V Congreso Internacional Virtual de Educación
7-27 de Febrero de 2005

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN : SU APLICACIÓN EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CARÁCTER AGROPECUARIO .

Ramon Abel Ortega Díaz
Aída María Torres Alfonso .

aortegad@uclv.edu.cu

Universidad Central de Las Villas ,Santa Clara, Cuba.

RESUMEN

Se analizan las características de algunos modelos de crecimiento (decrecimiento) poblacional y sus principales utilidades en el ámbito agropecuario además de su comportamiento con el paso del tiempo. Se particulariza en las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como ejemplos de modelos matemáticos que puede utilizar el Ingeniero Agrónomo para acometer el análisis y solución de los cada vez mas complejos y crecientes problemas que se le presentan en su labor profesional. La inserción de esta temática en el currículo de Matemática, su relación con otras disciplinas del programa de estudios y la necesidad de un completamiento en la preparación del profesor de este colectivo de carrera son las principales experiencias educativas que recoge este trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

En las aulas universitarias siempre ha estado el futuro del país y muchos han sido los esfuerzos durante años para perfeccionar este sistema educacional en Cuba. De esta forma en todas las carreras universitarias se han conformado los planes de estudio y el modelo del profesional, instrumentos indispensables para la concepción de la impartición de las asignaturas de las disciplinas y la formación integral del estudiante. No obstante, aunque "casi todo" esta establecido, lo cierto es que en ocasiones se dificulta para el colectivo profesoral el ***¿cómo?*** hacerlo requiriendo de un trabajo metodológico que trascienda de la disciplina: al año y a la carrera .

En este sentido se han obtenido importantes resultados en la Carrera Agronomía de la facultad de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Central de Las Villas, como se puede apreciar en **Ortega R (2000),** consientes de que para un país eminentemente agrario como el nuestro, la formación eficiente del ingeniero agrónomo es no solo una preocupación de algunos, sino la ocupación de muchos, pues este profesional es el más integral de los encargados de la producción agrícola y debe estar en condiciones de dar solución a los complejos problemas que se presentan en las empresas agropecuarias, debemos formarlo para que sea capaz de asimilar los progresos de la ciencia y la técnica así como los nuevos retos y formas de actividad a las que se enfrentará, según **López R (1999).**

¿Como ha contribuido la disciplina Matemática a este empeño ?

-Determinando las necesidades y requerimientos matemáticos del ingeniero

-Estableciendo el Programa Director de la Matemática para la especialidad de Agronomía.

-Desarrollando evaluaciones integradoras que permiten el cumplimiento del objetivo instructivo en primer año.

-Elaborando medios de enseñanza acordes al nuevo enfoque planteado

2.DESARROLLO

- **La modelación matemática en el contexto actual**

El estudio actual de la Matemática se caracteriza por:

-Desarrollo de las nuevas teorías Matemáticas.

-Posibilidades de utilizar Modelos Matemáticos más precisos debido al desarrollo de los medios computarizados.

-Enfoque globalizado del objeto de estudio de las ciencias como consecuencia de la necesidad de considerar los problemas complejos de la carrera con enfoque integrador.

Estos tres factores son los que han influido para considerar la necesidad en las diferentes ramas de la ciencia y la técnica de elaborar Modelos Matemáticos que permiten el estudio de sus diferentes objetos.

La sociedad moderna dispone hoy de un desarrollo científico-técnico que interactúa con todos los aspectos de su multifacético avance, por lo que es importante, la ampliación constante de los conocimientos y la familiarización permanente con las novedades de la ciencia y la técnica.

Esto requiere la elevación sistemática de los conocimientos Matemáticos y del nivel científico del trabajo profesional, el cual no esta excento en la esfera agrícola del desarrollo alcanzado mundialmente. La aplicación de técnicas de simulación a problemas biotecnológicos, de riego y drenaje, entre otros, así lo confirman.

Para lograr la formación de Ingenieros Agrónomos capaces de desplegar su actividad en la producción moderna se hace necesario organizar la preparación ininterrumpida de los estudiantes en el campo de las Matemáticas, específicamente en la Modelación Matemática.

El término modelo se utiliza con múltiples connotaciones según el campo en que se está empleando. Se entiende por modelo a la representación de un objeto real, de tal forma que, aún siendo distinto a la entidad que representa puede homologar su funcionamiento y uno o varios atributos de ella.

En otros términos puede considerarse por modelo ¨**un objeto que sobre la base de una analogía respecto a la estructura, función y comportamiento de un original correspondiente se crea y utiliza por los sujetos para poder resolver una determinada tarea cuya realización por medio de operaciones directas en el original no es conveniente¨.**

En nuestro contexto se entiende como sujetos en general al director de la empresa o el personal del colectivo de especialistas que trabaja en la investigación de una situación de decisión y el objeto original se corresponde con el proceso económico o sistema que se está investigando.

En estos términos existe una gran gama y variedad de modelos. Si se observa la historia del hombre entonces puede verse que los modelos siempre han tenido un papel importante en ella, ya sea representando fenómenos naturales, ideas u objetos. Incluso, el progreso de la ciencia y la tecnología se refleja en forma muy precisa en el progreso de la habilidad del hombre para desarrollar los fenómenos naturales, procesos productivos, biológicos, etc.

Un modelo se diseña y construye generalmente con el propósito de entender, explicar o mejorar el funcionamiento de un sistema real u objeto que está representado. Lo esencial de un modelo radica entonces en su efectividad para lograr el objetivo para el cual fue construido. Se observa de este modo que un modelo puede ser réplica del objeto que representa por ejemplo, una maqueta o bien tener algún grado de aproximación del objeto que representa como resultado de realizar abstracción de algunos aspectos.

Las funciones fundamentales de los modelos se pueden resumir en:

-Ayudar a entender e interpretar las áreas donde usualmente son aplicados.

-Contribuir al desarrollo de la comunicación.

-Propiciar la predicción de las características.

-Funcionar como una herramienta de ayuda en la experimentación.

La modelación entendida como el proceso mediante el cual un ingeniero o un investigador diseña, construye o aplica un modelo que representa un objeto o sistema real, es una herramienta para resolver determinados problemas. Todo lo descrito anteriormente revela la importancia que tiene el uso de los modelos en la formación del Ingeniero Agrónomo. Mediante la Modelación se pueden establecer relaciones entre variables, por ejemplo, relación entre las dosis de fertilización de un cultivo y su rendimiento, la desnaturalización proteica de una enzima y la concentración de sustrato, el área foliar de una planta y el porcentaje de luz interceptada por ésta.

Para dar solución a estos problemas se emplea la Modelación Matemática. Los Modelos Matemáticos son los que representan el objeto real mediante el lenguaje matemático, permiten llegar a resultados en términos cuantitativos y cualitativos, tomar decisiones y seleccionar alternativas mas adecuadas. Estos modelos reflejan de forma aproximada el objeto real. Para su construcción es necesario el conocimiento del problema correspondiente.

En la esfera agrícola tienen un valor incalculable los Modelos Económicos-Matemático, (MEM), por los cuáles se entienden la expresión concentrada de las leyes e interrelaciones más importantes del proceso de funcionamiento del sistema económico, en forma Matemática.

Los MEM se interpretan como los transformadores de la información primaria del Sistema Económico, además recogen múltiples variantes de optimización y permiten escoger la mejor de acuerdo al criterio de selección establecido.

La Modelación Matemática de los procesos económicos y la creación de los MEM contienen en general las etapas siguientes:

1. Estudio del proceso económico y precisión del objeto de modelación.

2. Estudio del objeto de modelación donde transcurre el proceso económico investigado y la extracción de sus características más importantes.

3. Planteamiento del problema económico-matemático donde se determine claramente los objetivos de la solución.

4. La elección de la teoría Matemática de solución del problema.

5. La construcción del Modelo Matemático del problema o la aplicación de uno stándar.
6. La solución del problema en las computadoras.
7. El análisis de los resultados de la solución del problema y la corrección del MEM (sí es necesario).

El perfil del especialista en la Carrera de Agronomía en Cuba propone que el futuro egresado debe D*iagnosticar y pronosticar, planificar, organizar, aplicar, ejecutar y controlar el proceso de producción agropecuaria, aplicando los métodos y tecnologías de la producción agraria que permitan alcanzar niveles de desarrollo sostenible*.

Por estas razones, la matemática en la especialidad tiene como objetivo fundamental, modelar situaciones que conduzcan a problemas de la rama agropecuaria con una interpretación económica que justifique su efectividad, utilizando la computadora como una herramienta de trabajo sistemático, que agilice y de respuestas efectivas a dichos problemas.

- **La modelación matemática de fenómenos agropecuarias en la formación del ingeniero y la actualización de los docentes de la carrera.**

Se ha logrado diseñar una metodología para realizar la interdisciplinariedad entre las asignaturas que se imparten en el primer año, a partir de la racionalidad y transdisciplinariedad inherente a las matemáticas, tomando en consideración que los modelos matemáticos ofrecen la posibilidad de integrar diferentes disciplinas mediante un instrumento común. Como se plantea en **Ortega R y Aida T (2001)** las matemáticas serán el lenguaje formalizado de la interdisciplinariedad, que permitirá a los estudiantes resolver problemas sencillos, donde se relacionen los problemas Químicos, Físicos, Biológicos y Sociales que actúan en un agro ecosistema, con el auxilio de la computación como herramienta. Tributando en su integración sistémica a la asignatura Práctica Agrícola I de la disciplina integradora, que entre sus funciones principales establece la formación integral de un profesional competente durante el transito del mismo por las aulas universitarias

De esta forma, no solo se ha cambiado la concepción en la impartición de las asignaturas de la disciplina Matemática, desarrollando en el estudiante habilidades del pensamiento lógico, en la modelación matemática y el pensamiento algorítmico, sino que estamos en condiciones de propiciar al resto de las disciplinas de la carrera los modelos matemáticos que más frecuentemente el estudiante o profesor se encontrará en libros, artículos científicos y en la práctica profesional, esta caracterización se encuentra en **Ortega R y Aida T (2002)**

Un ejemplo de lo anteriormente expuesto, son los problemas modelados mediante las ecuaciones diferenciales ordinarias y la determinación de condiciones iniciales o de frontera que describen fenómenos de la microbiología, la bioquímica, la fisiología y la genética general .

Analizaremos algunos ejemplos, que estudiantes y profesores pueden abordar desde asignaturas tan disímiles como la Zootecnia , Filotecnia General, Química o la Biología:

-El proceso de multiplicación de las bacterias en el tiempo .

-La desnaturalización proteica de una enzima .

-Dinámica de crecimiento de una población .

En general todos los procesos de crecimiento o decrecimiento de una población animal o vegetal son problemas de este tipo. Describiremos de forma parcial o general algunos de ellos con el objetivo de demostrar que no solo se pueden utilizar en nuestra disciplina como motivación de los estudiantes cuando se expliquen temas tales como: relaciones entre variables, comportamiento de una función, limite, extremos relativos y por supuesto ecuaciones diferenciales. Sino que en las disciplinas que el estudiante recibe en años superiores, fuera del ciclo básico, deben enfocarse estos fenómenos de esta manera como continuidad de una experiencia docente adquirida en el primer año de la carrera y que contribuirá a lograr el objetivo común: un ingeniero de perfil ancho.

No obstante, esta nueva concepción de la enseñanza tiene implicaciones de superación y actualización para este profesorado no matemático y que imparte las asignaturas en años superiores, que en caso de nuestra Universidad, se ha visto ejecutado con Cursos de Postgrado a docentes de la Facultad de Ciencias Agropecuarias, quienes culminaron el mismo con la Modelación Matemática de problemas técnicos y científicos vinculados a la disciplina que imparten en la carrera.

- **Modelación de fenómenos del tipo: Crecimiento poblacional.**

-***Multiplicación de las Bacterias.***

La supuesta ley de que la velocidad de multiplicación de las bacterias es proporcional al número existente en cualquier instante de tiempo dado, se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0 \qquad (1)$$

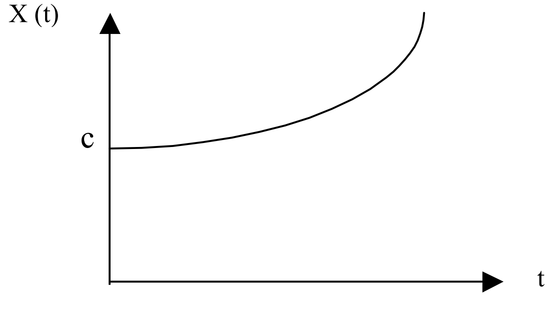
donde:

x- número de bacterias presentes en t minutos

t- tiempo

k- constante de multiplicación.

La solución de (1) es $x(t) = ce^{kt}$, que en la literatura se reconoce como curva de multiplicación. Su gráfica es:



Se observa que a medida que transcurre el tiempo, el número de bacterias crece exponencialmente, esto es :

t	0	1	3	10	----------	1000	-----------
x(t)	c	ce^{k}	ce^{3k}	ce^{10k}	----------	ce^{1000k}	-----------

Los resultados de la tabla nos haría "sospechar" que para tiempos suficientemente grandes, cuando crezca infinitamente, el número de bacterias crece ilimitadamente, lo que se demuestra calculando:

$$\lim_{t \to \infty} ce^{kt} = \infty$$

- ***Desnaturalización proteica de las enzimas***

Suponiendo que la intensidad de desnaturalización proteica de las enzimas es proporcional a la concentración de estas en un instante de tiempo dado , se tendrá la ecuación diferencial : $\frac{dC}{dt} = -k_2\mathrm{C}$ (2)

Cuya solución es: $C(t) = C_0 e^{-k_2 \mathrm{t}}$

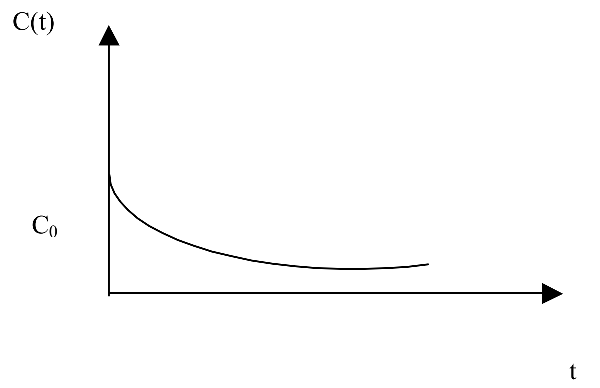
donde:

t- tiempo transcurrido en el proceso de desnaturalización

C_0- es la concentración inicial

C(t)- concentración remanente de enzima

La gráfica de este proceso es:



Se observa que a medida que transcurre el tiempo la cantidad de enzima tiende a disminuir, esto es:

t	0	1	3	10	....	1000	....

C(t)	C_0	C_0/e^{k}	C_0/e^{3k}	C_0/e^{10k}	....	C_0/e^{1000k}	....

En efecto la tabla nos muestra que a medida que transcurre el tiempo la concentración de enzimas es cada vez menor, por lo que podemos "presumir" que para tiempos suficientemente grandes estas desaparezcan. ¿Cómo podemos demostrar tal situación?

Utilizando una herramienta matemática de una gran fortaleza: el limite, objeto matemático que ya ha sido estudiado a esta altura por los estudiantes.

Calculando el límite de la función $C(t) = Co\,\mathbf{e}^{-kt}$ cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t\to+\infty} Co\,\mathbf{e}^{-kt} = C_o \lim_{t\to\infty} \mathbf{e}^{-kt} = C_o \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{kt}} = 0$$

Por lo que podemos afirmar con seguridad que cuando el tiempo es suficientemente grande este proceso es asintóticamente estable con asíntota horizontal C(t)=0, interpretando por tanto, que la concentración de enzimas en el organismo tiende a desaparecer.

- ***Dinámica de crecimiento de una población.***

Las ecuaciones (1) y (2) se pueden escribir de forma general como una sola:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \text{k-}\mathit{const.} \qquad (3)$$

la cuál proporciona una modelación matemática más sencilla de la dinámica de las poblaciones

Siendo y(t) el número de miembros de una población en un tiempo t, al suponer que la velocidad de variación de la población es proporcional a la cantidad de población, llegamos a la ecuación (3).

Haciendo $k = m - n$

donde: m- coeficiente de la velocidad relativa de natalidad.
n- coeficiente de la velocidad relativa de extinción.

Entonces $k>0$ para $m > n$
$k<0$ para $m < n$

Si en el momento de tiempo t = o la población es igual a y_o, la ecuación (3) nos conduce a la ley exponencial de variación de la población.

$$y(t) = y_o\, e^{kt}$$

$$si \quad k\langle 0, \quad y(t) \to 0 \quad para \quad t \to +\infty$$
$$si \quad k\rangle 0, \quad y(t) \to +\infty \quad para \quad t \to +\infty$$

La suposición de que las magnitudes m y n son constantes no es cierta para poblaciones grandes. En efecto, el gran número de miembros de una población lleva a la disminución de los recursos correspondientes, por lo que decrece la velocidad de natalidad y aumenta la velocidad de extinción.

Esto puede ser expresado mediante leyes más simples:

$$Sea \quad m = b_1 - b_2 y \quad y \quad n = b_3 + b_4 y$$

$$b_i - const \;\; positivas \qquad i = \overline{1,4}\;, \;\; entonces$$

$$k = m - n = b_1 - b_3 - (b_2 + b_4)y = (b_2 + b_4).\left(\frac{(b_1 - b_3)}{(b_2 + b_4)} - y\right) = \propto (A - y)$$

$$donde \qquad \propto = b_2 + b_4 \qquad A = \frac{b_1 - b_3}{b_2 + b_4}$$

La ecuación de la dinámica de las poblaciones en este modelo tiene por expresión

$$\frac{dy}{dt} = \propto (A - y)y$$

Esta es la ecuación logística que es fundamental en la demografía y en la Teoría Matemática de la Ecología. Se utiliza en la Teoría Matemática de propagación de enfermedades y en otros problemas de la fisiología. Su solución es:

$$y(t) = \frac{Ace^{A\propto t}}{1 + ce^{A\propto t}}$$

Considerando y(o) = y_0 hallamos la ecuación de la curva logística.

$$y(t) = \frac{A}{\left[1 + (\frac{A}{y_0} - 1)e^{-A\propto t}\right]}$$

Cuando $\propto \rangle 0 \quad y \quad A \rangle 0$ obtendremos, $y(t) \rightarrow A$ para $t \rightarrow +\infty$

Estas ecuaciones se han utilizado para modelar problemas de carácter agropecuarios surgidos en la estación experimental “Álvaro Barba¨ de nuestra universidad a raíz de datos obtenidos por diferentes experimentos realizados por estudiantes y profesores en proyectos investigativos desarrollados principalmente en el tercer año de la carrera de manera interdisciplinar. Además se utiliza por los profesores de las disciplinas que definen el ejercicio de la profesión para tratar problemas concernientes a situaciones agropecuarias.

3. CONCLUSIONES

El trabajo ejemplifica algunos de los modelos matemáticos, que mediante las ecuaciones diferenciales ordinarias simulan un proceso biológico, químico o físico. La matemática le brinda al estudiante la posibilidad de modelarlo, resolverlo e interpretar la solución obtenida, así como desarrollar en él las habilidades del pensamiento lógico que propicien volver al objeto inicial y comparar fenómeno /solución y arribar a conclusiones, desarrollando capacidades en la toma de decisiones. Pero debemos lograr que estas disciplinas sistematicen, en años superiores, el enfoque de estos fenómenos de la misma forma que se les imparte en Matemática, como continuidad del proceso integral de formación del ingeniero.

Y poco a poco contribuir, entre todos, a erradicar de la mente de alumnos, profesores y profesionales de esfera agropecuaria la idea de la poca o nula necesidad de la matemática en la formación del agrónomo.

BIBLIOGRAFÍA.

López R (1999). Modelo del profesional y plan de estudio del Ingeniero Agrónomo. Habana, Ediciones del M.E.S. Marzo 1999.

Ortega R (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Carrera de Agronomía .Tesis para optar por el grado Master en Ciencia. UCLV Enero 2000.

Ortega R y Aida T (2001). Desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje en la especialidad de Agronomía . Una experiencia interdisciplinaria. Revista Ciencias Matemáticas, V 20, No 1, La Habana, Cuba

Ortega R y Aida T (2002). Necesidades y prioridades en la enseñanza de la Matemática en la especialidad de Ingeniería Agronómica. Revista Ciencias Matemáticas, V 20, No 1, La Habana, Cuba

Kiseliov A (1979) . Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias . Editorial MIR , Moscú.

Kiviste A (2002). Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal. Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria. Madrid, España, 2002.

Yepis O (1999). El perfeccionamiento del trabajo interdisciplinario por año como herramienta básica para la formación integral del profesional universitario . Conferencia internacional de Ciencias de la Educación . Universidad de Camagüey. Diciembre 1999