{1/2})$. ■

Proposición 2.1.4. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ cuya descomposición matricial respecto a un subespacio cerrado \mathcal{S} está dada por $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$. Entonces $R(A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}) \subseteq R((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2})$.



Demostración. Como

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{pmatrix} I_{\mathcal{S}} & 0 \\ -A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1} & I_{\mathcal{S}^{\perp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}} \\ A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}^{\perp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{S}} & -(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1}A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}} \\ 0 & I_{\mathcal{S}^{\perp}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I_{\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}^{\perp}} - A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1}A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

resulta que

$$A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1}A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp}} \leq A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}^{\perp}}.$$

Por la tanto, usando el teorema de Douglas obtenemos

$$R(A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1/2}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}^{\perp}}^{1/2}).$$

Finalmente, como $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I) = \mathcal{S}$, se tiene que $R(A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}}) \subseteq R((A_{\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}^{\perp}})^{1/2})$. ■

2.2 Complemento de Schur en espacios de Hilbert.

Comenzaremos con el siguiente resultado obtenido por Krein en 1947 y redescubierto por Anderson-Trapp en 1975, el cual dará origen a la definición de Shorted de un operador.

Teorema 2.2.1 (Krein [81], Anderson and Trapp [4], [5]). *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado. Entonces*

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) := \{D : 0 \leq D \leq A \text{ } R(D) \subseteq \mathcal{S}\}$$

posee un elemento máximo.

Demostración. Sea $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$ y $A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$. Claramente $A_{/\mathcal{S}} \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$. Por otra parte, si $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$, en particular $D \leq A$, y por el teorema de Douglas existe una contracción C tal que $D^{1/2} = A^{1/2}C$. Dado que rango de dicha contracción está contenido en \mathcal{M} , $CC^* \leq P_{\mathcal{M}}$, pero entonces

$$D = A^{1/2}CC^*A^{1/2} \leq A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2} = A_{/\mathcal{S}},$$

lo cual muestra que $A_{/\mathcal{S}} = \max \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$. ■

Definición 2.2.2. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Llamaremos shorted de A al subespacio \mathcal{S} , y lo notaremos $\Sigma(A, \mathcal{S})$, al máximo del conjunto $\mathcal{M}(A, \mathcal{S})$.

En la siguiente proposición, recopilamos una serie de resultados más o menos inmediatos de la definición y la demostración del Teorema 2.2.1.

Proposición 2.2.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Entonces:*

1. Si $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$, entonces, $\Sigma(A, \mathcal{S}) = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$.



2. $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$.
3. $\Sigma(\alpha A, \mathcal{S}) = \alpha \Sigma(A, \mathcal{S})$.
4. $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \Sigma(A, \mathcal{S})$.
5. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces, $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$.
6. Si $A \leq B$, entonces, $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(B, \mathcal{S})$.

Demostración. El ítem 1 se deduce de la demostración del Teorema 2.2.1, mientras que los otros ítems son consecuencias inmediatas de la definición. ■

Proposición 2.2.4. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado. Entonces, $\Sigma(A^2, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})^2$

Demostración. Sean $\mathcal{M} = \overline{A^{-1/2}(\mathcal{S})}$, $\mathcal{M}_1 = \overline{A^{-1}(\mathcal{S})}$, y denotemos por medio de $P_{\mathcal{M}}$ y $P_{\mathcal{M}_1}$ a las proyecciones ortogonales sobre \mathcal{M} y \mathcal{M}_1 respectivamente.

Observar que $A^{1/2}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}$. Por lo tanto, se tiene que $(I - P_{\mathcal{M}})A^{1/2}P_{\mathcal{M}_1} = 0$ y adjuntando

$$P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}(I - P_{\mathcal{M}}) = 0.$$

En consecuencia, fijado $h \in \mathcal{H}$, vemos que

$$\begin{aligned} \langle A^{1/2}P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}h, h \rangle &= \|P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}h\|^2 = \|P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}P_{\mathcal{M}}h\|^2 \\ &\leq \|A^{1/2}P_{\mathcal{M}}h\|^2 = \langle P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}h, h \rangle, \end{aligned}$$

lo cual implica que $A^{1/2}P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2} \leq P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}$. Conjugando ambos miembros con $A^{1/2}$ queda demostrada la Proposición. ■

Proposición 2.2.5. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S}, \mathcal{T} son subespacios cerrados de \mathcal{H} , entonces $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{T}) = \Sigma(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) &= \{D : 0 \leq D \leq A \text{ } R(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\} \\ \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S}) &= \{D : 0 \leq D \leq \Sigma(A, \mathcal{T}) \text{ } R(D) \subseteq \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Probaremos que estos conjuntos son iguales y por ende sus máximos también lo son. Sea $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$, entonces por un lado $R(D) \subseteq \mathcal{T}$ y $D \leq A$ lo cual implica que $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$, pero también $R(D) \subseteq \mathcal{S}$, en consecuencia $D \in \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S})$. Recíprocamente, si $D \in \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S})$ entonces $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$, lo cual muestra que $R(D) \subseteq \mathcal{T}$ y en consecuencia $R(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Pero como $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T}) \leq A$ se tiene que $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$. ■



Rango y núcleo del complemento de Schur

Proposición 2.2.6. *Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} , entonces*

$$R(\Sigma(A, \mathcal{S})^{1/2}) = R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$. Observar que

$$R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} = A^{1/2}(A^{-1/2}(\mathcal{S})) = R(A^{1/2}P_{\mathcal{M}}).$$

Luego, por el Corollary 2.1.2,

$$\begin{aligned} R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} &= R(A^{1/2}P_{\mathcal{M}}) = R(|P_{\mathcal{M}}A^{1/2}|) \\ &= R((A^{1/2}P_{\mathcal{M}}PA^{1/2})^{1/2}) = R(A_{/\mathcal{S}}^{1/2}), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Corolario 2.2.7. *Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} , entonces, $R(A) \cap \mathcal{S} \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}))$.*

Demostración. Como $\Sigma(A^2, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})^2$, por el teorema de Douglas, $R(\Sigma(A^2, \mathcal{S})^{1/2}) \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}))$. Pero, $R(\Sigma(A^2, \mathcal{S})^{1/2}) = R(A) \cap \mathcal{S}$. ■

Proposición 2.2.8. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado y $\mathcal{M} = \overline{A^{-1/2}(\mathcal{S})}$. Entonces*

1. $\overline{N(A) + \mathcal{S}^\perp} \subseteq N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp)$
2. $N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = N(A) + \mathcal{S}^\perp$ si y sólo si $A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)$ es cerrado en $R(A^{1/2})$.

Demostración.

1. Por un lado usando la Proposición 2.2.6 se tiene

$$N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = (R(A^{1/2}) \cap \overline{\mathcal{S}})^\perp \supseteq \overline{N(A) + \mathcal{S}^\perp}.$$

Por otro lado, como $\Sigma(A, \mathcal{S}) = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$,

$$N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = N(A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}) = N(P_{\mathcal{M}}A^{1/2}) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp).$$

2. Dado que $(A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp))^\perp = A^{-1/2}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$, se tiene $\overline{A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)} = \mathcal{M}^\perp$. Luego, es claro que $A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)$ es cerrado en $R(A^{1/2})$ si y sólo si $\mathcal{M}^\perp \cap R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)$, lo cual es equivalente a $A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp) = A^{-1/2}(A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)) = \ker A + \mathcal{S}^\perp$. ■



Convergencia

Proposición 2.2.9. *Sea $\{A_n\}$ una sucesión de operadores positivos tales que $A_n \downarrow_{\text{sot}} A$ y $\{\mathcal{S}_n\}$ una familia de subespacios cerrados de \mathcal{H} tales que $\mathcal{S}_{n+1} \subseteq \mathcal{S}_n$. Entonces,*

$$\Sigma(A_n, \mathcal{S}_n) \downarrow_{\text{sot}} \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

donde $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

Demostración. Como la sucesión $\{\Sigma(A_n, \mathcal{S}_n)\}$ es decreciente, posee un límite en la topología fuerte de operadores, al cual denotaremos $\mathcal{S}(A)$. Dado que $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A_n, \mathcal{S}_n) \leq A$ para todo $n \geq 1$, es claro que $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \mathcal{S}(A) \leq A$. Luego, basta verificar que $R(\mathcal{S}(A)) \subseteq \mathcal{S}$, pues en tal caso $\mathcal{S}(A) \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$, y como $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \max \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$, $\mathcal{S}(A)$ tiene que ser igual a $\Sigma(A, \mathcal{S})$.

Para mostrar que $R(\mathcal{S}(A)) \subseteq \mathcal{S}$, basta notar que para todo $n \geq 1$, por el Teorema de Douglas 2.1.1, como $\mathcal{S}(A) \leq \Sigma(A_n, \mathcal{S}_n)$

$$R(\mathcal{S}(A)) \subseteq R((\mathcal{S}(A))^{1/2}) \subseteq R(\Sigma(A_n, \mathcal{S}_n)^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}_n$$

en consecuencia $R(\mathcal{S}(A)) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. ■

Ahora buscaremos condiciones suficientes para garantizar la convergencia en norma.

Lema 2.2.10. *Sea $A \in GL(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Entonces*

$$\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\|\cdot\|} \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

Demostración. Notar que $I \leq \|A^{-1}\|A$. Dado $\varepsilon > 0$ llamemos $\lambda_\varepsilon = (1 + \varepsilon\|A^{-1}\|)$. Luego se cumple que $A + \varepsilon I \leq \lambda_\varepsilon A$ y por ende $\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \leq \lambda_\varepsilon \Sigma(A, \mathcal{S})$. Por lo tanto,

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \leq \lambda_\varepsilon \Sigma(A, \mathcal{S}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\|\cdot\|} \Sigma(A, \mathcal{S}),$$

por lo que $\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S})$ converge a $\Sigma(A, \mathcal{S})$. ■

Teorema 2.2.11. *Sean $A \in GL(\mathcal{H})^+$ y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $GL(\mathcal{H})^+$ tal que*

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} A \quad \text{y} \quad A_n \geq A \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para todo subespacio cerrado \mathcal{S} de \mathcal{H} , se cumple que

$$\Sigma(A_n, \mathcal{S}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

Demostración. Observar que $A_n = A + (A_n - A) \leq A + \|A_n - A\|I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si abreviamos $\varepsilon_n = \|A_n - A\|$, por el Lema anterior se tiene que

$$\|\Sigma(A_n, \mathcal{S}) - \Sigma(A, \mathcal{S})\| \leq \|\Sigma(A + \varepsilon_n I, \mathcal{S}) - \Sigma(A, \mathcal{S})\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

como queríamos demostrar. ■



Otras caracterizaciones del complemento de Schur.

Teorema 2.2.12 (Lebesgue). *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Entonces existen únicos F y $G \in L(\mathcal{H})^+$ tales que:*

$$A = F + G, \quad R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S} \quad \text{y} \quad R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\} \quad (2.1)$$

Más aun, $F = \Sigma(A, \mathcal{S})$.

Demostración. Sea $F = \Sigma(A, \mathcal{S})$. Claramente se satisface que $R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$. Por otro lado, sea $x \in R((A - \Sigma(A, \mathcal{S}))^{1/2}) \cap \mathcal{S}$ y P la proyección ortogonal al subespacio generado por x . Como $R(P) \subseteq R((A - \Sigma(A, \mathcal{S}))^{1/2})$, por el Teorema de Douglas, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda P \leq A - \Sigma(A, \mathcal{S})$. Pero entonces, $\lambda P + \Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$. Como también $R(\lambda P + \Sigma(A, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$, se tiene que $\lambda P + \Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$, por lo que debe verificarse que $x = 0$.

Supongamos ahora que nos dan un par F y $G \in L(\mathcal{H})^+$ satisfacen las condiciones de (2.1). Entonces, como $R(F) \subseteq R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$ y $F \leq A$, deducimos que $F \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$. Por otro lado, dado que $G = (A - \Sigma(A, \mathcal{S})) + (\Sigma(A, \mathcal{S}) - F) \geq (\Sigma(A, \mathcal{S}) - F) \geq 0$, usando el Teorema de Douglas se tiene que

$$R((\Sigma(A, \mathcal{S}) - F)^{1/2}) \subseteq R(G^{1/2}).$$

Pero $R((\Sigma(A, \mathcal{S}) - F)^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$ y $R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\}$. En consecuencia, $\Sigma(A, \mathcal{S}) = F$. ■

Teorema 2.2.13. *Sea \mathcal{S} un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , y $A \in L(\mathcal{H})^+$ el cual posee una representación matricial*

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$$

respecto de \mathcal{S} . Entonces, si C es la solución reducida de la ecuación $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} = (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} X$ se tiene que:

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Dado que

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} = F + G,$$

basta ver que F y G están en las condiciones del Teorema anterior. Claramente $G \geq 0$, y como consecuencia del Corolario 2.1.2,

$$R(G^{1/2}) = R\left(\begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix}\right).$$



Ahora bien, si $\begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp}^{1/2} y = 0$. Pero el hecho de que $N((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}) \subseteq N(C^*)$ (que se verifica porque C es la solución reducida), implica que $C^*y = 0$. En consecuencia, $R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\}$

Por otro lado, claramente $R(F) \subseteq \mathcal{S}$. Por lo tanto, sólo resta ver que $F \geq 0$. Supongamos que existe un $x \in \mathcal{H}$ tal que $\langle (A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^*C)x, x \rangle = -\delta$ para algún $\delta > 0$. Como $R(C) \subseteq \overline{R(A_{22}^{1/2})}$, existe $y \in \mathcal{S}^\perp$ de modo que $\|Cx + (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}y\| < \delta^{1/2}$. Pero entonces

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^*C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle (A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^*C)x, x \rangle + \langle Cx + (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}y, Cx + (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}y \rangle < 0 \end{aligned}$$

contradiciendo la positividad de A . ■

Corolario 2.2.14. *Sea \mathcal{S} un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , y $A \in L(\mathcal{H})^+$ tal que*

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$$

Si $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp}$ posee rango cerrado, entonces:

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^\dagger A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Basta notar que la solución reducida de la ecuación $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} = (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} X$ es $D = ((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^\dagger)^{1/2} A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}$. ■

Proposición 2.2.15. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$, \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} y x un vector en \mathcal{S} . Entonces:*

$$\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \inf \left\{ \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle : y \in \mathcal{S}^\perp \right\}.$$

Demostración. Dado que $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$, $\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ resulta una cota inferior. Si A es inversible, tomando $y = -A_{22}^{-1} A_{21} x$, se tiene que

$$\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

y por lo tanto $\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ es el mínimo del conjunto. Si A no es inversible, sea α el ínfimo en cuestión. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ verifica se tiene que

$$\alpha \leq \inf \left\{ \left\langle \left(A + \frac{1}{n} I \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle : y \in \mathcal{S}^\perp \right\} = \left\langle \left(A + \frac{1}{n} I \right)_{/\mathcal{S}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$



tomando límite y usando la Proposición 2.2.9 se obtiene que $\alpha \leq \left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

■

Teorema 2.2.16. *Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} , sea $\mathcal{N}(A, \mathcal{S})$ el conjunto de operadores definido por*

$$\mathcal{N}(A, \mathcal{S}) = \{QAQ^* : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}.$$

Entonces, $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$.

Demostración. Llamemos $\mathcal{P}_{\mathcal{S}} = \{Q \in L(\mathcal{H}) : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}$. Si $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$, como $P_{\mathcal{S}}Q = Q$, deducimos que existe $X \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$ tal que $Q = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^{\perp} \end{matrix}$. Luego, dados $x \in \mathcal{S}$ e $z \in \mathcal{S}^{\perp}$, se tiene que

$$\left\langle QAQ^* \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ X^*x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ X^*x \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.2)$$

Observar que cualquier operador $X \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$ produce un $Q = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$. Luego los valores X^*x recorren todo \mathcal{S}^{\perp} . Usando la Proposition 2.2.15 y la formula (2.2) deducimos que

$$\begin{aligned} \inf_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}} \left\langle QAQ^* \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle &= \inf_{y \in \mathcal{S}^{\perp}} \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$. ■

2.3 Proyecciones A -autoadjuntas y compatibilidad

Todo operador positivo (semidefinido) $A \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal acotada (posiblemente degenerada) del siguiente modo: $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$, $x, y \in \mathcal{H}$. Respecto a esta forma, es fácil ver que un operador $C \in L(\mathcal{H})$ resulta autoadjunto si satisface la identidad $AC = C^*A$ y que el ortogonal de un subespacio \mathcal{S} está dado por $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}) = A(\mathcal{S})^{\perp}$.

Si el operador A en cuestión es inversible, la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ induce en \mathcal{H} una estructura de espacio de Hilbert equivalente a la anterior en el sentido métrico y por ende topológico. Sin embargo, otras cuestiones cambian. Por ejemplo, las noción de ortogonalidad. Esto trae como consecuencia que la proyección A -ortogonal, que existe y es única, no necesariamente coincide con la ortogonal respecto a la estructura de Hilbert original.



En el caso en que A no es inversible, no sólo se pierden las equivalencias antes mencionadas, sino que también puede suceder que no exista una proyección A -autoadjunta sobre un subespacio dado. Como veremos en esta sección, en el caso general, puede ocurrir que no exista, exista una única proyección A -autoadjunta, o bien infinitas. A lo largo de la misma \mathcal{S} será un subespacio cerrado de \mathcal{H} y A un operador positivo sobre \mathcal{H} cuya representación matricial respecto a \mathcal{S} es $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{S},\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S},\mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$.

Con el objeto de estudiar este fenómeno, Corach, Maestripieri y Stojanoff introdujeron en [44] la siguiente noción de compatibilidad:

Definición 2.3.1. Diremos que el par (A, \mathcal{S}) es **compatible** o bien que \mathcal{S} es A -compatible, si el conjunto

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{Q \in \mathcal{Q} : R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A\}.$$

es no vacío. En otras palabras, el par (A, \mathcal{S}) es compatible si existe al menos una proyección sobre \mathcal{S} A -autoadjunta.

A lo largo de una serie de tres artículos [44], [45] y [46], se demostraron las siguientes caracterizaciones de la condición de compatibilidad.

Teorema 2.3.2. *Dada un proyección (oblicua) Q sobre \mathcal{S} , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$
2. $N(Q) \subseteq R(Q)^{\perp A}$.
3. Q es A -contractivo, es decir, $\langle Qx, Qx \rangle_A \leq \langle x, x \rangle_A \quad x \in \mathcal{H}$.

Teorema 2.3.3. *Sea P la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. El par (A, \mathcal{S}) es compatible.
2. Existe un proyector oblicuo Q sobre \mathcal{S} tal que $N(Q) \subseteq R(Q)^{\perp A}$.
3. Existe un proyector oblicuo Q sobre \mathcal{S} que es A -contractivo, es decir

$$\langle Qx, Qx \rangle_A \leq \langle x, x \rangle_A \quad x \in \mathcal{H}.$$

4. $R(PA) = R(PAP)$.
5. $R(A_{\mathcal{S},\mathcal{S}^\perp}) \subseteq R(A_{\mathcal{S},\mathcal{S}})$
6. La ecuación $R(A_{\mathcal{S},\mathcal{S}^\perp}) = R(A_{\mathcal{S},\mathcal{S}})X$ tiene solución.



Observación 2.3.4. Dado un operador $B \in L(\mathcal{H})^+$, cuyo rango no es cerrado, es relativamente sencillo demostrar que $R(B) \subsetneq R(B^{1/2})$. Sin embargo, $R(B^{1/2})$ no es “mucho más grande” que $R(B)$, dado que este último es denso en $R(B^{1/2})$. Esta sutil diferencia es la que está detrás de la noción de compatibilidad. Como hemos visto en la Proposición 2.1.4, dados $A \in L(\mathcal{H})^+$ y un subespacio cerrado \mathcal{S} de \mathcal{H} , siempre se cumple que $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) \subseteq R((A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})^{1/2})$, sólo cuando $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})$ el par (A, \mathcal{S}) es compatible. En particular, notar que si $\dim \mathcal{S} < \infty$, entonces el par (A, \mathcal{S}) resulta compatible. En efecto, como $\dim R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}) < \infty$, se tiene que $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}) = R((A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})^{1/2}) = \overline{R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})}$. ▲

Es relativamente sencillo notar que dada una proyección oblicua Q sobre \mathcal{S} , su descomposición matricial respecto de \mathcal{S} tiene la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, a partir del teorema anterior, resulta natural la siguiente definición:

Definición 2.3.5. Sea E la solución reducida de la ecuación $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) = R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})X$. Por medio de $P_{A, \mathcal{S}}$ indicaremos a la proyección (oblicua en general) sobre \mathcal{S} definida por:

$$P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.3.6. Si $A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}$ tiene rango cerrado, entonces $E = (A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})^\dagger A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}$. Sea P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} . Usando el hecho de que, con cierto abuso de notación, $A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} = PAP$ y $A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} = PA(I - P)$, obtenemos la siguiente fórmula para la proyección $P_{A, \mathcal{S}}$:

$$P_{A, \mathcal{S}} = P + (PAP)^\dagger (PA(I - P)).$$

▲

A continuación enumeramos una serie de propiedades de esta proyección extraídas de [44], [45] y [46].

Teorema 2.3.7. Si el par (A, \mathcal{S}) es compatible y $\mathcal{N} = N(A) \cap \mathcal{S}$, entonces

1. La proyección $P_{A, \mathcal{S}} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Más aún, $P_{A, \mathcal{S}}$ es la proyección sobre \mathcal{S} cuyo núcleo es $A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \ominus \mathcal{N}$.
2. Para todo $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ existe $Z \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N})$ tal que

$$Q = P_{A, \mathcal{S}} + Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & D \\ 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix}. \quad (2.3)$$

En particular, notar que $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ posee un único elemento (el cual será $P_{A, \mathcal{S}}$) si y sólo si $\mathcal{N} = N(A) \cap \mathcal{S} = \{0\}$.



$$3. \|P_{A,\mathcal{S}}\| = \min\{ \|Q\| : Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \}.$$

Cuando el operador A tiene rango cerrado, como veremos en el siguiente resultado, depende solamente de que $c[N(A), \mathcal{S}] < 1$.

Teorema 2.3.8. *Si A tiene rango cerrado y P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. El par (A, \mathcal{S}) es compatible.
2. El subespacio $\mathcal{S} + N(A)$ es cerrado.
3. $c[N(A), \mathcal{S}] < 1$.
4. El subespacio $\mathcal{S}^\perp + R(A)$ es cerrado.
5. El rango de PA es cerrado.
6. El rango de PAP es cerrado.
7. El rango de $AP = A(\mathcal{S})$ es cerrado.

Un caso particular de operadores con rango cerrado son la proyecciones. En tal caso, la fórmula de Lance-Ptak adopta la siguiente forma:

Proposición 2.3.9. *Sea Q una proyección ortogonal y \mathcal{S} un subespacio cerrado tal que el par (Q, \mathcal{S}) es compatible. Entonces*

$$\|P_{Q,\mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2} = s[N(Q), \mathcal{S}]^{-1}.$$

Demostración. Falta demostración ■

Para finalizar, demostraremos el siguiente resultado técnico que será de utilidad más adelante.

Proposición 2.3.10. *Supongamos que el par (A, \mathcal{S}) es compatible y que \mathcal{S} está incluido en cierto subespacio cerrado \mathcal{T} que reduce al operador A , es decir $P_{\mathcal{T}}A = AP_{\mathcal{T}}$. Entonces, si*

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T}} & 0 \\ 0 & A_{\mathcal{T}^\perp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix}, \text{ el par } (A_{\mathcal{T}}, \mathcal{S}) \text{ es compatible y}$$

$$P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_{A_{\mathcal{T}},\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix},$$

donde a $P_{A_{\mathcal{T}},\mathcal{S}}$ lo consideramos actuando en \mathcal{T} .



Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} B & C & 0 \\ C^* & D & 0 \\ 0 & 0 & A_{\mathcal{T}^\perp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{T} \ominus \mathcal{S} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix} \quad \text{donde} \quad A_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{T} \ominus \mathcal{S} \end{matrix}.$$

Por un lado, notemos que la solución reducida de la ecuación $BX = (C, 0)$ posee la forma $(E, 0) \in L((\mathcal{T} \ominus \mathcal{S}) \oplus \mathcal{T}^\perp, \mathcal{S})$, puesto que tiene el mismo núcleo que $(C, 0)$. Entonces

$$P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{T} \ominus \mathcal{S} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix}.$$

Por otro lado, es fácil ver que E es la solución reducida de la ecuación $AX = C$, razón por la cual no sólo el par $(A_{\mathcal{T}}, \mathcal{S})$ es compatible, sino que también se tiene que

$$P_{D_{\mathcal{T}, \mathcal{S}}} = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, comparando las expresiones para $P_{A, \mathcal{S}}$ y para $P_{A_{\mathcal{T}}, \mathcal{S}}$ se puede observar que efectivamente $P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_{A_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

2.4 Compatibilidad y el complemento de Schur.

La compatibilidad se encuentra íntimamente relacionada con el complemento de Schur. En esta sección daremos un breve resumen de como estas dos nociones se relacionan. También se puede considerar esta sección como una motivación para las cuestiones que desarrollaremos en el capítulo 6. Al igual que en la sección precedente, \mathcal{S} será un subespacio cerrado y A un operador positivo de $L(\mathcal{H})$.

Comencemos con la siguiente proposición que relaciona directamente el complemento de Schur con las distintas proyecciones del conjunto PAS .

Proposición 2.4.1. *Sea (A, \mathcal{S}) un par compatible. Si $E \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S}^\perp)$ y $Q = I - E$ entonces:*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = Q^*A = AQ.$$

Demostración. Por un lado, como $R(Q^*) = R(E)^\perp = \mathcal{S}$, claramente $R(QA) \in \mathcal{S}$. Por otro lado, la Proposición 2.3.2 implica que $0 \leq Q^*A = Q^*AQ \leq A$. Finalmente, sea $X \in L(\mathcal{H})^+$ tal que $X \leq A$ y $R(X) \subseteq \mathcal{S}$. Entonces

$$X = Q^*XQ \leq Q^*AQ = AQ,$$

y por ende $AQ = \Sigma(A, \mathcal{S})$. ■



Cómo hemos visto en la Proposición 2.2.16

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \{QAQ^* : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}, \quad (2.4)$$

donde el ínfimo se toma respecto al orden usual. La siguiente proposición muestra que relación existe entre esta caracterización del complemento de Schur y la compatibilidad.

Proposición 2.4.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El par (A, \mathcal{S}) es compatible.*
2. *El ínfimo en (2.4) se alcanza, es decir*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \min \{QAQ^* : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}.$$

Más aún, una proyección E realiza el mínimo si y sólo si pertenece al conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$.

Otra cuestión que hemos considerado respecto al complemento de Schur es su rango. En la Proposición 2.2.6 vimos que es posible decir exactamente cual es el rango de $\Sigma(A, \mathcal{S})^{1/2}$. Sin embargo, en general, sólo es conocida una estimación del rango de $\Sigma(A, \mathcal{S})$ (Corolario 2.2.7). Las siguientes Proposiciones muestran que también existe una estrecha relación entre la compatibilidad del par (A, \mathcal{S}) y el rango del $\Sigma(A, \mathcal{S})$.

Proposición 2.4.3. *Son equivalentes:*

1. *El par (A, \mathcal{S}) es compatible.*
2. $R(\Sigma(A, \mathcal{S})) = R(A) \cap \mathcal{S}$.
3. $N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = N(A) + \mathcal{S}^\perp$.

Proposición 2.4.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $R(\Sigma(A, \mathcal{S})) \subseteq R(A)$.
2. *El par $(A, N(\Sigma(A, \mathcal{S})))$ es compatible.*

Otras cuestiones referentes a la relación entre complementos de Schur y la compatibilidad serán estudiadas en un marco más general en el capítulo 6.

Capítulo 3

Marcos en espacios de Hilbert

A través de este capítulo recordaremos las definiciones y propiedades básicas de la teoría de marcos desde el punto de vista de la teoría de operadores. El lector interesado en una completa descripción de esta teoría y sus aplicaciones puede consultar el excelente trabajo Heil and Walnut [71] o bien los libros de Christensen [41] y Young [123]. Asumiremos que el lector está familiarizado con los espacios $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$, $L^2([0, 1])$ y $L^2(\mathbb{R})$, como así también con las cuestiones elementales de bases ortonormales en espacios de Hilbert.

3.1 Definiciones básicas

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable¹, y \mathcal{W} un subespacio cerrado de \mathcal{H} .

Definición 3.1.1. Una sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores de \mathcal{W} . se denomina **marco** para el subespacio \mathcal{W} si existen constantes $A, B > 0$ tales que, para todo $f \in \mathcal{W}$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.1)$$

Las cotas A, B óptimas para (3.1) se denominan **cotas** del marco \mathcal{F} . Si $A = B$ entonces el marco se denomina **ajustado**, mientras que si $A = B = 1$ se dice que es un **marco de Parseval**.

Asociado con el marco \mathcal{F} existe un operador acotado $T : \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$ definido por

$$T(e_n) = f_n,$$

donde $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denota la base canónica de ℓ^2 . Este operador es conocido con el nombre de **operador de síntesis**. En el caso de marcos con finitos elementos, asumiremos que el dominio del operador de síntesis es \mathbb{C}^m donde m es el número de vectores que posee el marco.

¹Un espacio de Hilbert se dice separable si admite una base ortonormal a lo sumo numerable.



El adjunto de dicho operador se denomina **operador de análisis** y para cada $x \in \mathcal{H}$ está dado por la siguiente expresión

$$T^*(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, f_n \rangle e_n.$$

Otro operador que usualmente se asocia a un marco es el denominado **operador de marco**, el cual se define como $S = TT^*$. Es fácil ver que

$$Sf = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle f_n \quad f \in \mathcal{H}. \quad (3.2)$$

De (3.1) surge que $AP_{\mathcal{W}} \leq S \leq BP_{\mathcal{W}}$, razón por la cual $S|_{\mathcal{W}}$ resulta inversible. A partir de esto, podemos inferir fácilmente que $R(T) = \mathcal{W}$ y que $T^*|_{\mathcal{W}}$ es inyectivo.

En términos de los operadores recientemente definidos, las cotas de un marco pueden caracterizarse como

$$B = \|T\|^2 = \|S\| = \rho(S) \quad \text{and} \quad A = \gamma(T)^2 = \gamma(S) = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S) \ \lambda \neq 0\}. \quad (3.3)$$

Definición 3.1.2. Dado un marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para un subespacio cerrado \mathcal{W} de \mathcal{H} , definimos el **exceso** del marco \mathcal{F} , que denotaremos $e(\mathcal{F})$, como el número cardinal correspondiente a la dimensión del núcleo del operador de síntesis, es decir

$$e(\mathcal{F}) = \dim \left\{ (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n = 0 \right\},$$

Definición 3.1.3. Un marco \mathcal{F} se denomina **base de Riesz** si $e(\mathcal{F}) = 0$, i.e., si el operador de síntesis es un isomorfismo.

Holub [74] y Balan, Casazza, Heil y Landau [18] han probado el siguiente resultado que justifica el nombre de exceso:

Proposición 3.1.4. *Dado un subespacio cerrado \mathcal{W} de un espacio de Hilbert \mathcal{H} y un marco $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para \mathcal{W} , entonces*

$$e(\mathcal{F}) = \sup\{ |I| : I \subseteq \mathbb{N} \text{ y } \{f_n\}_{n \notin I} \text{ sigue siendo un marco para } \mathcal{W} \}.$$

Desde el punto de vista de las aplicaciones, si el vector f representa una señal y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cierta sucesión de vectores, es deseable que el conjunto de datos contenidos en los coeficientes $\langle f, f_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, sea suficiente para reconstruir la señal f . Si la sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un marco para cierto subespacio cerrado \mathcal{W} de \mathcal{H} y $f \in \mathcal{W}$, entonces, de (3.2) se puede deducir por un lado

$$f = SS^\dagger(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^\dagger f, f_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S^\dagger f_n \rangle f_n,$$



y por otro

$$f = S^\dagger S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle S^\dagger(f_n).$$

Luego, si definimos $g_n = S^\dagger f_n$ se tiene que para todo $f \in \mathcal{W}$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle g_n,$$

Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 3.1.5. Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para el subespacio cerrado \mathcal{W} de \mathcal{H} y sea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ otro subespacio cerrado tal que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$. Un **marco dual oblicuo** de \mathcal{F} en \mathcal{M} es un marco $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para \mathcal{M} que satisface:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n \quad \forall f \in \mathcal{W}. \quad (3.4)$$

El marco dual $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido por $g_n = S^\dagger f_n$ se denomina **marco dual canónico**. En este caso $\mathcal{W} = \mathcal{M}$ y se tiene que \mathcal{F} , a su vez, es el marco dual canónico de \mathcal{G} .

Se dice que un marco dual oblicuo posee la **propiedad de norma mínima** si para todo $f \in \mathcal{W}$ los coeficientes $\{\langle f, g_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ poseen norma (ℓ^2) mínima. Christensen y Eldar probaron en [40] que el marco dual con la propiedad de norma mínima tienen la forma

$$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{B(T^*B)^\dagger e_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (3.5)$$

donde $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denota la base canónica de ℓ^2 , y B es un operador acotado cuyo rango es \mathcal{M} .

Por otro lado, sea $\mathcal{D}(\ell^2)$ el conjunto de todos los $D \in Gl(\ell^2)^+$ diagonales con respecto a la base canónica $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Los marcos que poseen la propiedad de norma mínima respecto a las diferentes normas escaleadas $\|\cdot\|_D$, $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$, serán denominados **marcos duales escaleados**. En el capítulo 4 daremos fórmulas explícitas para esta clase de marcos.

Los marcos duales guardan una estrecha relación con las inversas generalizadas. El siguiente resultado, demostrado por Christensen y Eldar en [42], expresa en forma más precisa dicha relación:

Proposición 3.1.6. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para el subespacio cerrado $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$, F su operador de síntesis y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ otro subespacio cerrado tal que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$. Un marco $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para \mathcal{M} con operador de síntesis G es un marco dual oblicuo para \mathcal{F} si y sólo si FG^* es la proyección sobre \mathcal{W} paralela a \mathcal{M}^\perp . Más aún, el único marco dual oblicuo en \mathcal{M} con la propiedad de norma mínima es aquel cuyo operador de análisis es la inversa generalizada de T asociada a la proyección antes mencionada y a la proyección ortogonal sobre $N(T)^\perp$.*



Observación 3.1.7. En particular, el operador de análisis del marco dual canónico es la inversa generalizada de Moore-Penrose. Por otro lado, el operador de análisis del marco dual escaleado en \mathcal{M} , que posee la propiedad de norma mínima respecto a $\|\cdot\|_D$, es la inversa generalizada de T correspondiente a la proyección sobre \mathcal{W} paralela a \mathcal{M}^\perp y a la proyección $1 - P_{D, N(T)}$.

Corolario 3.1.8. Sea \mathcal{W} un subespacio cerrado de \mathcal{H} , $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para \mathcal{W} y $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ su marco dual canónico. Entonces, dado $f \in \mathcal{W}$, la sucesión de coeficientes $\{\langle f, g_n \rangle\}$ posee mínima norma en ℓ^2 respecto de todas las sucesiones de coeficientes $\{\alpha_n\}$ que satisfacen

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

3.2 Marcos de Riesz y marcos de Riesz condicionados

Dado un marco $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k \in M}$ para cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} finito dimensional (aquí $M = \{1, \dots, N\}$ o bien $M = \mathbb{N}$), se puede demostrar que existen constantes A y B tales que, para cualquier subconjunto $I \subseteq M$, $\{f_k\}_{k \in I}$ resulta un marco para el subespacio que genera, con cotas (no necesariamente óptimas) A y B . Cuando $\dim \mathcal{H} = \infty$, esto deja de ser cierto, basta considerar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert \mathcal{H} , y consideremos el marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definido por:

$$f_n = \begin{cases} e_k + \frac{1}{k}e_1 & \text{si } n = 2k \\ e_k & \text{si } n = 2k - 1 \end{cases}.$$

Este marco no puede ser un marco de Riesz. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$, $\{f_{2k-1}, f_{2k}\}$ es un marco para el espacio generado por $\{e_1, e_k\}$ cuya cota inferior es $1/k^2$. ▲

Esto motiva la siguiente definición

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un marco para cierto subespacio \mathcal{W} de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Diremos que \mathcal{F} es un **marcos de Riesz** si existen constantes A y B tales que para cualquier subconjunto $I \subseteq M$, $\{f_k\}_{k \in I}$ resulta un marco con cotas (no necesariamente las óptimas) A y B para el subespacio que estos vectores generan.

Esta clase de marcos fue introducida por O. Christensen en [39]. Entre las propiedades más interesantes que poseen estos marcos se encuentra la siguiente, demostrada en [39] por el propio Christensen:

Proposición 3.2.3. *Todo marco de Riesz contiene una base de Riesz.*



Una de las principales causas que indujeron a estudiar esta clase de marcos fue la dificultad práctica que implica el cálculo de los coeficientes $\{\langle f, S^{-1}f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la descomposición

$$f = \sum \langle f, S^{-1}f_n \rangle f_n,$$

Con el objeto de hacer uso de las ventajas que poseen las bases de Riesz en este aspecto, Christensen había introducido en [36] el denominado método proyectivo, el cual aproxima los operadores S y S^{-1} por medio de operadores de rango finito, los cuales actúan en ciertos espacios finitos dimensionales cuya unión es densa en \mathcal{H} . Los marcos de Riesz se ajustaban bien a este método. Más tarde (ver [39]), Christensen caracterizó exactamente que marcos de adaptan bien al método antes mencionado. A estos marcos los denominó marcos de Riesz condicionados, por su estrecha conexión con los de Riesz.

Definición 3.2.4. Sea $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de \mathbb{N} tales que su unión da todo \mathbb{N} . Diremos que $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un marco de Riesz condicionado con respecto a $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si existen constantes A y B tales que cada familias $\{f_i\}_{i \in I_n}$ es un marco para el subespacio que genera con cotas uniformes A y B (no necesariamente óptimas).

El lector interesado en más detalles sobre marcos de Riesz y marcos de Riesz condicionados puede ver los artículos citados a lo largo de esta sección, como así también [30], [31] y [32]). Por otro lado, en el capítulo 4 daremos una caracterización alternativa de estos marcos en términos de ciertas propiedades geométricas que posee el núcleo sus operadores de síntesis y de los marcos duales escaleados.

3.3 Marcos de Gabor.

Comencemos motivando la definición de esta clase de marcos, tan importantes en las aplicaciones. Dada una señal $f(t)$, donde la variable t es interpretada como el tiempo, su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ nos brinda información sobre las oscilaciones para cada frecuencia ω . Uno de los problemas que surgen en la práctica es que la transformada de Fourier no nos dice que frecuencias aparecen en un determinado tiempo t_0 . El modo de superar esta dificultad es mirar la señal en un intervalo pequeño de tiempo y transformar Fourier allí. Matemáticamente hablando, esto significa multiplicar $f(t)$ por una función $g(t)$ que es constante en un intervalo pequeño y luego decae rápidamente a cero. Dicha función $g(t)$ suele denominarse **función de ventana**. Si bien este proceso tiene sus limitaciones, nos brinda una idea de las frecuencias que aparecen en un entorno de cierto t_0 . Para obtener esta información sobre f en todo el eje temporal repetimos el proceso trasladando la función de ventana. Esto conduce a la siguiente definición

Definición 3.3.1. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ no nula. La **transformada de Fourier de tiempo corto** de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a la función de ventana g se define del siguiente modo:

$$\Psi_g(f)(y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-y)} e^{-2\pi i x \omega} dx \quad y, \omega \in \mathbb{R}.$$



La definición anterior puede reformularse en términos de los denominados operadores de traslación y de modulación. Recordemos que, dado $y \in \mathbb{R}$, el operador de traslación $T_y : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$(T_y f)(x) = f(x - y).$$

Por otro lado, dado $\omega \in \mathbb{R}$, el operador de modulación $E_\omega : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$(E_\omega f)(x) = e^{2\pi i x \omega} f(x)$$

Es un hecho bien conocido que estos operadores resultan unitarios, y si bien no conmutan guardan la siguiente relación:

$$E_\omega T_y = e^{-2\pi i \omega y} T_y E_\omega \quad (3.6)$$

En términos de estos operadores, $\Psi_g(f)(y, \omega) = \langle f, E_\omega T_y g \rangle$.

Al igual que para la transformada de Fourier, existe una fórmula de inversión. Dadas funciones $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ tales que $\langle g_1, g_2 \rangle \neq 0$, entonces, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \frac{1}{\langle g_1, g_2 \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, E_\omega T_y g_1 \rangle E_\omega T_y g_2 d\omega dy,$$

donde la integral debe interpretarse en cierto sentido débil que no precisaremos. En esta instancia, uno podría preguntarse si es necesario tener como información $\Psi_g(f)(y, \omega)$ para todo $(y, \omega) \in \mathbb{R}^2$, o si basta conocer los valores que esta toma en, por ejemplo, cierto reticulado de la forma $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ con $a, b \in \mathbb{R}^+$ no nulos. De esta pregunta surge la definición de los marcos de Gabor.

Definición 3.3.2. Un **marco de Gabor** (regular) para $L^2(\mathbb{R})$ es un marco de la forma $\{E_{mb}T_{na}g\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$, donde $a, b > 0$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$ es una función fija.

Estos marcos suelen llamarse también marcos de Weyl-Heisenberg debido a que el subgrupo de unitarios que generan E_b y T_a es una representación del grupo que lleva ese nombre. Por otro lado, cabe mencionar que los parámetros de los operadores de traslación y modulación no tiene por que ser las coordenadas de un reticulado de la forma $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$. Más generalmente, uno puede buscar marcos de la forma $\{E_{b_m}T_{a_n}g\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ con $a_n, b_m \in \mathbb{R}$, los cuales son denominados marcos de Gabor irregulares. Dado que en este trabajo no consideraremos tales marcos, cuando nos refiramos a marcos de Gabor, implícitamente nos estaremos refiriendo a marcos de Gabor regulares.

Los marcos de Gabor han sido extensamente estudiados. En este trabajo nos interesa solamente su relación con los marcos de Riesz. Es por eso que, de la innumerable cantidad de resultados sobre marcos de Gabor, nos limitaremos a citar el siguiente teorema extraído de un trabajo de Linnell [89].

Teorema 3.3.3. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ no nula y $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ un reticulado de \mathbb{R}^2 donde $a, b > 0$. Entonces, para todo conjunto finito $\Lambda \subseteq a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ el conjunto $\{E_\alpha T_\beta g\}_{(\alpha, \beta) \in \Lambda}$ es linealmente independiente.

Recomendamos al lector interesado en los marcos de Gabor leer los trabajos de Heil y Walnut [71] y de Daubechies, Grossman y Meyer [47], como así también los libros de Gröchenig [63] y de Christensen [38].



3.4 Marcos con operador de síntesis idempotente

Los marcos y las proyecciones están relacionados de varias maneras. En esta sección estudiaremos el teorema de extensión de Han and Larson [65] y una generalización del mismo.

En [65], Han and Larson caracterizaron los marcos de Parseval del siguiente modo:

Teorema 3.4.1 (Han and Larson). *Una sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un marco de Parseval si y sólo si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ y una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{K} tal que*

$$f_n = P_{\mathcal{H}} e_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $P_{\mathcal{H}} \in L(\mathcal{K})$ es la proyección ortogonal sobre \mathcal{H} .

A lo largo de esta sección usaremos constantemente el siguiente hecho: si \mathcal{K} es un espacio de Hilbert, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de \mathcal{K} y $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tal que $T e_n = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces las cotas del marco pueden caracterizarse como $\gamma(T)^2$ y $\|T\|^2$. Más aún, el exceso de \mathcal{F} coincide con la dimensión del núcleo de T .

A continuación estudiaremos la siguiente pregunta: dado un marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{H} , ¿existe una extensión \mathcal{K} de \mathcal{H} , una base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{K} y una proyección oblicua (i.e., no necesariamente ortogonal) $Q \in L(\mathcal{K})$ tal que $Q e_n = f_n$, $n \in \mathbb{N}$?

Es claro que en general esto no va a ser cierto, pues existen al menos dos obstrucciones:

- i. Toda proyección oblicua satisface $\gamma(Q) \geq 1$, ya que

$$QQ^* \geq QP_{R(Q)}Q^* = P_{R(Q)}, \quad R(QQ^*) = R(Q) \quad \text{y} \quad \gamma(P_{R(Q)}) = 1$$

Por lo tanto, si existe una tal representación de \mathcal{F} , entonces las cotas del marco deben satisfacer $1 \leq A \leq B$.

- ii. Aún si las cotas del marco \mathcal{F} satisfacen que $1 \leq A \leq B$, la representación puede no existir si $e(\mathcal{F})$ es finito. Por ejemplo, supongamos que \mathcal{F} es una base de Riesz y que $f_n = Q e_n$ para cierta proyección oblicua $Q \in L(\mathcal{K})$ y cierta base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$. Entonces, por lo antes dicho $\dim N(Q) = e(\mathcal{F}) = 0$. En consecuencia $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, $Q = I$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Esto significa que las bases ortonormales son las únicas bases de Riesz que admiten este tipo de representación.

El siguiente teorema completa, en algún sentido, los resultados de Casazza, Han y Larson expuestos en [34, sección 3].

Teorema 3.4.2. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para cierto espacio de Hilbert de dimensión infinita \mathcal{H} , con cotas $1 \leq A \leq B$. Denotemos $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \ell^2$. Entonces existe una proyección oblicua $Q \in L(\mathcal{K})$ con $R(Q) = \mathcal{H} \oplus \{0\}$ y un sistema ortonormal $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{K} , tal que*

$$f_n \oplus 0 = Q b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Más aún, si $e(\mathcal{F}) = \infty$, entonces la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puede suponerse una base ortonormal de \mathcal{K} .



Demostración. Sea T el operador de síntesis de \mathcal{F} y $V \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ un isomorfismo isométrico entre los subespacios ℓ^2 y \mathcal{H} . Por hipótesis, $TT^* \geq AI \geq I$. Sea $X = (TT^* - I)^{1/2}V \in L(\ell^2, \mathcal{H})$. Identificaremos \mathcal{H} con $\mathcal{H} \oplus \{0\}$, i.e., . identificaremos $f_n \sim f_n \oplus 0 \in \mathcal{K}$. Sea $\tilde{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ el operador definido por $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$. Entonces $\tilde{T}\tilde{T}^* \sim \begin{pmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{K})$. Sea

$$Q = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ \ell^2 \end{matrix} \in L(\mathcal{K}).$$

Entonces, es claro que Q es una proyección con rango $\mathcal{H} \oplus 0$. Más aún,

$$QQ^* = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{T}\tilde{T}^*,$$

i.e., $|Q^*| = |\tilde{T}^*|$.

Consideremos la descomposición polar (a derecha) $T = |T^*|U$; $U \in L(\mathcal{H})$ es una isometría parcial espacio inicial $N(T)^\perp$ y espacio final $R(T) = \mathcal{H}$. Definamos $\tilde{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ por medio de

$$\tilde{U}x = UP_{N(T)^\perp}x \oplus P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (3.7)$$

Entonces, \tilde{U} es una isometría y $\tilde{T} = |\tilde{T}^*|\tilde{U}$. La isometría parcial de la descomposición polar a derecha de Q puede extenderse a un operador unitario W sobre \mathcal{K} , pues $\dim(N(Q)) = \dim(R(Q)^\perp)$. Más aún, esto puede hacerse de modo que $Q = |Q^*|W$. Entonces

$$\tilde{T} = |\tilde{T}^*|U = |Q^*|U = QW^*U.$$

Luego, si $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$f_n = Te_n \sim Te_n \oplus 0 = \tilde{T}e_n = Q(W^*\tilde{U}e_n) = Qb_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{W^*\tilde{U}e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, el cual es claramente un sistema ortonormal en \mathcal{K} .

Supongamos ahora que $e(\mathcal{F}) = \dim N(T) = \infty$. Mostraremos que la isometría \tilde{U} definida en la ecuación (3.7) puede cambiarse por un operador unitario de \mathcal{H} sobre \mathcal{K} , que sigue satisfaciendo que $\tilde{T} = |\tilde{T}^*|\tilde{U}$. Para ello, tomemos

$$\tilde{U}x = UP_{N(T)^\perp}x \oplus Y P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H},$$

donde $Y \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ es la isometría parcial con espacio inicial $N(T)$ y espacio final \mathcal{H} . Se tiene que \tilde{U} mapea isométricamente $N(T)^\perp$ sobre $\mathcal{H} \oplus \{0\}$ y $N(T)$ sobre $\{0\} \oplus \mathcal{H}$. Luego, la sucesión $b_n = W^*\tilde{U}e_n$, $n \in \mathbb{N}$, resulta ser una base ortonormal de \mathcal{K} . ■

Observación 3.4.3. Usando la notación del Teorema 3.4.2, si $\mathcal{K}_0 = \overline{\text{gen}} \{b_n\}$ y $Q_0 = Q|_{\mathcal{K}_0}$, entonces parecería que es posible considerar bases ortonormales en vez de sistemas ortonormales. No obstante, el Teorema 3.4.4 muestra que este argumento falla en general: en efecto, \mathcal{H} no está necesariamente contenido en \mathcal{K}_0 , en cuyo caso Q_0 no es una proyección. ▲



Si $e(\mathcal{F}) < \infty$, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.4.4. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco en \mathcal{H} con cotas $1 \leq A \leq B$, y supongamos que $e(\mathcal{F}) < \infty$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un espacio de Hilbert \mathcal{K} tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$, una proyección $Q \in L(\mathcal{K})$, y una base ortonormal $\mathcal{B} = \{b_n\}_n$ de \mathcal{K} tal que $f_n = Qb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si T es el operador de síntesis de \mathcal{F} , entonces $\dim R(TT^* - I_{\mathcal{H}}) \leq e(\mathcal{F})$.*

Demostración. Si la primer condición se satisface, entonces $e(\mathcal{F}) = \dim N(T) = \dim N(Q) = \dim(\mathcal{K} \ominus \mathcal{H})$. Identificaremos $\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$ con $N(T)$, y por lo tanto \mathcal{K} con $\mathcal{H} \oplus N(T)$. También identificaremos \mathcal{H} con $\mathcal{H} \oplus \{0\}$, en particular, $f_n \sim f_n \oplus 0 \in \mathcal{K}$. Sea $\tilde{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, dado por $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$. Entonces $\tilde{T}\tilde{T}^* \sim \begin{pmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ N(T) \end{matrix} \in L(\mathcal{K})$. Sea $X \in L(N(T), \mathcal{H})$ tal que

$Q = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ N(T) \end{matrix}$. Es fácil ver que:

$$\tilde{T}\tilde{T}^* = QQ^* = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, $TT^* - I_{\mathcal{H}} = XX^*$, mientras que $\dim R(XX^*) \leq \dim R(X) \leq \dim N(T)$.

Recíprocamente, si $\dim R(TT^* - I) \leq \dim N(T)$, consideremos, como en la demostración del Teorema 3.4.2, $X = (TT^* - I)^{1/2} \in L(\mathcal{H})^+$. Notemos que $\dim N(X)^\perp = \dim R(X) \leq \dim N(T)$. Entonces existe una isometría parcial $V : N(T) \rightarrow \mathcal{H}$ con $VV^* = P_{N(X)^\perp}$. Como antes, usamos el espacio de Hilbert $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$, y el operador $\tilde{T} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, dado por $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$. Sea $Y = XV \in L(N(T), \mathcal{H})$, y

$$Q = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ N(T) \end{matrix} \in L(\mathcal{K}).$$

Entonces $Q^2 = Q$, $R(Q) = \mathcal{H} \oplus \{0\}$ y $|Q^*| = |\tilde{T}^*|$, pues $YY^* = XVV^*X^* = XP_{N(X)^\perp}X^* = XX^*$, luego

$$QQ^* = \begin{pmatrix} I + YY^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{T}\tilde{T}^*.$$

El resto de la demostración sigue las mismas ideas que la primer parte de la demostración del Teorema 3.4.2, pero tomando $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$. Notemos que, en este caso, la isometría \tilde{U} definida en la ecuación (3.7) resulta un operador unitario de \mathcal{H} sobre \mathcal{K} . Por lo tanto, si W es el operador unitario considerado en la primer parte de la demostración del Teorema 3.4.2, la sucesión $b_n = W^*\tilde{U}e_n$, $n \in \mathbb{N}$, resulta ser una base ortonormal de \mathcal{K} . ■

Observación 3.4.5. El Teorema 3.4.1 puede también ser generalizado reemplazando la base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ por una base de Riesz en \mathcal{K} ; de este modo, obtenemos marcos arbitrarios (i.e., no necesariamente de Parseval). Un resultado equivalente a este fue



demostrado por Han and Larson en [65] (Proposition 1.6). Desde nuestro punto de vista, dicha generalización puede enunciarse del siguiente modo:

Una sucesión $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} es un marco si y sólo si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ y una base de Riesz $\{x_k\}_{k \geq 1}$ de \mathcal{K} tal que $f_n = P_{\mathcal{H}} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Más aún, la base de Riesz puede elegirse de modo que posea la misma cota inferior que \mathcal{F} , y que la sucesión $(I - P_{\mathcal{H}})x_n$, $n \in \mathbb{N}$ sea un marco ajustado para $\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$.

Por una cuestión de completitud, incluimos una demostración alternativa de este resultado: Supongamos que \mathcal{F} es un marco. Sea T el operador de síntesis de \mathcal{F} y sea $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$. Identificaremos \mathcal{H} con $\mathcal{H} \oplus \{0\} \subseteq \mathcal{K}$, escribiendo $x \sim x \oplus 0$, para $x \in \mathcal{H}$. Sea $V : \ell^2 \mapsto \mathcal{K}$ definido por:

$$Vx = Tx \oplus \alpha P_{N(T)}x = TP_{N(T)^\perp}x \oplus \alpha P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H},$$

donde $\alpha \in [\gamma(T), \|T\|]$. Como $T(N(T)^\perp) = R(T) = \mathcal{H}$, se tiene que V es acotado, lineal y biyectivo. Por ende, si $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la base canónica de ℓ^2 , entonces $x_n = Ve_n$ es una base de Riesz en \mathcal{K} . Notemos que $f_n \sim f_n \oplus 0 = P_{\mathcal{H}}x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 3.4.1, la sucesión $(I - P_{\mathcal{H}})x_n = P_{N(T)}e_n$, $n \in \mathbb{N}$ es un marco de Parseval para $N(T) = \mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$. Finalmente, $\gamma(V) = \gamma(T)$ y $\|V\| = \max\{1, \|T\|\}$. Por lo tanto, la cota inferior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la misma que la de \mathcal{F} . La recíproca es clara. \blacktriangle

Capítulo 4

Proyecciones A -autoadjuntas y marcos de Riesz

En este capítulo estudiaremos cantidades de la forma:

$$\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D, S}\|$$

donde Γ es cierto subconjunto de $L(\mathcal{H})^+$. Estas cantidades están estrechamente vinculadas con problemas de cuadrados mínimos y con cuestiones de programación numérica. Si bien en estos casos los espacios de Hilbert involucrados son finito dimensionales, extensiones a espacios más generales no sólo pueden resultar útiles cuando el conjunto de datos es muy numeroso y/o la dimensión de los mismos no está acotada, sino que también, permite crear un nuevo punto de contacto entre las proyecciones oblicuas y la teoría de marcos. Las herramientas claves que utilizaremos para realizar tales extensiones son la noción de compatibilidad, las proyecciones A -autoadjuntas y la noción de ángulo entre subespacios.

4.1 Problemas de cuadrados mínimos y proyecciones A -autoadjuntas.

Sea A una matriz de $m \times n$ ($m > n$) cuyas columnas son linealmente independientes, y consideremos el sistema lineal

$$Ax = b.$$

Por las características de la matriz A , este sistema resulta sobredeterminado y si $b \notin R(A)$ claramente no tiene solución. En este último caso, se suele elegir un x de tal forma que Ax este “cerca” de b , en algún sentido. Usualmente, esa noción de cercanía se escribe del siguiente modo:

$$\|Ax - b\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|Az - b\|^2. \quad (4.1)$$



Sin embargo, muchas veces es necesario reescalar el producto escalar, de modo que las coordenadas de un vector dado respecto a la base canónica de \mathbb{C}^m posean distintos pesos. Este proceso se lleva a cabo perturbando el producto escalar por medio de una matriz diagonal respecto a la base canónica D , positiva e inversible. El nuevo producto interno se define del siguiente modo

$$\langle x, y \rangle_D = \langle Dx, y \rangle.$$

Respecto a la norma que induce este producto interno, el problema de minimización (4.1) se reescribe de la siguiente forma:

$$\|D^{1/2}(Ax_D - b)\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|D^{1/2}(Az - b)\|^2. \quad (4.2)$$

Se puede incluso perturbar el producto interno con matrices diagonales semidefinidas positivas, aunque en este caso pueden existir más de una solución del problema (4.2).

Un notable teorema de Ben-Tal y Teboulle establece que las soluciones x_D se hallan todas en la cápsula convexa de ciertas soluciones singulares x_I . Para enunciar precisamente este resultado, necesitamos introducir cierta notación.

Definición 4.1.1. Sea A una matriz de $m \times n$ ($m \geq n$). Dado un conjunto de índices $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ($\alpha_1 < \dots < \alpha_n$), por medio de A_I representaremos a la submatriz de $n \times n$ de A dada por:

$$A_I = (A_{\alpha_i, j})_{i, j}$$

Análogamente, el vector b_I denotará el vector de \mathbb{C}^n dado por $b_I = (b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_n})^t$. Al conjunto de índices I tales que la matriz A_I resulta inversible lo denotaremos por medio de $J(A)$.

Usando estas definiciones, el teorema de Ben-Tal y Teboulle puede escribirse del siguiente modo:

Teorema 4.1.2. *Sea A una matriz de $m \times n$ ($m > n$) cuyas columnas son linealmente independientes y sea D una matriz de $m \times m$ diagonal respecto a la base canónica de \mathbb{C}^m , positiva e inversible. Entonces, la solución x_D del problema de cuadrados mínimos*

$$\min_{z \in \mathbb{C}^n} \|D^{1/2}(Az - b)\|^2.$$

está dada por:

$$x_D = \sum_{I \in J(A)} \left(\frac{\det(D_I) |\det(A_I)|^2}{\sum_{J \in J(A)} \det(D_J) |\det(A_J)|^2} \right) x_{(I)}$$

donde $x_{(I)}$ es la solución del sistema (no singular) reducido $A_I x = b_I$.



Por otra parte, de la teoría de inversas generalizadas, es bien sabido que la solución del problema (4.2) está dada por

$$x_D = (A^*DA)^{-1}A^*Db = (D^{1/2}A)^\dagger D^{1/2}b,$$

mientras que la solución del sistema reducido $A_I x = b_I$ puede escribirse del siguiente modo:

$$x_I = (Q_I A)^\dagger Q_I b,$$

donde Q_I denota la proyección ortogonal al subespacios generado por los e_i con $i \in I$. Es fácil ver que las matrices

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D \quad \text{y} \quad A(Q_I A)^\dagger Q_I$$

corresponden a proyecciones sobre el rango de la matriz A . En relación con la proyección $P_D = A(A^*DA)^{-1}A^*D$, un año antes que apareciera el trabajo de Ben-Tal y Teboulle, Stewart [113] demostró que:

$$M_A = \sup\{\|A(A^*DA)^{-1}A^*D\| : D \in \mathcal{D}_m^+\} < \infty. \quad (4.3)$$

donde \mathcal{D}_m^+ representa el conjunto de todas la matrices positivas, inversibles y diagonales respecto a la base canónica. Este resultado, a partir del Teorema 4.1.2, resulta muy sencillo de probar. En efecto, una mirada cuidadosa al Teorema de Ben-Tal y Teboulle revela que los coeficientes que aparecen en la la combinación convexa no dependen del vector b , sino que sólo depende de las matrices D y A . Luego, uno puede deducir el siguiente resultado:

Proposición 4.1.3. *Sea A una matriz de $m \times n$ ($m > n$) cuyas columnas son linealmente independientes y sea D una matriz de $m \times m$ diagonal respecto a la base canónica de \mathbb{C}^m , positiva e inversible. Entonces,*

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D = \sum_{Q \in J(A)} \left(\frac{\det(D_Q) |\det(A_Q)|^2}{\sum_{P \in J(A)} \det(D_P) |\det(A_P)|^2} \right) A(QA)^{-1}Q.$$

En particular, $P_D \in \text{co}\{A(QA)^{-1}Q : Q \in J(A)\}$.

Corolario 4.1.4. *Bajo las hipótesis de la Proposición anterior,*

$$M_A \leq \max_{I \in J(A)} \|A(QA)^{-1}Q\| < \infty.$$

El resto de esta sección estará destinada a reescribir estos resultados en términos de proyecciones A -autoadjuntas y complementar los resultados antes mencionados. El principal objetivo de esto es enmarcar estos resultados en un contexto que pueda generalizarse a espacios de dimensión infinita, lo cual se hará en la siguiente sección. A lo largo de esta sección \mathcal{D}_m denotará el álgebra abeliana de matrices diagonales (respecto a la base canónica), $\mathcal{P}(\mathcal{D}_m)$ el conjunto de proyecciones en \mathcal{D}_m y recordemos que por medio de \mathcal{D}_m^+ denotábamos al cono de matrices positivas de \mathcal{D}_m y que dado $I \in J(A)$, por medio de Q_I denotamos a la proyección de $\mathcal{P}(\mathcal{D}_m)$ tal que $(Q_I)_{ii} = 1$ si y sólo si $i \in I$. Recordemos también la siguiente definición:



Definición 4.1.5 (Dixmier [49]). Dos subespacios \mathcal{S} \mathcal{T} de un espacio de Hilbert \mathcal{H} están en posición P' si $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{S} = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$. En tal caso, escribiremos $\mathcal{S} \perp \mathcal{T}$.

Proposición 4.1.6. Sea A una matriz de $m \times n$ ($m > n$) cuyas columnas son linealmente independientes, $D \in \mathcal{D}_m^+$ y sea $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_m)$. Entonces:

1. $P_{D, R(A)} = A(A^*DA)^{-1}A^*D$.
2. $I \in J(A)$ si y sólo si $R(Q_I) \perp R(A)$.
3. Si $R(Q) \perp R(A)$ entonces $P_{Q, R(A)} = A(QA)^{-1}Q$.

Demostración.

1. Basta notar que $D(A(A^*DA)^{-1}A^*D)$ es autoadjunto, pues al ser D inversible, existe una única proyección D -autoadjunta.
2. Por definición de $J(A)$, $I \in J(A)$ si y sólo si $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$ es biyectivo, lo cual es equivalente a que tanto $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$ como $A^*Q : R(Q) \rightarrow \mathbb{C}^n$ sean inyectivos. Pero $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$ es inyectivo si y sólo si $R(A) \cap N(Q) = \{0\}$, y análogamente, $A^*Q : R(Q) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es inyectivo si y sólo si $R(Q) \cap R(A)^\perp = R(Q) \cap N(A^*) = \{0\}$. En consecuencia, $I \in J(A)$ si y solamente si $R(Q) \perp R(A)$.
3. Claramente, $A(QA)^{-1}Q$ es una proyección cuyo rango es $R(A)$ y cuyo núcleo es $N(Q)$. Por otro lado, por definición $R(P_{Q, R(A)}) = R(A)$, y por el Teorema 2.3.7

$$N(P_{Q, R(A)}) = Q^{-1}(R(A)^\perp) \ominus (N(Q) \cap R(A)) = N(Q).$$

Luego $A(QA)^{-1}Q = P_{Q, R(A)}$. ■

Usando la Proposición 4.1.6, la Proposición 4.1.3 puede reescribirse del siguiente modo:

Teorema 4.1.7. Sea \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{C}^m y sea $D \in \mathcal{D}_m^+$. Entonces

$$P_{D, \mathcal{S}} \in \text{co}\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_m) \text{ y } R(Q) \perp \mathcal{S}\}. \quad (4.4)$$

En particular,

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq \max \left\{ \|P_{Q, \mathcal{S}}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_m) : R(Q) \perp \mathcal{S} \right\}. \quad (4.5)$$

Observación 4.1.8. La desigualdad (4.5) es en realidad una igualdad. Este hecho fue demostrado por el mismo Stewart y también es una consecuencia de la siguiente Proposición. Es importante destacar que si uno no se restringe a matrices diagonales, el supremo de las normas de los $P_{A, \mathcal{S}}$ no está acotado, aún cuando A sea inversible. De aquí la importancia del resultado obtenido por Stewart. ▲



Proposición 4.1.9. *Sea \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{C}^m y denotemos por medio de $\mathcal{D}_{0,m}^+$ al conjunto de matrices diagonales, semidefinidas positivas de $m \times m$. Entonces*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \sup_{D \in \mathcal{D}_{0,m}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\|. \quad (4.6)$$

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}_{0,n}^+$ y consideremos la sucesión de matrices positivas e inversibles $\{D_k\}_{k \geq 1}$ definidas por:

$$D_k = D + \frac{1}{k} I.$$

Si $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(D)$, entonces

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^* & 0 & C \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \quad \text{and} \quad D_k = \begin{pmatrix} A + \frac{1}{k}I & 0 & B \\ 0 & \frac{1}{k}I & 0 \\ B^* & 0 & C + \frac{1}{k}I \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array},$$

donde A , y por lo tanto $A + \frac{1}{k}I$ son inversibles. Luego, por el Teorema 2.3.7,

$$P_{D_k,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I & 0 & (A + \frac{1}{k}I)^{-1}B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P_{D,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I & 0 & A^{-1}B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia obtenemos

$$\|P_{D,\mathcal{S}}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{D_k,\mathcal{S}}\| \leq \sup_{D' \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D',\mathcal{S}}\|$$

lo cual prueba una desigualdad. La otra es consecuencia de (4.5). ■

Corolario 4.1.10. *Sea \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{C}^m . Entonces*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \max \left\{ \|P_{Q,\mathcal{S}}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_n) : R(Q) \perp \mathcal{S} \right\}. \quad (4.7)$$

Observación 4.1.11. En su trabajo, Stewart observó que si U es una matriz de $m \times n$ cuyas columnas forman una base ortonormal del $R(A)$ y m_I denota el menor valor singular de la submatriz U_I , entonces:

$$M_A^{-1} \leq \min\{m_I : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n\}. \quad (4.8)$$

Más aún, Stewart conjeturó que valía la igualdad en (4.8), lo cual fue demostrado posteriormente por O'Leary. Veamos como esta igualdad se deduce a partir de los resultados anteriores. Comencemos notando que por el Teorema 4.1.9, el máximo en (4.7) puede



tomarse tanto sobre todas las proyecciones en posición P' con $\mathcal{S}(= R(A))$ como sobre todas las proyecciones diagonales cuyo rango tiene dimensión n . Luego,

$$M_A = \sup_{D \in \mathcal{D}_n^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| = \max \left\{ \|P_{Q_I, \mathcal{S}}\| : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n \right\}$$

Fijemos $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|I| = n$. Por la Proposición 2.3.9 y el Lema el Lema 1.4.7

$$\|P_{Q_I, \mathcal{S}}\|^{-1} = s[\mathcal{S}, N(Q_I)] = \gamma(Q_I U)$$

Pero, $m_I = \gamma(Q_I U)$. En consecuencia, $\|P_{Q_I, \mathcal{S}}\|^{-1} = m_I$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} M_A^{-1} &= \min \left\{ \|P_{Q_I, \mathcal{S}}\|^{-1} : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n \right\} \\ &= \min \left\{ m_I : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n \right\}. \end{aligned}$$

▲

Para finalizar, demostraremos un resultado de Gonzaga y Lara [62] usando las técnicas de proyecciones A -autoadjuntas.

Proposición 4.1.12. *Sea A una matriz de $m \times n$ cuyas columnas forman una base de un subespacio propio \mathcal{S} de \mathbb{C}^m y sea Z otra matriz de $m \times (m - n)$ cuyas columnas forman una base de \mathcal{S}^\perp . Entonces,*

$$M_A = \sup \{ \|A(A^*DA)^{-1}A^*D\| : D \in \mathcal{D}_m^+ \} = \sup \{ \|Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D\| : D \in \mathcal{D}_m^+ \} = M_Z$$

Demostración. Fijemos $D \in \mathcal{D}_m^+$ y recordemos que $P_{D, \mathcal{S}} = A(A^*DA)^{-1}A^*D$. Como $P_{D, \mathcal{S}}$ es D -autoadjunta, $DP_{D, \mathcal{S}} = (P_{D, \mathcal{S}})^*D$. Luego, es fácil ver que $I - (P_{D, \mathcal{S}})^*$ es D^{-1} -autoadjunta. Más aún, $R(I - (P_{D, \mathcal{S}})^*) = \mathcal{S}^\perp$ y $N(I - (P_{D, \mathcal{S}})^*) = N(P_{D, \mathcal{S}})^\perp = (D(\mathcal{S})^\perp)^\perp = D(\mathcal{S})$, que son precisamente el rango y el núcleo de $Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D$, como fácilmente se puede comprobar. En consecuencia, $I - (P_{D, \mathcal{S}})^* = Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D$, y por lo tanto

$$\|A(A^*DA)^{-1}A^*D\| = \|P_{D, \mathcal{S}}\| = \|I - (P_{D, \mathcal{S}})^*\| = \|Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D\|.$$

Finalmente, como la inversión es una biyección de \mathcal{D}_m^+ en si mismo, la proposición queda demostrada. ■

4.2 Proyecciones escaleadas en espacios de dimensión infinita.

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable. A lo largo de de esta sección, estudiaremos cantidades del tipo

$$\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D, A}\|,$$



donde Γ denota algún subconjunto de $L(\mathcal{H})^+$. Más precisamente, fijemos una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ del espacio de Hilbert \mathcal{H} , y sea \mathcal{D} el álgebra abeliana de todos los operadores diagonales con respecto a \mathcal{B} , i.e. $C \in L(\mathcal{H})$ pertenece a \mathcal{D} si existe una sucesión acotada de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $Ce_n = c_n e_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Los subconjuntos Γ que consideraremos serán los siguientes:

1. \mathcal{D}^+ , el conjunto de elementos positivos e inversibles en \mathcal{D} (i.e. todos los $\lambda_n > \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$),
2. $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, el conjunto de las proyecciones en \mathcal{D} (i.e. $\lambda_n = 0$ o 1),
3. $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$, el conjunto de elementos en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ con rango finito,
4. $\mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})$, el conjunto de elementos $Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ tales que $R(Q) \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$,

A diferencia de lo que ocurre en espacios de dimensión finita estos supremos pueden no ser finitos, aun cuando el subespacio \mathcal{S} sea finito dimensional. En tal sentido, el siguiente ejemplo es contundente:

Ejemplo 4.2.1. Sea \mathcal{S} el subespacio generado por $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} e_n$. Luego, es fácil ver que

$$P_{\mathcal{D}, \mathcal{S}}(\cdot) = \frac{1}{\|D^{1/2}(x)\|^2} \langle \cdot, Dx \rangle x = \frac{1}{\|D^{1/2}(x)\|^2} (x \odot Dx).$$

En efecto, una cuenta bastante simple muestra que el operador de la derecha es idempotente; por otro lado, $D(x \odot Dx) = Dx \odot Dx$ es un múltiplo de la proyección ortonormal sobre el subespacio generado por Dx . Fijado $n \geq 1$, tomemos una sucesión de operadores $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{D}^+ tales que sus autovalores convergen uniformemente a cero, salvo el correspondiente al autovector e_n que se mantiene constantemente igual a uno. No es difícil ver que en tal caso

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|P_{D_k, \mathcal{S}}\| = 2^n,$$

lo cual muestra que $\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| = \infty$. ▲

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 4.2.2. Un subespacio \mathcal{S} de \mathcal{H} se dice **compatible** con respecto a \mathcal{B} (o **\mathcal{B} -compatible**) si es cerrado y se verifica la siguiente desigualdad:

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| < \infty. \quad (4.9)$$

En esta sección mostraremos que la \mathcal{B} -compatibilidad de un subespacio \mathcal{S} es equivalente a que $\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D, \mathcal{S}}\|$ sea finito, donde Γ denota alguno de los subconjuntos de operadores



diagonales mencionados anteriormente. Comenzaremos demostrando que un subespacio \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible si y sólo si el par (Q, \mathcal{S}) es compatible para cada $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ y además

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{A}}\| < \infty.$$

Esto nos ayudará a obtener caracterizaciones alternativas de la \mathcal{B} -compatibilidad en términos de ángulos entre subespacios y de propiedades de aproximación finita que estos subespacios poseen. Luego, daremos una versión del teorema de Ben-Tal y Teboule para subespacios \mathcal{B} -compatibles, que finalmente nos permitirá demostrar que un subespacio es \mathcal{B} -compatible si y sólo si $\sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|$ es finito.

A lo largo de esta sección $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotará una base ortonormal de \mathcal{H} , mientras que \mathcal{S} denotará un subespacio cerrado de dicho espacio de Hilbert. Para cada $I \subseteq \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_I = \text{gen}\{e_i : i \in I\}$ y Q_I denotará la proyección ortogonal sobre \mathcal{H}_I . En particular, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n = \text{gen}\{e_1, \dots, e_n\}$ y Q_n es la proyección ortogonal sobre \mathcal{H}_n . Por otro lado $\mathcal{S}_I = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_I$ (resp. $\mathcal{S}_n = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n$). Comencemos con la siguiente definición:

Definición 4.2.3. Si \mathcal{S} es compatible con toda proyección diagonal, entonces definimos la cantidad $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]$ del siguiente modo:

$$K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|.$$

En caso de que el par (Q, \mathcal{S}) no sea compatible para alguna proyección $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ definimos $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \infty$.

A continuación demostraremos la equivalencia entre la \mathcal{B} -compatibilidad de \mathcal{S} y la condición $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$. Más aún, demostraremos que

$$K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| = \sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\|.$$

Comenzaremos por la parte más sencilla:

Proposición 4.2.4. *Supongamos que \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible. Entonces (Q, \mathcal{S}) es compatible para todo $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ y además:*

$$K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| \leq \sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\|.$$

Demostración. Sólo demostraremos que dada $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$, entonces el par (Q, \mathcal{S}) es compatible. El resto de la demostración sigue esencialmente las mismas líneas que la demostración de la Proposición 4.1.9. Fijemos $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ y definamos la sucesión $\{D_k\}_{k \geq 1}$ de operadores positivos e inversibles del siguiente modo: $D_k = Q + \frac{1}{k}I$. Como D_k es invertible, la proyección $P_{D_k, \mathcal{S}}$ está bien definida. Más aún, por hipótesis, sabemos que

$$\sup_{k \geq 1} \|P_{D_k, \mathcal{S}}\| < \infty.$$



Por lo tanto, la sucesión $\{P_{D_k, \mathcal{S}}\}$ posee un punto límite P respecto a la topología débil de operadores, pues la bola unitaria de $L(\mathcal{H})$ es compacta respecto a la topología débil de operadores (ver Teorema 1.1.7). Además, como el espacio \mathcal{H} es separable, la mencionada topología es metrizable en la bola. Luego, podemos suponer que $P_{D_k, \mathcal{S}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{WOT}} P$. De no ser así, existe una subsucesión de $\{P_{D_k, \mathcal{S}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ la cual converge, y utilizamos dicha subsucesión.

Demostraremos que $P \in \mathcal{P}(Q, \mathcal{S})$, es decir, $P^2 = P$, $R(P) = \mathcal{S}$ y $QP = P^*Q$. Las primeras dos condiciones surgen de hecho de que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$P_{D_k, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix}, \quad \text{luego} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix},$$

donde X es el límite débil de la sucesión $X_k = P_{\mathcal{S}} D_k (1 - P_{\mathcal{S}})$. Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$D_k P_{D_k, \mathcal{S}} = P_{D_k, \mathcal{S}}^* D_k.$$

Un simple argumento del tipo $\varepsilon/2$ muestra que $D_k P_{D_k, \mathcal{S}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{WOT}} QP$, por ende, tomando límite en la identidad recientemente mencionada y usando el hecho de que la involución es continua respecto a la topología débil de operadores, resulta que $QP = P^*Q$. ■

Para demostrar la recíproca, es necesario probar antes algunos lemas.

Lema 4.2.5. *Sea $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos de \mathbb{N} tales que su unión es todo el conjunto de números naturales. Supongamos que \mathcal{S} satisface*

$$c := \sup \{c[\mathcal{S}, \mathcal{H}_{I_n}] : n \in \mathbb{N}\} < 1, \tag{4.10}$$

entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{I_n}$ es densa en \mathcal{S} .

Demostración. Comencemos notando que es equivalente demostrar que:

$$P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} P_{\mathcal{S}}.$$

Sea $x \in \mathcal{H}$ un vector unitario y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $c^{2k-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por la Proposición 1.2.8, para todo $n \geq 1$

$$\left\| (P_{\mathcal{S}} Q_{I_n})^k - P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, como $Q_{I_n} P_{\mathcal{S}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} P_{\mathcal{S}}$ y la función $f(x) = x^k$ es continua respecto a la topología fuerte de operadores en conjuntos acotados por la Proposición 1.1.12, existe $n_0 \geq 1$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\left\| \left[(Q_{I_n} P_{\mathcal{S}})^k - P_{\mathcal{S}} \right] x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Entonces, para $n \geq n_0$,

$$\|(P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n}) x\| \leq \left\| \left[P_{\mathcal{S}} - (P_{\mathcal{S}} Q_{I_n})^k \right] x \right\| + \left\| \left((P_{\mathcal{S}} Q_{I_n})^k - P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n} \right) x \right\| < \varepsilon .$$

■

Lema 4.2.6. *Si \mathcal{S} está incluido en algún \mathcal{H}_n , entonces \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible. Más aún*

$$\{P_{D, \mathcal{S}} : D \in \mathcal{D}^+\} \subseteq \text{co}\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), Q \leq Q_n \text{ y } R(Q) \vee \mathcal{S}\}.$$

En particular,

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq \sup\{\|P_{Q, \mathcal{S}}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), Q \leq Q_n \text{ y } R(Q) \vee \mathcal{S}\} = K[\mathcal{S}, \mathcal{D}].$$

Demostración. Dado $D \in \mathcal{D}$, $D \geq 0$, el subespacio \mathcal{H}_n reduce a D . Luego, la descomposición matricial de D inducida por \mathcal{H}_n tiene la siguiente forma:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_n \\ \mathcal{H}_n^\perp \end{matrix} .$$

Más aún, por la Proposición 2.3.10,

$$P_{D, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_{D_1, \mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_n \\ \mathcal{H}_n^\perp \end{matrix} , \quad (4.11)$$

donde $P_{D_1, \mathcal{S}}$ está siendo considerado como un operador de $L(\mathcal{H}_n)$. Como $\dim \mathcal{H}_n < \infty$, \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible. El resto de las afirmaciones son consecuencias de la Proposición 4.1.7. ■

Lema 4.2.7. *Dado $n \in \mathbb{N}$, entonces:*

$$K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| = K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]$$

Demostración. Usando el Lema 4.2.6 se tiene que:

$$K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] = \sup\{\|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), Q \leq Q_n \text{ and } R(Q) \vee \mathcal{S}_n\}.$$

Luego, basta probar la desigualdad para cada $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ tal que $R(Q) \vee \mathcal{S}_n$ y $Q \leq Q_n$. Sea una Q así, y consideremos $\widehat{Q} = Q + (1 - Q_n) \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$. Entonces $N(\widehat{Q}) = N(Q) \cap R(Q_n)$, y

$$\begin{aligned} c[N(Q), \mathcal{S}_n] &= \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(Q), y \in \mathcal{S}_n \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(Q) \cap R(Q_n), y \in \mathcal{S}_n \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(Q) \cap R(Q_n), y \in \mathcal{S} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(\widehat{Q}), y \in \mathcal{S} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= c[N(\widehat{Q}), \mathcal{S}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la Proposición 2.3.9, obtenemos

$$\|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| = s[N(Q), \mathcal{S}_n]^{-1} \leq s[N(Q), \mathcal{S}]^{-1} = s[N(\widehat{Q}), \mathcal{S}]^{-1} = \|P_{\widehat{Q}, \mathcal{S}}\|,$$

tal como queríamos demostrar. ■



Observación 4.2.8. Por la Proposición 2.3.9, sabemos que $\|P_{Q,\mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}$. Luego, como $Q \rightarrow (1 - Q)$ establece una biyección en el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, se tiene que:

$$K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2} = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} (1 - c[R(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}.$$

Más aún, el supremo de puede tomar sólo sobre las proyecciones del conjunto $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$. En efecto, una cuidadosa inspección de la demostración del lema anterior muestra que, con la notación allí empleada, basta considerar las proyecciones $E = 1 - \widehat{Q}$. \blacktriangle

Ahora sí estamos en condiciones de probar la recíproca:

Proposición 4.2.9. Si $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$, entonces, \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible. Más aún

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q,\mathcal{S}}\| = K[\mathcal{S}, \mathcal{D}].$$

Demostración. Sea $D \in \mathcal{D}^+$. Recordemos que $\|\cdot\|_D$ denota la norma definida por $x \rightarrow \|D^{1/2}x\|$. Como D es inversible, $\|\cdot\|_D$ es equivalente a $\|\cdot\|$; por ende, la unión de los subespacios \mathcal{S}_n es densa en \mathcal{S} con respecto a ambas normas $\|\cdot\|_D$ y $\|\cdot\|$. Como $P_{D,\mathcal{S}}$ (resp. P_{D,\mathcal{S}_n}) es la proyección D -ortogonal sobre el subespacio \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}_n), entonces, para todo vector unitario $x \in \mathcal{H}$

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\|_D \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Usando nuevamente la equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_D$ y $\|\cdot\|$, obtenemos que:

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.12)$$

Ahora bien, fijemos un vector unitario $x \in \mathcal{H}$. Juntando el Lema 4.2.7 y el Lema 4.2.6, resulta que:

$$\|P_{D,\mathcal{S}_n}x\| \leq \|P_{D,\mathcal{S}_n}\| \leq K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}].$$

Luego,

$$\|P_{D,\mathcal{S}}x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{D,\mathcal{S}_n}x\| \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}],$$

lo cual implica que $\|P_{D,\mathcal{S}}\| \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]$. Finalmente, como D es arbitrario, la proposición queda demostrada. \blacksquare

Caracterizaciones alternativas de la \mathcal{B} -compatibilidad

Como consecuencia de las Proposiciones 4.2.4 y 4.2.9 y de los lemas utilizados para demostrar esta última, obtenemos las siguientes caracterizaciones de la \mathcal{B} -compatibilidad. La primera de ellas es en términos de ángulos entre subespacios.



Proposición 4.2.10. *Son equivalentes:*

1. \mathcal{S} is \mathcal{B} -compatible;
2. $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\} < 1$
3. $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})\} < 1$;
4. $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D}) \text{ y } R(Q) \cap \mathcal{S} = \{0\}\} < 1$.

Demostración. Por las Proposiciones 4.2.4 y 4.2.9, sabemos \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible si y sólo si $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$. Recordemos, por otra parte, que la Proposición 2.3.9 establece la siguiente identidad:

$$\|P_{Q, \mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}.$$

Luego, claramente $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$ si y sólo si $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\} < 1$.

Para probar las otras equivalencias, llamemos

$$C = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)], \quad C_0 = \sup_{Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)] \quad \text{y} \quad C_{0, \mathcal{S}} = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}}(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)].$$

Demostraremos que $C = C_0 = C_{0, \mathcal{S}}$. Claramente $C_{0, \mathcal{S}} \leq C_0 \leq C$. Para probar que $C_0 \leq C_{0, \mathcal{S}}$, sea P la proyección ortogonal sobre \mathcal{S}^\perp . Dada $Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ existe $E \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}}(\mathcal{D})$ tal que $E \leq Q$ y $R(TQ) = R(TE)$. Luego, usando la Proposición 1.4.7, resulta

$$s[\mathcal{S}, R(E)]^2 = \gamma(PE)^2 = \gamma(PEP^*) \leq \gamma(PQP^*) = \gamma(PQ)^2 = s[\mathcal{S}, R(Q)]^2.$$

Por lo tanto $c[\mathcal{S}, R(Q)] \leq c[\mathcal{S}, R(E)]$, y en consecuencia $C_0 \leq C_{0, \mathcal{S}}$.

Supongamos ahora que $C_0 < 1$ (si $C_0 = 1$ no hay nada que probar). Como hemos notado en la observación 4.2.8,

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| \leq (1 - C_0^2)^{-1/2} < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, dado que se cumplen sus hipótesis, el Lema 4.2.5 nos asegura que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ es densa en \mathcal{S} . Luego, siguiendo la demostración de la Proposición 4.2.9 resulta que

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq (1 - C_0^2)^{-1/2}.$$

Finalmente, de la Proposición 4.2.4 y la identidad $\|P_{Q, \mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}$, se obtiene que $C \leq C_0$. ■

Proposición 4.2.11. *Son equivalentes:*

1. \mathcal{S} is \mathcal{B} -compatible;



2. a. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ es denso en \mathcal{S} ;
- b. Existe $M > 0$ tal que $K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1 \Rightarrow 2. Por la proposición anterior $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\} < 1$. Luego, esta implicación es una consecuencia de los Lemas 4.2.5 y 4.2.7.

2 \Rightarrow 1. Fijemos $D \in \mathcal{D}^+$. El argumento utilizado en la Proposición 4.2.9 permite demostrar que $\|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq M$. ■

Corolario 4.2.12. *Sea \mathcal{S} un subespacio de dimensión finita. Entonces, \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_n$.*

Observaciones 4.2.13.

1. Como $c[\mathcal{S}, \mathcal{T}] = c[\mathcal{S}^\perp, \mathcal{T}^\perp]$ para todo par de subespacios cerrados \mathcal{S} y \mathcal{T} , entonces un subespacio \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible si y solamente si \mathcal{S}^\perp es \mathcal{B} -compatible. Más aún, $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = K[\mathcal{S}^\perp, \mathcal{D}]$ (Comparar esto con la Proposición 4.1.12).
2. El hecho de que la compatibilidad de \mathcal{S} con \mathcal{B} implique que la unión de los \mathcal{S}_n es densa en \mathcal{S} , de algún modo, muestra que la condición de \mathcal{B} -compatibilidad es bastante restrictiva. No obstante, como veremos en la siguiente sección, estos subespacios aparecen en las aplicaciones. ▲

Teorema de Ben-Tal y Teboulle en espacios de dimensión infinita

A continuación demostraremos una versión del teorema de Ben-Tal y Teboulle en espacios de Hilbert para subespacios \mathcal{B} -compatibles. Dado que la demostración de la misma es larga y bastante técnica, la dividiremos en una serie de lemas. De aquí hasta el final de esta sección supondremos que \mathcal{S} es un subespacio (cerrado) \mathcal{B} -compatible.

Teorema 4.2.14. *Dado $D \in \mathcal{D}^+$, entonces*

$$P_{D, \mathcal{S}} \in \overline{\text{co}\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})\}},$$

donde la clausura es respecto a la topología fuerte de operadores.

Lema 4.2.15. *Si P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} y P_n la proyección ortogonal sobre \mathcal{S}_n , entonces, existe una constante $\eta > 0$ tal que para todo $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ y todo $x \in \mathcal{H}$*

$$\left\| \left((PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) x \right\| \leq \eta \left\| \left((P - P_n)(PQP)^\dagger \right) x \right\| + \left\| \left((P - P_n)(PQP)^\dagger \right)^2 x \right\|.$$



Demostración. Como $R(P_nQP_n) \subseteq R(PQP)$, por la Proposición 1.3.7, se tiene que:

$$\begin{aligned} (PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger &\leq - (P_nQP_n)^\dagger (P_nQP_n - PQP) (PQP)^\dagger \\ &\quad + (I - (P_nQP_n)^\dagger (P_nQP_n)) ((PQP) - (P_nQP_n)) (PQP)^\dagger{}^2. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible y el Lema 4.2.7, resulta que

$$\|(P_nQP_n)^\dagger\| = \gamma(QP_n)^{-2} = s[\mathcal{S}_n, N(Q)]^{-2} \leq K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}]^{-2} \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ((PQP) - (P_nQP_n)) (PQP)^\dagger{}^2 &= (P_nQ(P - P_n) + (P - P_n)QP) (PQP)^\dagger{}^2 \\ &= P_nQ((P - P_n)) (PQP)^\dagger{}^2 + (P - P_n)(PQP)^\dagger, \\ (P_nQP_n)^\dagger (P_nQP_n - PQP) (PQP)^\dagger &= (P_nQP_n)^\dagger P_n (P_nQP_n - PQP) (PQP)^\dagger \\ &= (P_nQP_n)^\dagger P_nQ(P_n - P) (PQP)^\dagger. \end{aligned}$$

En consecuencia, usando el hecho de que $I - (P_nQP_n)^\dagger(P_nQP_n)$, P , P_n y Q son proyecciones, y por lo tanto tienen norma igual a uno, obtenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} \left\| \left((PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) x \right\| &\leq \left(K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2} + 1 \right) \left\| \left((P - P_n)(PQP)^\dagger \right) x \right\| \\ &\quad + \left\| \left((P - P_n)(PQP)^\dagger{}^2 \right) x \right\|. \end{aligned}$$

■

Lema 4.2.16. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una red de operadores semidefinidos positivos que converge al operador A . Supongamos que existe $\eta > 0$ tal que $\eta \leq \gamma(A_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Lambda$, y también $\eta \leq \gamma(A)$. Entonces, $A_\alpha^\dagger \xrightarrow[\alpha]{SOT} A^\dagger$.

Demostración.

Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida del siguiente modo:

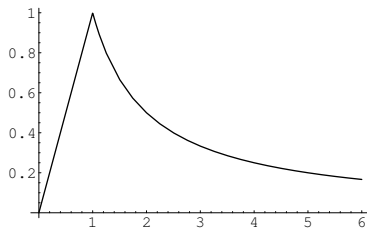


Figura 4.1: Función $h(x)$.

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

Luego, si $f(x) = h(x/\eta)$, entonces $A_\alpha^\dagger = f(A_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y $f(A) = A^\dagger$. Como la función $f(x)$ satisface las condiciones del Lema 1.1.12, resulta que $A_\alpha^\dagger \xrightarrow[\alpha]{SOT} A^\dagger$.

■



Lema 4.2.17. *Dado $x \in \mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que si $n \geq n_0$*

$$\|P_{Q,S} - P_{Q,S_n}\| \leq \varepsilon \quad \forall Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}).$$

Demostración. Al igual que en el lema anterior, llamemos P a la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} y P_n a la proyección ortogonal sobre \mathcal{S}_n . Fijemos por un instante la proyección Q . Como $c[N(P), R(Q)] < 1$, PQP tiene rango cerrado, y análogamente P_nQP_n también posee rango cerrado. En tal caso, como hemos visto en la observación 2.3.6

$$P_{Q,S} = P + (PQP)^\dagger PQ(1 - P) \quad \text{y} \quad P_{Q,S_n} = P_n + (P_nQP_n)^\dagger P_nQ(1 - P_n).$$

Luego, dado $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|(P_{Q,S}P_{Q,S_n})x\| &\leq \|(P - P_n)x\| + \left\| \left((PQP)^\dagger Q(I - P) - (P_nQP_n)^\dagger Q(I - P_n) \right) x \right\| \\ &\leq \|(P - P_n)x\| + \left\| \left((PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) Q(I - P)x \right\| \\ &\quad + \|(P_nQP_n)^\dagger Q(P - P_n)x\|. \end{aligned}$$

Como hemos visto en la demostración del lema anterior, $\|(P_nQP_n)\| \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2}$, por lo tanto, si $\mu = (1 + K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2})$:

$$\begin{aligned} \|(P_{Q,S} - P_{Q,S_n})x\| &\leq \|(P - P_n)x\| + \left\| \left((PQP)^\dagger Q(I - P) - (P_nQP_n)^\dagger Q(I - P_n) \right) x \right\| \\ &\leq \mu\|(P - P_n)x\| + \left\| \left((PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) Q(I - P)x \right\|, \end{aligned}$$

y por el lema anterior

$$\begin{aligned} &\leq \mu\|(P - P_n)x\| + \eta \left\| \left((P - P_n)(PQP)^\dagger \right) Q(I - P)x \right\| \\ &\quad + \left\| \left((P - P_n)(PQP)^\dagger \right)^2 Q(I - P)x \right\|. \end{aligned}$$

Claramente el primer término de esta última expresión no depende de Q , y tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ (por el Lema 4.2.5). Luego, basta ver que los dos restantes tienden a cero uniformemente respecto de Q . Para ello, consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones de ceros y unos. Por el teorema de Tychonoff, este conjunto es compacto con la topología producto, la cual coincide con la topología de convergencia “puntual” coordinada a coordinada. Dado $r \in \mathcal{C}$, sea $Q_r \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ la proyección que en su diagonal posee la sucesión r . Es fácil ver que si una red $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de \mathcal{C} converge puntualmente a cierto $r \in \mathcal{C}$, entonces Q_{r_α} converge a Q_r en la topología fuerte de operadores. En consecuencia, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones $f_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ y $g_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \left\| \left((P - P_n)(PQ_rP)^\dagger \right) Q_r(I - P)x \right\| \quad \text{y} \\ g_n(r) &= \left\| \left((P - P_n)(PQ_rP)^\dagger \right)^2 Q_r(I - P)x \right\|, \end{aligned}$$



dichas funciones resultan continuas. En efecto, si $r_\alpha \xrightarrow{\frac{P}{\alpha}} r$, entonces $PQ_{r_\alpha}P \xrightarrow{\frac{\text{TFO}}{\alpha}} PQ_rP$, y como los $\gamma(PQP)$ están acotados por debajo uniformemente para todo Q , por el Lema 4.2.16, resulta que $(PQ_{r_\alpha}P)^\dagger \xrightarrow{\frac{\text{TFO}}{\alpha}} (PQ_rP)^\dagger$. Finalmente, como el producto es conjuntamente continuo, respecto a la topología fuerte, en conjuntos acotados las funciones f_n y g_n son continuas¹.

Por otro lado, como $P - P_n \xrightarrow[\text{sOT}]{n \rightarrow \infty} 0$ por el Lema 4.2.5, las sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son decrecientes y convergen puntualmente a cero. Luego, por el teorema de Dini, tanto $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen a cero uniformemente respecto a Q . ■

Ahora tenemos todo para poder realizar la prueba del Teorema 4.2.14.

Demostración del Teorema 4.2.14. Sea $D \in \mathcal{D}^+$. Recordemos que $\|\cdot\|_D$ denota la norma definida por $x \rightarrow \|D^{1/2}x\|$. Como D es inversible, $\|\cdot\|_D$ es equivalente a $\|\cdot\|$; por ende, la unión de los subespacios \mathcal{S}_n es densa en \mathcal{S} con respecto a ambas normas $\|\cdot\|_D$ y $\|\cdot\|$. Como $P_{D,\mathcal{S}}$ (resp. P_{D,\mathcal{S}_n}) es la proyección D -ortogonal sobre el subespacio \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}_n), entonces, para todo vector unitario $x \in \mathcal{H}$

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\|_D \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Usando nuevamente la equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_D$ y $\|\cdot\|$, obtenemos que:

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.13)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 4.2.17, existe un $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$\|(P_{Q,\mathcal{S}} - P_{Q,\mathcal{S}_n})x\| \leq \varepsilon/2$$

De acuerdo a (4.13) existe $n_1 \geq n_0$ tal que para todo $n \geq n_1$

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| \leq \varepsilon/2.$$

Por la Proposición 4.2.6, existe $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_{0,\mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})$ tales que

$$P_{D,\mathcal{S}_n} = \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}_n}.$$

con $\alpha_j > 0$ y $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| P_{D,\mathcal{S}} - \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}} \right\| &\leq \|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| + \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}_n} - \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}} \right\| \\ &\leq \|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| + \sum_{j=1}^k \alpha_j \|P_{Q_j,\mathcal{S}_n} - P_{Q_j,\mathcal{S}}\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

lo cual muestra que $P_{D,\mathcal{S}}$ se encuentra en la clausura respecto a la topología fuerte de operadores del conjunto $\{P_{Q,\mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}_{0,\mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})\}$. ■

¹Más aún, se puede probar que las familias $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son equicontinuas.



Con esta versión del teorema de Ben-Tal Teboulle a mano, podemos probar finalmente el siguiente teorema:

Teorema 4.2.18. *Sea \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Entonces*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|.$$

En particular, estos supremos son finitos si y sólo si \mathcal{S} es \mathcal{B} -compatible.

Demostración. Las primera igualdad es consecuencia de las Proposiciones 4.2.4 y 4.2.9. Por otro lado, claramente

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| \geq \sup_{Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| \geq \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|.$$

En consecuencia, basta demostrar que $\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|$. Pero ello es consecuencia del Teorema 4.2.14, con lo cual la demostración está completa. ■

4.3 Aplicaciones a la teoría de marcos

La condición de que un subespacio sea compatible con cierta base \mathcal{B} es bastante restrictiva. Sin embargo, como veremos en la Proposición 4.3.1, los subespacios de codimensión infinita de $\ell^2(\mathbb{N})$ compatibles con la base canónica son precisamente los núcleos de los operadores de síntesis de los marcos de Riesz. A partir de esta relación, estudiaremos los marcos de Riesz y los marcos de Riesz condicionados utilizando las técnicas desarrolladas en la sección anterior. Dado que en la teoría de marcos hay letras que usualmente está reservadas para ciertos objetos, comenzaremos detallando la notación que utilizaremos a lo largo de esta subsección. Por medio de $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotaremos a la base canónica de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Dado $I \subseteq \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{M}_I = \overline{\text{gen}}\{e_n : n \in I\}$ y $P_I = P_{\mathcal{M}_I}$ denotará la proyección ortogonal sobre \mathcal{M}_I . En el caso particular de $I = \mathbb{I}_n := \{1, 2, \dots, n\}$, escribiremos \mathcal{M}_n en vez de \mathcal{M}_I . Dado un subespacio cerrado \mathcal{N} de ℓ^2 , $\mathcal{N}_n = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Análogamente $\mathcal{N}_I = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_I$, $I \subseteq \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un marco para \mathcal{H} , entonces $\mathcal{F}_I = \{f_n\}_{n \in I}$. Recordemos que \mathcal{F}_I es una sucesión marco si es un marco para $\overline{\text{gen}}\{\mathcal{F}_I\}$. Si \mathcal{F}_I es también un marco para \mathcal{H} , entonces diremos que es un submarco de \mathcal{F} .

El primer resultado que consideraremos es una caracterización de los marcos de Riesz en términos de subespacios \mathcal{B} -compatibles.

Proposición 4.3.1. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco y T su operador de síntesis. Si $\mathcal{N} = N(T)$, entonces, \mathcal{F} es un marco de Riesz si y sólo si el subespacio \mathcal{N} es \mathcal{B} -compatible.*

Demostración. En primer lugar, notemos que \mathcal{F}_I es una una sucesión marco si y sólo si $R(TP_I)$ es cerrado. Más aún, las cotas de la sucesión \mathcal{F}_I son $\gamma(TP_I)^2$ y $\|TP_I\|^2$. Luego, la definición de marco de Riesz es equivalente a que existe un $A > 0$ tal que para todo $I \in \mathbb{N}$



$A \leq \gamma(TP_I)$. Pero por la Proposición , esto ocurre si y sólo si existe una constante $c < 1$ tal que

$$\sup_{I \subseteq \mathbb{N}} c[\mathcal{N}, \mathcal{M}_I] < 1,$$

lo cual, por la Proposición 4.2.10 dice que \mathcal{N} es \mathcal{B} -compatible. ■

A partir de las distintas caracterizaciones de \mathcal{B} -compatibilidad se pueden deducir las siguientes para los marcos de Riesz.

Teorema 4.3.2. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco, T su operador de síntesis y $\mathcal{N} = N(T)$. Entonces, son equivalentes:*

1. \mathcal{F} es un marco de Riesz.
2. \mathcal{N} es \mathcal{B} -compatible.
3. Existe una cota de marco inferior uniforme para toda sucesión marco finita y linealmente independiente \mathcal{F}_J , $J \subset \mathbb{N}$.
4. Existe $d > 0$ tal que $\gamma(TP_J) \geq d$, para todo $J \in \mathbb{N}$ finito y tal que $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}_J = \{0\}$.

Demostración. Si I es un subconjunto finito de \mathbb{N} , entonces, $\mathcal{M}_I \cap \mathcal{N} = \{0\}$ si y sólo si \mathcal{F}_I es linealmente independiente. Luego, las condiciones 3 y 4 son equivalentes. Por las Proposiciones 1.4.5 y 4.2.10, también son equivalentes a que \mathcal{N} es \mathcal{B} -compatible. La equivalencia entre las condiciones 1 y 2 fue establecida en la Proposición 4.3.1. ■

Siguiendo los mismos argumentos que los empleados en la demostración de la Proposición 4.3.1, se puede establecer la siguiente caracterización de los marcos de Riesz condicionados.

Proposición 4.3.3. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco y \mathcal{N} el núcleo de su operador de síntesis. Entonces \mathcal{F} es un marco de Riesz condicionado si y sólo si existe una sucesión creciente $\{I_n\}$ de subconjuntos finitos de \mathbb{N} tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{N} \quad \text{y} \quad c = \sup_{n \in \mathbb{N}} c[\mathcal{N}, \mathcal{M}_{I_n}] < 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

Como corolario de esta proposición y del Lema 4.2.5 se obtiene la siguiente condición necesaria para que un marco sea condicionado de Riesz:

Proposición 4.3.4. *Sea \mathcal{F} un marco de Riesz condicionado y \mathcal{N} el núcleo de su operador de síntesis. Entonces*

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n\right) = \mathcal{N}. \quad (4.15)$$



Corolario 4.3.5. *Sea \mathcal{F} un marco de Riesz condicionado, T su operador de síntesis y supongamos que $\dim N(T) < \infty$. Entonces, \mathcal{F} es un marco de Riesz. Más aún, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $N(T) \subseteq \mathcal{M}_m$.*

Demostración. Sea $\mathcal{N} = N(T)$. Por la Proposición 4.3.4, \mathcal{N} satisface (4.15). Como por hipótesis $\dim \mathcal{N} < \infty$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N} = N(T) \subseteq \mathcal{M}_m$. Luego, por el Corolario 4.2.12, \mathcal{N} es \mathcal{B} -compatible, lo cual implica que \mathcal{F} es un marco de Riesz por la Proposición 4.3.1. ■

Corolario 4.3.6. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco de Riesz condicionado. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea S_n el operador de marco de $\{f_k\}_{k=1}^n$ y A_n la mínima de todas las cotas de marco inferiores asociadas a las subsucesiones de $\{S_n^{-1/2} f_k\}_{k=1}^n$. Si $\inf_n A_n > 0$, entonces \mathcal{F} es un marco de Riesz.*

Demostración. Sea T el operador de síntesis de \mathcal{F} y $\mathcal{N} = N(T)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $\mathcal{F}_n = \{f_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $P_n = P_{\mathcal{M}_n}$. Notemos que $TP_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \overline{\text{gen}} \{f_k : k = 1, \dots, n\}$ puede ser considerado, módulo un operador unitario, como el operador de síntesis de \mathcal{F}_n . De este modo, se tiene que $S_n = TP_n T^*$. Notemos también que $\{S_n^{-1/2} f_k\}_{k=1}^n$ es un marco de Parseval, y $N(TP_n) = N(S_n^{-1/2} TP_n) = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_n = \mathcal{N}_n$. Luego, por el Lema 1.4.7, si $J \subset \{1, \dots, n\}$, la cota de marco inferior A_J de $\{S_n^{-1/2} f_k\}_{k \in J}$ satisface $A_J = 1 - c[\mathcal{M}_n, \mathcal{H}_J]^2$. En consecuencia, usando las Proposiciones 4.3.4 y 4.2.11, el corolario queda demostrado. ■

Corolario 4.3.7. *Sea $\mathcal{F} = \{E_{mb} T_{nag}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ un marco de Gabor (regular) para $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, \mathcal{F} es un marco de Riesz condicionado si y sólo si es una base de Riesz.*

Demostración. Claramente si \mathcal{F} es una base de Riesz entonces es un marco de Riesz. Recíprocamente, supongamos que \mathcal{F} es un marco de Riesz condicionado. Entonces, por el Corolario 4.3.4 se tiene que:

$$\text{cl} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \right) = \mathcal{N}.$$

donde \mathcal{N} es el núcleo del operador de síntesis de \mathcal{F} . Como ya hemos notado en la demostración del Corolario 4.3.6,

$$\mathcal{N}_n = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0 \dots) \in \mathcal{M}_n : \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 0 \right\}.$$

Recordemos por otro lado que, por el Teorema 3.3.3, los subconjuntos finitos de vectores de \mathcal{F} son linealmente independiente. Luego, $\mathcal{N}_n = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\mathcal{N} = \{0\}$. En consecuencia, \mathcal{F} es una base de Riesz. ■

En el corolario anterior hemos usado que si \mathcal{N} es el núcleo del operador de síntesis de un marco de Riesz condicionado entonces:

$$\text{cl} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \right) = \mathcal{N}.$$



Si bien, por distintas razones, uno podría pensar que esta condición también es suficiente para asegurar que el marco en cuestión es de Riesz condicionado, el siguiente ejemplo muestra que esto no es así. Basados en el hecho de que para todo subespacio cerrado de ℓ^2 de codimensión infinita existe un marco \mathcal{F} cuyo operador de síntesis lo tiene como núcleo, en este ejemplo simplemente exhibiremos un subespacio \mathcal{N} que posee la propiedad de densidad pero para el cual no existe ninguna sucesión creciente $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de \mathbb{N} cuya unión sea \mathbb{N} y tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} c[\mathcal{N}, \mathcal{M}_{I_n}] < 1$.

Ejemplo 4.3.8. Dado $r > 1$, definamos el siguiente sistema ortogonal

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 - re_2 + \frac{1}{r}e_3 + \frac{1}{r^2}e_4 + \frac{1}{r^3}e_5 + \frac{1}{r^4}e_6 \\ x_2 &= e_5 - re_6 + \frac{1}{r^5}e_7 + \frac{1}{r^6}e_8 + \frac{1}{r^7}e_9 + \frac{1}{r^8}e_{10} \\ &\vdots \\ x_n &= e_{4n-3} - re_{4n-2} + \frac{1}{r^{4n-3}}e_{4n-1} + \frac{1}{r^{4n-2}}e_{4n} + \frac{1}{r^{4n-1}}e_{4n+1} + \frac{1}{r^{4n}}e_{4n+2}. \end{aligned}$$

Sea \mathcal{N} el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por construcción, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n$ es densa en \mathcal{N} . Más aún, $\{e_{4n-1} - re_{4n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{N}^\perp$, por ende $\dim \mathcal{N}^\perp = \infty$.

Sea $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de \mathbb{N} y tomemos $0 < \varepsilon < 1$. Como $\|x_n\|^2 \leq 1 + r^2 + \frac{4}{r^{8n-6}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \varepsilon < \frac{1 + r^2}{\|x_n\|^2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Notemos que, para $y \in \mathcal{N}$ e $i \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{M}_i = \text{gen}\{e_{4i-3}, e_{4i-2}\}$, entonces

$$\langle y, x_i \rangle = 0 \iff P_{\mathcal{M}_i}y = 0, \quad (4.16)$$

pues $P_{\mathcal{M}_i}x_j \neq 0$ si y sólo si $j = i$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$j = \max \left\{ i \in \mathbb{N} : P_{\mathcal{M}_i}(\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_{J_k}) \neq 0 \right\} \geq n_0.$$

Por la ecuación (4.16), $x_h \in (\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_{J_k})^\perp$ para todo $h > j$. En particular, $x_{j+1} \in \mathcal{N} \ominus (\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_{J_k})$ y

$$1 - \varepsilon < \frac{1 + r^2}{\|x_{j+1}\|^2} \leq \frac{\|P_{J_k}x_{j+1}\|^2}{\|x_{j+1}\|^2} \leq \left\langle \frac{x_{j+1}}{\|x_{j+1}\|}, \frac{P_{J_k}x_{j+1}}{\|P_{J_k}x_{j+1}\|} \right\rangle \leq c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_k}]$$

Un argumento similar muestra que $1 - \varepsilon \leq c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_m}]$, para cada $m \geq k$. Esto implica que $\liminf_{n \rightarrow \infty} c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_n}] \geq 1 - \varepsilon$. Finalmente, como ε es arbitrario, $c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_k}] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$. \blacktriangle



Marcos duales escaleados

Los marcos de Riesz también pueden ser caracterizados en términos de sus marcos duales escaleados. Recordemos dado un marco $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para el subespacio \mathcal{W} y dado un subespacio \mathcal{M} tal que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$, el marco dual (oblicuo) escaleado de \mathcal{F} en \mathcal{M} con la propiedad de norma mínima relativa a $\|\cdot\|_D$ es aquel cuyo operador de análisis es la inversa generalizada asociada a la proyección sobre \mathcal{W} paralela a \mathcal{M}^\perp y a la proyección $I - P_{D, N(T)}$. A continuación daremos una fórmula para dicho marco. Pero antes necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.3.9. *Sea $A \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ un operador con rango cerrado, y $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$. Entonces, el operador $\chi_D(A) = D^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger$ es una inversa generalizada de A tal que $\chi_D(A)A$ es la proyección D -autoadjunta sobre $N(A)^{\perp_D}$.*

Demostración. Como $R(AD^{1/2}) = R(A)$ se tiene:

$$\begin{aligned} A \chi_D(A) A &= P_{R(AD^{1/2})} A = A, \\ \chi_D(A) A \chi_D(A) &= D^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger AD^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger \\ &= D^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger = \chi_D(A), \end{aligned}$$

lo cual muestra que efectivamente $\chi_D(A)$ es una inversa generalizada de A . Por otro lado,

$$D(\chi_D(A)A) = D^{1/2}(AD^{-1/2})^\dagger A = D^{1/2}\left(D^{-1/2}A^*(ADA^*)^\dagger\right)A = A^*(ADA^*)^\dagger A.$$

En consecuencia $D(\chi_D(A)A)$ es autoadjunto y por lo tanto $(\chi_D(A)A)$ es una proyección D -autoadjunta. Finalmente, claramente $N(\chi_D(A)A) = N(A)$ y por ende $R(\chi_D(A)A) = N(A)^{\perp_D}$. ■

Proposición 4.3.10. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para el subespacio cerrado $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$, F su operador de síntesis y sea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ otro subespacio cerrado tal que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$. Entonces, dado $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$, el marco dual oblicuo con la propiedad de norma mínima relativa a la norma $\|\cdot\|_D$ tiene la siguiente forma:*

$$\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{B(D^{-1/2}T^*B)^\dagger D^{-1/2}e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donde $B \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ es cualquier operador con rango \mathcal{M} .

Demostración. Fijemos $B \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ con rango \mathcal{M} y sea $G = B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}$. Claramente \mathcal{G} es un marco para \mathcal{M} , pues, por la hipótesis sobre \mathcal{W} y \mathcal{M} , se tiene que

$$R((D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}) = R((D^{-1/2}F^*B)^\dagger) = N(D^{-1/2}F^*B)^\perp = N(B)^\perp.$$



Luego, basta verificar que FG^* es la proyección sobre \mathcal{W} paralela a \mathcal{M} y que G^*F es la proyección D -autoadjunta sobre $N(F)^{\perp D}$. Por un lado,

$$\begin{aligned} (FG^*)^2 &= \left(FD^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^* \right)^2 \\ &= FD^{-1/2} \left((B^*FD^{-1/2})^\dagger (B^*FD^{-1/2})(B^*FD^{-1/2})^\dagger \right) B^* \\ &= F \left(D^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^* \right) = (FG^*), \end{aligned}$$

lo cual muestra que FG^* es una proyección. Como $R(B^*FD^{-1/2}) = R(B^*)$ y $N(B^*FD^{-1/2}) = D^{1/2}(N(F))$, se tiene que

$$\begin{aligned} R((B^*FD^{-1/2})^\dagger) &= [D^{1/2}(N(F))]^\perp = D^{-1/2}(N(F)^\perp) \quad \text{y} \\ N((B^*FD^{-1/2})^\dagger) &= R(B^*)^\perp = N(B). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} R(G^*) &= R(D^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^*) = D^{-1}(N(T)^\perp) = N(T)^{\perp D}, \quad \text{y} \\ N(G^*) &= R(D^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^*) = N(B^*) = \mathcal{M}^\perp. \end{aligned}$$

En consecuencia $R(FG^*) = \mathcal{W}$ y $N(FG^*) = \mathcal{M}$.

Por otro lado, notemos que, con la notación del Lema 4.3.9, $G^*T = \chi_D(B^*F)B^*F$. Luego, G^*T es una proyección D -autoadjunta y $R(G^*T) = N(B^*T)^{\perp D} = N(T)^{\perp D}$, tal como queríamos ver. \blacksquare

Para concluir, daremos la anunciada caracterización de los marcos de Riesz en términos de sus marcos duales escaleados.

Teorema 4.3.11. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para el subespacio cerrado $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$, F su operador de síntesis, \mathcal{M} otro subespacio cerrado de \mathcal{H} tal que $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ y $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para \mathcal{M} con operador de síntesis B . Entonces, son equivalentes:*

1. \mathcal{F} es un marco de Riesz en \mathcal{W} .
2. Existe una cota superior uniforme para todos los marcos duales escaleados de \mathcal{F} en \mathcal{M} que minimizan las distintas normas $\|\cdot\|_D$, es decir:

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(\ell^2)} \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| < \infty .$$

Demostración. Fijemos $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$. Ya hemos probado en la Proposición 4.3.10 que

$$\left(B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2} \right)^* F = 1 - P_{D, N(F)} .$$



En consecuencia

$$\begin{aligned} \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| &\leq \|B\| \|(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \\ &= \|B\| \|(F^*B)^\dagger(F^*B)(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \\ &\leq \|B\| \|(F^*B)^\dagger\| \|(F^*B)(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \\ &= \|B\| \|(F^*B)^\dagger\| \|1 - P_{D,N(F)}\| , \end{aligned}$$

y

$$\|1 - P_{D,N(F)}\| = \|F^*B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \leq \|F^*\| \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| .$$

Por lo tanto

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(\ell^2)} \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| < \infty \iff \sup_{D \in \mathcal{D}(\ell^2)} \|1 - P_{D,N(F)}\| < \infty ,$$

lo cual prueba la equivalencia. ■

Capítulo 5

Manifestaciones de las proyecciones A -autoadjuntas en la teoría de muestreo

El objetivo de este capítulo es mostrar de que manera las proyecciones A -autoadjuntas aparecen en los procesos de muestreo. Básicamente, la teoría de muestreo estudia la posibilidad de reconstruir una señal, que matemáticamente es modelada por medio de una función, a través de una serie de mediciones de a misma, las cuales en el modelo matemático consisten en una sucesión de números que están relacionados con la señal de algún modo. La teoría moderna de muestreo se originó a partir del trabajo de Shannon “Communication in the presence of noise” publicado en 1949 ([110]), y ha sido estudiada desde distintos puntos de vista. En este capítulo nos concentraremos en los procesos de muestreo y reconstrucción lineales, desde la perspectiva de la teoría de operadores. Nuestro principal objetivo es mostrar como las proyecciones A -autoadjuntas aparecen en tales procesos, y a partir de esto, por un lado relacionar los modelos introducidos por Eldar y Werther [54] y Smale y Zhou [111]. Por otro lado, las técnicas empleadas nos permitirán responder interrogantes planteados en [111].

5.1 Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo

Los espacios de Hilbert con un núcleo reproductivo han demostrado ser muy útiles en diversas áreas de la matemática. En particular, estos espacios ofrecen un marco ideal para modelar los problemas de muestreo. Comencemos recordando su definición.

Definición 5.1.1. Un espacio de Hilbert de funciones definidas en un dominio común Ω se dice que es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo si existe una función $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

- $k_\xi = K(\cdot, \xi) \in \mathcal{H}$ para todo $\xi \in \Omega$.
- $f(\xi) = \langle f, k_\xi \rangle$ para toda $f \in \mathcal{H}$ y para todo $\xi \in \Omega$



Dicha función K se denomina núcleo reproductivo.

Nótese que, a partir de la definición, resulta relativamente sencillo deducir que un espacio de Hilbert admite a lo sumo un núcleo reproductivo. En efecto, supongamos que $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $H : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son dos núcleos reproductivos para cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} compuesto de funciones definidas en Ω . Entonces, dados $\xi, \eta \in \Omega$

$$K(\xi, \eta) = \langle k_\eta, h_\xi \rangle = \overline{\langle h_\xi, k_\eta \rangle} = \overline{H(\eta, \xi)} = H(\xi, \eta).$$

A raíz de esta unicidad es que a veces escribiremos \mathcal{H}_K para simbolizar que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo K .

Por otro lado, de la definición también resulta sencillo observar que, en un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, las evaluaciones son funcionales lineales continuos. Esta propiedad, en realidad, caracteriza a dichos espacios.

Teorema 5.1.2. *Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert de funciones definidas en un dominio común Ω . Entonces, \mathcal{H} es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo si y sólo si las evaluaciones son funcionales lineales continuos.*

Corolario 5.1.3. *Sea \mathcal{H} como en el teorema anterior y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de \mathcal{H} que convergen a $f \in \mathcal{H}$. Entonces, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ puntualmente. Más aún, la convergencia es uniforme en conjuntos donde $K(\xi, \xi)$ es acotado.*

Demostración. Sea $K(\cdot, \cdot)$ el núcleo reproductivo de \mathcal{H} . Dado $x \in \Omega$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| = |\langle f - f_n, k_\xi \rangle| \leq \|f - f_n\| \|k_\xi\| = \|f - f_n\| K(\xi, \xi)^{1/2}.$$

■

5.1.1 Generación de espacios con núcleo reproductivo

A continuación discutiremos dos procedimientos para generar un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo. El primero de ellos consiste en tomar una función $F : \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ donde \mathcal{K} es algún espacio de Hilbert. Para cada $x \in \mathcal{K}$, sea $F_x : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$f_x(\xi) = \langle x, F(\xi) \rangle.$$

Llamemos \mathcal{H} al espacio de todas las funciones obtenidas de este modo. Definiendo $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ por medio de

$$T(x) = f_x,$$

el espacio \mathcal{H} puede ser dotado de una norma

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \inf\{\|v\| : f = Tv\}.$$



De este modo, T se convierte en una isometría y \mathcal{H} , con el producto interno asociado a la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, en un espacio de Hilbert isomorfo a $N(T)^\perp$. Sea $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ el núcleo definido por

$$K(x_1, x_2) = \langle F(x_2), F(x_1) \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Entonces, K resulta un núcleo reproductivo para \mathcal{H} .

La otra forma de construir espacios de Hilbert con núcleo reproductivo que discutiremos está relacionada con la noción de matriz positiva sobre Ω , o núcleos de Mercer.

Una función $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina matriz positiva (resp. estrictamente) sobre Ω si para todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \Omega$ se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, x_1) & \dots & K(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

es positiva (resp. positiva e inversible). Dada una matriz estrictamente positiva sobre Ω , podemos considerar el espacio \mathcal{H}_0 compuesto por las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k K(\cdot, \xi_k),$$

donde $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subseteq \Omega$. En dicho espacio definimos un producto interno del siguiente modo: sean $f, g \in \mathcal{H}_0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k K(\cdot, \xi_k) \quad \text{y} \quad g = \sum_{k=1}^n \beta_k K(\cdot, \eta_k),$$

donde, eventualmente, algunos α_k (resp. β_k) son cero. Luego,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j K(\xi_i, \eta_j).$$

Se puede ver que la completación de este espacio, respecto a la norma inducida por el producto interno recientemente definido, es un espacio de Hilbert que posee a K como núcleo reproductivo (ver detalles en [17] o [109]).

5.2 Muestreo en espacios de Hilbert

5.2.1 Nociones básicas

Como hemos mencionado en la introducción, la teoría moderna de muestreo de señales comenzó con el artículo de Claude Shannon *Communication in the presence of noise*. En dicho artículo demostraba el siguiente resultado, hoy conocido como teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (WSK):



Teorema 5.2.1. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ una función cuya transformada de Fourier tiene soporte contenido en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces, f queda unívocamente determinada por los valores que toma en los enteros. Más aún, a partir de dichos valores la función puede reconstruirse del siguiente modo:*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{\text{sen}\pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

Luego de la aparición de este teorema, el matemático G. H. Hardy observó que la sucesión de funciones $\left\{ \frac{\text{sen}\pi(t-k)}{\pi(t-k)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio de Paley-Wiener. Recordemos que el espacio de Paley-Wiener, usualmente denotado por \mathcal{PW} , es el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ que consiste de aquellas funciones cuya transformada de Fourier posee soporte contenido en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Dicho espacio es un espacio de Hilbert reproductivo, y su núcleo es

$$K(t, s) = \frac{\text{sen}\pi(t-s)}{\pi(t-s)}$$

Como para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$f(n) = \left\langle f, \frac{\text{sen}\pi(\cdot - s)}{\pi(\cdot - s)} \right\rangle,$$

se observa que los datos, a partir de los cuales reconstruimos f , se obtienen al considerar el producto interno de f con la familia de funciones $\left\{ \frac{\text{sen}\pi(t-k)}{\pi(t-k)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Esto motiva un modelo de muestreo más abstracto, donde la señal f es un vector de cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} , y que las muestras son el resultado de realizar el producto interno de f con los elementos de cierta sucesión $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vectores de \mathcal{H} . Los vectores de dicha sucesión son los que usualmente se conocen con el nombre de **vectores de muestreo**, y supondremos que forman un marco para cierto subespacio \mathcal{M} de \mathcal{H} .

Por otro lado, si $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\langle f, g_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$, estamos interesados en reconstruir f a partir de estos los datos de muestreo. Para ello, uno cuenta con otra sucesión de vectores $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que constituye un marco para cierto subespacio \mathcal{W} de \mathcal{H} que puede diferir del subespacio \mathcal{M} . A los vectores f_n se los suele denominar **vectores de reconstrucción**.

En [54], Eldar y Werther proponen dos condiciones que un proceso de muestreo y posterior reconstrucción naturalmente debe satisfacer:

Unicidad: Si $h_1, h_2 \in \mathcal{W}$ y $\langle h_1, g_n \rangle = \langle h_2, g_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $h_1 = h_2$.

Consistencia: Si $f_{\mathcal{W}}$ denota la señal reconstruida, entonces $\langle f_{\mathcal{W}}, g_n \rangle = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El primer requerimiento es sobre el proceso de muestreo e implica que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. La consistencia, por otro lado, es un requerimiento sobre el proceso de reconstrucción. El



mismo puede dividirse en dos partes: la primera implica la existencia de $f_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$ tal que $\langle f_{\mathcal{W}}, g_n \rangle = d_n$. Esto es bastante fuerte puesto que implica que $\mathcal{H} = \mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp$. En segundo lugar, y de aquí el término consistencia, nos dice que si muestreamos la señal $f_{\mathcal{W}}$ y posteriormente la reconstruimos, obtendremos nuevamente $f_{\mathcal{W}}$.

En este trabajo consideraremos sólo modelos lineales de muestreo, es decir, modelos donde el operador que a una señal f le asigna la señal reconstruida $f_{\mathcal{W}}$ es lineal. En estos modelos también es natural pedir que dicho operador sea acotado, lo cual está relacionado con la estabilidad del proceso. Si F y G denotan los operadores de síntesis de los marcos \mathcal{F} y \mathcal{G} respectivamente, entonces existe $H \in L(\ell^2)$ de modo tal que el operador que a f le asigna $f_{\mathcal{W}}$ puede escribirse como FHG^* . La función del operador H es la de transformar los datos $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en los coeficientes que se utilizan para generar $f_{\mathcal{W}}$ en términos de \mathcal{F} .

El siguiente resultado fue obtenido en [54]. Aquí incluimos una demostración del mismo que involucra las técnicas de proyecciones A -autoadjuntas.

Proposición 5.2.2. *Existe un único proceso de muestreo y reconstrucción que satisfaga las condiciones de unicidad y consistencia que posee a los vectores de \mathcal{G} como vectores de muestreo y a los de \mathcal{F} como vectores de reconstrucción. Más aún, el operador lineal asociado a dicho proceso es el proyector $P_{GG^*, \mathcal{W}}$.*

Demostración. Como ya hemos mencionado, el operador $Q \in L(\mathcal{H})$ asociado a un tal proceso de muestreo y reconstrucción tiene la forma $Q = FHG^*$ donde $H \in L(\ell^2)$. Es fácil ver que la condición de unicidad junto con la de consistencia permiten asegurar que Q es una proyección (oblicua) sobre \mathcal{W} . Veamos que la proyección Q pertenece al conjunto $\mathcal{P}(GG^*, \mathcal{W})$ de proyecciones GG^* -autoadjuntas. Para ello, por la Proposición 2.3.2, basta verificar que $N(Q) \subseteq R(Q)^{\perp GG^*}$. Recordemos que $R(Q)^{\perp GG^*} = \left(GG^*(R(Q)) \right)^\perp$, luego

$$R(Q)^{\perp GG^*} = \left(GG^*(R(Q)) \right)^\perp = R(GG^*F)^\perp \supseteq R(G)^\perp = \mathcal{M}^\perp.$$

Por otro lado, $N(Q) = R(I - Q)$. Entonces, la condición de consistencia implica que $N(Q) \subseteq \mathcal{M}^\perp$. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $f \in \mathcal{H}$ vale

$$\langle (I - Q)f, g_n \rangle = \langle f, g_n \rangle - \langle Qf, g_n \rangle = 0.$$

Por lo tanto $R(I - Q) \subseteq \overline{\text{gen}} \{g_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \mathcal{M}^\perp$. En conclusión, se tiene que

$$N(Q) \subseteq \mathcal{M}^\perp \subseteq R(Q)^{\perp GG^*}.$$

Por último, basta notar que $N(GG^*) \cap \mathcal{W} = N(G^*) \cap \mathcal{W} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{W} = \{0\}$, y por el Teorema 2.3.7, existe un único proyector (GG^*) -autoadjunto, el $P_{GG^*, \mathcal{W}}$. Luego, $Q = P_{GG^*, \mathcal{W}}$. ■

A continuación definiremos una medida de suficiencia de los datos obtenidos al muestrear una señal con los elementos de \mathcal{G} son suficientes para reconstruirla utilizando los elementos de \mathcal{F} . Esta noción es una extensión de la introducida por Smale y Zhou en [111] en el contexto de espacios de Hilbert reproductivos.



Definición 5.2.3. Diremos que \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} si

$$\inf \{ \|G^*F(z)\| : z \in N(F)^\perp, \|z\| = 1 \} > 0.$$

Proposición 5.2.4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \mathcal{G} provee suficiente información respecto a \mathcal{F} ;
2. G^*F posee rango cerrado y $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$;
3. $c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] < 1$;
4. $c[\mathcal{W}^\perp, \mathcal{M}] < 1$ y $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M} = \mathcal{H}$.

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$ Que \mathcal{G} provea suficiente información con respecto a \mathcal{F} implica que la restricción de G^*F a $N(F)^\perp$ es inyectiva, luego $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. Por otro lado, como $N(G^*F) = N(F)$, se tiene que $\gamma(G^*F) > 0$. En consecuencia, G^*F posee rango cerrado.

$2 \Rightarrow 3$ Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.4.5.

$3 \Rightarrow 4$ Por la Proposición 1.2.3, $c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] = c[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp]$ y $c[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] = c[\mathcal{W}^\perp, \mathcal{M}]$. Por lo tanto, $c[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] < 1$. Esto en particular muestra que $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M}$ es cerrado. Luego, como $c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] < 1$ también implica que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$,

$$\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M} = \overline{\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M}} = (\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{H}.$$

$4 \Rightarrow 1$ Primeramente, notemos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = (\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M})^\perp = \{0\}$. En consecuencia, $N(G^*F) = N(F)$. Luego, por la Proposición 1.4.5,

$$\begin{aligned} \inf_{x \in N(F)^\perp} \|G^*F(x)\| &= \gamma(G^*F) \geq \gamma(G^*) \gamma(F) s[R(F), N(G^*)] \\ &= \gamma(G^*) \gamma(F) s[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] > 0. \end{aligned}$$

■

Observaciones 5.2.5.

1. Notar que la proposición anterior enfatiza el hecho de que la hipótesis de que \mathcal{G} provea suficiente información con respecto de \mathcal{F} sólo depende de los subespacios y no de los marcos elegidos en cada uno de ellos.
2. El ítem 2 muestra que si \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} entonces se satisface el requerimiento de unicidad. Sin embargo, puede ocurrir que $\mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp$ sea un subespacio propio de \mathcal{H} . ▲



Dado que bajo la hipótesis de suficiente información puede ocurrir que $\mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp \subsetneq \mathcal{H}$, no siempre existe $h \in \mathcal{W}$ tal que $\langle h, g_n \rangle = \langle f, g_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En tales casos, se pide que la función $f_{\mathcal{W}}$ que se obtenga tras la reconstrucción satisfaga que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_{\mathcal{W}}, g_n \rangle - d_n|^2 = \arg \min_{h \in \mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2$$

A continuación demostraremos que también en este caso, la proyección $P_{GG^*, \mathcal{W}}$ aparece nuevamente como el operador que vincula a f con la solución $f_{\mathcal{W}}$. Pero antes, introduciremos una notación que nos será de gran utilidad. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ un subespacio cerrado e $y \in \mathcal{H}_2$. Si T es acotado inferiormente en \mathcal{S} , es decir, si se verifica

$$\inf_{x \in \mathcal{S}} \|Tx\| > 0,$$

entonces no es difícil ver que existe una única solución del problema de minimización

$$\min_{x \in \mathcal{S}} \|Tx - y\|.$$

En efecto, como T es acotado inferiormente en \mathcal{S} , $T(\mathcal{S})$ es un subespacio cerrado. Por ende, $T(\mathcal{S}) - y := \{T(x) - y : x \in \mathcal{S}\}$ es convexo y cerrado, razón por la cual posee un único elemento de norma mínima. Dicho elemento está asociado a un $x_0 \in \mathcal{S}$ que es precisamente la solución del problema de minimización antes mencionado. De aquí en adelante, cuando el operador T y el subespacio \mathcal{S} (sobre el cual minimicemos) estén en las condiciones antes descritas, usaremos la siguiente notación para el vector x_0 :

$$x_0 = \arg \min_{x \in \mathcal{S}} \|Tx - y\|.$$

Proposición 5.2.6. *Sea $f \in \mathcal{H}$, $d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} = G^*(f)$, y supongamos que \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} . Entonces, el problema de minimización*

$$\min_{h \in \mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2$$

posee una única solución $f_{\mathcal{W}} = P_{GG^, \mathcal{W}}(f)$. En particular*

$$\|f_{\mathcal{W}} - f\| = \|(1 - P_{GG^*, \mathcal{W}})(f)\| \leq s [\mathcal{W}, (GG^*)^{-1}(\mathcal{W}^\perp)]^{-1} \|f\|.$$

Demostración. Notemos además que

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W}} &= \arg \min_{h \in \mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 \\ &= F \left(\arg \min_{z \in N(F)^\perp} \|G^*F(z) - d\|_{\ell^2} \right) \\ &= F \left(\arg \min_{z \in N(G^*F)^\perp} \|G^*F(z) - d\|_{\ell^2} \right), \end{aligned}$$



donde hemos usado que $N(G^*F) = N(F)$, pues \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} . Como $\arg \min_{z \in N(G^*F)^\perp} \|G^*F(z) - d\|_{\ell^2} = (G^*F)^\dagger(d) = (G^*F)^\dagger G^*(f)$, se tiene que

$$f_{\mathcal{W}} = F(G^*F)^\dagger G^*(f). \quad (5.1)$$

Sea $Q = F(G^*F)^\dagger G^*$. Es fácil ver que Q es una proyección cuyo rango es \mathcal{W} . Por otro lado, como $(G^*F)^\dagger = (F^*GG^*F)^\dagger F^*G$,

$$(GG^*)Q = (GG^*)F(F^*GG^*F)^\dagger F^*GG^*,$$

lo cual muestra que $(GG^*)Q$ es autoadjunto, y por ende Q es (GG^*) -autoadjunto. Pero como ya hemos visto, $N(GG^*) \cap \mathcal{W} = N(G^*) \cap \mathcal{W} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{W} = \{0\}$, y por lo tanto el Teorema 2.3.7 permite concluir que $Q = P_{GG^*, \mathcal{W}}$. ■

Observación 5.2.7. Notemos que la parte más importante de la condición de consistencia introducida por Eldar y Werther sigue valiendo, i.e., si comenzamos el proceso de muestreo y reconstrucción con la señal $f_{\mathcal{W}}$ obtendremos nuevamente $f_{\mathcal{W}}$. ▲

En la práctica, los datos obtenidos por medio del muestreo son pasibles de perturbaciones de distinta índole. Es por esto que se trata de estimar el error en la reconstrucción provocado por una perturbación de los datos del muestreo. En la siguiente Proposición consideraremos una estimación de esta naturaleza.

Proposición 5.2.8. Sean $d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} = G^*(f)$ y $f_{\mathcal{W}}$ como en la Proposición 5.2.6. Supongamos que $\hat{f}_{\mathcal{W}}$ es el vector obtenido si usamos $\hat{d} = \{\hat{d}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en vez de los datos originales $d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces:

$$\|\hat{f}_{\mathcal{W}} - f_{\mathcal{W}}\| \leq \|F(G^*F)^\dagger\| \|d - \hat{d}\| \leq \frac{\|F\|}{\gamma(G^*F)} \|d - \hat{d}\| \leq \frac{\|F\|}{\gamma(G)\gamma(F)c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp]} \|d - \hat{d}\|$$

Demostración. Surge de la ecuación (5.1), de la definición de módulo mínimo reducido y la Proposición 1.4.5. ■

5.2.2 Procesos de reconstrucción escaleados y regularizados

Como hemos visto, bajo la condición de suficiente información, la señal reconstruida a partir de los datos del muestreo queda caracterizada como la solución de un problema de cuadrados mínimos. En ciertos casos, estos problemas están mal condicionados y es preciso introducir cierta regularización del mismo. El objetivo de esta sección es estudiar una posible regularización del problema de cuadrados mínimos que caracteriza a la señal obtenida tras la reconstrucción y obtener estimaciones del error que esta regularización introduce.

Sea $\alpha > 0$ y $\{\omega_n\}$ una sucesión de números positivos acotados superiormente. Denotemos D_ω al operador diagonal sobre ℓ^2 definido por $D_\omega(e_n) = \omega_n e_n$. Dado $f \in \mathcal{H}$, si $d_n = \langle f, g_n \rangle$ $n \in \mathbb{N}$, buscaremos la solución $f_{\mathcal{W}, \alpha, \omega}$ del siguiente problema de minimización:

$$\min_{h \in \mathcal{W}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \right),$$



La solución del mismo, como ya hemos visto, puede pensarse como el resultado de un proceso de reconstrucción. Las diferencias con el caso antes estudiado son básicamente dos. La primera es la aparición de los coeficientes ω_n que ponderan de manera diferente las distintas coordenadas. La segunda, es el término $\alpha\|h\|^2$ que introduce una regularización del problema. Este método de regularización fue inventado independientemente en varios contextos, pero su amplia difusión se debe a las aplicaciones a ecuaciones integrales mencionadas en los trabajos de Tikhonov [116, 117] y Phillips [107]. Algunos autores suelen denominar a este método regularización de Phillips-Tikhonov. El caso finito dimensional fue expuesto por Hoerl [73], quien adoptó un enfoque estadístico, y por Foster [58], quien interpretó este método como un filtro de Wiener-Kolmogorov.

Antes de enunciar nuestro primer resultado, es necesario modificar la noción de suficiente información.

Definición 5.2.9. Diremos que \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} y a D_ω si

$$\inf \{ \|D_\omega^{1/2}G^*F(z)\| : z \in N(F)^\perp \quad \|z\| = 1 \} > 0.$$

Observación 5.2.10. Como en el caso no regularizado, si el operador D_ω es inversible, la propiedad de proveer suficiente información sólo depende de los subespacios \mathcal{W} y \mathcal{M} . Más precisamente, \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a \mathcal{F} y a D_ω si y sólo si $c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] < 1$. Sin embargo, si el operador D_ω no es inversible, dicha propiedad no sólo depende de los subespacios \mathcal{W} y \mathcal{M} , sino también de los operadores G , F y D_ω . \blacktriangle

Ahora estamos listos para enunciar el primer resultado de esta subsección:

Proposición 5.2.11. Sea $f \in \mathcal{H}$ y $d = \{d_n\} = G^*(f)$. Entonces existe una única solución $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ del problema de minimización:

$$\min_{h \in \mathcal{W}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h, g_n \rangle - y_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \right), \quad (5.2)$$

la cual está dada por $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} = L_{\alpha,\omega}(f)$, siendo $L_{\alpha,\omega}$ el operador definido del siguiente modo

$$L_{\alpha,\omega} = F \left(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \right)^\dagger F^*GD_\omega G^*. \quad (5.3)$$

En particular, si suponemos que \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a F y a D_ω , obtenemos la siguiente estimación para el error de reconstrucción:

$$\|f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f\| \leq \left\| (1 - P_{A,\mathcal{W}})(f) \right\| + \left(\alpha \frac{\|F\|^2}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha \gamma(F)^2} \right) \|f\|, \quad (5.4)$$

donde $A = GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}$.

Observaciones 5.2.12.



1. El primer término de (5.4) aparece sólo si f no pertenece a \mathcal{W} . Por otro lado,

$$\alpha \left(\frac{\|F\|^2}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha \gamma(F)^2} \right) \|f\| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0,$$

y este hecho sólo depende de la regularización. También es importante notar que aún si f pertenece a \mathcal{W} puede ocurrir que $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} \neq f$.

2. El precio que tenemos que pagar por la regularización del problema de minimización es la inconsistencia del proceso. ▲

Antes de probar la Proposición 5.2.11, necesitamos la siguiente estimación.

Lema 5.2.13. *Supongamos que \mathcal{G} provee suficiente información con respecto a F y a D_ω . Entonces*

$$\left\| \left(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F \right)^\dagger \right\| \leq \frac{1}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha \gamma(F)^2}.$$

Demostración. Notemos que $N(F^*GD_\omega G^*F) = N(F^*F) = N(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F)$. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F) &= \gamma(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F) \\ &\geq \gamma(F^*GD_\omega G^*F) + \gamma(\alpha F^*F) \\ &= \gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha \gamma(F)^2. \end{aligned}$$

■

Demostración de la proposición 5.2.11. Sea $\mathcal{L} = \ell^2 \oplus \mathcal{H}$ y consideremos el operador $T : \ell^2 \rightarrow \mathcal{L}$ definido por

$$T(z) = \begin{pmatrix} D_\omega^{1/2}G^*F \\ \alpha^{1/2}F \end{pmatrix} (z) = \left(D_\omega^{1/2}G^*F(z) \right) \oplus \left(\alpha^{1/2}F(z) \right).$$

En términos del operador T , usando el hecho de que $N(T) = N(F)$ y que T es acotado inferiormente en $N(T)^\perp$, el problema (5.3) de mínimos cuadrados puede reescribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} &= \arg \min_{h \in \mathcal{W}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h, g_n \rangle - y_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \right) \\ &= F \left(\arg \min_{z \in N(T)^\perp} \|T(z) - (D_\omega^{1/2}(y) \oplus 0)\| \right). \end{aligned}$$



Por lo tanto, $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} = FT^\dagger(D_\omega^{1/2}(y) \oplus 0)$. Usando la identidad $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^*$, obtenemos

$$\begin{aligned} T^\dagger &= \left(\begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\omega^{1/2}G^*F \\ \alpha^{1/2}F \end{pmatrix} \right)^\dagger \begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix} \\ &= \left(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \right)^\dagger \begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} &= F \left(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \right)^\dagger \begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix} (D_\omega^{1/2}(y) \oplus 0) \\ &= F \left(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \right)^\dagger F^*GD_\omega G^*(f) = L_{\alpha,\omega}(f) \end{aligned}$$

Cálculos de rutina muestran que si $A = GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}$, entonces

$$F \left(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F \right)^\dagger (F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})) = P_{A,\mathcal{W}}.$$

Usando este hecho y el Lema 5.2.13 resulta:

$$\begin{aligned} \|f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f\| &= \left\| \left(F(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F)^\dagger F^*GD_\omega G^* - I \right)(f) \right\| \\ &= \left\| \left(F(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F)^\dagger F^*GD_\omega G^* - I \right)(f) \right\| \\ &\leq \left\| \left(F(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F)^\dagger (F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})) - I \right)(f) \right\| \\ &\quad + \left\| \left(F(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F)^\dagger \alpha F^*P_{\mathcal{W}} \right)(f) \right\| \\ &= \left\| (I - P_{A,\mathcal{W}})(f) \right\| + \left\| \left(F(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F)^\dagger \alpha F^*P_{\mathcal{W}} \right)(f) \right\| \\ &\leq \left\| (I - P_{A,\mathcal{W}})(f) \right\| + \left\| \left(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F \right)^\dagger \right\| \alpha \|F\|^2 \|f\| \\ &\leq \left\| (1 - P_{A,\mathcal{W}})(f) \right\| + \left(\alpha \frac{\|F\|^2}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha \gamma(F)^2} \right) \|f\| \end{aligned}$$

■

Como antes, estamos interesados en una estimación del error que se produce a causa de una perturbación en los valores obtenidos en el muestreo.

Proposición 5.2.14. *Sea $d = \{d_n\} = G^*(f)$ y $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ como en la Proposición 5.2.11 y supongamos que $\widehat{f}_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ es un vector obtenido si usamos $\widehat{d} = \{\widehat{d}_n\}$ en vez de los datos origi-*



nales $d = \{d_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}\| &\leq \left\| F \left(F^* (GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}) F \right)^\dagger F^* GD_\omega \right\| \|d - \widehat{d}\| \\ &\leq \left(\frac{\|F\| \|\omega\|_\infty \|F^* G\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} G^* F) + \alpha \gamma(F)^2} \right) \|d - \widehat{d}\| \end{aligned}$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}\| &\leq \left\| \left(F \left(F^* (GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}) F \right)^\dagger F^* GD_\omega \right) (d - \widehat{d}) \right\| \\ &\leq \|F\| \|F^* G\| \|\omega\|_\infty \left\| \left(F^* (GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}) F \right)^\dagger \right\| \|d - \widehat{d}\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la estimación buscada surge a partir del Lema 5.2.13. ■

5.2.3 Muestreo en espacios de Hilbert reproductivos

En esta sección traduciremos los resultados obtenidos en espacios de Hilbert abstractos a espacios de Hilbert reproductivos. Para ello, usaremos la notación introducida por Smale y Zhou. Sean \bar{t} y \bar{x} subconjuntos discretos de X y definamos

$$\mathcal{H}_{k, \bar{t}} = \overline{\text{gen}} \{k_t : t \in \bar{t}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_{k, \bar{x}} = \overline{\text{gen}} \{k_x : x \in \bar{x}\}.$$

Supondremos que $\{k_t\}_{t \in \bar{t}}$ y $\{k_x\}_{x \in \bar{x}}$ son marcos para $\mathcal{H}_{k, \bar{t}}$ y $\mathcal{H}_{k, \bar{x}}$, respectivamente. Si F es el operador de síntesis de $\{k_t\}_{t \in \bar{t}}$ y G es el operador de síntesis de $\{k_x\}_{x \in \bar{x}}$, consideraremos los operadores: $K_{\bar{t}, \bar{t}} = F^* F$, $K_{\bar{x}, \bar{x}} = G G^*$ y $K_{\bar{x}, \bar{t}} = K_{\bar{t}, \bar{x}}^* = G^* F$. Finalmente, $\{\omega_x\}_{x \in \bar{x}}$ será una sucesión de números positivos acotada superiormente, y D_ω el correspondiente operador diagonal con respecto a la base canónica de $\ell^2(\bar{x})$. Comenzaremos escribiendo la noción suficiente información en este contexto:

Definición 5.2.15. Diremos que \bar{x} provee suficiente información con respecto a \bar{t} y ω si

$$\inf \{ \|D_\omega^{1/2} K_{\bar{x}, \bar{t}}(z)\| : z \in N(K_{\bar{t}, \bar{t}})^\perp, \|z\| = 1 \} > 0.$$

Esto equivale a que el operador $D_\omega^{1/2} K_{\bar{x}, \bar{t}}$ posea rango cerrado y $\mathcal{H}_{k, \bar{t}} \cap \mathcal{H}_{k, \bar{x}}^\perp = \{0\}$.

Ahora, estamos listos para reescribir las Proposiciones 5.2.11 y 5.2.14 en este contexto:

Proposición 5.2.16. Sea $f \in \mathcal{H}$ y $d = \{f(x)\}_{x \in \bar{x}}$. El problema de minimización

$$\min_{h \in \mathcal{H}_{k, \bar{t}}} \left(\sum_{x \in \bar{x}} \omega_x |h(x) - f(x)|^2 + \alpha \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \right), \quad (5.5)$$

posee una única solución $f_{\alpha,\omega}$ dada por

$$f_{\alpha,\omega} = \sum_{t \in \bar{t}} L_{\alpha,\omega}(y)(t) k_t,$$



donde $L_{\alpha,\omega} : \ell^2(\bar{x}) \rightarrow \ell^2(\bar{t})$ es el operador

$$L_{\alpha,\omega} = \left(K_{\bar{t},\bar{x}} D_\omega K_{\bar{x},\bar{t}} + \alpha K_{\bar{t},\bar{t}} \right)^\dagger K_{\bar{t},\bar{x}} D_\omega.$$

En particular, si suponemos que \bar{x} provee suficiente información con respecto a \bar{t} y ω , obtenemos la siguiente estimación para el error de reconstrucción:

$$\|f_{\alpha,\omega} - f\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| (1 - P_{A, \mathcal{H}_{k, \bar{t}}})(f) \right\|_{\mathcal{H}} + \left(\alpha \frac{\|K_{\bar{t},\bar{t}}\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} K_{\bar{x},\bar{t}}) + \alpha \gamma(K_{\bar{t},\bar{t}})} \right) \|f\|_{\mathcal{H}} \quad (5.6)$$

donde $A = (K_{\bar{t},\bar{x}} D_\omega K_{\bar{x},\bar{t}} + \alpha P_{\mathcal{H}_{k, \bar{t}}})$.

Observación 5.2.17. Sea $H = K_{\bar{t},\bar{x}} D_\omega K_{\bar{x},\bar{t}} + \alpha K_{\bar{t},\bar{t}}$. Entonces, la representación matricial de H con respecto a la base canónica de $\ell^2(\bar{t})$ es, para todo $t, s \in \bar{t}$

$$H(t, s) = \sum_{x \in \bar{x}} K(t, x) \omega_x K(x, s) + \alpha K(t, s).$$

Sea $H^\dagger = (H^\dagger(t, s))_{s, t \in \bar{t}}$ la inversa generalizada de Moore-Penrose de H . Luego, en términos de H^\dagger , para todo $f \in \mathcal{H}$, la proyección oblicua $P_{A, \mathcal{H}_{k, \bar{t}}}$ adopta la siguiente forma.

$$P_{A, \mathcal{H}_{k, \bar{t}}}(f) = \sum_{t \in \bar{t}} c_t k_t, \quad \text{where } c_t = \sum_{s \in \bar{t}} H^\dagger(t, s) \left(\sum_{x \in \bar{x}} K(s, x) \omega_x f(x) + \alpha f(s) \right).$$

▲

Proposición 5.2.18. Sean $d = \{f(x)\}_{x \in \bar{x}}$ y $f_{\alpha,\omega}$ como en la Proposición 5.2.16. Supongamos que $\hat{f}_{\alpha,\omega}$ es el vector obtenido si usamos $\hat{d} = \{\hat{d}_x\}_{x \in \bar{x}}$ en lugar de los datos originales, $y = \{f(x)\}_{x \in \bar{x}}$. Entonces:

$$\|\hat{f}_{\alpha,\omega} - f_{\alpha,\omega}\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\frac{\|K_{\bar{t},\bar{t}}\|^{1/2} \|\omega\|_\infty \|K_{\bar{t},\bar{x}}\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} K_{\bar{x},\bar{t}}) + \alpha \gamma(K_{\bar{t},\bar{t}})} \right) \|d - \hat{d}\|_{\ell^2(\bar{x})}.$$

A continuación introduciremos en nuestro modelo de muestreo y reconstrucción la noción de ruido. Para ello consideraremos una medida de probabilidad ρ definida en $X \times \mathbb{R}$ (resp. $X \times \mathbb{C}$). Para cada $x \in X$, por medio de ρ_x denotaremos a la probabilidad condicional de ρ respecto al evento $\{x\} \times \mathbb{R}$ (resp. $\{x\} \times \mathbb{C}$), y por medio de σ_x a la varianza de esta probabilidad condicional. Supondremos que para cada $x \in X$, ρ_x está soportada en el intervalo $[-M_x, M_x]$ (resp. $B_{M_x}(0)$) y que $M = \sum_{x \in X} M_x < \infty$. Finalmente, sea $\kappa =$

$$\left(\frac{\|K_{\bar{t},\bar{t}}\|^{1/2} \|\omega\|_\infty \|K_{\bar{t},\bar{x}}\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} K_{\bar{x},\bar{t}}) + \alpha \gamma(K_{\bar{t},\bar{t}})} \right).$$



Corolario 5.2.19. Sean $d = \{f(x)\}_{x \in \bar{x}}$ y $f_{\alpha, \omega}$ como en la Proposición 5.2.16. Supongamos que $f_{\alpha, \omega, \rho}$ es el vector obtenido si usamos $d_\rho = \{d_x + \eta_x\}_{x \in \bar{x}}$, donde las η_x son variables “aleatorias” cuyo valor se obtiene al azar según ρ_x . Entonces, dado $\varepsilon > 0$, la probabilidad de que

$$\|f_{\alpha, \omega, \rho} - f_{\alpha, \omega}\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \sum_{x \in \bar{x}} \sigma_x^2 + \varepsilon$$

$$\text{es } 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4\kappa M}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2\kappa M}}.$$

Para demostrar este corolario necesitamos el siguiente resultado demostrado por Smale y Zhou en [111]

Proposición 5.2.20. Si ξ es una variable aleatoria con varianza finita σ^2 tal que $|\xi - E(\xi)| \leq M$, entonces

$$P(\{|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\}) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon M}{\sigma^2}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2M}}.$$

Demostración del Corolario 5.2.19. Basta tomar $\xi = \|f_{\alpha, \omega, \rho} - f_{\alpha, \omega}\|_{\mathcal{H}}$. Luego, por la Proposición 5.2.18

$$0 \leq \xi \leq \kappa \sum_{x \in \bar{x}} \eta_x^2.$$

En consecuencia,

$$E\xi \leq \kappa \sum_{x \in \bar{x}} \sigma_x^2.$$

Por otro lado, como $|\xi - E\xi| \leq 2(\kappa M)$, se tiene que

$$\text{Var}(\xi) = E(|\xi - E\xi|^2) \leq 4\kappa^2 M^2.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\|f_{\alpha, \omega, \rho} - f_{\alpha, \omega}\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \sum_{x \in \bar{x}} \sigma_x^2 + \varepsilon\right\}\right) &\geq P(\{\xi \leq E\xi + \varepsilon\}) \\ &\geq P(\{|\xi - E(\xi)| \leq \varepsilon\}) \\ &\geq 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4\kappa M}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2\kappa M}}. \end{aligned}$$

■

Observación 5.2.21. Estimaciones del mismo estilo se obtienen reemplazando la Proposición 5.2.20 por la desigualdad de Markov u otras semejantes. ▲



5.3 Un problema de momentos

A continuación estudiaremos un problema de momentos que está íntimamente relacionado con los procesos de reconstrucción antes mencionados. Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco para cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} y $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Buscamos $h \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\langle h, f_n \rangle = a_n \quad (5.7)$$

Siguiendo la terminología introducida por Young en [123], a la sucesión $\{\langle g, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ la denominaremos sucesión de momentos de g , mientras que al espacio de todas las sucesiones de momentos lo denominaremos espacio de momentos.

Está claro que el problema de momentos en general no siempre tiene solución. En efecto, basta notar que el espacio de momentos coincide con ℓ^2 si y sólo si \mathcal{F} es una base de Riesz. De no ser así, para que el problema posea solución, la dependencia entre los vectores de \mathcal{F} también debe manifestarse en los coeficientes a_n .

Cuando dicha solución no existe, se busca la más próxima en algún sentido. Por ejemplo, respecto a la distancia usual de ℓ^2 , i.e. se busca $g \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle g, f_k \rangle - a_k|^2 = \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle h, f_k \rangle - a_k|^2.$$

Pero también, si $D \in L(\ell^2(N))$ es un operador positivo e inversible tal que $De_n = \omega_n e_n$, entonces uno puede buscar la solución más próxima respecto a la distancia que se obtiene al reescalar el producto interno de $\ell^2(N)$ con D . Es decir, se puede buscar g_D tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle g_D, f_k \rangle - a_k|^2 = \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle h, f_k \rangle - a_k|^2.$$

A lo largo de esta subsección, $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotará la base canónica de ℓ^2 . Al igual que en la sección 4.2 \mathcal{D} denota el álgebra abeliana de todos los operadores diagonales con respecto a \mathcal{B} , \mathcal{D}^+ el conjunto de operadores positivos e inversibles de \mathcal{D} , $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ el conjunto de todas las proyecciones de \mathcal{D} y $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ el conjunto de proyecciones finito dimensionales de \mathcal{D} . Por una cuestión de simplicidad en la notación, a lo largo de esta sección supondremos que la sucesión de subconjuntos finitos $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ asociada a los marcos de Riesz condicionales con los que trabajaremos es la canónica, i.e. $I_n = \{1, \dots, n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comenzaremos con el siguiente resultado demostrado por Cazzasa y Christensen en [33].

Proposición 5.3.1. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco de Riesz condicionado para un espacio de Hilbert \mathcal{H} y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de ℓ^2 . Dado $D \in \mathcal{D}^+$ tal que $De_n = \omega_n e_n$, sea g_D tal que*

$$g_D = \arg \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle h, f_k \rangle - a_k|^2,$$



asociado al problema de momentos $\langle g, f_n \rangle = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $g_{n,D}$ representa la solución de mínima norma en \mathcal{H} del problema truncado

$$\min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k=1}^n \omega_k |\langle h, f_k \rangle - a_k|^2,$$

entonces $g_{n,D} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} g_D$.

Observación 5.3.2. En [33], Cazzasa y Christensen demuestran que la convergencia de $g_{n,D}$ a g_D para toda sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ caracteriza a los marcos de Riesz condicionados. ▲

Basados en esta proposición y en el teorema de Ben-Tal y Teboulle, resulta:

Proposición 5.3.3. Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un marco de Riesz condicionado para un espacio de Hilbert \mathcal{H} y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de ℓ^2 . Sea $J(\mathcal{F})$ el conjunto de los subconjuntos finitos $I \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\{f_i : i \in I\}$ es linealmente independiente. Entonces, dado $D \in \mathcal{D}^+$ tal que $De_n = \omega_n e_n$, si g_D es la solución del problema de cuadrados mínimos

$$\min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle h, f_k \rangle - a_k|^2,$$

asociado al problema de momentos $\langle g, f_n \rangle = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$g_D \in \overline{\text{co}\{g_I : I \in J(\mathcal{F})\}}^{\|\cdot\|},$$

donde g_I es la única solución en el espacio generado por $\{f_i : i \in I\}$ del problema de momentos truncado $\langle g, f_i \rangle = a_i$, $i \in I$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 5.3.1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_D - g_{n,D}\| \leq \varepsilon$. Sea $Q_n \in L(\ell^2)$ la proyección ortogonal sobre el subespacio ℓ_n^2 generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$, y sea \mathcal{H}_n el subespacio generado por $\{f_1, \dots, f_n\}$. Como $TQ_n : \ell_n^2 \rightarrow \mathcal{H}_n$ es suryectivo, $Q_n T^* : \mathcal{H}_n \rightarrow \ell_n^2$ resulta inyectivo. Luego, por el Teorema 4.1.2

$$g_{n,D} \in \text{co}\{g_I : I \in J_n(\mathcal{F})\},$$

donde $J_n(\mathcal{F}) = \{I \in J(\mathcal{F}) : I \subseteq \{1, \dots, n\}\}$. ■

Capítulo 6

Complemento de Schur generalizado

En 1947, M.G. Krein [81] probó la existencia de un máximo (con respecto al orden usual) del conjunto $\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) = \{C \in L(\mathcal{H})^+ : C \leq A, R(C) \subseteq \mathcal{S}\}$. Krein usó este operador extremal en su teoría de extensión de operadores simétricos. El lector interesado puede ver el trabajo de Yu. L. Smul'jian [115] para más resultados en direcciones similares.

Varios años más tarde, W. N. Anderson Jr. [4] redescubrió, para espacios de dimensión finita, la existencia de este máximo que denotaremos $\Sigma(A, \mathcal{S})$ y llamaremos operador cortocircuito de A respecto de \mathcal{S} . Antes de esto, W. N. Anderson y R. J. Duffin [1] habían desarrollado la operación binaria denominada suma paralela: si $A, B \in L(\mathbb{C}^n)^+$ la suma paralela $A : B$ está definida por la fórmula

$$A : B = A(A + B)^\dagger B.$$

P. Fillmore y J. P. Williams [55] definieron la suma paralela de operadores positivos acotados sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} y extendieron muchos de los resultados de Anderson y Duffin. Debe mencionarse que su definición está basada en el teorema de factorización de Douglas (Teorema 2.1.1). Anderson y G. E. Trapp [5] definieron $\Sigma(A, \mathcal{S})$ para un operador positivo A sobre \mathcal{H} y un subespacio cerrado \mathcal{S} de \mathcal{H} , y probaron que $\Sigma(A, \mathcal{S})$ puede ser definido por medio de sumas paralelas y recíprocamente: si P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} , entonces $A : nP$ converge a $\Sigma(A, \mathcal{S})$ en la topología inducida por la norma de $L(\mathcal{H})$; y para $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, $A : B$ puede definirse como el operador cortocircuito de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+$ respecto al subespacio $\mathcal{H} \oplus \{0\}$. Este es el enfoque que nosotros usaremos en este trabajo. El operador de cortocircuito no es otra cosa que una manifestación más del denominado complemento de Schur: si M es la matriz cuadrada de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde A y D son bloques cuadrados y D es inversible, el complemento de Schur clásico de D en M es $A - BD^{-1}C$ (ver [27], [35] y [102] para más resultados, aplicaciones y generalizaciones de esta noción). T. Ando [6] propuso una generalización del complemento de Schur que se encuentra más cercana a la idea de operadores cortocircuitos. Si A es una matriz compleja



de $n \times n$ y \mathcal{S} es un subespacio de \mathbb{C}^n , A se dice **\mathcal{S} -complementable** si existen matrices M_r and M_l tales que $PM_r = M_r$, $M_lP = M_l$, $PAM_r = PA$ y $M_lAP = AP$. (Aquí P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{S}). Se tiene que $AM_r = M_lAM_r = M_lA$ y AM_r no dependen de la elección particular de M_r y M_l ; Ando denominó $A_{\mathcal{S}} = AM_r$ la compresión de Schur $A_{/\mathcal{S}} = A - A_{\mathcal{S}} = A - AM_r$ el complemento de Schur de A con respecto a \mathcal{S} . El observó que, si A es una matriz positiva de $n \times n$ y \mathcal{S} es el subespacio generado por los $n - k$ últimos vectores de la base canónica, entonces $A_{/\mathcal{S}}$ posee la forma

$$\begin{pmatrix} A - BD^{\dagger}C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto, su definición extiende la clásica de complementos de Schur. D Carlson y E. V. Haynworth [28] observaron que una construcción similar podía realizarse comenzando con $A \in C^{n \times m}$ y subespacios $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^n$ y $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^m$. Ellos definieron y estudiaron la noción de operadores complementables respecto al par $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Como Anderson y Duffin remarcaron en [1], la impedancia de una una red resistiva pura es una matriz positiva. Para estudiar redes con componentes inductivos y/o capacitivos, la suma paralela y la operación de cortocircuito deben ser extendidas a matrices y operadores no necesariamente positivos. C. R. Rao y S. K. Mitra [99] definieron y estudiaron la suma paralela de matrices de $m \times n$ y Mitra [97] usó sus resultados para definir una suerte de operador cortocircuito bilateral respecto a dos subespacios, uno en \mathbb{C}^n y el otro en \mathbb{C}^m . Una característica en común en ambas extensiones es el uso de inversas generalizadas. Debe mencionarse que pueden aplicarse a problemas de regresión lineal [97], [98] y [95, Appendix], como así también a problemas de identificación [92] y [93].

A continuación resumiremos el contenido de este capítulo. En la primer sección estudiaremos la noción de *complementabilidad* en espacios de Hilbert y definimos el concepto de *complementabilidad débil* (ver Definición 6.1.5). También probamos en esta sección las propiedades básicas de las ternas complementables (débiles o no) y exhibimos algunos criterios para cada clase de complementabilidad. En la siguiente sección, bajo ciertas condiciones de complementabilidad entre el operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y los subespacios $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$, definimos el complemento de Schur bilateral $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, y estudiamos las propiedades usuales de esta operación. Al igual que Mitra [94] probó para espacios finito dimensionales, nosotros demostramos que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es el máximo de cierto conjunto con respecto a cierto orden (denominado orden menos) en $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. El resto del capítulo está dedicado a las nociones de suma y resta paralela de operadores y su relación con el complemento de Schur bilateral. La suma paralela es definida siguiendo la idea de Anderson y Trapp: dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, diremos que A y B son **débilmente sumables en paralelo (resp. sumables en paralelo)** si la terna $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$, $\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}$, $\mathcal{H}_2 \oplus \{0\}$ es débilmente complementable (resp. complementable). En este caso, definimos la **suma paralela** de A y B , denotada por $A : B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, del siguiente modo:

$$\left(A : B \quad 0 \right) = \left(A \quad A \right) / \left(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\} \right).$$



Estudiamos las propiedades de esta operación. Nuevamente, bajo ciertas hipótesis de sumabilidad, todas las propiedades del caso finito dimensional son recuperadas en nuestro contexto. Luego, definimos la noción de resta paralela, damos condiciones que aseguran su existencia y demostramos que puede expresarse en términos de la suma paralela, lo cual nos permite trasladar las propiedades de la suma a la resta paralela directamente. Finalmente, en la última sección extendemos al caso bilateral algunas conocidas fórmulas del complemento de Schur (operador cortocircuito) en términos de la suma y la resta paralela mostrando que, como para operadores positivos, estas operaciones pueden definirse una en termino de la otra.

6.1 Operadores complementables

La siguiente definición, atribuida a Carlson y Haynsworth [28], es una extensión de una definición dada por Ando para el caso en que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ (ver [6]). Recordamos al lector que en este trabajo el término proyección está reservado para los operadores idempotentes, mientras que proyección ortogonal es usado para aquellas proyecciones que además son autoadjuntas.

Definición 6.1.1. Dadas dos proyecciones $P_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $P_l \in L(\mathcal{H}_2)$, un operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se dice (P_r, P_l) -complementable si existen operadores $M_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $M_l \in L(\mathcal{H}_2)$ tales que

1. $(I - P_r)M_r = M_r$, $(I - P_l)AM_r = (I - P_l)A$,
2. $(I - P_l)M_l = M_l$ y $M_lA(I - P_r) = A(I - P_r)$.

Más adelante probaremos que esta noción sólo depende de las imágenes de los proyectores P_r y P_l . Al igual que en el caso finito dimensional, se tienen las siguientes caracterizaciones alternativas de la complementabilidad.

Proposición 6.1.2. Sean $P_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $P_l \in L(\mathcal{H}_2)$ dos proyecciones cuyos rangos son \mathcal{S} y \mathcal{T} respectivamente. Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es (P_r, P_l) -complementable.
2. $R(A_{21}) \subseteq R(A_{22})$ y $R(A_{12}^*) \subseteq R(A_{22}^*)$.
3. Existen dos proyecciones $\widehat{P} \in L(\mathcal{H}_1)$ y $\widehat{Q} \in L(\mathcal{H}_2)$ tales que :

$$R(\widehat{P}^*) = \mathcal{S} \quad R(\widehat{Q}) = \mathcal{T} \quad R(A\widehat{P}) \subseteq \mathcal{T} \quad y \quad R((\widehat{Q}A)^*) \subseteq \mathcal{S}. \quad (6.1)$$

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$: Por la definición 6.1.1 se tiene que la descomposición matricial del operador M_r que inducen los subespacios \mathcal{S} y \mathcal{T} tiene la forma

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} & M_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}.$$



Luego $A_{21} = A_{22}(M_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}})$, y por el teorema 2.1.1, $R(A_{21}) \subseteq R(A_{22})$. Un argumento similar muestra que $R(A_{12}^*) \subseteq R(A_{22}^*)$.

$2 \Rightarrow 3$: Sean E y F las soluciones reducidas de las ecuaciones $A_{21} = A_{22}X$ y $A_{12}^* = A_{22}^*X$, respectivamente. Notemos que $E \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$ y $F \in L(\mathcal{T}^\perp, \mathcal{T})$. Si definimos

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix} \in L(\mathcal{H}_1) \quad \text{y} \quad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} I & -F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix} \in L(\mathcal{H}_2),$$

cuentas no muy difíciles muestran que \widehat{P} y \widehat{Q} satisfacen todas las condiciones de (6.1).

$3 \Rightarrow 1$: Definamos $M_r = I - \widehat{P}$ y $M_l = I - \widehat{Q}^*$. Entonces, $R(M_r) = \mathcal{S}^\perp$ y $R(M_l) = \mathcal{T}^\perp$, por ende se satisfacen las condiciones 1. y 3. de la definición 6.1.1. Por otro lado,

$$(I - Q)AM_r = (I - Q)A(I - \widehat{P}) = (I - Q)A - (I - Q)A\widehat{P} = (I - Q)A, \quad \text{y}$$

$$M_lA(I - P) = (I - \widehat{Q}^*)A(I - P) = A(I - P) - \widehat{Q}^*A(I - P) = A(I - P).$$

Esto muestra que las condiciones 2. y 4. de la Definición 6.1.1 también se satisfacen. ■

La siguiente caracterización ha sido considerada en [45] para operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert abstractos.

Proposición 6.1.3. *Sean $P_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $P_l \in L(\mathcal{H}_2)$ dos proyecciones cuyos rangos son \mathcal{S} y \mathcal{T} , respectivamente, y sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A es (P_r, P_l) -complementable.
2. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp + A^{-1}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{H}_2 = \mathcal{T}^\perp + A^{*-1}(\mathcal{S})$.
3. $c_0 \left[\mathcal{S}, \overline{A^*(\mathcal{T}^\perp)} \right] < 1$ y $c_0 \left[\mathcal{T}, \overline{A(\mathcal{S}^\perp)} \right] < 1$.

Demostración.

$1 \iff 2$: Supongamos que A es (P_r, P_l) -complementable. Por la Proposición 6.1.2, existe una proyección P tal que $R(P^*) = \mathcal{S}$ y $R(AP) \subseteq \mathcal{T}$. Entonces, $N(P) = \mathcal{S}^\perp$ y $R(P) \subseteq A^{-1}(\mathcal{T})$. Luego $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp + A^{-1}(\mathcal{T})$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp + A^{-1}(\mathcal{T})$ y definamos $\mathcal{N} = \mathcal{S}^\perp \cap A^{-1}(\mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp \oplus (A^{-1}(\mathcal{T}) \ominus \mathcal{N})$. Sea \widehat{P} la proyección oblicua sobre $A^{-1}(\mathcal{T}) \ominus \mathcal{N}$ paralela a \mathcal{S}^\perp . Luego, $R(\widehat{P}^*) = N(\widehat{P})^\perp = R(I - \widehat{P})^\perp = \mathcal{S}$, y $R(A\widehat{P}) \subseteq \mathcal{T}$ pues $R(\widehat{P}) = A^{-1}(\mathcal{T}) \ominus \mathcal{N}$. Un razonamiento similar muestra que la existencia de una proyección Q tal que $R(Q) = \mathcal{T}$ y $R((QA)^*) \subseteq \mathcal{S}$ es equivalente a la identidad $\mathcal{H}_2 = \mathcal{T}^\perp + A^{*-1}(\mathcal{S})$.

$2 \iff 3$: Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.3 (ítem 3) y la identidad $A^*(\mathcal{T}^\perp)^\perp = A^{-1}(\mathcal{T})$. ■



Observación-Definición 6.1.4. La Proposición 6.1.3, como así también la Proposición 6.1.2, muestran que la noción de (P_r, P_l) -complementabilidad depende solamente de los subespacios $\mathcal{S} = R(P_l)$ y $\mathcal{T} = R(P_r)$. Por esta razón, de aquí en adelante diremos que un operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -**complementable** en vez de (P_r, P_l) -complementable. ▲

Sea \mathcal{S} un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Dado un operador positivo $A \in L(\mathcal{H})$, si $A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$, como hemos visto en la Proposición 2.1.4, la inclusión $R(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}}) \subseteq R((A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2})$ siempre se verifica. Si el subespacio \mathcal{S} posee dimensión finita, como

$$R(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}) = R((A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}) = \overline{R(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})}, \quad (6.2)$$

resulta que el operador A es automáticamente $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ -complementable. Sin embargo, en general, la serie de identidades descritas en (6.2) sólo se verifican si $A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}$ posee rango cerrado. Es por esta razón que resulta más o menos natural considerar la siguiente noción más débil de complementabilidad:

Definición 6.1.5. Sean $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ subespacios cerrados. Diremos que un operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -**débilmente complementable** si

$$R(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}}) \subseteq R(|(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}) \quad \text{y} \quad R((A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp})^*) \subseteq R(|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2}),$$

Observación 6.1.6. Observar que, por el Corolario 2.1.2, $R(|(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*|) = R(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})$ y $R(|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|) = R((A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp})^*)$. Por lo tanto, la noción de complementabilidad que acabamos de definir es en efecto más débil que la introducida anteriormente en la definición 6.1.1. Si $R(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})$ es cerrado, entonces ambas nociones coinciden. ▲

Una consecuencia inmediata del teorema 2.1.1 permite obtener las siguientes caracterizaciones de la complementabilidad débil.

Proposición 6.1.7. Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, y dos subespacios cerrados $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$, entonces son equivalentes:

1. A es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable.
2. Si $A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} = U|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|$ es la descomposición polar de $A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}$, entonces las ecuaciones

$$A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} = |(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}UX \quad \text{y} \quad (A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp})^* = |A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2}Y$$

tienen solución.

3. $\sup_{x \in \mathcal{S}} \frac{\|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} x\|^2}{\langle |(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*| x, x \rangle} < \infty$ y $\sup_{y \in \mathcal{T}} \frac{\|(A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp})^* y\|^2}{\langle |A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}| y, y \rangle} < \infty$.



6.2 Complemento de Schur

Con el objeto de motivar la definición que daremos del complemento de Schur, recordemos que si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$, Anderson y Trapp [5] probaron que si $A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S},\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S},\mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$ entonces

$$\Sigma(\mathcal{S}, A) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S},\mathcal{S}} - C^*C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde C es la solución reducida de $(A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^{1/2}X = A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}}$. Luego, parece natural extender la noción de complemento de Schur (u operador cortocircuito como lo denominaban Anderson y Trapp) del siguiente modo.

Definición 6.2.1. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ dos subespacios cerrados de modo que A es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable. Si U es la isometría parcial de la descomposición polar de $A_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ y denotamos por medio de F y E a las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} = |(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}UX \quad \text{y} \quad (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^* = |A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2}X$$

respectivamente, entonces el **complemento de Schur bilateral** de A respecto de los subespacios \mathcal{S} y \mathcal{T} es

$$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} - F^*E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 6.2.2. Si $A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}$ tiene rango cerrado, entonces

$$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} - A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp}(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^\dagger A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

▲

En la siguiente proposición enumeramos algunas propiedades básicas del complemento de Schur bilateral que son consecuencia inmediata de la definición. Con el objeto de simplificar los enunciados y evitar repeticiones innecesarias, de aquí en más asumiremos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ son subespacios cerrados dados y que A es un operador de $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ cuya representación matricial respecto a los subespacios \mathcal{S} y \mathcal{T} está dada por $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} & A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} & A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$.

Proposición 6.2.3. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable. Entonces:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, αA es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable, y $\Sigma((\alpha A), \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \alpha(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))$.
2. A^* es $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ -débilmente complementable, y $(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^* = \Sigma((A^*), \mathcal{T}, \mathcal{S})$.



3. $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable y $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.
4. Si $A = A^*$ (resp. $A \geq 0$) y $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, entonces $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{S})$ es autoadjunto (resp. positivo semidefinido).

La siguiente Proposición es una extensión a nuestro contexto de un resultado demostrado por Butler y Morley en [25]. Comenzaremos con un lema técnico. Recordemos que bola unitaria cerrada de un espacio de Hilbert es débilmente compacta de acuerdo al teorema de Alaoglu (Proposición 1.1.4). Más aún, como esta topología es metrizable en espacios separables, toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Lema 6.2.4. Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $R(A^*) \subseteq R(|B|^{1/2})$. Supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}$ en \mathcal{H}_1 , $d \in \mathcal{H}_2$ y un número positivo M que satisfacen

$$Ay_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} d, \quad By_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 0, \quad \text{and} \quad \langle |B|y_n, y_n \rangle \leq M.$$

Entonces $d = 0$.

Demostración. Sea $a_n = |B|^{1/2}y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\|a_n\|^2 = \langle |B|y_n, y_n \rangle \leq M$. Por las observaciones previas, sabemos que existe $z \in \mathcal{H}_2$ y una subsucesión de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cual haciendo abuso de notación continuaremos denotando por medio $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z$ débilmente. Sea $B = U|B|$ la descomposición polar de B . Como $By_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ y $B = (U|B|^{1/2})|B|^{1/2}$, se tiene que $z \in N(|B|^{1/2})$. Sea C la solución reducida de $A^* = |B|^{1/2}X$. Puesto que $Ay_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d$, se tiene que $C^*z = d$. Luego, como $N(|B|^{1/2}) \subseteq N(C^*)$, concluimos que $d = 0$. ■

Proposición 6.2.5. Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable, entonces, dado $x \in \mathcal{S}$ existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{S}^\perp y un número positivo M tal que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \langle |A_{22}|y_n, y_n \rangle \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Recíprocamente, si existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{S}^\perp , $d \in \mathcal{T}$, y un número positivo M tal que

$$A \begin{pmatrix} x \\ z_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \langle |A_{22}|z_n, z_n \rangle \leq M, \quad (6.3)$$

entonces $\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Demostración. Sean U la isometría de la descomposición polar de $A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}$ y sean E y F las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} = |(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}UX \quad \text{y} \quad (A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp})^* = |A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2}X,$$



respectivamente. Como $R(E) \subseteq \overline{R(U^*(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2})} = \overline{R(|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2})}$, dado $x \in \mathcal{H}_1$ hay una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -Ex$. Entonces

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} x + A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} y_n &= A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} x + U |A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2} |A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n \\ &= A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} x + |(A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2} U (|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad y \\ A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} x + A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp} y_n &= A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} x + F^* (|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n) \\ &= A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} x + F^* (|A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x). \end{aligned}$$

Finalmente, dado que la sucesión $\{|A_{22}|^{1/2} y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \langle |A_{22}| y_n, y_n \rangle < \infty$.

Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{S}^\perp la cual satisface (6.3). Si $w_n = y_n - z_n$, entonces $\langle |A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp}| w_n, w_n \rangle \leq K$. Por otro lado,

$$A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} x + A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \quad y \quad A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} x + A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp} y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

En consecuencia, $A_{12} w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d - \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x)$. Análogamente obtenemos que

$$A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto, usando el Lema 6.2.4, resulta que $d = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x)$. ■

Corolario 6.2.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -débilmente complementable. Entonces*

$$R(A) \cap \mathcal{T} \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) \subseteq \overline{R(A)} \cap \mathcal{T} \quad (6.4)$$

$$R(A^*) \cap \mathcal{S} \subseteq R((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^*) \subseteq \overline{R(A^*)} \cap \mathcal{S} \quad (6.5)$$

En particular, $R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = R(A) \cap \mathcal{T}$ y $R((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^*) = R(A^*) \cap \mathcal{S}$ si $R(A)$ es cerrado.

Demostración. En primer lugar demostraremos que $R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) \subseteq \overline{R(A)} \cap \mathcal{T}$. Claramente, por definición, $R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) \subseteq \mathcal{T}$. Por otro lado, dado $x \in \mathcal{H}_1$, por la Proposición 6.2.5, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{S}^\perp tal que $A \begin{pmatrix} Px \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego

$$R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) \subseteq \overline{R(A)}.$$

Para probar que $R(A) \cap \mathcal{T} \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))$, tomemos $x \in R(A) \cap \mathcal{T}$, y sea $z \in \mathcal{H}_1$ tal que $Az = x$. Si P es la proyección ortogonal sobre \mathcal{S} , entonces $A \begin{pmatrix} Pz \\ z - Pz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, y, por la Proposición 6.2.5, obtenemos que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(Pz) = x$. Las inclusiones relativas a $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ se deducen del mismo modo, o bien, usando que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})^* = \Sigma(A^*, \mathcal{T}, \mathcal{S})$ (ver Proposición 6.2.3). ■

A continuación, y hasta el final de esta sección, estudiaremos el complemento de Schur bilateral de un operador A respecto de un par de subespacios $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ en el caso particular donde operador A es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable.



Proposición 6.2.7. Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable, entonces, para cada $x \in \mathcal{S}$ existe $y \in \mathcal{S}^\perp$ tal que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, existen proyecciones $P \in L(\mathcal{H}_1)$ y $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ de modo que

$$R(P^*) = \mathcal{S}, \quad R(Q) = \mathcal{T} \quad \text{and} \quad QA = AP = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}). \quad (6.6)$$

Demostración. Por la Proposición 6.1.2, existe una proyección $P \in L(\mathcal{H}_1)$ tal que $R(P^*) = \mathcal{S}$ y $R(AP) \subseteq \mathcal{T}$. La descomposición matricial de P con respecto a \mathcal{S} es $\begin{pmatrix} I & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}$, donde I es la identidad en \mathcal{S} y $E \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$. Si $x \in \mathcal{S}$ e $y = Ex$, entonces $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}$. Si $z_n = y \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (6.3). Luego, por la Proposición 6.2.5, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $AP = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. Análogamente puede probarse que existe una proyección $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ con $R(Q) = \mathcal{T}$ tal que $QA = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ ■

Observación 6.2.8. El hecho de que existan proyecciones $P \in L(\mathcal{H}_1)$ y $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ que satisfacen $AP = QA = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ fue demostrado para operadores positivos en [45]. En dicho trabajo, el papel de P lo juegan las proyecciones A -autoadjuntas. ▲

Corolario 6.2.9. Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable, entonces

$$R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = R(A) \cap \mathcal{T} \quad \text{y} \quad N(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = \mathcal{S}^\perp + N(A).$$

Demostración. Por el Corolario 6.2.6, se tiene que $R(A) \cap \mathcal{T} \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))$ y

$$\mathcal{S}^\perp + N(A) \subseteq (\mathcal{S} \cap \overline{R(A^*)})^\perp \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})^*)^\perp = N(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})).$$

Por otro lado, sean $P \in L(\mathcal{H}_1)$ y $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ proyecciones que satisfacen la ecuación (6.6). Luego, $R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = R(AP) \subseteq R(A)$, y

$$N(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = N(AP) = N(P) \oplus (R(P) \cap N(A)) \subseteq \mathcal{S}^\perp + N(A),$$

pues $N(P) = R(P^*)^\perp = \mathcal{S}^\perp$. ■

Observación 6.2.10. Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable, entonces, por el Corolario 6.2.9, los subespacios $\mathcal{S}^\perp + N(A)$, $\mathcal{S} + N(A)^\perp$, $\mathcal{T}^\perp + R(A)^\perp$ y $\mathcal{T} + \overline{R(A)}$ son cerrados. Más aún, si $R(A)$ es cerrado, entonces, por la Proposición 1.2.3, $A(\mathcal{S}^\perp)$, $A^*(\mathcal{T}^\perp)$, y $R(A_{22})$ también son cerrados. Por lo tanto, en el caso particular de operadores con rango cerrado, los métodos basados en el uso de inversas generalizadas pueden usarse. No obstante, los nuestros no sólo se aplican a operadores cuyos rangos no son cerrados, sino que también, permiten obtener la mayoría de las propiedades conocidas del complemento de Schur bajo la hipótesis de complementabilidad. ▲



El orden parcial menos. En [94], Mitra probó (para matrices en $\mathbb{C}^{m \times n}$) que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es el único máximo del conjunto

$$\mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left\{ C \in \mathbb{C}^{m \times n} : C \leq^- A, R(C) \subseteq \mathcal{T} \quad \text{y} \quad R(C^*) \subseteq \mathcal{S} \right\},$$

respecto al denominado orden parcial menos: $C \leq^- A$ si

$$R(C) \cap R(A - C) = \{0\} \quad \text{y} \quad R(C^*) \cap R(A^* - C^*) = \{0\}.$$

Un resultado similar puede ser obtenido en nuestro contexto. Para ello, primeramente es necesario extender la definición de orden menos a espacios de Hilbert de dimensión infinita:

Definición 6.2.11. Dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, deremos que A es menor que B respecto al orden (parcial) menos si:

$$(a) \quad c_0 \left[\overline{R(A)}, \overline{R(B - A)} \right] < 1 \quad \text{y} \quad (b) \quad c_0 \left[\overline{R(A^*)}, \overline{R(B^* - A^*)} \right] < 1 .$$

En tal caso lo denotaremos $A \leq^- B$.

Observación 6.2.12. En el caso finito dimensional, la condición (a) es equivalente a $R(A) \cap R(B - A) = \{0\}$ y la condición (b) es equivalente a $R(A^*) \cap R(B^* - A^*) = \{0\}$. Por ende, la definición 6.2.11 extiende la definición ya existente en espacios de dimensión finita. Nótese también que $A \leq^- B$ si y sólo si $A^* \leq^- B^*$, por la simetría de las condiciones (a) y (b). \blacktriangle

La siguiente Proposición provee condiciones equivalentes a la condición (a) de la definición 6.2.11, las cuales son más simples de manipular. Un resultado similar para la condición (b) puede obtenerse adjuntando.

Proposición 6.2.13. *Dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $c_0 \left[\overline{R(A)}, \overline{R(B - A)} \right] < 1$.
2. *Existe una proyección $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ tal que $R(Q) = \overline{R(A)}$ y $A = QB$.*
3. *Existe una proyección $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ tal que $A = QB$.*

Demostración.

$1 \implies 2$: Si $\mathcal{L} = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(B - A)}$, entonces \mathcal{L} es cerrado por la Proposición 1.2.3. Sea $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ la proyección cuyo rango es $\overline{R(A)}$ y cuyo núcleo es $N(Q) = \overline{R(B - A)} \oplus \mathcal{L}^\perp$. Entonces, $QB = Q((B - A) + A) = QA = A$.

$2 \implies 3$: Es clara.

$3 \implies 1$: Como $A = QB$ y $B - A = (I - Q)B$, se tiene que $R(A) \subseteq R(Q)$ y $R(B - A) \subseteq R(I - Q) = N(Q)$. Por lo tanto, $c_0 \left[\overline{R(A)}, \overline{R(B - A)} \right] \leq c_0 [R(Q), N(Q)] < 1$. \blacksquare

Corolario 6.2.14. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*

1. *Si $A \leq^- B$, entonces $R(A) \subseteq R(B)$ y $R(A^*) \subseteq R(B^*)$.*



2. La relación \leq^- es un orden parcial (i.e. es reflexiva, antisimétrica y transitiva).

3. Si $A \leq^- B$ y B es una proyección, entonces A es también una proyección.

Demostración. Las primeras dos afirmaciones son una consecuencia inmediata de la Proposición 6.2.13. Por otro lado, si $A \leq^- B$ y $B^2 = B$, aplicando la Proposición 6.2.13 a los operadores A y B (resp A^* y B^*) resulta que existen proyecciones P y Q tales que $R(P^*) = \overline{R(A^*)}$, $R(Q) = \overline{R(A)}$ y $A = QB = BP$. Luego $A^2 = (QB)(BP) = QBP = A$. ■

Teorema 6.2.15. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable, y sea

$$\mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \left\{ C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : C \leq^- A, R(C) \subseteq \mathcal{T} \text{ y } R(C^*) \subseteq \mathcal{S} \right\}.$$

Entonces, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \max_{\leq^-} \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Demostración. Por las Proposiciones 6.2.7 y 6.2.13, sabemos que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq^- A$. Por otro lado, por el Corolario 6.2.9, $R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) \subseteq \mathcal{T}$ y $R((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^*) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Por otro lado, dado $C \in \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$, existe una proyección $E \in L(\mathcal{H}_2)$ tal que $C = EA$. Sea $P \in L(\mathcal{H}_1)$ una proyección como en la Proposición 6.2.7 tal que $R(P^*) = \mathcal{S}$ y $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = AP$. La inclusión $R(C^*) \subseteq \mathcal{S}$ implica que $P^*C^* = C^*$. Por lo tanto

$$C = CP = EAP = E\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Análogamente, existe una proyección F tal que $C^* = F(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^*$. En consecuencia, por la Proposición 6.2.13, $C \leq^- \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. ■

Corolario 6.2.16. Sea $A \in L(\mathcal{H})$ una proyección, la cual es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable. Entonces $N(A) + \mathcal{S}^\perp$ es cerrado,

$$\mathcal{H} = \left(R(A) \cap \mathcal{T} \right) \oplus \left(N(A) + \mathcal{S}^\perp \right),$$

y $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es la proyección dada por esta descomposición.

Demostración. Por el Teorema 6.2.15, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq^- A$. Luego, por el Corolario 6.2.14, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es una proyección. El resto del enunciado es consecuencia del Corolario 6.2.9. ■

El siguiente Corolario fue demostrado por Ando para operadores autoadjuntos (see [6]).

Corolario 6.2.17. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, y consideremos los subespacios cerrados $\mathcal{S}, \widehat{\mathcal{S}}$ de \mathcal{H}_1 y $\mathcal{T}, \widehat{\mathcal{T}}$ de \mathcal{H}_2 . Entonces, asumiendo que cada operador es complementable con respecto al correspondiente par de subespacios, se tiene que:

$$\Sigma \left((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})), \widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{T}} \right) = \Sigma \left(A, \mathcal{S} \cap \widehat{\mathcal{S}}, \mathcal{T} \cap \widehat{\mathcal{T}} \right). \quad (6.7)$$

Demostración. La demostración sigue las mismas líneas que la demostración de la Proposición 2.2.5, es decir, se prueba que $\mathcal{M}^-(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), \widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{T}}) = \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S} \cap \widehat{\mathcal{S}}, \mathcal{T} \cap \widehat{\mathcal{T}})$ y luego se usa el Teorema 6.2.15. ■



6.3 Suma y resta paralelas

Suma paralela

La noción de suma paralela ha sido desarrollada por Anderson y Duffin en [1]. La extensión, en el caso positivo, a espacios de Hilbert cualesquiera fue hecha por Anderson y Trapp en [5] (ver también [95] y [96]). La clave fue usar el complemento de Schur en la definición. En esta sección, definiremos la suma paralela entre operadores siguiendo las ideas de Anderson y Trapp (ver, en particular, [5] sección 4). Aún en el caso escalar, no cualquier par de operadores es sumable. Por lo tanto, es necesario definir el concepto de operadores sumables.

Definición 6.3.1. Dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, diremos que A y B son **débilmente sumables en paralelo** si:

1. $R(A) \subseteq R(|A^* + B^*|^{1/2})$ y $R(B) \subseteq R(|A^* + B^*|^{1/2})$.
2. $R(A^*) \subseteq R(|A + B|^{1/2})$ y $R(B^*) \subseteq R(|A + B|^{1/2})$.

En este caso, la **suma paralela** de A y B , denotada por $A : B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, es :

$$\begin{pmatrix} A : B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \left(\begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix}, \mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\} \right).$$

Observación 6.3.2. Nótese que el par (A, B) es débilmente sumable en paralelo si y sólo si el operador $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix}$ es $(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\})$ -débilmente complementable. Por lo tanto, la suma paralela esta bien definida. ▲

Proposición 6.3.3. Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo y sean E_A, E_B, F_A y F_B , respectivamente, las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A = |A^* + B^*|^{1/2}UX, \quad B = |A^* + B^*|^{1/2}UX, \quad (6.8)$$

$$A^* = |A + B|^{1/2}X, \quad B^* = |A + B|^{1/2}X, \quad (6.9)$$

donde U es la isometría parcial de la descomposición polar de $A + B$. Entonces:

$$A : B = F_A^*E_B = F_B^*E_A, \quad (6.10)$$

Demostración. Notemos que $|A^* + B^*|^{1/2}U = U|A + B|^{1/2}$. Luego, sumando en (6.8) y en (6.9), obtenemos

$$|A + B|^{1/2} = E_A + E_B, \quad \text{y} \quad |A^* + B^*|^{1/2}U = F_A^* + F_B^*,$$

por la unicidad de la solución reducida. Por cómo fue definida, $A : B = A - F_A^*E_A$. Entonces

$$A : B = A - F_A^*E_A = F_A^*(|A + B|^{1/2} - E_A) = F_A^*E_B.$$

La otra igualdad se demuestra en forma similar. ■



Corolario 6.3.4. Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo. Entonces, la suma paralela es conmutativa, es decir, $A : B = B : A$.

Corolario 6.3.5. Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo y supongamos que $A+B$ tiene rango cerrado. Entonces $A : B = A - A(A+B)^\dagger A = A(A+B)^\dagger B$.

Una de las ventajas de haber definido la suma paralela usando el complemento de Schur bilateral es que de este modo, la suma paralela hereda varias de sus propiedades. Por ejemplo, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 6.2.5.

Proposición 6.3.6. Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo y $x \in \mathcal{H}_1$. Entonces, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un número positivo M tal que

$$A(x + y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A : B(x) , \quad B(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -A : B(x) ,$$

y $\langle |A + B|y_n, y_n \rangle \leq M$. Recíprocamente, si existe $d \in \mathcal{H}_2$, una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{H}_1 y un número real M tal que

$$A(x + y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d , \quad B(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -d , \quad \text{y} \quad \langle |A + B|y_n, y_n \rangle \leq M ,$$

entonces $A : B(x) = d$.

Corolario 6.3.7. Si $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ son débilmente sumables en paralelo, entonces

$$R(A) \cap R(B) \subseteq R(A : B) \subseteq \overline{R(A)} \cap \overline{R(B)}$$

Demostración. Dado $x \in R(A) \cap R(B)$, sean $y, z \in \mathcal{H}_1$ tales que $Ay = Bz = x$. Entonces, $A((y + z) - z) = x = B(-z)$. Por lo tanto, tomando $w = y + z$ y $y_n = -z \forall n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 6.3.6 se tiene que $A : B(w) = x$. Esto prueba la primer inclusión. La segunda resulta como consecuencia de la Proposición 6.3.6. ■

Operadores sumables en paralelo

Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Como ya hemos remarcado en la Observación 6.3.2, el par (A, B) es débilmente sumable en paralelo si y solamente si

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix},$$

es $(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\})$ -débilmente complementable. Desde este punto de vista, es natural considerar pares de operadores (A, B) tales que M sea $(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\})$ -complementable. En esta subsección estudiaremos tales pares de operadores.

Definición 6.3.8. Dado $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, diremos que A y B son **sumables en paralelo** si

$$R(A) \subseteq R(A + B) \quad \text{y} \quad R(A^*) \subseteq R(A^* + B^*) .$$

Nótese que estas condiciones implican que $R(B) \subseteq R(A + B)$ y $R(B^*) \subseteq R(A^* + B^*)$.



Esta noción es por supuesto más fuerte que la de ser débilmente sumable en paralelo. Por ejemplo, tomemos $A, D \in L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \leq D$ pero $R(A) \not\subseteq R(D)$. Llamemos B a la diferencia $D - A \in L(\mathcal{H})^+$. Por el Teorema 2.1.1, $R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq R(D^{1/2}) = R((A + B)^{1/2})$. Análogamente, como $B \leq D$, entonces también $R(B) \subseteq R(D^{1/2}) = R((A + B)^{1/2})$. Sin embargo, el par (A, B) no puede ser sumable paralelo pues $R(A) \not\subseteq R(A + B) = R(D)$. Ambas nociones coinciden, por ejemplo, $A + B$ posee rango cerrado

Claramente, para operadores sumables en paralelo, algunas de las propiedades que ya hemos demostrado pueden mejorarse. Mencionemos, a modo de ejemplo, las siguientes:

Proposición 6.3.9. Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores paralelamente sumables y sea $x \in \mathcal{H}_1$. Entonces, existe $y \in \mathcal{H}_1$ tal que $A(x + y) = A : B(x)$ y $By = -A : B(x)$. Más aún, hay proyecciones $P \in L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1)$, $Q \in L(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ tales que $R(P^*) = \mathcal{H}_1 \oplus \{0\}$, $R(Q) = \mathcal{H}_2 \oplus \{0\}$ y

$$Q \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A : B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Usar la Proposición 6.2.7. ■

Corolario 6.3.10. Si $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ son sumables en paralelo, entonces $R(A : B) = R(A) \cap R(B)$.

Resta paralela

Dados dos operadores $A, C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, parece natural estudiar la existencia de una solución de la ecuación $A : X = C$, es decir, si existe un operador $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ paralelamente sumable con A tal que $A : B = C$. Para operadores positivo, esta pregunta ha sido estudiada, entre otros, por Anderson, Duffin y Trapp en [2], Anderson Morley y Trapp en [106], y por Pekarev en [105]. Claramente, la ecuación $A : X = C$ puede no admitir solución. En efecto, como hemos visto en el Corolario 6.3.10 una condición necesaria es que $R(C) \subseteq R(A)$ y $R(C^*) \subseteq R(A^*)$, o, equivalentemente, $R(C - A) \subseteq R(A)$ y $R((C - A)^*) \subseteq R(A^*)$.

En esta sección, demostraremos que si $R(C - A) = R(A)$ y $R((C - A)^*) = R(A^*)$, entonces existe una solución de la ecuación $A : X = C$. Más aún, encontraremos una solución distinguida, a la cual llamaremos *resta paralela* de los operadores C y A . Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, sea \mathcal{D}_A el conjunto de operadores definido por

$$\mathcal{D}_A := \{C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : R(C - A) = R(A) \text{ y } R((C - A)^*) = R(A^*)\}.$$

Proposición 6.3.11. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces la aplicación $C \mapsto C : (-A)$ es una biyección entre los conjuntos \mathcal{D}_A y \mathcal{D}_{-A} cuya inversa es $D \mapsto D : A$.

Demostración. Por la definición de sumabilidad en paralelo, es claro que $-A$ y C son sumables, para todo $C \in \mathcal{D}_A$. Sea E la solución reducida de $C - A = AX$ y sea Q la proyección sobre $\mathcal{H}_2 \oplus \{0\}$ tal que $Q \begin{pmatrix} -A & -A \\ -A & C - A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C : (-A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} C : (-A) + A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & C - A \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & C - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$



se obtiene

$$\begin{pmatrix} C : (-A) + A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $R(A) \subseteq R(C : (-A) + A)$. Como la otra inclusión siempre se verifica, concluimos que $R(A) = R(C : (-A) + A)$. Análogamente se prueba que $R(A^*) = R((C : (-A) + A)^*)$. Luego, la aplicación $\Phi : \mathcal{D}_A \rightarrow \mathcal{D}_{-A}$ dada por $\Phi(C) = C : (-A)$ está bien definida.

Para probar que $\Phi^{-1}(D) = D : A$, tomemos $C \in \mathcal{D}_A$ y $x \in \mathcal{H}_1$. Existen $y, z \in \mathcal{H}_1$ tales que

$$C : (-A)(x + y) = (C : (-A)) : A(x), \quad Ay = -(C : (-A)) : A(x),$$

$$C(x + y + z) = C : (-A)(x + y), \quad \text{and} \quad Az = -(C : (-A))(x + y).$$

Luego, $A(y + z) = 0$, lo cual implica que $C(y + z) = 0$. Por lo tanto

$$Cx = C(x + y + z) = C : (-A)(x + y) = (C : (-A)) : A(x),$$

lo cual completa la demostración. ■

Corolario 6.3.12. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Para cada $C \in \mathcal{D}_A$, la ecuación

$$A : X = C$$

tiene solución. Más aún, $C : (-A)$ es la única solución que satisface

$$R(A + X) = R(A) \quad \text{y} \quad R((A + X)^*) = R(A^*). \quad (6.11)$$

Definición 6.3.13. Dados $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $C \in \mathcal{D}_A$, la **resta paralela** entre los operadores A y C , denotada por $C \div A$, se define como la única solución de la ecuación $A : X = C$ que satisface (6.11). ■

Observación 6.3.14. Nótese que, de acuerdo a nuestra definición, se tiene que $C \div A = C : (-A)$; en particular, la mayoría de las propiedades de la suma paralela son heredadas por la resta paralela. ▲

6.4 Fórmulas para el complemento de Schur bilateral

En esta sección exhibiremos algunas fórmulas para el complemento de Schur bilateral en las cuales interviene la suma y la resta paralela. Como antes, \mathcal{S} y \mathcal{T} denotan dos subespacios cerrados de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , respectivamente. Comenzaremos con un Lema, el cual fue demostrado en [106] para pares de operadores positivos.



Lema 6.4.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable y $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ otro operador tal que los pares (A, B) y $(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), B)$ son sumables en paralelo y la suma paralela $A : B$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable. Entonces*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B = \Sigma((A : B), \mathcal{S}, \mathcal{T}) .$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{S}$. Por la Proposición 6.3.9, existe $y \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x + y) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x) , \quad y \quad By = -\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x).$$

Sea $z \in \mathcal{S}^\perp$ de modo que $A(x + y + z) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x + y)$. Entonces,

$$A(x + y + z) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x) \quad y \quad By = -\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x).$$

Luego, $A : B \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x)$, y por la Proposición 6.2.5, $\Sigma((A : B), \mathcal{S}, \mathcal{T})x = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x)$. ■

El siguiente es un resultado técnico que será de gran utilidad.

Proposición 6.4.2. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable . Si $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ satisface $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, A y nB son sumables en paralelo.*

Primero demostraremos el siguiente lema.

Lema 6.4.3. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $R(A) \subseteq \mathcal{T}$, $R(A^*) \subseteq \mathcal{S}$, $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $R(A + nB) = \mathcal{T}$ y $R((A + nB)^*) = \mathcal{S}$.*

Demostración. Basta demostrar que $\mathcal{T} \subseteq R(A + nB)$ y $\mathcal{S} \subseteq R((A + nB)^*)$, pues las otras inclusiones se verifican por hipótesis. Como $R(B^*) = \mathcal{S}$, el Teorema 2.1.1 asegura que $B^*B \geq \alpha P_{\mathcal{S}}$ para cierto $\alpha > 0$. Entonces

$$|A + nB|^2 = A^*A + n^2 B^*B + n(A^*B + B^*A) \geq \left(\alpha n^2 - n \|(A^*B + B^*A)\|\right) P_{\mathcal{S}}.$$

Tomemos $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que $\alpha n^2 > n \|(A^*B + B^*A)\|$ para todo $n \geq n_1$. Por el Teorema 2.1.1, $\mathcal{S} \subseteq R(|A + nB|) = R((A + nB)^*)$, si $n \geq n_1$. Análogamente, se prueba que existe $\mathcal{T} \subseteq R((A + nB))$ para todo n mayor que cierto $n_2 \in \mathbb{N}$. En consecuencia, el lema queda demostrado tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. ■

Demostración de la Proposición 6.4.2. Tomemos, como en la Proposición 6.2.7, una proyección $P \in L(\mathcal{H}_1)$ tal que $AP = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ y $R(P^*) = \mathcal{S}$. Como $N(B) = \mathcal{S}^\perp = R(I - P)$, se tiene $B(I - P) = 0$ y $BP = B$. Por el Lema 6.4.3 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $R((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) + nB)^*) = \mathcal{S}$, para todo $n \geq n_1$. Fijemos $n \geq n_1$. Dado $x \in \mathcal{H}_1$, hay un $y \in \mathcal{S}$ de modo que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})x = (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) + nB)y$. Si $z = Py + (I - P)x \in \mathcal{H}_1$, entonces

$$\begin{aligned} Ax &= A(Px + (I - P)x) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})x + A(I - P)x \\ &= (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) + nB)y + (A + nB)(I - P)x \\ &= (A + nB)Py + (A + nB)(I - P)x = (A + nB)z . \end{aligned}$$



Esto prueba la inclusión $R(A) \subseteq R(A + nB)$. Siguiendo un argumento parecido se prueba que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $R(A^*) \subseteq R(A + nB)^*$ para $n \geq n_2$. Por ende, A y nB son sumables en paralelo para todo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. ■

Como hemos visto en la sección anterior, la suma paralela se define en términos del complemento de Schur bilateral. La siguiente proposición muestra una especie de relación inversa.

Proposición 6.4.4. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable. Si $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ satisfacen $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

1. *El par (A, nB) es sumable en paralelo para todo $n \geq n_0$.*
2. *$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A : (nB)$ (en la topología inducida por la norma).*

En primer lugar, demostraremos el siguiente caso particular:

Lema 6.4.5. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $R(A) \subseteq \mathcal{T}$, $R(A^*) \subseteq \mathcal{S}$, $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$. Entonces, $A : (nB) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} A$.*

Demostración. El Lema 6.4.3 implica que existe $n_0 \geq 1$ tal que, para todo $n \geq n_0$, A y nB son sumables en paralelo. Fijemos $n \geq n_0$. Por definición, $A : (nB) = A - F_n^* E_n$, donde F_n y E_n son las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A^* = |A + nB|^{1/2} X \quad \text{y} \quad A = |(A + nB)^*|^{1/2} U_n X,$$

y U_n es la isometría parcial de la descomposición polar de $A + nB$. Mostraremos que $\|E_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (resp. $\|F_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$), lo cual claramente implica la convergencia deseada. Por el Teorema 2.1.1,

$$\|E_n\| = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} : A^* A \leq \lambda |A + nB| \} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad (6.12)$$

y existe $\alpha, \beta > 0$ tal que $A^* A \leq \beta P_{\mathcal{S}}$ y $B^* B \geq \alpha P_{\mathcal{S}}$. Entonces $(A^* A)^2 \leq \beta^2 P_{\mathcal{S}}$, y

$$\begin{aligned} |A + nB|^2 &= A^* A + n^2 B^* B + n(A^* B + B^* A) \\ &\geq (\alpha n^2 - n \|(A^* B + B^* A)\|) P_{\mathcal{S}} \geq \frac{\alpha n^2 - n \|(A^* B + B^* A)\|}{\beta^2} (A^* A)^2 . \end{aligned}$$

Recordemos que por el teorema de Löwner, dado $r \in (0, 1]$, la función $f(x) = x^r$ es monótona de operadores, es decir si $0 \leq A \leq B$, entonces $A^r \leq B^r$. Por lo tanto, si n es suficientemente grande,

$$A^* A \leq \frac{\beta}{(\alpha n^2 - n \|(A^* B + B^* A)\|)^{1/2}} |A + nB| .$$

Luego, (6.12) implica que $\|E_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Análogamente, se prueba que $\|F_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. ■



Demostración de la Proposición 6.4.4. Por la Proposición 6.4.2, tanto el par (A, nB) como el par $(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), nB)$ son sumables en paralelo para todo n mayor que cierto n_0 . Usando el Lema 6.4.1, para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$A : nB = \Sigma((A : nB), \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : nB .$$

Entonces, por el Lema 6.4.5, haciendo que el operador $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ juegue el papel de A , obtenemos que $A : nB \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. ■

El último resultado de esta sección relaciona la suma y resta paralela con el complemento de Schur bilateral.

Proposición 6.4.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ -complementable. Entonces, dado un operador $L \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $R(L) = \mathcal{T}$ y $R(L^*) = \mathcal{S}$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que:*

1. A y nL son sumables en paralelo.
2. $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \mathcal{D}_{-nL}$.
3. $(A : nL) \div nL = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Demostración. Las primeras dos afirmación son consecuencias de la Proposición 6.4.2 y el Lema 6.4.3, respectivamente. Como $R((A : nL) \div nL) \subseteq \mathcal{T}$ y $R(((A : nL) \div nL)^*) \subseteq \mathcal{S}$ entonces, por el Lema 6.4.1,

$$(A : nL) \div nL = \Sigma(((A : nL) \div nL), \mathcal{S}, \mathcal{T}) = (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : nL) \div nL.$$

Finalmente, por la Proposición 6.3.11,

$$(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : nL) \div nL = (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \div -nL) : (-nL) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) ,$$

lo cual completa la demostración. ■

Observación 6.4.7. La Proposición 6.4.4 fue demostrada para operadores positivo por Anderson y Trapp en [5] y por Pekarev y Smul'jian en [106]. También fue estudiada por Mitra y Puri quienes probaron la fórmula $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A : (nB)$ para matrices rectangulares (see [97]). No obstante, su demostración no puede extenderse a espacios de Hilbert de dimensión infinita pues sus técnicas involucran inversas generalizadas, que en nuestro contexto sólo existen si el operador en cuestión posee rango cerrado. Finalmente, el lector encontrará una mejora de la Proposición 6.4.6 para operadores positivos se encuentra en [106].

Capítulo 7

Complemento de Schur espectral

Dado un operador positivo A y un número $t > 0$, consideremos A^t y su complemento de Schur $\Sigma(\mathcal{S}, A^t)$. Resulta que la función $t \rightarrow \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}$ es decreciente respecto al orden usual para $t \geq 1$. Su límite, respecto a la topología fuerte de operadores,

$$\rho(A, \mathcal{S}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma(A^m, \mathcal{S})^{1/m},$$

es el principal objeto de estudio de este capítulo. Entre otras cosas, estudiaremos la conexión que existe entre $\rho(A, \mathcal{S})$ y el orden espectral introducido por Olson en [101], las propiedades espectrales de $\rho(A, \mathcal{S})$, como estas propiedades espectrales se vinculan con las de A y finalmente consideraremos su relación con la denominada complejidad de Kolmogorov, definida por J. I. Fujii y M. Fujii en [60].

7.1 El orden espectral

El preorden espectral fue introducido por Olson en [101] con el propósito de exhibir una relación de orden con respecto a la cual el espacio vectorial real de operadores autoadjuntos formara un retículo condicionalmente completo. En este trabajo sólo consideraremos el preorden espectral para operadores positivos, razón por la cual optamos por la siguiente definición del mismo:

Definición 7.1.1. Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, diremos que A es menor que B respecto al orden espectral si para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $A^m \leq B^m$. En tal caso escribiremos $A \preceq B$. La relación \preceq definida en $L(\mathcal{H})^+$ es un orden parcial denominado **orden espectral**.

Notación: A lo largo de este capítulo, dado un operador $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, por medio de $\lambda_{\min}(A)$ (resp. $\lambda_{\max}(A)$) denotaremos al menor (resp. mayor) elemento del espectro de A .▲

Ejemplos 7.1.2. Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \leq B$, se tiene:

1. Si $AB = BA$ entonces $A \preceq B$.
2. Si $\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B)$ entonces $A \preceq B$.



3. En $M_2(\mathbb{C})^+$, $A \preceq B$ si y sólo si $\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B)$ o bien $AB = BA$.

4. Si hay una matriz C tal que $A \leq C \leq B$, $AC = CA$ y $BC = CB$, entonces $A \preceq B$. ▲

Las siguientes caracterizaciones alternativas del orden espectral fueron demostradas por Olsson en [101].

Teorema 7.1.3. Sean $A, B \in L(\mathcal{H})^+$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $A \preceq B$,

(2) $\aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \leq \aleph_{[\lambda, \infty)}(B)$ ($0 \leq \lambda < \infty$),

(3) $f(A) \leq f(B)$ para toda función continua y no decreciente f definida en $[0, \infty)$.

Como consecuencia de la Proposición 1.1.12 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 7.1.4. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_{n+1} \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_n^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} A^k$. En particular, $A \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente con respecto al orden espectral, existe $B \in L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_n^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} B$. Usando la Proposición 1.1.12 con la función $f(t) = t^{1/k}$, deducimos que $A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} B^{1/k} = A$. Por lo tanto, $B = A^k$. ■

El siguiente teorema contiene más caracterizaciones alternativas del orden espectral, esta vez en espacios de dimensión finita.

Teorema 7.1.5. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$. Entonces, son equivalentes:

1. $A \preceq B$

2. Si $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \in \sigma(B)$ y $\lambda > \mu$, entonces $N(A - \lambda) \subseteq (N(B - \mu))^\perp$.

3. Existe $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ y una sucesión de matrices semidefinidas positivas $\{D_i\}_{0 \leq i \leq k}$ tales que, $D_0 = A$, $D_k = B$, $D_i \leq D_{i+1}$ y $D_i D_{i+1} = D_{i+1} D_i$ ($i = 0, \dots, k-1$).

Demostración.

1 \Rightarrow 2: Cómo los espectros de A y B son discretos, existe una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i.) f es creciente y continua.

ii.) $f(x) = 1$ si $x \geq \lambda$ y $f(x) = 0$ si $x \leq \mu$.

iii.) Si $x \in \sigma(A) \cup \sigma(B)$, entonces, $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$.



Luego

$$N(A - \lambda) \subseteq R(f(A)) \subseteq R(f(B)) \subseteq N(B - \mu)^\perp.$$

2 \Rightarrow 3) Procedamos por inducción sobre la dimensión del espacio \mathbb{C}^n . Si $n = 1$, es claramente verdadero.

Ahora, sea $n > 1$ y supongamos que la implicación (2 \Rightarrow 3) vale para matrices de $n - 1 \times n - 1$. Definamos el conjunto

$$N = \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda > \lambda_{\min}(B)\}.$$

Si $N = \emptyset$, entonces, $A \leq \lambda_{\min}(B)I \leq B$. Por otro lado, si $N \neq \emptyset$, sea P la proyección sobre el subespacio $\bigoplus_{\lambda \in N} N(A - \lambda)$ y D_1 el operador definido por

$$D_1 = \lambda_{\min}(B)(I - P) + PA.$$

Como $PA = AP$, es claro que $AD_1 = D_1A$ y $A \leq D_1$. Por otro lado, el par (D_1, B) también satisface (2). D_1 y B tienen un autovector en común x , el cual corresponde a $\lambda_{\min}(B)$ (pues $N(B - \lambda_{\min}(B)) \subseteq R(I - P)$). Sea \mathcal{L} el subespacio generado por x . Entonces D_1 y B pueden representarse del siguiente modo

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(B) & 0 \\ 0 & \widehat{D}_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^\perp \end{matrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(B) & 0 \\ 0 & \widehat{B} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^\perp \end{matrix}.$$

Dado que $(\widehat{D}_1, \widehat{B})$ satisfacen (2), aplicando la hipótesis inductiva, existe una sucesión $\{\widehat{D}_j\}_{j=2, \dots, k}$ ($k \leq n$), tal que $\widehat{D}_k = \widehat{B}$ y $\widehat{D}_j \widehat{D}_{j+1} = \widehat{D}_{j+1} \widehat{D}_j$ ($j = 1, \dots, k - 1$). Finalmente, la sucesión buscada es

$$D_0 = A$$

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(B) & 0 \\ 0 & \widehat{D}_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, k).$$

3 \Rightarrow 1) Como $D_i D_{i+1} = D_{i+1} D_i$ ($i = 0, \dots, k - 1$), se tiene que $A \preceq D_1 \preceq \dots \preceq D_k \preceq B$. ■

Observación 7.1.6. La prueba original de la equivalencia entre (1) y (2) puede encontrarse en [101]. ▲

7.2 Definición del complemento de Schur espectral y sus propiedades básicas

En esta sección definiremos el complemento de Schur espectral y probaremos algunas de sus propiedades. Con el objeto de simplificar los enunciados, de aquí en más asumiremos que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert dado, $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} es un subespacio cerrado de \mathcal{H} .



Proposición 7.2.1. *La función $t \mapsto \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}$, $t \in [1, \infty)$ es decreciente.*

Demostración. Fijemos $t \geq 1$. Entonces, $\Sigma(A^t, \mathcal{S}) \leq A^t$. Como $0 \leq 1/t \leq 1$, del teorema de Löwner se deduce que $\Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t} \leq A$. Por otro lado, $R(\Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, por la definición de complemento de Schur, $\Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t} \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$. Ahora, dados $1 \leq r \leq s$, tomemos $t = s/r \geq 1$. Aplicando lo ya demostrado al operador A^r y a t , se tiene

$$\Sigma(A^r, \mathcal{S}) \geq \Sigma(A^{rt}, \mathcal{S})^{1/t} = \Sigma(A^s, \mathcal{S})^{r/s}.$$

Como $1/r \leq 1$, nuevamente por el teorema de Löwner, $\Sigma(A^r, \mathcal{S})^{1/r} \geq \Sigma(A^s, \mathcal{S})^{1/s}$. ■

Definición 7.2.2. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , el *complemento de Schur espectral* de A respecto de \mathcal{S} está definido por

$$\rho(A, \mathcal{S}) = \inf_{t \geq 1} \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t},$$

donde el límite es respecto a la topología fuerte de operadores.

Ejemplos 7.2.3. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y sean \mathcal{S} y \mathcal{T} subespacios cerrados.

1. Si $A = P_{\mathcal{T}}$, entonces $\rho(A, \mathcal{S}) = \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t} = P_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}}$, para todo $t \in [1, \infty)$.
2. Si $AP_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}}A$, entonces $\rho(A, \mathcal{S}) = \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t} = P_{\mathcal{S}}A$, para todo $t \in [1, \infty)$. ▲

En la siguiente proposición resumimos algunas propiedades simples del complemento de Schur espectral.

Proposición 7.2.4. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y sean \mathcal{S} y \mathcal{T} subespacios cerrados de \mathcal{H} . Entonces:*

1. $R(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \overline{R(A)} \cap \mathcal{S}$.
2. $\rho(cA, \mathcal{S}) = c\rho(A, \mathcal{S})$ para todo $c \in [0, +\infty)$.
3. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ entonces $\rho(A, \mathcal{S}) \leq \rho(A, \mathcal{T})$.
4. $\Sigma(\rho(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})$ y $\rho(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \Sigma(A, \mathcal{S})$.
5. $\rho(\rho(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})$.
6. $\rho(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \leq \rho(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{T})$.

Demostración.

1, 2 y 3. Estas propiedades pueden deducirse fácilmente de la definición de $\rho(A, \mathcal{S})$ y la Proposición 2.2.3.

4. Como $R(\Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}) \subseteq \mathcal{S}$, para cada $t \geq 1$ se tiene $R(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, $\Sigma(\rho(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})$.



5. Es una consecuencia directa de la identidad anterior.
6. Puede deducirse las siguientes desigualdades, validas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\Sigma(A^{2^m}, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \leq \Sigma(\Sigma(A^{2^m}, \mathcal{S}), \mathcal{T}) \leq \Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S})^{2^m}, \mathcal{T}).$$

donde la última desigualdad se debe a que $\Sigma(A^{2^m}, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})^{2^m}$, lo cual se deduce inductivamente a partir de la Proposición 2.2.4

■

El siguiente resultado es clave para el estudio del $\rho(A, \mathcal{S})$.

Proposición 7.2.5. *Para todo $t \in (0, \infty)$*

$$\rho(A, \mathcal{S})^t = \rho(A^t, \mathcal{S})$$

En particular, $\rho(A, \mathcal{S})^t \leq A^t$.

Demostración. Primeramente demostrémoslo para $t \geq 1$. Por la Proposición 1.1.12, la función $x \rightarrow x^r$ es continua respecto a la topología fuerte de operadores si $0 \leq r \leq 1$. Luego, dado $t \in (1, \infty)$, como $st \rightarrow \infty$ si $s \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\rho(A^t, \mathcal{S})^{1/t} = \left(\lim_{s \rightarrow \infty} \Sigma((A^t)^s, \mathcal{S})^{1/s} \right)^{1/t} = \lim_{s \rightarrow \infty} \Sigma(A^{st}, \mathcal{S})^{1/st} = \rho(A, \mathcal{S}),$$

donde los límites se toman respecto a la topología fuerte de operadores. Esto prueba para $t \geq 1$ que

$$\rho(A^t, \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})^t. \quad (7.1)$$

Ahora, si $t \in (0, 1)$,

$$\rho(A^t, \mathcal{S}) = \left(\rho(A^t, \mathcal{S})^{1/t} \right)^t = \rho((A^t)^{1/t}, \mathcal{S})^t = \rho(A, \mathcal{S})^t,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado (7.1) para $\frac{1}{t} \geq 1$. ■

A partir de este resultado, surge el siguiente teorema, el cual muestra que respecto al orden espectral, el complemento de Schur espectral posee una caracterización similar a la de Krein-Anderson-Trapp para el complemento de Schur tradicional que en este trabajo adoptamos como definición.

Teorema 7.2.6. *Si*

$$\mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A) = \{D \in L(\mathcal{H})^+ : D \preceq A, R(D) \subseteq \mathcal{S}\}$$

entonces $\rho(A, \mathcal{S}) = \max \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$, donde el máximo es respecto a cualquiera de los ordenes, el usual o el espectral



Demostración. En primer lugar, notemos que $\rho(A, \mathcal{S}) \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$. En efecto, $\rho(A, \mathcal{S})^m \leq A^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ por la Proposición 7.2.5, y $R(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$ casi por definición.

Sea $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$. Fijado $m \in \mathbb{N}$, como $D^m \leq A^m$, se tiene $\Sigma(D^m, \mathcal{S})^{1/m} \leq \Sigma(A^m, \mathcal{S})^{1/m}$. Dado que $\Sigma(D^m, \mathcal{S})^{1/m} = D$, tomando $m \rightarrow \infty$ obtenemos la desigualdad $D \leq \rho(A, \mathcal{S})$. Esto muestra que $\rho(A, \mathcal{S}) = \max \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$ para el orden usual. Por otro lado, si $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $D^k \preceq A^k$ y $D^k \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A^k)$. Aplicando lo ya demostrado a A^k , se obtiene

$$D^k \leq \rho(A^k, \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego $D \preceq \rho(A, \mathcal{S})$. ■

Corolario 7.2.7. *Sean A y B operadores positivos tales que $A \preceq B$ y sean \mathcal{S} y \mathcal{T} subespacios cerrados. Entonces*

1. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq \rho(B, \mathcal{T})$.

2. $\rho(\rho(A, \mathcal{S}), \mathcal{T}) = \rho(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$.

Demostración. Para (1) basta notar que $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{S}, A) \subseteq \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{T}, B)$. En cuanto a (2), la prueba es igual a la demostración de la Proposición 2.2.5. ■

Otra aplicación del Teorema 7.2.6 es el siguiente resultado sobre convergencia de sucesiones de complementos de Schur espectrales.

Proposición 7.2.8. *Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_{n+1} \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} A$, y sea $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios tales que $\mathcal{S}_{n+1} \subseteq \mathcal{S}_n$. Entonces*

$$\rho(A_n, \mathcal{S}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} \rho(A, \mathcal{S}),$$

donde $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

Demostración. Por el Corolario 7.2.7, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\rho(A_{n+1}, \mathcal{S}_{n+1}) \preceq \rho(A_n, \mathcal{S}_n)$. Luego, existe un operador positivo L que es el límite en la topología fuerte de operadores de la sucesión $\{\rho(A_n, \mathcal{S}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por un lado, la Proposición 7.1.4 implica que $A \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Como también $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_n$, se obtiene $\rho(A, \mathcal{S}) \leq \rho(A_n, \mathcal{S}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $\rho(A, \mathcal{S}) \leq L$. Por otro lado, para cada $n > m$ y $k \geq 1$, por el Corolario 7.2.7 y la definición de complemento de Schur espectral,

$$L \leq \rho(A_n, \mathcal{S}_n) \leq \rho(A_n, \mathcal{S}_m) \leq \Sigma(A_n^k, \mathcal{S}_m)^{1/k}. \quad (7.2)$$

Firemos ahora $k \geq 1$. Por la Proposición 7.1.4, $A_n^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} A^k$. En consecuencia, por la Proposición 1.1.12,

$$\Sigma(A_n^k, \mathcal{S}_m)^{1/k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} \Sigma(A^k, \mathcal{S}_m)^{1/k}. \quad (7.3)$$



Análogamente, usando la Proposición 2.2.9, se obtiene

$$\Sigma(A^k, \mathcal{S}_n)^{1/k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} \Sigma(A^k, \mathcal{S})^{1/k}. \quad (7.4)$$

Luego, juntando las ecuaciones (7.2) (7.3) y (7.4), resulta $L \leq \Sigma(A^k, \mathcal{S})^{1/k}$. Finalmente, como esta desigualdad vale para todo k , tomando límite concluimos que $L \leq \rho(A, \mathcal{S})$. ■

Como muestra el siguiente ejemplo, esta última Proposición en general no es cierta si la sucesión de subespacios no es decreciente.

Ejemplo 7.2.9. Consideremos un operador A , positivo, inyectivo pero no suryectivo. Sea \mathcal{L} un subespacio de dimensión infinita de \mathcal{H} tal que $R(A^{1/2}) \cap \mathcal{L} = \{0\}$ y tomemos una base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} contenida en \mathcal{L} . Llamemos \mathcal{S}_n al subespacio generado por los vectores e_1, \dots, e_n . Entonces, $P_{\mathcal{S}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} I$, pero, $\rho(A, \mathcal{S}_n) = \Sigma(A, \mathcal{S}_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque, como fue probado en [5], $R(\Sigma(A, \mathcal{S}_n)^{1/2}) = R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S}_n = \{0\}$. ▲

7.3 Propiedades espectrales del $\rho(A, \mathcal{S})$.

En esta sección estudiaremos las características espectrales del operador $\rho(A, \mathcal{S})$. Comenzaremos con el siguiente teorema que caracteriza su resolución espectral a izquierda.

Teorema 7.3.1. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y \mathcal{S} un subespacio cerrado de \mathcal{H} . Entonces

$$f(\lambda) = \begin{cases} \aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}} & \lambda > 0 \\ I & \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

es una resolución espectral a izquierda y el operador asociado a la misma es $\rho(A, \mathcal{S})$. En otras palabras, para $0 < \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\aleph_{[\lambda, \infty)}(\rho(A, \mathcal{S})) = \aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}}.$$

Demostración. Claramente f es una resolución espectral a izquierda, lo cual se deduce fácilmente del hecho de que la función $\lambda \mapsto \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)$ lo es. Sea B el operador definido por la resolución espectral f . Por el Teorema 7.1.3, claramente $B \preceq A$ y todo $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$ satisface que $D \preceq B$. En efecto, supongamos que $0 \leq D \preceq A$ y $R(D) \subseteq \mathcal{S}$. Entonces, para $\lambda > 0$, $\aleph_{[\lambda, \infty)}(D) \leq \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)$ y

$$\aleph_{[\lambda, \infty)}(D) \leq \aleph_{(0, \infty)}(D) \leq P_{\overline{R(D)}} \leq P_{\mathcal{S}}.$$

Por lo tanto $\aleph_{[\lambda, \infty)}(D) \leq \aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}} = \aleph_{[\lambda, \infty)}(B)$. Como $\aleph_{[\lambda, \infty)}(D) = I = \aleph_{[\lambda, \infty)}(B)$ para $\lambda \leq 0$, obtenemos que $D \preceq B$ por el Teorema 7.1.3. Finalmente, como

$$\aleph_{[\lambda, \infty)}(\|A\|P_{\mathcal{S}}) = \begin{cases} 0 & \|A\| < \lambda \\ P_{\mathcal{S}} & 0 < \lambda \leq \|A\| \\ I & \lambda \leq 0 \end{cases},$$



se deduce que $B \preceq \|A\| P_{\mathcal{S}}$ y, en particular, $R(B) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, por el Teorema 7.2.6,

$$B = \max \mathcal{M}_{\rho}(\mathcal{S}, A) = \rho(A, \mathcal{S}).$$

■

Proposición 7.3.2. *Sea $\mu = \min \sigma(A)$, entonces*

$$\mu P \leq \rho(A, \mathcal{S}).$$

En particular, si A es inversible, entonces $\rho(A, \mathcal{S})$ es inversible si lo consideramos actuando sobre \mathcal{S} .

Demostración. Como $\mu^m = \min \sigma(A^m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mu^m P_{\mathcal{S}} \leq \mu^m I \leq A^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego, $\mu P_{\mathcal{S}} \preceq A$ y por el Teorema 7.2.6, la Proposición queda demostrada. ■

Observación 7.3.3. Dado un operador $A \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $r \notin \sigma(A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[r-\varepsilon, +\infty)}(A) = \aleph_{[r+\varepsilon, +\infty)}(A)$. ▲

Proposición 7.3.4. *Si se considera a $\rho(A, \mathcal{S})$ como un operador de \mathcal{S} , entonces*

$$\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(A).$$

Demostración. Por la Proposición 7.3.2, si $0 \notin \sigma(A)$ entonces $0 \notin \sigma(\rho(A, \mathcal{S}))$. Por otro lado, si $r > 0$ y $r \notin \sigma(A)$, entonces por la observación 7.3.3, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[r-\varepsilon, +\infty)}(A) = \aleph_{[r+\varepsilon, +\infty)}(A)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \aleph_{[r-\varepsilon, +\infty)}(\rho(A, \mathcal{S})) &= P_{\mathcal{S}} \wedge \aleph_{[r-\varepsilon, +\infty)}(A) \\ &= P_{\mathcal{S}} \wedge \aleph_{[r+\varepsilon, +\infty)}(A) \\ &= \aleph_{[r+\varepsilon, +\infty)}(\rho(A, \mathcal{S})). \end{aligned}$$

En consecuencia, $r \notin \sigma(\rho(A, \mathcal{S}))$. ■

Proposición 7.3.5. *Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función creciente y continua a derecha. Entonces*

$$f(\rho(A, \mathcal{S})) = \rho(f(A), \mathcal{S}) \tag{7.6}$$

Demostración. Dado $\lambda \geq 0$, como f es creciente y continua a derecha, existe $\eta \geq 0$ tal que $\{\mu : f(\mu) \geq \lambda\} = [\eta, +\infty)$ y, para todo $C \in L(\mathcal{H})^+$, $\aleph_{[\lambda, \infty)}(f(C)) = \aleph_{[\eta, \infty)}(C)$.

Si $\eta = 0$, entonces $\aleph_{[\lambda, \infty)}(f(\rho(A, \mathcal{S}))) = \aleph_{[\lambda, \infty)}(\rho(f(A), \mathcal{S})) = I$. Si $\eta > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \aleph_{[\lambda, \infty)}(f(\rho(A, \mathcal{S}))) &= \aleph_{[\eta, \infty)}(\rho(A, \mathcal{S})) = \aleph_{[\eta, \infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}} \\ &= \aleph_{[\lambda, \infty)}(f(A)) \wedge P_{\mathcal{S}} = \aleph_{[\lambda, \infty)}(\rho(f(A), \mathcal{S})), \end{aligned}$$

Esto muestra que $f(\rho(A, \mathcal{S}))$ y $\rho(f(A), \mathcal{S})$ poseen la misma resolución espectral (a izquierda). Por ende, $f(\rho(A, \mathcal{S})) = \rho(f(A), \mathcal{S})$. ■



Corolario 7.3.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ un operador de rango cerrado y \mathcal{S} un subespacio cerrado. Entonces $R(\rho(A, \mathcal{S})) = R(A) \cap \mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $R(\mathfrak{N}_{[\varepsilon, \infty)}(A)) = R(A)$. Por la Proposición 7.3.4, se tiene que $R(\mathfrak{N}_{[\varepsilon, \infty)}(\rho(A, \mathcal{S}))) = R(\rho(A, \mathcal{S}))$. Finalmente, aplicando la Proposición 7.3.5 para la función $f = \mathfrak{N}_{[\varepsilon, \infty)}$ y comparando los rangos de ambos términos se obtiene el resultado buscado. ■

El resto de esta sección esta destinado a dar distintas caracterizaciones del mínimo del espectro $\sigma(\rho(A, \mathcal{S}))$ como operador de $L(\mathcal{S})$.

Proposición 7.3.7. *Si consideramos a $\rho(A, \mathcal{S})$ actuando en \mathcal{S} , entonces*

$$\min \sigma(\rho(A, \mathcal{S})) = \max\{\lambda \geq 0 : A^m \geq \lambda^m P_{\mathcal{S}}, \forall m \in \mathbb{N}\}. \quad (7.7)$$

Demostración. Notemos que $A^m \geq \lambda^m P_{\mathcal{S}}$, $m \in \mathbb{N}$, si y solamente si $\lambda P_{\mathcal{S}} \preceq A$. Por otro lado, como $P_{\mathcal{S}}$ y $\rho(A, \mathcal{S})$ conmutan, $\lambda P_{\mathcal{S}} \leq \rho(A, \mathcal{S})$ si y sólo si $\lambda P_{\mathcal{S}} \preceq \rho(A, \mathcal{S})$, si y sólo si $\lambda P_{\mathcal{S}} \in \mathcal{M}_{\rho}(\mathcal{S}, A)$ si y sólo si $\lambda P_{\mathcal{S}} \preceq A$. ■

Teorema 7.3.8. *Si consideramos a $\rho(A, \mathcal{S})$ actuando en \mathcal{S} , entonces*

$$\begin{aligned} \min \sigma(\rho(A, \mathcal{S})) &= \max\{\lambda \geq 0 : P_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A)\} \\ &= \min\{\mu \in \sigma(A) : R(\mathfrak{N}_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A)) \not\subseteq \mathcal{S}^{\perp} \forall \varepsilon > 0\} \\ &= \min\{\mu \in \sigma(A) : P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A) \neq 0 \forall \varepsilon > 0\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Demostración. Para cualquier $B \in L(\mathcal{S})^+$, $\min \sigma(B) = \max\{\lambda \geq 0 : \mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(B) = I_{\mathcal{S}}\}$. Usando esta identidad, se obtiene $\lambda_0 = \min \sigma(\rho(A, \mathcal{S})) = \max\{\lambda \geq 0 : P_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A)\}$. Luego $P_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{N}_{[\lambda_0, \infty)}(A)$ y $P_{\mathcal{S}} \not\leq \mathfrak{N}_{[\lambda_0+\varepsilon, \infty)}(A)$ para cada $\varepsilon > 0$. Entonces, $\lambda_0 \in \{\mu \in \sigma(A) : P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A) \neq 0 \forall \varepsilon > 0\}$, pues si $P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon)}(A) = 0$, luego

$$P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda_0+\varepsilon, \infty)}(A) = P_{\mathcal{S}} \left(\mathfrak{N}_{[\lambda_0, \infty)}(A) - \mathfrak{N}_{[\lambda_0, \lambda_0+\varepsilon)}(A) \right) = P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda_0, \infty)}(A) = P_{\mathcal{S}},$$

i.e. $P_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{N}_{[\lambda_0+\varepsilon, \infty)}(A)$. Si $\lambda_0 = 0$, entonces la ecuación (7.8) es claramente cierta, pues $[\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ es un abierto del $\sigma(\rho(A, \mathcal{S}))$. Si $\lambda_0 > 0$, sea $0 \leq \lambda < \lambda_0$ y $0 < \varepsilon < \lambda_0 - \lambda$. Entonces $\lambda + \varepsilon \leq \lambda_0$. Como $\lambda_0 = \max\{\lambda \geq 0 : P_{\mathcal{S}} \leq \mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A)\}$, se tiene que $P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A) = P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda+\varepsilon, \infty)}(A) = P_{\mathcal{S}}$. En consecuencia

$$P_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A) = P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda, \lambda+\varepsilon)}(A) + P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda+\varepsilon, \infty)}(A) = P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda, \lambda+\varepsilon)}(A) + P_{\mathcal{S}}.$$

Por lo tanto $P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\lambda, \lambda+\varepsilon)}(A) = 0$, lo cual prueba la ecuación (7.8). ■



7.3.1 Algoritmo para calcular $\rho(A, \mathcal{S})$ en términos de la descomposición espectral de A cuando $\dim \mathcal{H} < \infty$

A continuación exhibiremos un algoritmo que dado el espectro y los autoespacios de una matriz A nos permite calcular el espectro y los autoespacios de la matriz $\rho(A, \mathcal{S})$. Comencemos con el siguiente resultado que es una consecuencia inmediata del Teorema 7.3.1

Proposición 7.3.9. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ y \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{C}^n . Entonces,*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\mu \geq \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) &= \bigoplus_{\mu \geq \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S}, \text{ y} \\ \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) &= \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$, \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{C}^n y supongamos que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ($\lambda_1 < \dots < \lambda_m$). Como, por la Proposición 7.3.4, $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(A)$, resulta que $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}\}$. El menor autovalor de $\rho(A, \mathcal{S})$ está caracterizado por el Teorema 7.3.8 del siguiente modo:

$$\lambda_{i_1} = \min\{\lambda \in \sigma(A) : \ker(A - \lambda I) \not\subseteq \mathcal{S}^\perp\}.$$

Los otros pueden ser identificados del siguiente modo

$$\begin{aligned} \lambda_{i_2} &= \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda > \lambda_{i_1} \text{ y } \bigoplus_{\mu \geq \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) \neq \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) \right\}, \\ &\vdots \\ \lambda_{i_{k+1}} &= \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda > \lambda_{i_k} \text{ y } \bigoplus_{\mu \geq \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) \neq \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) \right\}, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\lambda_{i_p} = \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \mu) = \{0\} \right\}.$$

Estas fórmulas pueden reescribirse, usando la Proposición 7.3.9 del siguiente modo:



$$\begin{aligned} \lambda_{i_2} &= \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda > \lambda_{i_1} \text{ y } \bigoplus_{\mu \geq \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \neq \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \right\}, \\ &\vdots \\ \lambda_{i_{k+1}} &= \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \lambda > \lambda_{i_k} \text{ y } \bigoplus_{\mu \geq \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \neq \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \right\}, \\ &\vdots \\ \lambda_{i_p} &= \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} = \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Una vez encontrados los autovalores de $\rho(A, \mathcal{S})$ y usando la Proposición 7.3.9, los autoespacios de $\rho(A, \mathcal{S})$ pueden escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \lambda_{i_p}) &= \bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_p}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S}, \text{ y} \\ \ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \lambda_{i_k}) &= \left(\bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_k}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \right) \cap \left(\bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_{k+1}}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \right)^\perp, k = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

En síntesis, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7.3.10. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ y sea \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{C}^n . Supongamos que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ($\lambda_1 < \dots < \lambda_m$) y sean i_1, \dots, i_p los subíndices definidos por*

- i. $\lambda_{i_1} = \min\{\lambda \in \sigma(A) : \ker(A - \lambda I) \not\subseteq \mathcal{S}^\perp\}$
- ii. *Para $k = 2, \dots, p-1$ definimos λ_{i_k} como el menor autovalor de A tal que $\lambda_{i_k} > \lambda_{i_{k-1}}$ y*

$$\bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_k}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \not\supseteq \bigoplus_{\mu > \lambda_{i_k}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \neq 0.$$

- iii. $\lambda_{i_p} = \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(A - \mu I) \cap \mathcal{S} = \{0\} \right\}$.

Entonces,

- a. $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}\}$

- b. $\|\rho(A, \mathcal{S})\| = \lambda_{i_p} = \min \left\{ \lambda \in \sigma(A) : \bigoplus_{\mu > \lambda} \ker(A - \mu I) \cap \mathcal{S} = \{0\} \right\}$



c. Si P_p es la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$\bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_p}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S},$$

y P_k ($k = 1, \dots, p-1$) es la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$\left(\bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_k}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \right) \cap \left(\bigoplus_{\mu \geq \lambda_{i_{k+1}}} \ker(A - \mu) \cap \mathcal{S} \right)^\perp,$$

se tiene que:

$$\rho(A, \mathcal{S}) = \sum_{k=1}^p \lambda_{i_k} P_k \quad (7.10)$$

En el ejemplo 7.5.1 de la sección 7.5 mostraremos como se usa el algoritmo antes descrito para calcular la matriz $\rho(A, \mathcal{S})$.

7.4 El caso $\dim \mathcal{S} = 1$.

Notación: Supongamos que $\dim \mathcal{S} = 1$ y sea $x \in \mathcal{S}$ un vector unitario. Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$, existe $\lambda, \mu \geq 0$ tal que $\rho(A, \mathcal{S}) = \lambda P_{\mathcal{S}}$ y $\Sigma(A, x) = \mu P_{\mathcal{S}}$. Denotaremos $\rho(A, x) = \lambda$ y $\Sigma(A, x) = \mu$.

Observación 7.4.1. Sea \mathcal{S} un subespacio generado por el vector unitario $x \in \mathcal{H}$. Hay varias maneras de calcular $\rho(A, x)$ en términos de $\rho(A, \mathcal{S})$, y análogamente $\Sigma(A, x)$ en términos de $\Sigma(A, \mathcal{S})$. A continuación mencionamos algunas de ellas:

1. Por el Teorema 7.3.8,

$$\begin{aligned} \rho(A, x) &= \min \sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \\ &= \min \left\{ \mu \in \sigma(A) : P_{\mathcal{S}} \mathfrak{N}_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A) \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \mu \in \sigma(A) : \mathfrak{N}_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A)x \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

2. Por la Proposición 7.3.7

$$\rho(A, x) = \max\{\lambda \geq 0 : \langle A^n \eta, \eta \rangle \geq \lambda^n |\langle x, \eta \rangle|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \eta \in \mathcal{H}\}.$$

3. También $\rho(A, x) = \|\rho(A, \mathcal{S})x\| = \langle \rho(A, \mathcal{S})x, x \rangle$. Fórmulas similares valen para el $\Sigma(A, x)$.
4. Por la Proposición 7.3.4, $\rho(A, x) \in \sigma(A)$. Más aún, por el Teorema 7.3.1 (o Teorema 7.3.8),

$$\rho(A, x) = \max\{\lambda \in \sigma(A) : x \in R(\mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A))\}. \quad (7.12)$$



▲

Proposición 7.4.2. Sean $A, B \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces $A \preceq B$ si y sólo si $\rho(A, x) \leq \rho(B, x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Una implicación es consecuencia del Corolario 7.2.7. Por otro lado, supongamos que $\rho(A, x) \leq \rho(x, B)$ para todo vector unitario $x \in \mathcal{H}$. Dado $\lambda \geq 0$ tal que $\aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \neq 0$, sea $y \in R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A))$. Por la ecuación (7.12), $\lambda \leq \rho(A, y)$. Como $\rho(A, y) \leq \rho(B, y)$, resulta que $y \in R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(B))$. Luego, para todo $\lambda \geq 0$, $R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)) \subseteq R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(B))$. Por el Teorema 7.1.3, inferimos que $A \preceq B$. ■

Proposición 7.4.3. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y sea \mathcal{S} el subespacio de \mathcal{H} generado por el vector unitario x . Si A es inversible, entonces para $m \in \mathbb{N}$,

$$\Sigma(x, A^{2m})^{1/2m} = \|A^{-m}x\|^{-1/m} = \langle A^{-2m}x, x \rangle^{-1/2m}, \quad (7.13)$$

y

$$\rho(A, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^{-m}x\|^{-1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|A^{-m}x\|^{-1/m} \quad (7.14)$$

Si $R(A)$ es cerrado,

1. Si $x \notin R(A)$, entonces $\rho(A, x) = 0$.
2. Si $x \in R(A)$ y $B = A^\dagger$, entonces

$$\rho(A, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|B^m x\|^{-1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|B^m x\|^{-1/m}.$$

Demostración. Usando el Teorema 7.3.8, el caso rango cerrado fácilmente se reduce al inversible considerando A como un operador sobre su rango. Notemos que si $R(A)$ es cerrado, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[0, \varepsilon)}(A) = P_{N(A)}$. Por lo tanto $x \notin R(A)$ implica que $P_{\mathcal{S}}\aleph_{[0, \varepsilon)}(A) \neq 0$, y, por la observación 7.4.1, se tiene que $\rho(A, x) = 0$.

Supongamos entonces que A es inversible. Dado $m \in \mathbb{N}$, denotemos por medio de $\eta_m = A^{-m/2}x$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.2.3, si $\mathcal{M}_m = A^{-m/2}(\mathcal{S})$, entonces $\Sigma(A^m, \mathcal{S}) = A^{m/2}P_{\mathcal{M}_m}A^{m/2}$, y

$$\Sigma(A^m, x) = \|\Sigma(A^m, \mathcal{S})x\| = \|A^{m/2}P_{\mathcal{M}_m}A^{m/2}x\|.$$

Nótese que \mathcal{M}_m es el subespacio generado por η_m , en consecuencia $P_{\mathcal{M}_m}\rho = \|\eta_m\|^{-2}\langle \rho, \eta_m \rangle \eta_m$, $\rho \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned} \Sigma(A^m, x) &= \|A^{m/2}P_{\mathcal{M}_m}A^{m/2}x\| = \left\| A^{m/2} \left(\|\eta_m\|^{-2} \langle A^{m/2}x, \eta_m \rangle \eta_m \right) \right\| \\ &= \|\eta_m\|^{-2} \|\langle x, x \rangle x\| = \|\eta_m\|^{-2}. \end{aligned}$$

Luego $\Sigma(x, A^{2m}) = \|A^{-m}x\|^{-2}$, de modo que

$$\Sigma(x, A^{2m})^{1/2m} = \|A^{-m}x\|^{-1/m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

La ecuación (7.14) es ahora consecuencia de la observación 7.4.1 y la definición de $\rho(A, \mathcal{S})$. ■



Observación 7.4.4. La ecuación (7.13) y por ende la Proposición 7.4.3, pueden también deducirse de la siguiente fórmula: dado $B \in L(\mathcal{H})^+$ inversible y $x \in \mathcal{H}$ con $\|x\| = 1$,

$$\Sigma(B, x) = \langle B^{-1}x, x \rangle^{-1}.$$

Esta fórmula es la versión unidimensional de la caracterización del complemento de Schur en términos de la representación en bloques de la inversa de un operador (ver [91, Lema 4.7] o para una versión matricial de este resultado ver [75]). \blacktriangle

Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \sigma_{sh}(A) &= \{\rho(A, x) : \|x\| = 1\}, \\ \sigma_+(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) : \exists (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } \sigma(A) \text{ con } \mu_n > \lambda \text{ y } \mu_n \searrow_{n \rightarrow \infty} \lambda\} \\ &= \{\lambda \in \sigma(A) : \forall \varepsilon > 0, \aleph_{(\lambda, \lambda + \varepsilon)}(A) \neq 0\} \\ \sigma_{pt}(A) &= \{\lambda \in \sigma(A) : N(A - \lambda I) \neq \{0\}\}, \end{aligned}$$

Notemos que $\sigma_+(A)$ está constituido por aquellos puntos del $\sigma(A)$ que son límite por la derecha de otros puntos del espectro de A , mientras que $\sigma_{pt}(A)$ es el espectro puntual de A .

Proposición 7.4.5. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces

$$\sigma_{sh}(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_{pt}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \forall \varepsilon > 0, \aleph_{[\lambda, \lambda + \varepsilon)}(A) \neq 0\}.$$

En particular, $\sigma_{sh}(A)$ es denso en $\sigma(A)$ y es exactamente $\sigma(A)$ si $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(A)$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\sigma(A)$ tal que $\mu_n \searrow_{n \rightarrow \infty} \lambda$. Sea $\lambda_0 = \mu_1 + 1$ y $\lambda_n = \frac{1}{2}(\mu_{n+1} + \mu_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\mu_n \in (\lambda_n, \lambda_{n-1})$, entonces $\aleph_{(\lambda_n, \lambda_{n-1})}(A) \neq 0$. Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un vector unitario $x_n \in R(\aleph_{(\lambda_n, \lambda_{n-1})}(A))$, y consideremos el vector

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}.$$

Por la fórmula (7.12) y la construcción de x , es claro que $\rho(x, A) = \lambda$, pues $\lambda = \inf_n \mu_n = \inf_n \lambda_n$. Si $\lambda \in \sigma_{pt}(A)$, basta tomar $x \in N(A - \lambda I)$ y claramente $\rho(A, x) = \Sigma(A, x) = \lambda$.

Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma(A)$ pero $\lambda \notin \sigma_+(A) \cup \sigma_{pt}(A)$. Esto significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[\lambda, \lambda + \varepsilon)}(A) = 0$. Por lo tanto, para cada vector unitario x , es imposible que

$$\lambda = \max\{\mu \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{[\mu, \infty)}(A))\},$$

pues si $x \in R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A))$, entonces $x \in R(\aleph_{[\lambda + \varepsilon, \infty)}(A))$. \blacksquare

Observación 7.4.6. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ no es inversible, entonces $0 \in \sigma(A)$. Si el cero es un punto aislado del espectro de A , entonces A tiene rango cerrado. En consecuencia, $N(A) \neq \{0\}$. De no ser así, $\aleph_{(0, \varepsilon)}(A) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Esto muestra que $0 \in \sigma_{sh}(A)$. Más generalmente, para $A \in L(\mathcal{H})^+$, se tiene que $\lambda_{min}(A) = \min \sigma(A) \in \sigma_{sh}(A)$. Por otro lado, por la Proposición 7.4.5, $\|A\| \in \sigma_{sh}(A)$ si y sólo si $\|A\|$ es un autovalor de A .



Observación 7.4.7. Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$, denotemos por medio de $R_0(A)$ al subespacio

$$R_0(A) = \bigcup_{\lambda > 0} R(\mathfrak{N}_{[\lambda, \infty)}(A)).$$

Si $R(A)$ es cerrado, entonces $R_0(A) = R(A)$, pues el cero es un punto aislado del espectro de A . Si $R(A)$ no es cerrado, entonces $R_0(A)$ está propiamente incluido en $R(A)$, pero denso en $R(A)$. Este subespacio resulta particularmente interesante pues, por la fórmula (7.12), si $x \in \mathcal{H}$ es un vector unitario, entonces $\rho(A, x) \neq 0$ si y sólo si $x \in R_0(A)$. ▲

7.4.1 Complejidad de Kolmogorov

Dada una matriz inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ y un vector unitario $x \in \mathbb{C}^n$, J. I. Fujii y M. Fujii [60] definieron la **complejidad de Kolmogorov** del siguiente modo:

$$K(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\langle A^n x, x \rangle)}{n} = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}. \quad (7.15)$$

Usando la fórmula (7.13), se puede ver que el límite es en realidad un supremo; y se tiene la identidad

$$K(A, x) = \log \rho(A^{-1/2}, x)^{-2} = \log \rho(A^{-1}, x)^{-1}. \quad (7.16)$$

Usando las fórmulas (7.11) y (7.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \exp K(A, x) &= \min \{ \lambda \in \sigma(A) : x \in R(\mathfrak{N}_{(-\infty, \lambda]}(A)) \} \\ &= \max \left\{ \mu \in \sigma(A) : \mathfrak{N}_{(\mu - \varepsilon, \mu]}(A)x \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Con estas identidades en mente, lo hecho hasta aquí nos permite generalizar la noción de complejidad de Kolmogorov en dos direcciones: la primera es a espacios de Hilbert de dimensión infinita y/o subespacios no necesariamente unidimensionales; la segunda es a operadores no necesariamente inversibles.

La extensión de la complejidad de Kolmogorov, para operadores inversibles, a subespacios cerrados de dimensión mayor que uno puede realizarse a través de la ecuación (7.16). Nótese que la misma noción de complemento de Schur espectral es, en cierto sentido, una generalización de la complejidad de Kolmogorov a espacios cerrados (no necesariamente unidimensionales) de un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Definida de esta forma, la extensión hereda del complemento de Schur espectral, mutatis mutandis, la mayoría de sus propiedades.

La extensión para operadores no inversibles no es tan directa. Sin embargo, las técnicas que pueden utilizarse son muy similares a las desarrolladas en la sección anterior. A continuación definiremos la complejidad de Kolmogorov para operadores no inversibles y probaremos algunas de sus propiedades.



Definición 7.4.8. Dado $x \in \mathcal{H}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$, se define

$$k(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}.$$

Observar que $k(A, x) = \exp K(A, x)$ si $K(A, x)$ está definido.

Observación 7.4.9. Sea $x \in \mathcal{H}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces:

1. si $\|x\| = 1$, la sucesión $\langle A^n x, x \rangle^{1/n}$ es creciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}$ existe para todo $x \in \mathcal{H}$,
2. $k(A, x) = k(A, ax)$ para todo $0 \neq a \in \mathbb{C}$,
3. $k(A, x) = k(A, \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x)$ para todo $\lambda > 0$ tal que $\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x \neq 0$.

En efecto, por la desigualdad de Hölder para estados (también puede apelarse a la desigualdad de Jensen, ver [15]), si $\|x\| = 1$, $p \geq 1$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\langle A^p x, x \rangle^{1/p} \langle I^q x, x \rangle^{1/q} = \langle A^p x, x \rangle^{1/p} \geq \langle Ax, x \rangle.$$

Aplicando esta desigualdad a A^n con $p = (n+1)/n$, se obtiene que

$$\langle A^n x, x \rangle^{1/n} \leq \langle A^{n+1} x, x \rangle^{1/(n+1)}.$$

El segundo ítem es consecuencia de que $|a|^{2/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. Finalmente, para demostrar el tercer ítem, supongamos que $\|x\| = 1$ y sean $x_1 = \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x$ y $x_2 = x - x_1$. Entonces, como $\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)$ conmuta con A , para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle A^n x_1, x_1 \rangle &\leq \langle A^n x_1, x_1 \rangle + \langle A^n x_2, x_2 \rangle = \langle A^n x, x \rangle \\ &\leq \langle A^n x_1, x_1 \rangle + \lambda^n \leq (1 + \|x_1\|^{-2}) \langle A^n x_1, x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Esto muestra que $k(A, x) = k(A, \xi_1)$, pues $(1 + \|\xi_1\|^{-2})^{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. ▲

Recordemos que, dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ $R_0(A) = \bigcup_{\lambda > 0} R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A))$.

Proposición 7.4.10. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$. Entonces $k(A, x) \neq 0$ si y sólo si $P_{\overline{R(A)}} x \in R_0(A)$. Más aún, la ecuación (7.17) vale en general:

$$\begin{aligned} k(A, x) &= \min \{ \lambda \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{(-\infty, \lambda]}(A)) \} \\ &= \max \left\{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{(\mu - \varepsilon, \mu]}(A)x \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{[\mu, \infty)}(A)x \neq 0 \right\}. \end{aligned} \tag{7.18}$$



Demostración. Sea $\lambda = \sup \left\{ \mu \in \sigma(A) : \mathfrak{N}_{[\mu, \infty)}(A)x \neq 0 \right\}$. Supongamos que $\mu > \lambda$. Entonces $x \in R(\mathfrak{N}_{(-\infty, \mu]}(A))$, de modo que $\langle A^n x, x \rangle \leq \mu^n \|x\|^2$ para $n \in \mathbb{N}$, y $k(A, x) \leq \mu$.

Por otro lado, si $\mu < \lambda$ entonces $\mathfrak{N}_{[\mu, \infty)}(A)x = \xi_1 \neq 0$, y, por la observación 7.4.9, $k(A, x) = k(A, \xi_1) \geq \mu$, pues $\langle A^n \xi_1, \xi_1 \rangle \geq \mu^n \|\xi_1\|^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $k(A, x) = \lambda$. Las otras igualdades quedan a cargo del lector. ■

Por la Proposición 7.3.4, se tiene que $\sigma_{sh}(A) \subseteq \sigma(A)$ y, por lo tanto, si A es inversible,

$$\{k(A, x) : \|x\| \neq 0\} = \{\rho(A^{-1}, x)^{-1} : \|x\| = 1\} \subseteq \sigma(A^{-1})^{-1} = \sigma(A).$$

Como veremos a continuación, la otra inclusión no es cierta en general:

Proposición 7.4.11. *Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ es inversible, entonces*

$$\begin{aligned} \{k(A, x) : \|x\| \neq 0\} &= \sigma_-(A) \cup \sigma_{pt}(A) \\ &= \{\lambda \in \sigma(A) : \mathfrak{N}_{(\lambda+\varepsilon, \lambda]}(A) \neq 0, \forall \varepsilon > 0\}, \end{aligned}$$

donde $\sigma_-(A)$ es el conjunto de puntos en $\sigma(A)$ que son límite por izquierda de alguna sucesión de $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$. El conjunto $\{k(A, x) : \|x\| = 1\}$ es denso en $\sigma(A)$.

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 7.4.5 (aplicada a A^{-1}) y de la identidad

$$\{k(A, x) : \|x\| \neq 0\} = \{k(A, x) : \|x\| = 1\} = \{\rho(A^{-1}, x)^{-1} : \|x\| = 1\}.$$

■

Observaciones 7.4.12.

1. La proposición 7.4.11 es cierta para un $A \in L(\mathcal{H})^+$ cualquiera. La demostración es similar a la prueba de la Proposición 7.4.5, usando la ecuación (7.18) en vez de (7.12).
2. Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de \mathcal{H} , y consideremos los operadores diagonales e inversibles $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ definidos por

$$A(e_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)e_n, \quad B(e_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es fácil ver, usando las proposiciones 7.4.5 y 7.4.11, que $2 \notin \{k(A, x) : \|x\| = 1\}$ y $2 \notin \sigma_{sh}(B)$.

3. Si $C \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $\|C\| \in \{k(C, x) : \|x\| = 1\}$ y $\lambda_{min}(C) \in \sigma_{sh}(C)$. Por otro lado, si A y B son como en el ejemplo anterior, entonces $\|B\| = 2 \notin \sigma_{sh}(B)$ y $\lambda_{min}(A) = 2 \notin \{k(A, x) : \|x\| = 1\}$.

Observación 7.4.13 (Operadores con rango cerrado). Supongamos que $A \in L(\mathcal{H})^+$ es un operador con rango cerrado. Entonces, $k(A, x)$ y $\rho(A, x)$ pueden calcularse explícitamente en términos de $\rho(A^\dagger, x)$. Más precisamente,



1. Si $x \in R(A)$ es un vector unitario, entonces, por la Proposición 7.4.3, podemos deducir que $k(A, x) = \rho(A^\dagger, x)^{-1}$.
2. Sea $x \in \mathcal{H} \setminus (N(A) \cup R(A))$. Por la Proposición 7.4.3, $\rho(A, x) = \rho(A^\dagger, x) = 0$. Por otro lado, si $P = P_{R(A)}$, entonces $P\xi \neq 0$ y

$$k(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n P x, P x \rangle^{1/n} = k\left(A, \frac{P\xi}{\|P\xi\|}\right) = \rho\left(A^\dagger, \frac{P\xi}{\|P\xi\|}\right)^{-1} \neq 0.$$

7.5 Algunos ejemplos.

En primer lugar mostraremos un ejemplo donde $\rho(A, \mathcal{S})$ es calculado explícitamente.

Ejemplo 7.5.1. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

y el subespacio generado por los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Los autovalores de A son 4, 6 y 12, y sus autovectores son $(-1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ y $(1, -2, 1)$ respectivamente.

Comencemos calculando el espectro de $\rho(A, \mathcal{S})$. De acuerdo al Teorema 7.3.8 el menor autovalor de $\rho(A, \mathcal{S})$ es el mínimo elemento del espectro de A tal que

$$\ker(A - \lambda I) \not\subseteq \mathcal{S}^\perp.$$

Como puede ser fácilmente chequeado, este valor es 4. Cómo se explicó en la subsección 7.3.1, el segundo autovalor de $\rho(A, \mathcal{S})$ es el menor autovalor μ de A que satisfaga

$$\mathcal{S} \cap \bigoplus_{\lambda \geq \mu} \ker(A - \lambda) \subsetneq \mathcal{S} \cap \bigoplus_{\lambda \geq 4} \ker(A - \lambda) = \mathcal{S}.$$

Este número es 6. Luego, por un argumento de dimensión, el espectro de $\rho(A, \mathcal{S})$ es $\{4, 6\}$.

Usaremos la parte (d) del Teorema 7.3.10 para calcular los autovectores asociados a cada autovalor. Un autovector para el autovalor 6 es un vector no nulo en

$$\mathcal{S} \cap \text{Span}\{(1, 1, 1), (1, -2, 1)\},$$

por ejemplo, $(0, 1, 0)$. Por otro lado, un autovector para el autovalor 4 puede encontrarse buscando un vector en \mathcal{S} ortogonal a $(0, 1, 0)$, por ejemplo el $(1, 0, 0)$. De este modo, obtenemos

$$\rho(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la Proposición 7.2.6, $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq A$. En consecuencia, por el Teorema 7.1.5 existe matrices intermedias D_1 y D_2 , tales que



a. $\rho(A, \mathcal{S}) \leq D_1 \leq D_2 \leq A$ y

b. $\rho(A, \mathcal{S}) D_1 = D_1 \rho(A, \mathcal{S})$, $D_1 D_2 = D_2 D_1$ y $D_2 A = A D_2$.

Siguiendo el algoritmo sugerido por la inducción usada para demostrar $(2 \Rightarrow 3)$ en la Proposición 7.1.5 obtenemos

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

▲

En los siguientes dos ejemplos, calculamos el espectro y las resoluciones espectrales de $\rho(A, \mathcal{S})$, en dos casos particulares:

Ejemplo 7.5.2. Sea $M_x \in L(L^2([0, 1]))$ el operador definido por

$$M_x(f)(t) = tf(t),$$

y sea \mathcal{S} el complemento ortogonal del subespacio de las funciones constantes. Aseguramos que $\sigma(\rho(M_x, \mathcal{S})) = [0, 1]$. Como por la Proposición 7.3.4 $\sigma(\rho(M_x, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(M_x)$, es suficiente probar que $(0, 1) \in \sigma(\rho(M_x, \mathcal{S}))$. Tomemos $r \in (0, 1)$. Entonces, por el Teorema 7.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{N}_{[r, +\infty)}(\rho(M_x, \mathcal{S}))) &= R(\mathfrak{N}_{[r, +\infty)}(M_x)) \cap \mathcal{S} \\ &= \left\{ f \in L^2([0, 1]) : f|_{[0, r]} \equiv 0, \text{ y } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, si definimos $f_{r, \varepsilon}(t) = (t - r)\mathfrak{N}_{[r-\varepsilon, r+\varepsilon)}(t)$, entonces

$$f_{r, \varepsilon} \in R(\mathfrak{N}_{[r-\varepsilon, +\infty)}(\rho(M_x, \mathcal{S}))) \quad \text{but} \quad f_{r, \varepsilon} \notin R(\mathfrak{N}_{[r+\varepsilon, +\infty)}(\rho(M_x, \mathcal{S}))),$$

lo cual muestra, por la observación 7.3.3, que $r \in \sigma(\rho(M_x, \mathcal{S}))$. ▲

Ejemplo 7.5.3. Sea $\mathcal{H} = \ell^2$ y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ su base ortonormal canónica. Si $w = (1, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$, sea \mathcal{S} el complemento ortogonal del subespacio generado por w . En $L(\ell^2)^+$ consideremos el operador compacto A definido del siguiente modo:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \otimes e_n$$

donde $(x \otimes y)z = \langle z, y \rangle x$, para $x, y, z \in \mathcal{H}$. Obtendremos la descomposición espectral de $\rho(A, \mathcal{S})$. Como $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(A)$, el espectro de $\rho(A, \mathcal{S})$ también es discreto. En realidad, $\rho(A, \mathcal{S})$ es compacto, lo cual puede deducirse fácilmente de que $\rho(A, \mathcal{S}) \leq A$. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ los autovalores de $\rho(A, \mathcal{S})$ ordenados en forma decreciente.



Por el Teorema 7.3.1, $\lambda_1 < 1$ pues $e_1 \notin \mathcal{S}$. Sin embargo, el subespacio \mathcal{T} generado por e_1 y e_2 interseca a \mathcal{S} , pues $\dim \mathcal{S}^\perp = 1$. Por lo tanto, $\lambda_1 = 1/2$. Más aún, por el Teorema 7.3.1,

$$\ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \frac{1}{2}) = \left[\ker(A - \frac{1}{2}) \oplus \ker(A - 1) \right] \cap \mathcal{S} = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}.$$

Es fácil ver que $\ker(\rho(A, \mathcal{S}) - \frac{1}{2})$ es el subespacio generado por $f_1 = e_1 - 2e_2$. Continuando en forma similar, el subespacio generado por e_1, e_2 y e_3 interseca a \mathcal{S} y la intersección tiene dimensión dos. Esto implica que $\lambda_2 = 1/3$ con multiplicidad uno. Por otro lado, para encontrar un autovector f_2 asociado a λ_2 , basta buscar un vector generado por e_1, e_2 y e_3 que sea ortogonal a f_1 y a w . Tomemos, por ejemplo, $f_2 = e_1 + (1/2)e_2 - (21/2)e_3$. Continuando del mismo modo, obtenemos que

$$\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) = \{1/n : n \geq 2\} \cup \{0\},$$

cada autovalor tiene multiplicidad uno, y los correspondientes autovectores son:

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, -2, 0, \dots) \\ f_2 &= (1, 1/2, -5, 0, \dots) \\ f_3 &= (1, 1/2, 1/4, 21/2, 0, \dots) \\ &\vdots \\ f_n &= (1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^{n-1}, \frac{-(4^n-1)}{3 \cdot 2^{n-2}}, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

▲

Ahora exhibiremos algunos ejemplos que muestran que algunas hipótesis no pueden relajarse. Tal es el caso de las hipótesis de la Proposición 7.2.7, donde hemos probado que dado un subespacio \mathcal{S} de \mathcal{H} y A, B en $L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \preceq B$, entonces $\rho(A, \mathcal{S}) \leq \rho(B, \mathcal{S})$. Esta proposición puede fallar si pedimos $A \leq B$ en vez de $A \preceq B$, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.5.4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y consideremos el subespacio unidimensional \mathcal{S} generado por el vector $(1, 0)$. Claramente, $A \leq B$; por otro lado, $\rho(A, \mathcal{S}) = P_{\mathcal{S}}$ y algunos cálculos muestran que $\rho(B, \mathcal{S}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} P_{\mathcal{S}} < P_{\mathcal{S}}$.

▲

En la Proposición 7.2.8, la hipótesis de que la sucesión sea decreciente respecto al orden espectral no puede reemplazarse por decreciente respecto al orden usual, como lo muestra el siguiente ejemplo:



Ejemplo 7.5.5. Consideremos la siguiente sucesión de matrices:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 + 1/m & 1/m \\ 1/m & 1/m \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es claro que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq A_{m+1} \leq A_m$, y $\lambda_{\min}(A_m) \leq \langle A_m e_2, e_2 \rangle = 1/m$. Por otro lado, $A_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P$, la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por el vector $(1, 0)$.

Sea $\mathcal{S} = R(P)$. Entonces, como \mathcal{S} no reduce a las matrices A_m $\rho(A_m, \mathcal{S}) = \lambda_{\min}(A_m)P \leq \frac{1}{m}P$, por lo que $\rho(A_m, \mathcal{S}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Sin embargo, $\rho(P, \mathcal{S}) = P$. ▲



Bibliografía

- [1] W. N. Anderson Jr. y R.J. Duffin, Series and parallel addition of matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 11 (1963), 576-594.
- [2] W. N. Anderson Jr., R. J. Duffin, y G. E. Trapp, Parallel subtraction of matrices, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 69 (1972), 2530-2531.
- [3] W. N. Anderson Jr., D. T. Duffin, y G. E. Trapp, Characterization of parallel subtraction, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 76 (1979), 3599-3601.
- [4] W. N. Anderson, Shorted operators, *SIAM J. Appl. Math.* 20 (1971), 520-525.
- [5] W. N. Anderson y G. E. Trapp, Shorted operators II, *SIAM J. Appl. Math.* 28 (1975), 60-71.
- [6] T. Ando, Generalized Schur complements, *Linear Algebra Appl.* 27 (1979), 173-186.
- [7] E. Andruchow, G. Corach and D. Stojanoff, Geometry of oblique projections, *Studia Math.* 137 (1999) 61-79.
- [8] J. Antezana y G. Corach, Sampling theory, oblique projections and a question by Smale and Zhou, preprint.
- [9] J. Antezana, G. Corach y D. Stojanoff, Spectral shorted matrices, *Linear Algebra Appl.* 381 (2004), 197-217.
- [10] J. Antezana, G. Corach y D. Stojanoff, Spectral shorted operators, *Integral Equations Operator Theory* (en prensa).
- [11] J. Antezana, G. Corach y D. Stojanoff, Bilateral shorted operators, *Linear Algebra Appl.* (en prensa)
- [12] J. A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz y D. Stojanoff, Weighted projections and Riesz frames, *Linear Algebra Appl.* 402 (2005), 367-389.
- [13] J. A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz y D. Stojanoff, Nullspaces and frames, *J. Math. Anal. Appl.* 309 (2005), 709-723.
- [14] J. A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz y D. Stojanoff, Oblique projections and frames, *Proc. Amer. Math. Soc.* (en prensa).
- [15] J. Antezana, P. Massey y D. Stojanoff, Jensen inequalities and majorization, preprint.
- [16] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, Geometry of oblique projections. *Studia Math.* 137 (1999), 61-79.
- [17] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* 68 (1950), 337-404.



- [18] R. Balan, P. Casazza, C. Heil y Z. Landau, Deficits and excesses of frames, *Advances in Computational Mathematics* 18 (2003) 93-116.
- [19] A. Ben-Israel y T. N. E. Greville, *Generalized inverses. Theory and applications*. Second edition. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 15. Springer-Verlag, New York, 2003
- [20] A. Ben-Tal y M. Teboulle, A geometric property of the least squares solutions of linear equations, *Linear Algebra Appl.* 139 (1990), 165-170.
- [21] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Berlin-Heidelberg-New York , Springer 1997.
- [22] E. Y. Bobrovnikova y S.A. Vavasis, A norm bound for projections with complex weights, *Linear Algebra Appl.* 307 (2000), 69-75.
- [23] C. A. Butler y T. D. Morley, A note on the shorted operator, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 9 (1988), 147-155.
- [24] R. Bouldin; The product of operators with closed range, *Tohoku Math. J.* 25 (1973), 359-363.
- [25] C. A. Butler y T. D. Morley, A note on the shorted operator, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 9 (1988), 147-155.
- [26] S. L. Campbell y C. D. Meyer Jr., *Generalized inverses of linear transformations*, Corrected reprint of the 1979 original. Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [27] D. Carlson, What are Schur complements, anyway?, *Linear Algebra Appl.* 74 (1986), 257-275.
- [28] D. Carlson y E. V. Haynworth, Complementable and almost definite matrices, *Linear Algebra Appl.* 52/53 (1983), 157-176.
- [29] P. G. Casazza, The art of frame theory. *Taiwanese J. Math.* 4 (2000), 129-201.
- [30] P.G. Casazza, Characterizing Hilbert space frames with the subframe property, *Illinois J. Math.* 41 (1997), 648-666.
- [31] P. G. Casazza y O. Christensen, Hilbert space frames containing a Riesz basis and Banach spaces which have no subspace isomorphic to c_0 . *J. Math. Anal. Appl.* 202 (1996), 940-950.
- [32] P. G. Casazza y O. Christensen, Frames containing a Riesz basis and preservation of this property under perturbations. *SIAM J. Math. Anal.* 29 (1998), 266-278.
- [33] P.G. Casazza y O. Christensen, Riesz frames and approximation of the frame coefficients, *Approx. Theory Appl.* N.S. 14 (1998), 1-11.
- [34] P.G. Casazza, D. Han y D.R.Larson, Frames for Banach spaces, *Contemp. Math.* 247 (1999), 149-182.
- [35] R. W. Cottle, Manifestations of the Schur complement, *Linear Algebra Appl.* 8 (1974), 189-211.
- [36] O. Christensen, Frames and the projection method, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 1 (1993), 50-53.
- [37] O. Christensen, Frames and pseudo-inverses, *J. Math. Anal. Appl.* 195 (1995), 401-414.
- [38] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [39] O. Christensen, Frames containing a Riesz basis and approximation of the frame coefficients using finite-dimensional methods, *J. Math. Anal. Appl.* 199 (1996), 256-270.



- [40] O. Christensen y Y. Eldar, Oblique dual frames and shift-invariant spaces, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 17 (2004) 48–68.
- [41] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [42] O. Christensen y Y. Eldar, Characterization of oblique dual frames pairs, preprint.
- [43] O. Christensen y A. Lindner, Decomposition of Riesz frames and wavelets into a finite union of linearly independent sets, *Lin. Alg. Appl.* 355 no. 1 (2002), 147-159.
- [44] G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff, Oblique projections and Schur complements, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 67 (2001) 337-356.
- [45] G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff, Generalized Schur complements and oblique projections, *Linear Algebra and its Applications* 341 (2002), 259-272.
- [46] G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff, Oblique projections and abstract splines, *J. Approx. Theory* 117 (2002), 189–206.
- [47] I. Daubechies, A. Grossmann e Y. Meyer; Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.* 27 (1986), 1271-1283.
- [48] F. Deutsch, The angle between subspaces in Hilbert space, in "Approximation theory, wavelets and applications" (S. P. Singh, editor), Kluwer, Netherlands, 1995, 107-130.
- [49] J. Dixmier, Etudes sur les variétés et opérateurs de Julia, avec quelques applications, *Bull. Soc. Math. France* 77 (1949), 11-101.
- [50] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966) 413-416.
- [51] R. J. Duffin, Elementary operations which generate network matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* 11 (1963), 645-658.
- [52] R. J. Duffin y A. C. Schaeffer; A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 72, (1952). 341-366.
- [53] Y. C. Eldar, Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors, *J. Fourier Anal. Appl.* 9 (2003), 77-96.
- [54] Y. C. Eldar y T. Werther, General Framework for Consistent Sampling in Hilbert Spaces, *International Journal of Wavelets, Multiresolution, and Information Processing*, 3 (2005), 347-359.
- [55] P. A. Fillmore y J. P. Williams, On operator ranges, *Advances in Math.* 7 (1971) 254-281.
- [56] A. Forsgren, On linear least-squares problems with diagonally dominant weight matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 17 (1996), 763-788.
- [57] A. Forsgren y G. Spörre, On weighted linear least-squares problems related to interior methods for convex quadratic programming, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 23 (2001), 42-56.
- [58] M. Foster, An application of the Wiener-Kolmogorov smoothing theory to matrix inversion, *J. SIAM* 9 (1961), 387-392
- [59] K. Friedrichs, On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. I. *Trans. Amer. Math. Soc.* 41 (1937), 321-364 .



- [60] Jun Ichi Fujii y Masatoshi Fujii, Kolmogorov's complexity for positive definite matrices, Special issue dedicated to Professor T. Ando. *Linear Algebra Appl.* 341 (2002), 171-180.
- [61] H. Goller, Shorted operators and rank decomposition matrices, *Linear Algebra Appl.* 81 (1986), 207-236.
- [62] C. C. Gonzaga y H. J. Lara, A note on properties of condition numbers, *Linear Algebra Appl.* 273 (1997), 269-273.
- [63] K. H. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [64] P. R. Halmos, Two subspaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 144 (1969), 381-389.
- [65] D. Han y D.R. Larson, Frames, bases and group representations, *Mem. Amer. Math. Soc.* 147 (2000), no. 697.
- [66] M. Hanke y M. Neumann, The geometry of the set of scaled projections, *Linear Algebra Appl.*, 190 (1993), 137-148.
- [67] R. E. Harte y M. Mbekhta, On generalized inverses in C^* -algebras II, *Studia Math.* 106 (1992), 129-138.
- [68] S. Hassi y K. Nordström, On projections in a space with an indefinite metric, *Linear Algebra Appl.* 208/209 (1994), 401-417.
- [69] V. Havin y B. Jöricke, *The uncertainty principle in harmonic analysis. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 28*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [70] E. Haynsworth, Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix, *Linear Algebra Appl.* 1 (1968), 73-81.
- [71] C. E. Heil y D.F. Walnut, Continuous and discrete wavelet transforms, *SIAM Rev.* 31 (1989), 628-666.
- [72] D. A. Herrero, *Approximation of Hilbert space operators. Vol. 1. Second edition. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 224*, New York, 1989.
- [73] A. E. Hoerl, Application of ridge analysis to regression problems, *Chemical Engineering Progress*, 58 (1962), 54-59.
- [74] J. R. Holub, Pre-frame operators, Besselian frames and near-Riesz bases in Hilbert spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 122 (1994) 779-785.
- [75] R.A. Horn y C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [76] S. Izumino, The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law, *Tohoku Math. J.* 34 (1982), 43-52.
- [77] S. Izumino, Convergence of generalized inverses and splines projectors, *J. Approx. Theory* 38 (1983), 269-278.
- [78] R. Kadison y J. R. Ringrose, "Fundamentals of the Theory of Operator Algebras", I, Academic Press, New York 1984.
- [79] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, (second edition) Springer, New York, 1984.
- [80] S. Kayalar y H. Weinert, Error bounds for the method of alternating projections, *Math. Control Signal Systems* 1 (1988), 43-59.
- [81] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications, *Mat. Sb. (N. S.)* 20 (62) (1947), 431-495.



- [82] V. A. Kotel'nikov, On the transmission capacity of ether and wire in electrocommunications, Izd. Red. Upr. Svyazzi RSKA (Moscow) 1933.
- [83] V. A. Kotel'nikov, On the transmission capacity of ether and wire in electrocommunications, Reprint in *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*, J.J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira, Eds. Boston, MA: Birkhauser, 2000.
- [84] S. Li, A theory of generalized multiresolution structure and pseudoframes of translates, *J. Fourier Anal. Appl.* 7 (2001), 23-40.
- [85] S. Li y H. Ogawa, Pseudoframes for subspaces with applications, *J. Fourier Anal. Appl.* 10 (2004), 409-431.
- [86] S. Li, y H. Ogawa, Pseudo-duals of frames with applications, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 11 (2001), 289-304.
- [87] Chi-Kwong Li y Roy Mathias, Extremal characterizations of the Schur complement and resulting inequalities, *SIAM Rev.* 42 (2000), 233-246.
- [88] Chi-Kwong Li y Roy Mathias, Some interlacing theorems on the Schur complement, *Linear and Multilinear Algebra* 44 (1998), no. 4, 373-382.
- [89] P. Linnell, Von Neumann algebras and linear independence of translates, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127 (1999), 3269-3277.
- [90] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Zeit.* 38 (1934), 177-216.
- [91] P. Massey y D. Stojanoff, Generalized Schur Complements and P-complementable Operators, *Linear Algebra Appl.* (to appear).
- [92] T. Mathew y S. K. Mitra, Shorted operators and the identification problem -the real case, *IEEE Trans. Circuits and Systems* 31 (1984), 299-300.
- [93] S. K. Mitra, Shorted operators and the identification problem, *IEEE Trans. Circuits and Systems* 29 (1982), 581-583.
- [94] S. K. Mitra, The minus partial order and the shorted matrix, *Linear Algebra Appl.* 83 (1986), 1-27.
- [95] S. K. Mitra y K. M. Prasad, The nonunique parallel sum, *Linear Algebra Appl.* 259 (1997), 77-99.
- [96] S. K. Mitra y M. L. Puri, On parallel sum and difference of matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 44 (1973), 92-97.
- [97] S. K. Mitra y M. L. Puri, Shorted matrices - An extended concept and some applications, *Linear Alg. Appl.* 42 (1982), 57-79.
- [98] S. K. Mitra y S. Puntanen, The shorted operator statistically interpreted, *Calcutta Statist. Assoc. Bull.* 40 (1990/91), 97-102.
- [99] C. R. Rao y S. K. Mitra, *Generalized inverses of matrices and its applications*, Wiley, New York, 1971.
- [100] D. P. O'Leary, On bounds for scaled projections and pseudoinverses, *Linear Algebra Appl.* 132 (1990), 115-117.
- [101] M. P. Olson, The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971) 537-544.



- [102] D. V. Ouellette, Schur complements and statistics, *Linear Algebra Appl.* 36 (1981), 187-295.
- [103] G.K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.
- [104] G. K. Pedersen, *Analysis now. Graduate Texts in Mathematics*, 118. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [105] E. L. Pekarev, Shorts of operators and some extremal problems, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 56 (1992), 147-163.
- [106] E. L. Pekarev y J. L. Smul'jan, Parallel addition and parallel subtraction of operators, *Math. USSR Izvestija* 10 (1976), 351-370.
- [107] D. L. Phillips, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *J Assoc Comput Mach* 9 (1962), 84-97.
- [108] V. Ptak, Extremal operators and oblique projections, *Casopis Pest Mat.* 110 (1985), 343-350.
- [109] S. Saitoh, *Theory of reproducing kernels and its applications*, London, Longman (1988).
- [110] C. E. Shannon, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE* 137 (1949), 10-21.
- [111] S. Smale y D. X. Zhou, Shannon sampling and function reconstruction from point values, *Bull. Amer. Math. Soc.* 41 (2004), 279-305.
- [112] S. Smale y D. X. Zhou, Shannon sampling and function reconstruction from point values, *Bull. Amer. Math. Soc.* 41 (2004), 279-305.
- [113] G. W. Stewart, On scaled projections and pseudoinverses, *Linear Algebra Appl.* 112 (1989), 189-193.
- [114] G. W. Stewart, On the perturbation of pseudo-inverses, projections, and linear squares problems, *SIAM Rev.* 19 (1977), 634-662.
- [115] J. L. Smul'jan, A Hellinger operator integral. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 49 (91) 1959 381-430. English transl. *AMS Transl.* 22 (1962), 289-337.
- [116] A. N. Tikhonov, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Soviet Math Dokl* 4 (1963), 1035-1038. English translation of *Dokl Akad Nauk SSSR* 151 (1963), 501-504.
- [117] A. N. Tikhonov and V. A. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems*. Winston and Sons, Washington (1977).
- [118] M. Wei, The analysis for the total least squares problem with more than one solution. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 13 (1992), 746-763.
- [119] M. Wei, Upper bound and stability of scaled pseudoinverses, *Numer. Math.* 72 (1995), 285-293.
- [120] M. Wei, Equivalent Formulae for the supremum and stability of weighted pseudoinverses, *Math. of Computation*, 220 (1997), 1487-1508.
- [121] M. Wei y A. R. De Pierro, Upper perturbation bounds of weighted projections, weighted and constrained least squares problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 21 (2000), no. 3, 931-951.
- [122] J. M. Whittaker, The Fourier theory of the cardinal functions, *Proc. Math. Soc. Edinburgh* 1 (1929), 169-176.
- [123] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series (revised first edition)* Academic Press, San Diego, 2001.