UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Trabajo de Tesis Doctoral

Potenciales convexos, duales oblicuos óptimos y norma aliasing en subespacios de dimensión finita y subespacios invariantes por traslaciones

María José Benac

Director: Dr. Pedro G. Massey

Co-director: Dr. Demetrio Stojanoff

2016

A mis Padres,
a mis Hermanos y
a Adrian.

Índice general

Introducción

Contexto general. La noción de marcos en espacios de Hilbert surge en 1952 en el trabajo de Duffin y Schaeffer con el estudio de desarrollos de tipo L^2 con respecto a sistemas exponenciales, denominados desarrollos no armónicos, similares a las representaciones dadas por la transformada de Fourier. Sin embargo, los marcos fueron reconsiderados recién en el año 1986 en el trabajo de Daubechies, Grossmann y Meyer sobre onditas, que son marcos en espacios de Hilbert con una estructura determinada. Junto con marcos de Gabor, las onditas y sus generalizaciones son una fuente de investigación importante del análisis funcional. Actualmente, la estructura adicional de varias clases de marcos se ha dejado de lado y se consideran marcos generales (abstractos) en espacios de Hilbert. Algunos de los investigadores más importantes de esta noción son P. Cazzasa, E. Christensen, H. Han y D. Larson.

En la teoría de marcos se han considerado varios problemas de investigación que se encuentran relacionados con algunos tópicos centrales de otras áreas del análisis funcional y la teoría de operadores. Un ejemplo de esta situación es la llamada conjetura de Feichtinger, relacionada con las conjeturas "paving" de Anderson y la famosa conjetura de Kadison-Singer. De hecho, estas relaciones dieron un impulso al estudio de estos problemas, que derivaron en la reciente solución (por la positiva) de la conjetura de Kadison-Singer obtenida por Marcus, Spielman y Srivastava. Otro ejemplo de tal situación es el llamado problema de diseño de marcos. En este caso el problema es el de hallar marcos con cierta estructura, más precisamente con operador de marco y normas de los elementos de marco pre-establecidas. Este problema está íntimamente relacionado con el teorema de Schur-Horn de la teoría de mayorización. De forma similar, la interacción entre estos dos problemas ha motivado recientemente el interés y desarrollo de resultados en estas áreas de investigación.

El desarrollo de la teoría de marcos está también influenciado por las aplicaciones de esta teoría a situaciones reales; como ejemplo, podemos considerar la transmisión de señales a través de canales con ruido: en este caso, el ruido perturba los datos transmitidos y el problema es hallar códigos de transmisión y estrategias de reconstrucción que minimicen el error en la recuperación de las señales. En este contexto, los llamados marcos ajustados constituyen una clase importante, no sólo debido a la simpleza de su fórmula de reconstrucción, sino a que además presentan robustez ante problemas que surgen en las aplicaciones, como el mencionado anteriormente (ver [18, 37], entre otros). En el trabajo [9], J.J. Benedetto y M. Fickus introducen una herramienta muy útil para el estudio geométrico de los marcos ajustados en espacios de Hilbert de dimensión finita: el potencial de marco PM (también llamado potencial de Benedetto-Fickus). Recientemente, ha habido interés en la estructura de marcos que minimizan otro potencial, llamado error medio cuadrático (MSE) (ver [31, 48, 53]).

El estudio del potencial de marco y del MSE están a su vez relacionados con la noción de mayorización del análisis matricial; en efecto, sucede que esta sencilla noción explica las desigualdades halladas para estos funcionales en la teoría de marcos finitos, así como la estructura espectral de los mínimos (bajo ciertas condiciones de normalización). Este es, a su vez, el punto de partida para el desarrollo de los llamados “potenciales convexos” ([46]) que incluyen el potencial de marco y el MSE, y que proporcionan una medida de la dispersión del espectro de los operadores de marcos.

Contexto específico. Sea $\mathcal{W}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $\mathbb{I}$ un conjunto finito o infinito numerable. Una sucesión (posiblemente finita) $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ en $\mathcal{W}$ es un marco para $\mathcal{W}$, si existen constantes positivas $0 < a \leq b$, tales que

$$a\,\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq b\,\|f\|^2 \quad \text{para cada} \quad f \in \mathcal{W}\,.$$

Si $a = b$ decimos que $\mathcal{F}$ es un marco ajustado para $\mathcal{W}$.

Un marco $\mathcal{F}$ para $\mathcal{W}$, proporciona esquemas de codificación - decodificación lineales (típicamente redundantes) y estables de vectores (señales) en $\mathcal{W}$. En efecto, si $\mathcal{V}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, tal que $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathcal{H}$ (e.g. $\mathcal{V} = \mathcal{W}$) entonces, es posible encontrar marcos $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ para $\mathcal{V}$ tales que verifican la siguiente fórmula de reconstrucción

$$f = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, g_i\rangle\ f_i\ , \qquad \text{para cada} \quad f \in \mathcal{W}\,.$$

La representación anterior se encuentra dentro de la teoría de dualidad oblicua (ver [23, 24, 29, 30]). Por lo general, en algunas situaciones aplicadas se desea desarrollar esquemas de codificación - decodificación, como antes, con algunas características adicionales. En algunos casos, buscamos esquemas con propiedades pre-determinadas (e.g., para los cuales la sucesión de normas $\{\|f_i\|^2\}_{i\in\mathbb{I}}$ así como las propiedades espectrales de la familia $\mathcal{F}$ se dan por adelantado), que conducen a lo que se conoce en la literatura como *problema de diseño de marco* (ver [4, 9, 15, 17, 45, 53]). En otros casos, buscamos pares duales oblicuos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ numéricamente robustos, que se conoce como *diseños de marcos óptimos* (ver[7, 24, 31, 46, 51, 59]).

Como ya hemos mencionado, la teoría de dualidad oblicua para marcos finitos es un escenario amplio para el esquema de codificación-decodificación lineal en un espacio de Hilbert $\mathcal{W}$, basado en la noción de muestreo consistente. La teoría de dualidad oblicua ha sido desarrollada y extendida en varias formas (ver [3, 5, 28, 24, 30]). De hecho, se ha aplicado exitosamente al estudio de dualidad para sistemas invariantes por traslaciones finitamente generados en $L^2(\mathbb{R}^d)$ (ver [23, 35, 36]).

Recordemos que Benedetto y Fickus introdujeron un funcional definido para sucesiones finitas de vectores (de norma uno) $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ (donde $\mathbb{I}_n = \{1, \ldots, n\}$), llamado *potencial de marco*, dado por

$$\mathrm{PM}\,(\mathcal{F}) = \sum_{i,\,j\,\in\mathbb{I}_n} |\langle f_i\,,\,f_j\rangle|^{\,2}\ .$$

En el caso que $\dim \mathcal{H} < \infty$, unos de sus mejores resultados muestra que los marcos ajustados de norma uno -que constituyen una clase importante de marcos, pues su fórmula de reconstrucción es simple y presentan propiedades de robustez- pueden caracterizarse como los mínimos (locales) de estos funcionales, entre todos los marcos de norma uno. Desde entonces, ha habido interés en los mínimos (locales) del potencial de marcos, dentro de ciertas clases de marcos, ya que tales mínimos pueden considerarse como sustitutos naturales de los marcos ajustados (ver, por ejemplo [16, 46]). Notemos que, dada $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{H}^n$ entonces $\mathrm{PM}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\,\left(S_{\mathcal{F}}^2\right)$. Recientemente, ha habido interés en la estructura de marcos que minimizan otros potenciales, llamado error medio cuadrático (MSE), dado por $\mathrm{MSE}(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\,\left(S_{\mathcal{F}}^{-1}\right)$ (ver [31, 48, 53]). Tanto el potencial de marco como el MSE son ejemplos de los llamados *potenciales convexos*, introducidos en [46]. Resulta que, los mínimos de estos potenciales convexos comparten la estructura espectral y geométrica de los mínimos del potencial de marco. Es bien conocido, que en el caso $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, los marcos ajustados $\mathcal{F}$ para $\mathcal{W}$ - i.e. mínimos de potenciales convexos- dan lugar a pares duales óptimos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (numéricamente robustos). Por lo tanto, parece evidente que en el caso $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp$ la construcción de pares duales oblicuos robustos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, está relacionado con la construcción de marcos $\mathcal{F}$ que son mínimos de potenciales convexos (e.g. el potencial de marco).

Se sabe que el problema de diseño de marcos, tiene una formulación equivalente en términos de la relación entre la diagonal principal de un operador semi-definido positivo y su espectro. En el contexto finito dimensional esta relación está caracterizada en el Teorema de Schur-Horn de análisis matricial. Han habido recientes avances importantes tanto en el problema de diseño de marcos, como en el Teorema de Schur-Horn en dimesión infinita, principalemte por la fuerte vinculación entre ambos resultados. Existen parametrizaciones completas de los marcos con normas y autovalores (de sus operadores de marco) predeterminados [15], por las llamadas sucesiones de *eigensteps*, que se obtienen en términos de la teoría de entrelace, otro resultado importate de la teoría matricial. Resulta que la estructura espectral de los duales oblicuos (que incluye duales clásicos) de un marcos finito, puede describirse en términos de la relación entre el espectro de un operador semi-definido positivo y el espectro de su compresión a subespacios [48]. En el contexto finito dimensional, estas relaciones se conocen como las *desigualdades de Fan-Pall* (que incluye las desigualdades de entrelace de Cauchy como un caso particular). Sin embargo, en ambos casos, los resultados correspondientes en la teoría de marcos no tienen en cuenta ninguna estructura adicional del marco inicial. Por ejemplo, en el caso del problema de diseño de marcos, parece natural preguntarse si podemos construir un marco estructurado (e.g. wavelet, marcos de Gabor o marcos generados por traslaciones), con estructura predeterminada. Análogamente, en caso que fijemos un marco estructurado $\mathcal{F}$ para $\mathcal{W}$, es natural preguntarse si podemos construir un marco dual estructurado con ciertas propiedades predeterminadas.

Como ejemplo específico de los problemas mencionados anteriormente, consideramos la siguiente situación concreta. Sea $L^2(\mathbb{R}^k)$ el espacio de Hilbert complejo - con respecto a la medida de Lebesgue - y la representación unitaria de $\mathbb{Z}^k$ determinada por $\mathbb{Z}^k \ni \ell \mapsto T_\ell \in L(L^2(\mathbb{R}^k))$, donde $T_\ell(f)(x) = f(x-\ell)$, $x \in \mathbb{R}^k$. Sea $\mathcal{W} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ un subespacio invariante por traslaciones enteras (denominado SIT), es decir que $\mathcal{W}$ es invariante bajo la acción de T_ℓ para todo $\ell \in \mathbb{Z}^k$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ una familia finita en $\mathcal{W}$. Entonces, la familia generada por traslaciones $E(\mathcal{F}) = \{T_\ell f_i\}_{(\ell,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n}$ está contenida en $\mathcal{W}$. Un problema natural en este contexto es el de describir las posibles estructuras de los marcos $E(\mathcal{F})$ (denominados marcos SG); este problema puede considerarse un problema de diseño estructurado. Concretamente, se trata de describir las relaciones entre el espectro y las normas de tales marcos (en realidad, en términos de una estructura interna de espectro y normas que describimos más abajo). Por otro lado, en el caso en que $E(\mathcal{F})$ resulte un marco para $\mathcal{W}$ resulta de interés entender la familia de marcos $E(\mathcal{G})$ que resultan duales para $E(\mathcal{F})$, que se obtengan por traslaciones enteras de una familia inicial $\mathcal{G}$.

Vale la pena aclarar que la noción de potencial de marco definida por Benedetto y Fickus no tiene una extensión natural al conjunto de marcos para un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Sin embargo, utilizando un entorno adecuado, veremos que es posible extender la noción general de potencial convexo al contexto de marcos $E(\mathcal{F})$ generados por traslaciones de una familia finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$. Estas extensiones caracterizan a los marcos $E(\mathcal{F})$ que son ajustados como sus minimizadores, bajo ciertas restricciones naturales. Esto sugiere a su vez, el estudio de los llamados diseños óptimos con propiedades predeterminadas.

Sobre los problemas considerados en esta tesis. Es bien sabido que las propiedades de la familia $E(\mathcal{F})$ con respecto a un subespacio invariante por traslaciones y finitamente generado $\mathcal{W}$, pueden ser estudiadas mediante una fibración del problema: a tal fin consideramos $\Gamma : L^2(\mathbb{R}^k) \to L^2(\mathbb{T}^k, \ell^2(\mathbb{Z}^k))$ dada por $\Gamma f(x) = (\hat{f}(x+\ell))_{\ell\in\mathbb{Z}^k}$ (donde $\hat{f}$ denota la transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$) que es un isomorfismo isométrico; entonces $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$ con cotas a y b si y solo si $\{\Gamma f_i(x)\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ es un marco para $J_{\mathcal{W}}(x)$ (donde $J_{\mathcal{W}}(x) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ es la clausura del subespacio $\{\Gamma(f)(x) : \ f \in \mathcal{W}\}$) con cotas a y b, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Con estas nociones, extendemos la teoría de Fan-Pall al contexto de campos medibles de matrices semi-definidas positivas (en un espacio de medida) y al contexto de compresiones en términos de selecciones medibles de subespacios. Esto nos permite dar una descripción explícita, de lo que llamamos *estructura espectral fina*, de duales $E(\mathcal{G})$ de un marco $E(\mathcal{F})$ fijo, para $\mathcal{W} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ FSIT.

La estructura fina de $E(\mathcal{F})$ como una familia fibrada sobre el toro $\mathbb{T}^k$ junto con la teoría de funciones rango para FSIT's $\mathcal{W}$ (ver [10, 11, 54]) puede utilizarse para desarrollar extensiones naturales de los potenciales convexos a este contexto. Concretamente, dada una función convexa $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos el potencial $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))$ asociado al par $(\varphi, \mathcal{W})$, como una integral sobre $\mathbb{T}^k$, de los correspondientes potenciales en las fibras (para enfoques relacionados con diferentes problemas en FSIT's, ver [1, 35, 36]). El potencial de marco convexo así definido mide la "dispersión"de la estructura espectral fina de la sucesión. Como veremos más adelante, estos potenciales de marcos convexos detectan marcos ajustados como sus mínimos (bajo ciertas condiciones de normalización).

Los potenciales convexos en FSIT's proponen varias cuestiones relacionadas con los problemas de diseños óptimos. En particular, dados $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ FSIT's, tales que $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$ y una familia finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$, tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$, consideramos el problema de diseñar duales oblicuos óptimos $E(\mathcal{G})$ que son las traslaciones enteras de la familia $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ en $\mathcal{V}$ y tal que $\mathcal{G}$ tiene la siguiente restricción de norma $\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 \geq w$, para $w > 0$. Con el fin de hacer frente a este problema, desarrollamos dos nuevas herramientas en el contexto de marcos de traslaciones. Por una parte, obtenemos la estructura espectral fina de marcos duales oblicuos SG de un marco fijo $E(\mathcal{F})$, que describe de forma detallada los autovalores del campo medible de operadores positivos, definido en $\mathbb{T}^k$ correspondiente a los operadores de marco de los duales oblicuos SG de $E(\mathcal{F})$. Como consecuencia, derivamos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de duales oblicuos SG ajustados $E(\mathcal{G})$ de $E(\mathcal{F})$. Por otra parte, consideramos la construcción *water-filling* (tanto para funciones en espacios de probabilidad como para campos medibles de operadores positivos de rango finito) y mostramos que esta contrucción conduce a soluciones óptimas del problema de diseño de duales oblicuos. Esto es, mostramos que las construcciones por *water-filling* son óptimas respecto a la mayorización (considerada en el contexto general de los espacios de probabilidad) que es un resultado de interés independiente. Con estas herramientas se resuelve por completo el problema de diseñar marcos duales oblicuos óptimos con restricciones de norma, mencionado antes; resulta que estos duales oblicuos SG óptimos son más estables que el llamado dual oblicuo canónico. Señalamos que la estructura de la solución óptima se obtiene en términos de un análisis global.

En este trabajo de tesis también hemos desarrollado una extensión del Teorema de Schur-Horn para campos medibles de matrices semi-definidas positivas y tenemos en cuenta las posibles estructuras finas de los marcos SG para FSIT's (ver Sección 1.3 para preliminares en sucesiones Bessel SG y Teorema 2.3.2). Este tipo de análisis, también representa un problema de diseño de marco, donde las características prescriptas se obtienen en términos de alguna estructura interna (o bien) es inherente a la sucesión de Bessel SG, relativa a $\mathcal{W}$ FSIT. Además, mostramos que la teoría de Fan-Pall para campos medibles de matrices semi-definidas positivas puede usarse para obtener una parametrización de sucesiones de Bessel SG con propiedades predeterminadas, similares a las obtenidas en términos de los eigensteps. A la vez, usamos estos resultados para mostrar que existen mínimos de un potencial convexo arbitrario (pero fijo) asociado al par $(\varphi, \mathcal{W})$ con normas predeterminadas. Esto es, para una función convexa fija $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, y para una sucesión fija de números positivos $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n > 0$, mostramos que existen vectores $f_i \in \mathcal{W}$ para $1 \leq i \leq n$, tales que $\|f_i\|^2 = \alpha_i$ y tales que $\mathcal{F}$ minimiza el potencial convexo asociado al par $(\varphi, \mathcal{W})$ entre todas las sucesiones finitas de vectores en $\mathcal{W}$ con normas predeterminadas por los α's.

Como herramienta para abordar este problema, consideramos la noción de mayorización en espacios de probabilidades.

Se ha observado que la posición relativa de los subespacios $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ juega un papel importante cuando comparamos dualidad oblicua con dualidad clásica. Este fenómeno ha sido estudiado, principalmente se ha estudiado el ángulo entre los subespacios $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$. En este trabajo de tesis damos una descripción detallada del roll de la geometría relativa de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ en dualidad oblicua, en el caso de subespacios de dimensión finita. Nuestro análisis se basa en las desigualdades de Lidskii multiplicativas y en la lista completa de los llamados ángulos principales entre $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$. Los resultados obtendidos proporcionan una medida cuantitativa óptima de estas relaciones.

Además consideramos dos problemas intrínsecos a la dualidad oblicua en dimensión finita. En primer lugar notamos que el dual oblicuo canónico $(U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}$ de una rotación rígida $U \cdot \mathcal{F} = \{U\, f_i\}_{i \in \mathbb{I}_n}$ de $\mathcal{F}$, en general, no es una rotación rígida del dual oblicuo canónico $\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{F}$ (como si ocurre en la dualidad clásica). Así, calculamos la rotación rígida U_0 de $\mathcal{W}$ tal que el dual oblicuo canónico $(U_0 \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}$ es óptimo respecto a la submayorización, entre todas las rotaciones rígidas. Esto implica una familia de desigualdades en términos de potenciales convexos.

En segundo lugar, consideremos la norma aliasing correspondiente al muestreo consistente asociado a los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$. La norma aliasing mide la incidencia del complemento ortogonal de $\mathcal{W}$ en la reconstrucción consistente $f \mapsto \tilde{f} = Qf$, donde Q denota la proyección oblicua sobre $\mathcal{W}$ a lo largo de $\mathcal{V}^{\perp}$ (ver [29, 39]). Se sabe que la norma aliasing se puede acotar en términos del ángulo entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ (ver [61]) sin embargo esta cota no es óptima. Calculamos de forma exacta la norma aliasing correspondiente al muestreo consistente. Además introducimos la noción de aliasing para pares duales oblicuos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ que mide la incidencia del complemento ortogonal de $\mathcal{W}$ en el esquema de codificación-decodificación (consistente) correspondiente a $\mathcal{F}$ y a $\mathcal{G}$. En este contexto calculamos las rotaciones rígidas U_0 que minimizan el aliasing de los pares duales $(U \cdot \mathcal{F}, (U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$ para el marco fijo $\mathcal{F}$. Extendemos la noción del aliasing para el caso de FSIT's.

Organización de la tesis. En el Capítulo 1 describimos algunas nociones y hechos preliminares de la teoría de marcos para subespacios en espacios de Hilbert. Con el fin de tratar los potenciales convexos generales, por un lado, consideramos la sub-mayorización y log-mayorización en $\mathbb{R}^d$, que son relaciones espectrales entre operadores positivos de rango finito (o matrices). En particular, incluimos las desigualdades de Lidskii aditivo y su análogo multiplicativo. Por otro lado, consideramos la teoría de mayorización en espacios de probabilidad. Finalizamos el capítulo describiendo la geometría relativa entre subespacios de dimensión finita. En la Sección 2.3.1 obtenemos una caracterización exacta de la existencia de sucesiones de Bessel SG con estructura fina predeterminada en término de las relaciones de mayorización en espacios de probabilidad; este resultado está basado en la versión general del Teorema de Schur-Horn para campos medibles de matrices semi-definitas positivas (sobre espacios de medida). En la Sección 2.3.2 obtenemos una parametrización de todas las sucesiones de Bessel SG con estructura fina predeterminada que generaliza la construcción de eigensteps en el ambiente finito dimensional. Lo anterior se obtiene en términos de la extensión natural del Teorema de desigualdades de Fan-Pall para campos medibles de matrices positivas. En el Capítulo 3, mostramos que dada una sucesión fija de números positivos $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n > 0$, una función convexa $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ y un FSIT $\mathcal{W} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$, existen vectores $f_i \in \mathcal{W}$ para $i \in \mathbb{I}_n$, tales que $\|f_i\|^2 = \alpha_i$ y tales que $\mathcal{F}$ minimiza el potencial convexo asociado al par $(\varphi, \mathcal{W})$, sobre todas las sucesiones finitas. En este sentido, primero consideramos en la Sección 3.3.1 el caso uniforme, en el que la dimensión de las fibras de $\mathcal{W}$ son constantes. Una vez resuelto el caso uniforme, podemos reducir la existencia de sucesiones de Bessel SG óptimas al modelo finito dimensional: desarrollado en la Sección 3.3.2. El caso general del problema de diseño óptimo con normas predeterminadas en un FSIT, es estudiado en la Sección

3.3.3. En la Sección 4.1 obtenemos una conveniente parametrización del conjunto de los duales oblicuos de un marco fijo y usamos esto para calcular los posibles autovalores de los operadores de marco de los duales oblicuos. A partir de estos resultados calculamos la estructura espectral fina de los duales oblicuos en términos de relaciones de entrelace. En la Sección 4.2 obtenemos resultados, análogos a los anteriores, para duales oblicuos SG en FSIT's. En la Sección 5.1, luego de recordar algunas nociones estandar de análisis funcional, calculamos las rotaciones rígidas U de $\mathcal{W}$ tales que la dispersión de los autovalores del operador de marco del dual oblicuo $(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}$ es mínima, respecto de la submayorización. También describimos propiedades de los marcos duales oblicuos óptimos (con restricciones de norma) correspondientes a la rotación óptima de $\mathcal{F}$. En la Sección 5.2 estudiamos el problema de diseño óptimo de marcos duales oblicuos $E(\mathcal{G})$- de un marco SG fijo $E(\mathcal{F})$ (finitamente generado)- que satisface ciertas restricciones de norma. En primer lugar mostramos que la construcción *water-filling* para funciones positivas en espacios de probabilidad es óptima, respecto a la submayorización. Luego construimos el dual oblicuo SG óptimo con restricciones de norma y explicamos la relación de nuestra construcción con la construcción natural de *water-filling* (no-conmutativo) para campos medibles de operadores positivos y de rango finito. En la última Sección del trabajo, calculamos de forma exacta el valor de la norma aliasing del muestreo consistente basado en los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ e introducimos la noción de aliasing para pares duales oblicuos $(\mathcal{F},\mathcal{G})$. En este contexto, calculamos las rotaciones rígidas U de $\mathcal{W}$ que minimizan el aliasing para el par dual oblicuo $(U\cdot\mathcal{F},(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$. Finalmente, extendemos la noción de aliasing al contexto de SIT's. Los problemas tratados en esta Sección no son de naturaleza global, sino que se resuelven a nivel de las fibras.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las principales notaciones que utilizaremos a lo largo de la tesis. Además, describimos algunas nociones y hechos preliminares de la teoría de marcos clásica y la teoría de marcos generados por traslaciones enteras. Con el fin de desarrollar las desigualdades de Fan-Pall y el Teorema de Schur-Horn para campos medibles (ver Capítulo 2) recordamos las definiciones de mayorización- en vectores de $\mathbb{R}^d$ y en espacios de probabilidad- y algunas propiedades útiles. Por último describimos la geometría relativa entre subespacios de dimensión finita, de gran utilidad en el problema de diseños de marcos y en el cálculo de la norma aliasing (ver Capítulo 5).

1.1. Notaciones y nociones básicas

Usaremos las letras $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, etc, para denotar a los espacios de Hilbert complejos (separables). Consideramos

$$\mathbb{M} = \mathbb{I}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, p\} \quad \text{para} \quad p \in \mathbb{N} \quad \text{o} \quad \mathbb{M} = \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

de manera que $\dim \mathcal{H} = |\mathbb{M}|$. $\mathbb{I}$ será un conjunto finito o infinito numerable de índices. Enumeramos a continuación algunas notaciones y conceptos básicos que se usarán en todo el trabajo:

1. Llamaremos $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al espacio de operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$.

2. Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, escribiremos $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, que es una $\mathbb{C}-$álgebra.

3. Si $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, notaremos $R(C)$ a su rango y $\ker C$ a su núcleo.

4. Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, su norma (de operadores) es

$$\|A\| = \sup\{\|A\xi\| : \xi \in \mathcal{H}_1, \ \ \|\xi\| = 1\} = \text{mín}\{M \geq 0 : \|A\xi\| \leq M\|\xi\|, \ \ \xi \in \mathcal{H}_1\}.$$

   Con esta norma, $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es un espacio de Banach (y $L(\mathcal{H})$ es un álgebra de Banach).

5. $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ denota al grupo de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$, qque resulta abierto.

6. Si $A \in L(\mathcal{H})$, su espectro es

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \mathcal{G}l(\mathcal{H})\}.$$

7. $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \{A \in L(\mathcal{H}) : A^* = A\}$, es el subespacio real de operadores autoadjuntos.

8. $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{U \in \mathcal{G}l(\mathcal{H}) : U^{-1} = U^*\}$, el grupo unitario de $\mathcal{H}$.

9. $L(\mathcal{H})^+ = \{A \in L(\mathcal{H}) : \langle A\xi, \ \xi\rangle \geq 0, \ \text{ para todo } \ \xi \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})$, el cono de los operadores semidefinidos positivos.

10. Notaremos $\mathcal{G}l(\mathcal{H})^+ = \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \cap L(\mathcal{H})^+$, al conjunto de los operadores positivos inversibles.

Por otra parte, se usará sin mayores detalles algunas propiedades de los operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, como por ejemplo:

1. Existencia de raíces cuadradas de operadores en $L(\mathcal{H})^+$.

2. La descomposición polar (DP) $A = U|A|$ para cualquier $A \in L(\mathcal{H})$, donde $|A| = (A^*A)^{1/2}$ y U es una isometría parcial adecuada. También la DP a derecha: $A = |A^*|U$.

3. Si $A \in L(\mathcal{H})$, entonces $R(A^*)^\perp = \ker A$ y $\ker A^*A = \ker A$.

4. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $R(A) \subset R(A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)}$.

En el caso en que $\mathcal{H}$ es de dimensión finita, lo identificaremos con $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$. Así:

1. Si $\mathcal{K} = \mathbb{C}^k$, $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ se indentificará con las matrices $k \times d$ a valores complejos, notadas $\mathcal{M}_{k\times d}(\mathbb{C})$.

2. Si $\mathcal{H} = \mathcal{K} = \mathbb{C}^d$, identificaremos con $L(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ a las matrices complejas $d \times d$.

3. Si $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, notamos por $\|T\|$ a su norma espectral, por $\operatorname{rk}(T) = \dim R(T)$ a la dimensión de su rango y por $\operatorname{tr}(T)$ a su traza.

4. $\mathcal{G}l(d) \subseteq \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ es el grupo de las matrices inversibles.

5. $\mathcal{A}(d) \subseteq \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ es el subespacio real de las matrices autoadjuntas.

6. Con $\mathcal{U}(d) \subseteq \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ denotamos al conjunto de las matrices unitarias.

7. $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ denota al conjunto de las matrices semidefinidas positivas.

8. $\mathcal{G}l(d)^+ = \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \cap \mathcal{G}l(d)$, es el conjunto de las matrices positivas inversibles.

Finalmente, para un $x \in \mathbb{R}^d$ denotamos por $x^\downarrow \in \mathbb{R}^d$ ($x^\uparrow \in \mathbb{R}^d$ respectivamente) al re-ordenamiento de x en forma decreciente (creciente respectivamente). Notamos por $(\mathbb{R}^d)^\downarrow = \{x \in \mathbb{R}^d : x = x^\downarrow\}$ al conjunto de vectores cuyas entradas están ordenadas en forma decreciente, y $(\mathbb{R}^d)^\uparrow = \{x \in \mathbb{R}^d : \ x = x^\uparrow\}$ al de vectores cuyas entradas están ordenadas en forma creciente.

Dada $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $\lambda(S) = \lambda^\downarrow(S) = (\lambda_1(S), \ldots, \lambda_d(S)) \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ es el vector de autovalores de S - contando multiplicidades - dispuestos en orden decreciente. Análogamente, denotamos con $\lambda^\uparrow(S) \in (\mathbb{R}^d)^\uparrow$ al vector de autovalores de S ordenados al revés.

Si $W \subseteq \mathbb{C}^d$ es un subespacio notamos por $P_W \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ a la proyección ortogonal sobre W. Dados $x , y \in \mathbb{C}^d$ denotamos por $x \otimes y \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ a la matriz de rango uno, dada por

$$x \otimes y\,(z) = \langle z , y\rangle\, x \quad \text{ para cada } \quad z \in \mathbb{C}^d \, . \tag{1.2}$$

Notemos que, si $x \neq 0$, entonces la proyección $P_x \overset{\text{def}}{=} P_{\operatorname{span}\{x\}} = \|x\|^{-2}\, x \otimes x$.

1.2. Marcos en (sub)espacios de Hilbert

Sea $\mathcal{W}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ una sucesión en $\mathcal{W}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una *sucesión de Bessel* en $\mathcal{W}$, si existe $b > 0$ tal que:

$$\sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq b\,\|f\|^2, \qquad \text{para toda} \qquad f \in \mathcal{W}. \tag{1.3}$$

En este caso se verifica que si $\{c_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \ell^2(\mathbb{I})$, entonces

$$\|\sum_{i\in\mathbb{I}} c_i f_i\|^2 \leq b \sum_{i\in\mathbb{I}} |c_i|^2.$$

En particular $\|f_i\|^2 \leq b$ para todo $i \in \mathbb{I}$. Esto significa que toda sucesión de Bessel es acotada superiormente en norma. En caso que $\inf_{i\in\mathbb{I}} \|f_i\| > 0$, diremos que la sucesión de Bessel es acotada inferiormente.

Decimos que $\mathcal{F}$ es un *marco* en $\mathcal{W}$, si existen constantes $0 < a \leq b$ tales que:

$$a\,\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq b\,\|f\|^2, \qquad \text{para toda} \qquad f \in \mathcal{W}. \tag{1.4}$$

Estas constantes a y b se denominan *cota inferior* y *cota superior* del marco $\mathcal{F}$, respectivamente. El marco $\mathcal{F}$ se denomina *ajustado* si estas cotas coinciden y *ajustado normalizado* (o también de *Parseval*) cuando ambas cotas son iguales a 1. Diremos que $\mathcal{F}$ es un *marco de norma uniforme*, si $\|f_i\| = c$ para todo $i \in \mathbb{I}$.

Si $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ es una sucesión de Bessel en $\mathcal{H}$, definimos el *operador de análisis* $T^* : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{I})$ dado por

$$\mathcal{H} \ni f \xmapsto{T^*} \big(\langle f, f_i\rangle\big)_{i\in\mathbb{I}} \in \ell^2(\mathbb{I}).$$

La Eq. (1.3) significa que $T^* \in L(\mathcal{H}, \ell^2(\mathbb{I}))$ (o sea que T^* es acotado, $\|T^*\|^2 \leq b$), y la Eq. (1.4) dice que $\mathcal{F}$ es un marco si y sólo si T^* es, además, acotado inferiormente. Esto último equivale a la suryectividad (y continuidad) del adjunto de T^*, $T \in L(\ell^2(\mathbb{I}), \mathcal{H})$ dado por

$$\ell^2(\mathbb{I}) \ni c = (c_i)_{i\in\mathbb{I}} \longmapsto T(c) = \sum_{i\in\mathbb{I}} c_i f_i \in \ell^2(\mathbb{I}).$$

Denominamos a T *operador de síntesis* de $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ es un marco de $\mathcal{W}$, definimos el *operador de marco* de $\mathcal{F}$ dado por

$$Sf = TT^*f = T\big(\langle f, f_i\rangle\big)_{i\in\mathbb{I}} = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, f_i\rangle f_i, \quad f \in \mathcal{W}. \tag{1.5}$$

Notemos que S es positivo e inversible en $\mathcal{W}$. De la Ec. (1.5) se deducen las siguientes fórmulas de reconstrucción:

$$f = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, f_i\rangle \;\; S^\dagger f_i = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, S^\dagger f_i\rangle \;\; f_i \qquad \text{para todo} \qquad f \in \mathcal{W}, \tag{1.6}$$

donde $S^\dagger$ denota la pseudo-inversa de Moore-Penrose de S (operador semi-definido positivo y de rango cerrado).

A la sucesión numérica $\big(\langle f, S^\dagger f_i\rangle\big)_{i\in\mathbb{I}}$ se la denomina *coeficientes de marco* de f para $\mathcal{F}$. Tiene la siguiente propiedad de optimalidad: si

$$c = (c_i)_{i\in\mathbb{I}} \in \ell^2(\mathbb{I}) \quad \text{ y } \quad f = \sum_{i\in\mathbb{I}} c_i f_i \implies \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle f, S^\dagger f_i\rangle|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}} |c_i|^2.$$

Es decir que los coeficientes de marco de f para $\mathcal{F}$ dan la recostrucción óptima para cada $f \in \mathcal{W}$. Definimos también, el *marco dual* de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, donde $g_i = S^\dagger f_i, i \in \mathbb{I}$. Notemos que la Ec. (1.6) se transforma en

$$f = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, f_i\rangle g_i = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, g_i\rangle f_i \quad \text{para todo} \quad f \in \mathcal{W}.$$

Con el fin de describir la dualidad oblicua, fijamos dos subespacios cerrados $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$, esto es $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{V} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{W}^\perp \cap \mathcal{V} = \{0\}$. Por lo tanto, $\mathcal{W}^\perp$ es un complemento (algebraico) de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$. En este caso, está bien definido $P_\mathcal{W}|_\mathcal{V} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, que resulta un isomorfismo lineal y acotado; en particular $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ como espacios de Hilbert. Por otra parte, las condiciones $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^\perp = \mathcal{H}$ son equivalentes.

Definición 1.2.1. (Ver [29, 30, 24]) Sean $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$. Fijado $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ marco para $\mathcal{W}$, dada una sucesión de Bessel $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ en $\mathcal{V}$, decimos que $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{V}$-dual (oblicuo) de $\mathcal{F}$ si

$$g = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle g, f_i\rangle \ g_i = T_\mathcal{G} T_\mathcal{F}^* \ g, \quad \forall \ g \in \mathcal{V}. \tag{1.7}$$

△

En tal caso $T_\mathcal{G} T_\mathcal{F}^* = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$, donde $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$ denota la proyección oblicua con $R(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}) = \mathcal{V}$ y $\ker(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}) = \mathcal{W}^\perp$ (ver [29, 30]). Así, adjuntando en ambos lados de la Eq.(1.7) tenemos que

$$(T_\mathcal{G} T_\mathcal{F}^*)^* = T_\mathcal{F} T_\mathcal{G}^* = (P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp})^* = P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp},$$

por lo tanto, $T_\mathcal{G}$ es suryectivo en $\mathcal{V}$ y entonces $\mathcal{G}$ es un marco para $\mathcal{V}$. Así, obtenemos otra fórmula de reconstrucción

$$f = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, g_i\rangle \ f_i, \quad \forall \ f \in \mathcal{W}.$$

Consideramos el conjunto de los $\mathcal{V}$-duales oblicuos de $\mathcal{F}$, dado por

$$\mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F}) \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}} \text{ es un } \mathcal{V}\text{-dual de } \mathcal{F}\} \ . \tag{1.8}$$

Observación 1.2.2. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ un marco para $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, entonces la sucesión de Bessel $\mathcal{G}$ en $\mathcal{W}$ es un $\mathcal{W}$-dual de $\mathcal{F}$ si es un marco dual para $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$ en el sentido clásico (ver [21]), i.e. $T_\mathcal{G} T_\mathcal{F}^* = P_\mathcal{W}$. Así se tiene el siguiente conjunto

$$\mathcal{D}_\mathcal{W}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(\mathcal{F}) \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}} \text{ es un marco dual para } \mathcal{F} \text{ en } \mathcal{W}\} \ ,$$

conocido como el conjunto de los duales clásicos de $\mathcal{F}$.

En el conjunto de los duales clásicos de $\mathcal{F}$, existe un elemento distinguido, llamado el *dual canónico* (clásico) de $\mathcal{F}$, notado por

$$\mathcal{F}^\# = \{f_i^\#\}_{i\in\mathbb{I}} \quad \text{y dado por} \quad f_i^\# = S_\mathcal{F}^\dagger \ f_i \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}, \tag{1.9}$$

En el contexto general de la dualidad oblicua también existe un marco $\mathcal{V}$-dual para $\mathcal{F}$ distinguido, llamado *$\mathcal{V}$-dual canónico*, notado por

$$\mathcal{F}_\mathcal{V}^\# = \{f_{\mathcal{V},i}^\#\}_{i\in\mathbb{I}} \quad \text{y dado por} \quad f_{\mathcal{V},i}^\# = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} \, f_i^\# \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I} \ , \tag{1.10}$$

donde $\mathcal{F}^\# = \{f_i^\#\}_{i\in\mathbb{I}}$ es el dual canónico de $\mathcal{F}$. El esquema de codificación-decodificación basado en el par dual oblicuo $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_\mathcal{V}^\#)$ tiene ciertas propiedades de optimalidad (ver [29, 30]). △

1.3. Marcos en subespacios invariantes por traslaciones enteras

En esta Sección vamos a considerar a $L^2(\mathbb{R}^k)$ como espacio de Hilbert complejo y separable, respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 1.3.1. Sea $L^2(\mathbb{R}^k)$ espacio de Hilbert complejo y separable.

1. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^k)$. Decimos que $\mathcal{V}$ es un *subespacio invariante por traslaciones enteras* (SIT) si:
$$f \in \mathcal{V} \implies T_\ell f \in \mathcal{V} \quad \text{para cualquier} \quad \ell \in \mathbb{Z}^k,$$
donde $T_y f(x) = f(x-y)$ es la traslación por $y \in \mathbb{R}^k$.

2. Sea $\mathcal{C}$ un subespacio de $L^2(\mathbb{R}^k)$. Consideramos el SIT *generado por* $\mathcal{C}$, dado por
$$\mathcal{S}(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\text{span}}\ \{T_\ell f : f \in \mathcal{C},\ \ell \in \mathbb{Z}^k\}. \tag{1.11}$$
$\mathcal{S}(\mathcal{C})$ es el SIT mas pequeño que contiene a $\mathcal{C}$.

3. Sea $\mathcal{V} \subseteq L^2(\mathbb{R}^k)$ un SIT. Decimos que $\mathcal{V}$ es *finitamente generado* (FSIT) si existe un conjunto finito $\mathcal{C} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ tal que $\mathcal{V} = S(\mathcal{C})$. En tal caso, la *longitud* de $\mathcal{V}$ es el mínimo de $\#(\mathcal{C})$ (i.e. el cardinal de $\mathcal{C}$) tal que $\mathcal{V} = S(\mathcal{C})$. Si $\mathcal{C}$ es unitario, decimos que $\mathcal{V}$ es un SIT *principal.*

$\triangle$

En la Sección 2.1 mostaremos la existencia de representaciones espectrales medibles para operadores SP autoadjuntos, cuyos rangos están en un FSIT.

Con el fin de describir la estructura fina de un SIT consideramos la siguiente representación de $L^2(\mathbb{R}^k)$ (ver [10, 11, 54] y [14] para extender estos conceptos al contexto más general de las acciones de grupos abelianos localmente compactos). Sea $\mathbb{T} = [-1/2, 1/2)$ dotado de la medida de Lebesgue y sea $L^2(\mathbb{T}^k, \ell^2(\mathbb{Z}^k))$ el espacio de Hilbert de las funciones a valores en $\ell^2(\mathbb{Z}^k)$ de cuadrado integrable, que consiste en todas las funciones medibles a valores vectoriales $\phi : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ con la norma
$$\|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{T}^k} \|\phi(x)\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^k)}\ dx < \infty.$$
Entonces, tiene sentido considerar la función $\Gamma : L^2(\mathbb{R}^k) \to L^2(\mathbb{T}^k, \ell^2(\mathbb{Z}^k))$ definida para $f \in L^1(\mathbb{R}^k) \cap L^2(\mathbb{R}^k)$ por
$$\Gamma f : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)\ , \quad \Gamma f(x) = (\hat{f}(x+\ell))_{\ell \in \mathbb{Z}^k}, \tag{1.12}$$
$\hat{f}$ denota la transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$. En este caso Γ resulta un isomorfismo isométrico entre $L^2(\mathbb{R}^k)$ y $L^2(\mathbb{T}^k, \ell^2(\mathbb{Z}^k))$.

Sea $\mathcal{V} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ un SIT. Entonces, existe una función $J_\mathcal{V} : \mathbb{T}^k \to \{$ subespacios cerrados de $\ell^2(\mathbb{Z}^k)\}$ tal que: si $P_{J_\mathcal{V}(x)}$ denota la proyección ortogonal sobre $J_\mathcal{V}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$, entonces para $\xi, \eta \in \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ la función $x \mapsto \langle P_{J_\mathcal{V}(x)}\, \xi\, , \, \eta\rangle$ es medible y
$$\mathcal{V} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^k) : \Gamma f(x) \in J_\mathcal{V}(x) \ \text{ para } \ x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.}\}. \tag{1.13}$$
La función $J_\mathcal{V}$ es la *función rango medible* asociada a $\mathcal{V}$. Por [11, Prop.1.5], la Eq. (1.13) establece una biyección entre SIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y las funciones rango medibles. En el caso que $\mathcal{V} = S(\mathcal{A}) \subseteq L^2(\mathbb{R}^k)$ es el SIT generado por $\mathcal{A} = \{h_i : i \in \mathbb{I}\} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$, donde $\mathbb{I}$ es un conjunto finito o infinito numerable, entonces para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. tenemos que
$$J_\mathcal{V}(x) = \{\Gamma h_i(x) :\ i \in \mathbb{I}\}^{-\|\cdot\|}\,. \tag{1.14}$$

Definición 1.3.2. Sea $\mathcal{V}$ un SIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $d(x) = \dim J_{\mathcal{V}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. El *espectro* de $\mathcal{V}$ es el conjunto medible dado por
$$\operatorname{Spec}(\mathcal{V}) = \{x \in \mathbb{T}^k : d(x) \neq 0\}.$$

$\triangle$

Recordemos que una transformación lineal acotada $S \in L(L^2(\mathbb{R}^k))$ *conmuta con las traslaciones* (SP) si $T_\ell\, S = S\, T_\ell$ para cada $\ell \in \mathbb{Z}^k$. En este caso (ver [11, Teorema 4.5]) existe un campo (debilmente) medible de operadores $[S]_{(\cdot)} : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ (i.e. tal que para cada $\xi,\, \eta \in \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ la función $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \langle [S]_x\, \xi \,,\, \eta\rangle$ es medible) y esencialmente acotada (i.e. la función $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \|\, [S]_x \,\|$ es esencialmente acotada) tal que

$$[S]_x\big(\Gamma f(x)\big) = \Gamma(Sf)(x) \quad \text{ para } x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^k)\,. \tag{1.15}$$

Además, $\|S\| = \sup \operatorname{esc}_{x\in\mathbb{T}^k} \|\, [S]_x \,\|$. Recíprocamente, si $s : \mathbb{T}^k \to L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))$ es un campo de operadores debilmente medible y esencialmetne acotado entonces, existe un único operador acotado $S \in L(L^2(\mathbb{R}^k))$ que es SP y tal que $[S] = s$. Por ejemplo, sea $\mathcal{V}$ un SIT y $P_{\mathcal{V}} \in L(L^2(\mathbb{R}^k))$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{V}$. Entonces, $P_{\mathcal{V}}$ es SP de modo que la función $[P_{\mathcal{V}}](\cdot) : \mathbb{T}^k \to L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))$ está dada por $[P_{\mathcal{V}}]_x = P_{J_{\mathcal{V}}(x)}$, i.e. la proyección ortogonal sobre $J_{\mathcal{V}}(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Las nociones previas asociadas a SIT's y operadores SP, permitirán desarrollar un estudio detallado de los marcos generados por translaciones. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ una sucesión (posiblemente finita) en $L^2(\mathbb{R}^k)$. Notamos con $E(\mathcal{F})$ a la familia generada por traslaciones (SG) de $\mathcal{F}$, dada por

$$E(\mathcal{F}) = \{T_\ell f_i\}_{(\ell,i)\ \in\ \mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}}.$$

Para $x \in \mathbb{T}^k$, sea $\Gamma\mathcal{F}(x) = \{\Gamma f_i(x)\}_{i\in\mathbb{I}}$, sucesión (posiblemente finita) en $\ell^2(\mathbb{Z}^k)$. Entonces (ver [11, 54])

$$E(\mathcal{F}) \quad \text{es una sucesión b-Bessel si y sólo si} \quad \Gamma\mathcal{F}(x) \quad \text{es una sucesión b-Bessel para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

En este caso, tiene sentido considerar $T_{\Gamma\mathcal{F}(x)} : \ell^2(\mathbb{I}) \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ y $S_{\Gamma\mathcal{F}(x)} : \ell^2(\mathbb{Z}^k) \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ el operador de síntesis y el operador de marco de $\Gamma\mathcal{F}(x)$, respectivamente. Si $E(\mathcal{F})$ es b-Bessel entonces $S_{E(\mathcal{F})}$ es SP.

Si $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ y $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ son tales que $E(\mathcal{F})$ y $E(\mathcal{G})$ son sucesiones de Bessel, entonces (ver [35, 54]) se verifica la siguiente relación funtamental:

$$[T_{E(\mathcal{G})}\, T^*_{E(\mathcal{F})}]_x = T_{\Gamma\mathcal{G}(x)}\, T^*_{\Gamma\mathcal{F}(x)}\ , \quad \text{para } x \in \mathbb{T}^k \quad \text{ctp}\,. \tag{1.16}$$

La Eq. (1.16) tiene algunas consecuencias importantes, por ejemplo si $\mathcal{W}$ es un SIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y además asumimos que $\mathcal{F},\, \mathcal{G} \in \mathcal{W}^n$ entonces:

1. Para cada $f,\, g \in L^2(\mathbb{R}^k)$,

   $$\langle S_{E(\mathcal{F})}\, f,\, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^k} \langle S_{\Gamma\mathcal{F}(x)}\ \Gamma f(x),\, \Gamma g(x)\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^k)}\ dx\ .$$

   Por un lado, este hecho implica que $[S_{E(\mathcal{F})}]_x = S_{\Gamma\mathcal{F}(x)}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Por otra parte, se verifica que $E(\mathcal{F})$ es marco para $\mathcal{W}$ con constantes de marco $0 < a \leq b$ si y sólo si $\Gamma\mathcal{F}(x)$ es marco para $J_{\mathcal{W}}(x)$ con constantes de marco $0 < a \leq b$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp (ver [11]).

2. Como $[P_{\mathcal{W}}]_x = P_{J_{\mathcal{W}}(x)}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., entonces, $E(\mathcal{G})$ es un dual (clásico) para $E(\mathcal{F})$ en $\mathcal{W}$ si y sólo si $\Gamma\mathcal{G}(x)$ es un dual (clásico) para $\Gamma\mathcal{F}(x)$ en $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. (ver [11, 35, 36]).

Finalizamos la Sección con la noción de dualidad oblicua SG. Para esto, consideramos $\mathcal{V}$, $\mathcal{W} \subseteq L^2(\mathbb{R}^k)$ dos FSIT's tales que $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$ y $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ una sucesión finita tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$.

Dada $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ tal que $E(\mathcal{G})$ es marco para $\mathcal{V}$. A partir de [35] (ver también [23, 34, 36]), consideramos el conjunto de los $\mathcal{V}$-duales SG de $E(\mathcal{F})$:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(E(\mathcal{F})) = \{E(\mathcal{G}) : E(\mathcal{G}) \text{ es } \mathcal{V}- \text{ dual SG de } E(\mathcal{F})\ \}. \tag{1.17}$$

Si $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, escribimos $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}^{SG}(\mathcal{F})$ (que es la clase de los duales SG de tipo I, en la terminología de [35]). Dado $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ obtenemos las siguientes fórmulas de reconstrucción: para $f \in \mathcal{W}$ y $g \in \mathcal{V}$, respectivamente

$$f = \sum_{(\ell,\,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n} \langle f,\, T_\ell\, g_i\rangle\ T_\ell\, f_i \quad \text{y} \quad g = \sum_{(\ell,\,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n} \langle g,\, T_\ell\, f_i\rangle\ T_\ell\, g_i\,.$$

En este contexto, si $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ y $S_{E(\mathcal{G})}$ es el operador de marco de $E(\mathcal{G})$, entonces $S_{E(\mathcal{G})}$ es un operador SP tal que $[S_{E(\mathcal{G})}]_x = S_{\Gamma\mathcal{G}(x)}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. En la Sección 4.2 (ver Teorema 4.2.4) describimos la estructura espectral fina de $E(\mathcal{G})$ esto es la función $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_j([S_{E(\mathcal{G})}]_x)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$, donde $\Big(\lambda_j([S_{E(\mathcal{G})}]_x)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ denota la sucesión de autovalores del operador positivo de rango finito $[S_{E(\mathcal{G})}]_x$, contando multiplicidades y ordenados en forma no-creciente para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

1.4. Mayorización

La mayorización entre vectores (ver [6, 44]) juega un papel importante en la teoría de marcos. Por un lado, permite caraterizar la existencia de marcos con ciertas propiedades predeterminadas (ver [4, 15, 17]). Y por otro, la mayorización es una relación de pre-orden que implica una familia de desigualdades de trazas. Este último hecho se usa para explicar la estructura de los mínimos del potencial de marco de Benedetto-Fickus ([9, 16]), como así también, para describir potenciales convexos más generales para marcos finitos (ver [45, 46, 48, 49, 51]).

1.4.1. Mayorización en $\mathbb{R}^d$

En esta sección presentamos algunos aspectos básicos de la teoría de mayorización. En el libro [6] se puede hallar un estudio más detallado sobre esta noción. Dado $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, denotamos por $x^\downarrow \in \mathbb{R}^d$ el vector de coordenadas ordenadas de forma decreciente, obtenido por permutaciones de las coordenadas de x. Si $x, y \in \mathbb{R}^d$ entonces decimos que x está *sub-mayorizado* por y, y notamos $x \prec_w y$, si

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_k} x_i^\downarrow \le \sum_{i\in\mathbb{I}_k} y_i^\downarrow \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{I}_d = \{1, \ldots, d\}. \tag{1.18}$$

Si $x \prec_w y$ y además se verifica que

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_d} x_i = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} y_i, \tag{1.19}$$

decimos que x está *mayorizado* por y, y lo notamos $x \prec y$. Como consecuencia inmediata de la definición, notemos que tanto la noción de submayorización como la de mayorización son invariantes bajo permutaciones de las coordenadas de vectores. Por otro lado, si $x \prec y$, es decir valen las ecuaciones (1.18) y (1.19) entonces también vale

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_k} y_i^\uparrow \le \sum_{i\in\mathbb{I}_k} x_i^\uparrow \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{I}_d = \{1, \ldots, d\}, \tag{1.20}$$

donde $x^\uparrow$ denota el vector de coordenadas ordenadas en forma creciente obtenida de x por permutaciones de sus coordenadas. De hecho, basta que dos cualesquiera de las tres condiciones dadas por estas fórmulas valgan, para que valga la tercera.

Ejemplo 1.4.1. Denotamos con $\mathbb{1} = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^d$, al vector con todas sus entradas iguales a uno. Si $x \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ y $\sum_{i \in \mathbb{I}_d} x_1 = 1$, entonces

$$\frac{1}{d}\mathbb{1} = \left(\frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\right) \prec (x_1, \ldots, x_d) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

La noción de mayorización se presenta naturalmente en varios contextos. Por ejemplo, en física, si x_i representa la probabilidad de un sistema de encontrarse en el estado i, la relación $x \prec y$ nos indica que el estado x es «más caótico» que el estado y. En economía, si $y_1, \ldots, y_d$ y $x_1, \ldots, x_d$ representan ingresos de los individuos $1, \ldots, d$ en los países x e y, respectivamente, entonces $x \prec y$ se interpreta como que la distribución de ingresos es más equitativa en x que en y. △

La log-mayorización entre vectores en $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$ es un análogo multiplicativo de la mayorización en $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$. En efecto, dados x, $y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ decimos que x está *log-mayorizado* por y, notado $x \prec_{\log} y$, si

$$\prod_{i \in \mathbb{I}_k} x_i^\downarrow \leq \prod_{i \in \mathbb{I}_k} y_i^\downarrow \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{I}_{d-1} \quad \text{y} \quad \prod_{i \in \mathbb{I}_d} x_i^\downarrow = \prod_{i \in \mathbb{I}_d} y_i^\downarrow \ .$$

Si x, $y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ son tales que $x \prec_{\log}$ entonces $x \prec_w y$ (ver [6]). Por otro lado, escribimos $x \leqslant y$ si $x_i \leq y_i$ para cada $i \in \mathbb{I}_d$. Un ejercicio estándar de análisis matricial es mostrar que si x, $y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ se verifica: $x \leqslant y \implies x^\downarrow \leqslant y^\downarrow \implies x \prec_{\log} y \implies x \prec_w y$.

Nuestro interés en la mayorización está motivado por la relación de esta noción con las desigualdades de trazas para funciones convexas. Recordemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si dados $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$ se verifica que:

$$f(t\,x + (1-t)\ y) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y).$$

A partir de esta definición consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0}) &= \{\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ ,\ \varphi \text{ es convexa}\} \\ \text{Conv}_{\text{s}}(\mathbb{R}_{\geq 0}) &= \{\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})\ ,\ \varphi \text{ es estrictamente convexa}\}. \end{aligned}$$

Considerando las nociones anteriores, describimos algunas caraterizaciones de la mayorización.

Teorema 1.4.2. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $x \prec y$.
2. Para toda $h \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$

$$\text{tr}\,(h(x)) \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \sum_{i \in \mathbb{I}_d} h(x_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{I}_d} h(y_i) = \text{tr}\,(h(y)) \ .$$

3. $\phi(x) \prec_w \phi(y)$, donde $\phi : \mathbb{R}^d_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ es inducida por $h \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y dado por

$$\phi(x) = (h(x_1), \cdots, h(x_d)) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}.$$

□

Teorema 1.4.3. Sean $x, y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $x \prec_w y$.
2. $\operatorname{tr}(h(x)) \leq \operatorname{tr}(h(y))$, para toda $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y no-decreciente. $\square$

Sea $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ una matriz y consideremos $|A| = (A^*A)^{1/2}$ su módulo, a lo largo de la tesis notamos con:

a. $\lambda(A) \in \mathbb{C}^d$ al vector autovalores de A contando multiplicidad.

b. $\sigma(A)$ al vector de autovalores de $|A|$ (también llamado vector de valores singulares de A) contando multiplicidad y ordenado de forma decreciente.

c. $d(A) = (a_{11}, \ldots, a_{dd}) \in \mathbb{C}^d$ a la diagonal principal de A.

La familia de normas unitariamente invariantes es bien conocida y forma una clase importante de normas en el análisis matricial.

Definición 1.4.4. Una norma unitariamente invariante (NUI) $|||\cdot|||$ en $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ es una norma que satisface

$$|||U\,T\,V||| = |||T|||$$

para cada U, V, $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tal que U, V son matrices unitarias. $\triangle$

Ejemplo 1.4.5. Como ejemplos de NUI's consideramos:

1. La norma espectral $\|\cdot\|_{sp}$, dada por
$$\|T\|_{sp} = \sigma_1(T),$$
donde $\sigma_1(T)$ es el valor singular de T más grande.

En el caso que $\dim \mathcal{V} = d \in \mathbb{N}$ consideramos

2. Las p-normas. Dado $1 \leq p < \infty$
$$\|T\|_p = \left(\sum_{j \in \mathbb{I}_d} \sigma_j(T)^p\right)^{1/p} ,$$
donde $\sigma_k(T) = \lambda_k(|T|) = \lambda_k(T^*T)^{1/2}$ para $1 \leq k \leq d$, son los valores singulares de T.

3. Las normas Ky-Fan. Dado $k = \{1, \ldots, d\}$
$$\|T\|_{(k)} = \sum_{j \in \mathbb{I}_k} \sigma_j(T) \ .$$

Notemos que $\|T\|_{(1)} = \|T\|_{sp}$ y $\|T\|_{(d)} = \|T\|_1$ (1-norma). $\triangle$

Con el fin de caracterizar la existencia de marcos generados por traslaciones enteras con estructura fina predeterminada en términos de relaciones de mayorización, en el Capítulo 2, extendemos nociones y resultados clásicos de análisis matricial, como el Teorema de Schur-Horn y las Desigualdades de Fan-Pall para campos medibles de matrices autoadjuntas. A continuación, enunciamos algunos resultados clásicos de análisis matricial, tales como: el Principio de dominación de Ky-Fan, el Teorema de Schur-Horn, el Teorema de Lidskii versión aditiva y el Teorema de entrelace de Cauchy.

El siguiente teorema es una caracterización de las NUI's en términos de la submayorización. Para un mayor detalle de este resultado ver [6].

Teorema 1.4.6. (Principio de dominación de Ky-Fan). Sean $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Entonces son equivalentes:

1. $|||A||| \leq |||B|||$, para toda NUI $|||\cdot|||$.
2. $\|A\|_{(k)} = \|B\|_{(k)}$ para todo $k = \{1, \ldots, d\}$.
3. $\sigma(A) \prec_w \sigma(B)$. □

El Teorema de Schur-Horn caracteriza todas las posibles diagonales de matrices en la órbita unitaria de una matriz $A \in \mathcal{A}(d)$ como aquellos vectores $c \in \mathbb{R}^d$ tales que $c \prec \lambda(A)$. (Ver [6]).

Teorema 1.4.7. (Schur-Horn). Sean $b, c \in \mathbb{R}^d$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $c \prec b$
2. Existe $B \in \mathcal{A}(d)$ tal que $d(B) = c$ y $\lambda(B) = b$.

   Si, además, b y c tienen entradas no negativas, lo anterior equivale a

3. Existen vectores de norma 1 $x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{C}^d$ tales que

$$\operatorname{diag}(B) = \sum_{j \in \mathbb{I}_d} c_j \, x_j \, x_j^*.$$

□

A continuación, enunciamos el Teorema de Lidiskii aditivo (ver [50]) y el Teorema de Lidskii multiplicativo (ver [49]) para matrices. Ambos teoremas contienen una descripción detallada para el caso de *igualdad*.

Teorema 1.4.8. (Teorema de Lidskii aditivo). Sean $A, B \in \mathcal{A}(d), k \in \mathbb{I}_d$ y $J \subseteq \mathbb{I}_d$ con $|J| = k$. Entonces

$$\sum_{j \in J} \lambda_j(A) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{\uparrow}(B) \leq \sum_{j \in J} \lambda_j(A+B) \leq \sum_{j \in J} \lambda_j(A) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B) \tag{1.21}$$

Por otra parte, si $\big(\lambda(A) + \lambda^{\uparrow}(B)\big)^{\downarrow} = \lambda(A+B)$. Entonces existe una BON $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$A = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i(A) \;\, v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad A + B = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \big(\lambda_i(A) + \lambda_i(B)\big) \;\, v_i \otimes v_i .$$

□

En lo que sigue, dados $x = (x_i)_{i \in \mathbb{I}_d}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d, x \circ y = (x_i \, y_i)_{i \in \mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d$ denota el producto entrada a entrada de los vectores.

Teorema 1.4.9. (Teorema de Lidskii multiplicativo). Sea $S \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ inversible y sea $\lambda \in (\mathbb{R}^d_{>0})^{\downarrow}$. Entonces, para cada $V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tal que $\lambda(V^*V) = \lambda$ se tiene que

$$\lambda(S) \circ \lambda^{\uparrow} \prec_{\log} \lambda(VSV^*) \prec_{\log} \lambda(S) \circ \lambda \in (\mathbb{R}^d_{>0})^{\downarrow} \, . \tag{1.22}$$

Por otra parte, si $\lambda(VSV^*) = (\lambda(S) \circ \lambda^{\uparrow})^{\downarrow}$ (resp. $\lambda(VSV^*) = \lambda(S) \circ \lambda$) entonces existe una BON $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$S = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i(S) \; v_i \otimes v_i \quad \text{ y } \quad |V| = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_{d+1-i}^{1/2} \; v_i \otimes v_i \tag{1.23}$$

$\big($resp. $S = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i(S) \; v_i \otimes v_i$ y $|V| = \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i^{1/2} \; v_i \otimes v_i \big)$. □

Finalmente, recordamos el Teorema de entrelace de Cauchy (ver [6]), que relaciona los autovalores de una matriz autoadjunta con los de sus submatrices principales y que se utiliza en la prueba del Teorema 2.1.4.

Teorema 1.4.10. (Entrelace de Cauchy). Sea $A \in \mathcal{A}(d)$, $r \in \mathbb{I}_d$ y sea $A_r \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{C})$ la submatriz principal de A, que se obtiene de borrar la fila y la columna $r-$ésimas de A. Entonces

$$\lambda_k(A) \le \lambda_k(A_r) \le \lambda_{k+1}(A),$$

para cada $k \in \mathbb{I}_{d-1}$. Es decir que

$$\lambda_1(A) \le \lambda_1(A_r) \le \lambda_2(A) \le \cdots \le \lambda_{d-1}(A) \le \lambda_{d-1}(A_r) \le \lambda_d(A).$$

□

1.4.2. Mayorización en espacios de probabilidad

En el Capítulo 3 se describe la noción de potenciales convexos en el contexto de familias Bessel de trasladados de sucesiones finitas. Para esto, necesitamos la siguiente noción general de mayorización entre funciones en espacios de probabilidad.

A lo largo de esta Sección $(X, \mathcal{X}, \mu)$ denotará un espacio de probabilidad, i.e. $\mathcal{X}$ es una σ-álgebra de conjuntos en X y μ es una medida de probabilidad definida en $\mathcal{X}$. Denotamos por $L^\infty(X,\mu)^+ = \{f \in L^\infty(X,\mu) : f \ge 0\}$. Para $f \in L^\infty(X,\mu)^+$, la *reordenada decreciente* de f (ver [44]), notada por $f^* : [0,1) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, está dada por

$$f^*(s) \overset{\text{def}}{=} \sup\{t \in \mathbb{R}_{\ge 0} : \ \mu\{x \in X : \ f(x) > t\} > s\} \quad \text{para} \quad s \in [0,1)\,. \tag{1.24}$$

Observación 1.4.11. Mencionaremos algunas propiedades interesantes de la reordenada decreciente de funciones, que utilizaremos más adelante. Sea $f \in L^\infty(X,\mu)^+$, entonces:

1. f^* es una función continua a derecha y no-creciente.
2. f y f^* son equimedibles, i.e. para cada conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que $\mu(f^{-1}(A)) = |(f^*)^{-1}(A)|$, donde $|B|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto boreliano $B \subset \mathbb{R}$. A la vez, esto implica que para cada $\varphi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ continua: $\varphi \circ f \in L^\infty(X,\mu)$ si y sólo si $\varphi \circ f^* \in L^\infty([0,1])$ y en este caso
$$\int_X \varphi \circ f \; d\mu = \int_0^1 \varphi \circ f^* \; dx\,.$$
3. Si $g \in L^\infty(X,\mu)$ es tal que $f \le g$, entonces $0 \le f^* \le g^*$. Más aún, si $f^* = g^*$, entonces $f = g$.
4. Si consideramos el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}, dt)$ - conjuntos de Borel en [0,1] con medida de Lebesgue - entonces $f^* \in L^\infty([0,1], dt)$ es tal $(f^*)^* = f^*$.
5. Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f + c \ge 0$, entonces $(f+c)^* = f^* + c$. △

Definición 1.4.12. Sean $f, g \in L^\infty(X,\mu)^+$ y sean f^*, g^* sus reordenadas decrecientes. Decimos que f *submayoriza* g (en $(X, \mathcal{X}, \mu)$), notado por $g \prec_w f$, si

$$\int_0^s g^*(t) \; dt \quad \le \quad \int_0^s f^*(t) \; dt \qquad \text{para} \qquad 0 \le s \le 1\,.$$

Si además, tenemos que $\int_0^1 g^*(t) \; dt = \int_0^1 f^*(t) \; dt$ decimos que, f *mayoriza* g y se escribe $g \prec f$. △

Para verificar la mayorización entre funciones en espacios de probabilidades, podemos considerar las llamadas *transformaciones doble estocásticas* (DS). Recordemos que un operador lineal D actuando en $L^\infty(X,\mu)$ es una transformación doble estocástica si D es unital, positiva y preserva traza, i.e.

$$D(1_X) = 1_X \ , \quad D\big(\, L^\infty(X,\mu)^+ \,\big) \subseteq L^\infty(X,\mu)^+ \quad \text{ y } \quad \int_X D(f)(x)\ d\mu(x) = \int_X f(x)\ d\mu(x)$$

para cada $f \in L^\infty(X,\mu)$. Vale aclarar que D resulta contractiva con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$.

Nuestro interés en la mayorización se basa en su relación con desigualdades entre integrales en términos de funciones convexas. El siguiente resultado resume esta relación, como así también, el rol de las transformaciones DS (ver por ejemplo [20, 55]).

Teorema 1.4.13. Sean $f,\, g \in L^\infty(X,\mu)^+$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $g \prec f$;
2. Existe $D : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(X,\mu)$ una transformación DS, tal que $D(f) = g$;
3. Para cada función convexa $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ se tiene que

$$\int_X \varphi(g(x))\ d\mu(x) \leq \int_X \varphi(f(x))\ d\mu(x)\ . \tag{1.25}$$

Si sólo se tiene que $g \prec_w f$, entonces la Eq. (1.25) se verifica si asumimos, además, que φ es una función convexa no-decreciente. $\square$

Ejemplo 1.4.14. El operador D, dado por $D(f) = (\int_X f\ d\mu) \cdot 1_X$, es una transformación DS. Por lo tanto, tenemos la relación de mayorización $(\int_X f\ d\mu) \cdot 1_X \prec f$. Por otra parte, si $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es cualquier función convexa y $f \in L^\infty(X,\mu)^+$, entonces por el Teorema 1.4.13, tenemos que

$$\varphi\Big(\int_X f\ d\mu\Big) = \int_X \varphi\big(\big(\int_X f\ d\mu\big) \cdot 1_X(x)\big)\ d\mu(x) \leq \int_X \varphi(f(x))\ d\mu(x)\ , \tag{1.26}$$

que es la desigualdad clásica de Jensen. Usando el hecho previo, notemos que si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq c \leq \int_X f\ d\mu$, entonces $c \cdot 1_X \prec_w f$. $\triangle$

El siguiente resultado jugará un papel importante en el estudio de la estructura de los mínimos respecto a la sub-mayorización, en conjuntos de funciones apropiados.

Proposición 1.4.15 ([20])**.** Sean $f,\, g \in L^\infty(X,\mu)^+$ tales que $g \prec_w f$. Si existe una función $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y no-decreciente tal que

$$\int_X \varphi(f(x))\ d\mu(x) = \int_X \varphi(g(x))\ d\mu(x) \quad \text{ entonces } \quad g^* = f^*\ . \qquad \square$$

Con las notaciones del Ejemplo 1.4.14 notemos que la Proposición 1.4.15 implica que si φ es estrictamente convexa y tal que se verifica la igualdad en la Eq. (1.26), entonces $f^* = \int_X f\ d\mu$ y por lo tanto $f = \int_X f\ d\mu$.

Observación 1.4.16. (Relación entre mayorización en $\mathbb{R}^d$ y mayorización en espacios de probabilidad). Sea $\Omega_d = \{1, \cdots, d\}$ y $\mu_d : \mathbb{P}(\Omega_d) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la medida de probabilidad dada por:

$$\mu_d(A) = \frac{\#(A)}{d},$$

donde $A \subset \Omega_d$, $\mathbb{P}(\Omega_d)$ denota el conjunto partes de Ω_d y $\#(A)$ denota el cardinal de A. Si $x \in \mathbb{R}^d$ consideramos la función medible

$$f_x : \Omega_d \to \mathbb{R}, \quad \text{dada por} \quad f_x(i) = x_i, \;\; i \in \mathbb{I}_d.$$

Así, se verifica que: dados $x, y \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, entonces

$$x \prec y \;\;(\text{ resp. } x \prec_w y) \iff f_x \prec f_y \;\;(\text{ resp. } f_x \prec_w f_y) \text{ en } (\Omega_d, \mu_d) \tag{1.27}$$

En efecto, notemos que si $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces

$$\frac{1}{d}\operatorname{tr}(h(x)) = \frac{1}{d}\sum_{i \in \mathbb{I}_d} h(x_i) = \int_{\Omega_d} h \circ f_x \, d\mu_d.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} x \prec y \;\;(\text{ resp. } x \prec_w y) \quad &\iff \quad \int_{\Omega_d} h \circ f_x \, d\mu_d \leq \int_{\Omega_d} h \circ f_y \, d\mu_d \;\;(\text{ si además } h \text{ es no-decreciente}) \\ &\iff \quad f_x \prec f_y \;\;(\text{ resp. } f_x \prec_w f_y). \end{aligned}$$

La primera equivalencia se deduce a partir del Teorema 1.4.2 (resp. Teorema 1.4.3), mientras que la segunda equivalencia se deduce del Teorema 1.4.13.

$\triangle$

1.5. Geometría relativa entre subespacios de dimensión finita

Comenzamos la última sección del capítulo, describiendo los ángulos y vectores principales entre subespacios de dimensión finita.

Sean $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ subespacios de dimensión finita con $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = d$. Sean $P_{\mathcal{V}}$ y $P_{\mathcal{W}}$ las proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, respectivamente. Los ángulos principales

$$0 \leq \theta_1 \leq \ldots \leq \theta_d \leq \frac{\pi}{2},$$

están definidos (ver [32, 40]) de manera tal que el operador positivo de rango finito $|P_{\mathcal{W}} P_{\mathcal{V}}| \in L(\mathcal{H})$ satisface

$$\lambda(|P_{\mathcal{W}} P_{\mathcal{V}}|) = (\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_d), 0_{|\mathbb{M}|-d}) \in \ell^1_+(\mathbb{M})^{\downarrow}. \tag{1.28}$$

Decimos que $w_1, \ldots, w_d \in \mathcal{W}$ (respectivamente $v_1, \ldots, v_d \in \mathcal{V}$) son vectores principales (o direcciones principales) entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ si constituyen una BON de $\mathcal{W}$ (respectivamente si son BON de $\mathcal{V}$), tales que

$$|P_{\mathcal{V}} P_{\mathcal{W}}| \, w_i = \cos(\theta_i) \, w_i \quad (\text{ respectivamente} |P_{\mathcal{W}} P_{\mathcal{V}}| \, v_i = \cos(\theta_i) \, v_i \;) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_d. \tag{1.29}$$

Una caracterización alternativa de los ángulos y vectores principales es la siguiente: dado $k \in \mathbb{I}_d$ se define inductivamente

$$\langle v_k, w_k \rangle = \cos(\theta_k) = \max_{v \in \mathcal{V}} \max_{w \in \mathcal{W}} \langle v, w \rangle,$$

sujeto a las restricciones

$$\|v\| = \|w\| = 1 \;, \;\; \langle v, v_i \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle w, w_i \rangle = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

donde consideramos $v_0 = w_0 = 0$. Notemos que los ángulos principales entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son una medida cualitativa de la posición relativa entre estos subespacios.

Si asumimos que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$, entonces tiene sentido considerar la proyección oblicua $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$, en este caso existe una conexión entre los ángulos y los vectores principales de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ con la estructura geométrica y espectral de $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$. En efecto, es conocido (ver [22]) que la pseudo-inversa de Moore-Penrose de $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$ está dada por

$$(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp})^\dagger = P_\mathcal{W}\, P_\mathcal{V} \implies |P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^\dagger = |P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}| \ \text{ y } \ |P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}|^\dagger = |P_\mathcal{W}\, P_\mathcal{V}| \ . \tag{1.30}$$

En este caso, como $\text{rk}(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}) = d$, $|P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}|$ también tiene rango d y, por lo tanto $\theta_d < \pi/2$. Más aún, por la Eq. (1.29), los vectores pricipales entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ satisfacen que

$$|P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|\, w_i = \frac{1}{\cos(\theta_i)}\, w_i \quad \text{y} \quad |P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}|\, v_i = \frac{1}{\cos(\theta_i)}\, v_i \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_d \ . \tag{1.31}$$

Consideremos la descomposición polar $P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W} = U\, |P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}|$, donde $U \in L(\mathcal{H})$ es la isometría parcial (única) con espacio inicial $\mathcal{W}$ y espacio final $\mathcal{V}$. Tenemos que $|P_\mathcal{W}\, P_\mathcal{V}| = U\, |P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}|\, U^*$. Por lo tanto, dados $\{w_i\}_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{W}^d$ vectores principales entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, en lo que sigue, supondremos que los correspondientes vectores principales $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{V}^d$ entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ están dados por $v_i = U\, w_i$, para cada $i \in \mathbb{I}_d$. En particular, se cumple que

$$P_\mathcal{W}\, v_i = \cos(\theta_i)\, w_i \quad \text{y} \quad P_\mathcal{V}\, w_i = \cos(\theta_i)\, v_i \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{I}_d \ , \tag{1.32}$$

ya que, por ejemplo, $P_\mathcal{V}\, w_i = P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}\, w_i = U\, |P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}|\, w_i = \cos(\theta_i)\ U\, w_i = \cos(\theta_i)\ v_i$.

Observación 1.5.1 (Dos definiciones de ángulo entre subespacios)**.** En la literatura existen dos nociones diferentes de ángulo entre subespacios. A continuación las incluimos, las comparamos y las relacionamos con los ángulos principales definidos anteriormente. Para esto, consideramos dos subespacios de dimensón finita $\mathcal{V}$, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ con $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = d$. Sean $(\theta_j)_{j\in\mathbb{I}_d}$ los ángulos principales entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$.

1. En [60] los autores presentan el ángulo $\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}} \in [0, \pi/2]$ entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, definido por

$$\cos(\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}}) = \inf_{f\in\mathcal{W},\, \|f\|=1} \|P_\mathcal{V} f\| \ . \tag{1.33}$$

   Por lo tanto,

$$\cos(\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}})^2 = \inf_{f\in\mathcal{W},\, \|f\|=1} \langle |P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}|^2 f\ ,\ f\rangle = \cos(\theta_d)^2 \ . \tag{1.34}$$

   Así, tenemos la identidad $\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \theta_d$. Si, además, asumimos que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$, entonces las Eqs. (1.31) y (1.34) proporcionan una prueba sencilla para la identidad $\|P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\| = \cos(\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}})^{-1}$.

2. Existe otra idea de ángulo entre subespacios, el llamado ángulo de Dixmier, notado por $[\mathcal{V},\, \mathcal{W}]_D \in [0, \pi/2]$ y dado por

$$\cos([\mathcal{V},\, \mathcal{W}]_D) = \sup_{v\in\mathcal{V},\, w\in\mathcal{W},\, \|v\|=\|w\|=1} |\langle v,\ w\rangle| = \|P_\mathcal{V}\, P_\mathcal{W}\| = \cos(\theta_1) \ . \tag{1.35}$$

   Así, tenemos la identidad $[\mathcal{V},\, \mathcal{W}]_D = \theta_1$. Si asumimos, además, que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$ entonces es bien conocido (ver [26]) que $\|P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\| = \sin([\mathcal{V},\, \mathcal{W}^\perp]_D)^{-1}$, esto implica que $\sin([\mathcal{V},\, \mathcal{W}^\perp]_D) = \cos(\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}})$ y por lo tanto, tenemos que

$$\theta_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \pi/2 - \theta^{\mathcal{V},\mathcal{W}^\perp} \ . \qquad \triangle$$

Capítulo 2

Análisis Matricial en $L^\infty(\mathbb{T}^k, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ y aplicaciones

En este capítulo construimos una extensión del Teorema Schur-Horn para campos medibles de matrices semi-definidas positivas y caracterizamos la *estructura fina* de sucesiones de Bessel SG en FSIT's (ver Sección 1.3 para los preliminares de sucesiones de Bessel SG, Definición 2.3.1 y Teorema 2.3.2); es decir que resolvemos un *problema de diseño de marcos*, donde las caraterísticas predeterminadas de las sucesiones de Bessel SG se describen en términos de alguna estructura interna (o fina), relativa al subespacio invariante por traslaciones y finitamente generado $\mathcal{W}$. También mostramos que la teoría de Fan-Pall para campos medibles de matrices semi-definidas positivas (ver Teorema 2.1.4) se puede usar para obtener una descripción detallada de las suseciones de Bessel SG con estructura fina predeterminada, similar a la obtenida en términos de los *auto-pasos ó eigensteps* considerados en [15]. En el Capítulo 3 usamos sucesivamente estos resultados para mostrar que dados $\mathcal{W}$ un FSIT, una función convexa $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ y una sucesión de números positivos $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0$, existen vectores $f_i \in \mathcal{W}$ tales que $\|f_i\|^2 = \alpha_i$ para $i \in \mathbb{I}_n$, y tal que la sucesión de Bessel SG inducida por estos vectores minimiza el potencial convexo asociado al par $(\varphi, \mathcal{W})$, entre todas las sucesiones de Bessel SG con tales propiedades.

2.1. Desigualdades de Fan-Pall para campos medibles

En esta sección construimos las desigualdades de Fan-Pall para compresiones de campos medibles de matrices semi-definidas positivas (ver Teorema 2.1.4). Pero antes, enunciamos un resultado de Ron y Shen (Ver [54]), que se utiliza en numerosas pruebas.

En lo que sigue consideramos un subespacio de medida $(X, \mathcal{X}, |\cdot|)$ del espacio de medida $(\mathbb{T}^k, \mathcal{B}(\mathbb{T}^k), |\cdot|)$ del $k-$toro con la medida de Lebesgue en conjuntos de Borel.

Lema 2.1.1. (Ver [54]) Sea $M : X \to \mathcal{A}(n)$ un campo medible y acotado de matrices autoadjuntas. Entonces, existen

1. Campos medibles de vectores $w_j : X \to \mathbb{C}^n$ para $j \in \mathbb{I}_n$, tales que $\{w_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_n}$ es una BON de $\mathbb{C}^n$ para $x \in X$ ctp.

2. Funciones medibles y acotadas $\lambda_j : X \to \mathbb{R}$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tales que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ y
$$M(x) = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \lambda_j(x)\ \ w_j(x) \otimes w_j(x) \qquad \text{para} \qquad x \in X \text{ ctp.}$$

□

Notemos que el resultado anterior hace referencia a la existencia de funciones medibles de autovalores y de campos medibles autovectores de matrices autoadjuntas. Al final de la sección extenedemos este resultado a otro más general, que también describe la existencia de funciones medibles de autovalores y de campos medibles autovectores pero de operadores SP cuyos rangos viven en FSIT's (ver Lema 2.1.7).

Proposición 2.1.2. Sea $G : X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ un campo medible y acotado de matrices semi-definidas positivas, con autovalores medibles $\lambda_j : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tales que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Asumamos que las funciones medibles $\beta_j : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ satisfacen la condición de entrelace

$$\lambda_j(x) \geq \beta_j(x) \geq \lambda_{j+1}(x) \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{n-1} \quad \text{y} \quad x \in X \text{ ctp.} \tag{2.1}$$

Entonces, existe una función medible $W : X \to \mathcal{M}_{n,\,n-1}(\mathbb{C})$ tal que $W^*(x)\,W(x) = I_{n-1}$ y

$$\lambda\big(W^*(x)\,G(x)\,W(x)\big) = \big(\beta_1(x), \ldots, \beta_{n-1}(x)\big)\ , \quad \text{para} \quad x \in X \text{ ctp.} \tag{2.2}$$

Demostración. Argumentamos por inducción sobre n (el tamaño de G). Por la Eq. (2.1), notemos que $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_{n-1}$. Usando el Lema 2.1.1 (ver [54]), consideramos campos medibles de vectores $u_j : X \to \mathbb{C}^n$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tales que $\{u_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_n}$ es una BON de autovectores de $G(x)$ para $x \in X$ ctp.

Asumimos que $\beta_{n-1} = \lambda_n$. Sea $G'(x) = V(x)^*\,G(x)\,V(x)$, donde $V(x)$ es la matrix $n \times (n-1)$, cuyas columnas son los vectores $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, para $x \in X$. Entonces, G' es el campo medible acotado de matrices (diagonales) semi-definidas positivas de tamaño $n-1$ con autovalores medibles $\lambda_j : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_{n-1}$. Si asumimos que podemos encontrar una función medible $Z : X \to \mathcal{M}_{n-1,\,n-2}(\mathbb{C})$ tal que $Z^*(x)Z(x) = I_{n-2}$ y $\lambda\big(Z^*(x)G'(x)\,Z(x)\big) = \big(\beta_1(x), \ldots, \beta_{n-2}(x)\big)$ para $x \in X$ ctp., fijamos

$$W(x) = \begin{pmatrix} Z(x) & 0_{n-1} \\ 0_{n-2}^t & 1 \end{pmatrix}\ , \quad \text{para } x \in X\,.$$

Entonces, es fácil ver que $W : X \to \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{C})$ tiene las propiedades deseadas. Notemos que un argumento similar se aplica en el caso que $\lambda_j = \beta_j$ ó $\lambda_{j+1} = \beta_j$ para $j \in \mathbb{I}_{n-1}$. Iterando el argumento anterior y considerando una partición conveniente de X en conjuntos medibles podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que

$$\lambda_j(x) > \beta_j(x) > \lambda_{j+1}(x)\ , \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{n-1} \quad \text{y} \quad x \in X \quad \text{ctp.}$$

En este caso, definimos

$$\gamma_j(x) = \frac{\prod\limits_{i\in\mathbb{I}_{n-1}} \big(\lambda_j(x) - \beta_i(x)\big)}{\prod\limits_{k\neq j} \big(\lambda_j(x) - \lambda_k(x)\big)}\ , \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n \quad \text{y} \quad x \in X \quad \text{ctp.}$$

Los supuestos anteriores (desigualdades de entrelace estrictas) implican que $\gamma_j(x) > 0$ está bien definido para $x \in X$ ctp.; más aún, las funciones $\gamma_j : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ son medibles para $j \in \mathbb{I}_n$.

Fijado $\xi_j = \gamma_j^{1/2} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_n$, sea $v = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \xi_j\, u_j : X \to \mathbb{C}^n$ y sea $P : X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ dado por $P(x) = I - P_{v(x)}$ (la proyección ortogonal sobre $\{v(x)\}^\perp$, notemos que $v(x) \neq 0$ ctp.). Con $p_x(t) \in \mathbb{R}[t]$ denotamos al polinomio característico de $P(x)\,G(x)\,P(x)$. Entonces, un argumento bien conocido sobre productos tensoriales alternos (ver [6]) muestra que

$$p_x(t) = t \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \gamma_j(x) \prod_{k\neq j} \big(t - \lambda_k(x)\big) \implies p_x\big(\lambda_j(x)\big) = \lambda_j(x) \prod_{i\in\mathbb{I}_{n-1}} \big(\lambda_j(x) - \beta_i(x)\big)$$

para $j \in \mathbb{I}_n$, $x \in X$ ctp. y $p_x(0) = 0$. Por lo tanto,

$$p_x(t) = t \prod_{j \in \mathbb{I}_{n-1}} \big(t - \beta_j\big) \quad \text{y} \quad \sum_{j \in \mathbb{I}_n} \xi_j^2(x) = 1 \ , \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{n-1} \quad \text{y} \quad x \in X \quad \text{ctp.},$$

mediante la comparación de los coeficientes principales de las dos representaciones del polinomio. Esta última condición de normalización muestra, en particular, que $P(x) = I - v(x) \otimes v(x)$ para $x \in X$ ctp. y por lo tanto P es una función medible.

Finalmente, sea $\{w_j : X \to \mathbb{C}^n\}_{j \in \mathbb{I}_n}$ una BON medible de autovectores para P, tal que $P(x)\, w_n(x) = 0$ para $x \in X$ ctp. Sea $W : X \to \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{C})$ tal que $W(x)$ es la matriz $n \times n-1$ cuyas columnas son los vectores $w_1(x), \ldots, w_{n-1}(x)$; entonces W es la función medible con las propiedades deseadas. □

Lema 2.1.3. Sean $\lambda_j : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_n$ funciones medibles, tales que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Sea $d \in \mathbb{I}_{n-1}$ y sea $\beta_j : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_d$ funciones medibles, tales que $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_d$ y tales que satisfacen las desigualdades de entrelaces

$$\lambda_j(x) \geq \beta_j(x) \geq \lambda_{n-d+j}(x) \ , \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_d \quad \text{y} \quad x \in X \quad \text{ctp.} \tag{2.3}$$

Entonces, existen funciones medibles $\gamma_{i\,,\,j} : X \to \mathbb{R}_{>0}$ para $0 \leq i \leq n-d$ y $j \in \mathbb{I}_{n-i}$ tales que:

1. $\gamma_{0\,,\,j} = \lambda_j$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $\gamma_{n-d\,,\,j} = \beta_j$ para $j \in \mathbb{I}_d$.
2. Si $0 \leq i \leq n-d$, entonces $\gamma_{i\,,\,j}(x) \geq \gamma_{i\,,\,j+1}(x)$, para $j \in \mathbb{I}_{n-i-1}$ y $x \in X$ ctp.
3. Si $0 \leq i \leq n-d-1$, entonces $\gamma_{i\,,\,j}(x) \geq \gamma_{i+1\,,\,j}(x) \geq \gamma_{i\,,\,j+1}(x)$ para $j \in \mathbb{I}_{n-i-1}$ y $x \in X$ ctp.

Demostración. Argumentamos por inducción (decreciente) en términos de d. Notar que la afirmación es verdadera si $d = n-1$. Asumimos que el resultado se verifica para $d+1$ funciones medibles entrelazadas para algún $d \in \mathbb{I}_{n-2}$. Dadas las funciones medibles β_j para $j \in \mathbb{I}_d$ como antes, vamos a construir funciones medibles $\alpha_j : X \to \mathbb{R}_{>0}$ para $j \in \mathbb{I}_{d+1}$ tales que

$$\lambda_j \geq \alpha_j \geq \lambda_{n-(d+1)+j} \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{d+1} \quad \text{y} \quad \alpha_j \geq \beta_j \geq \alpha_{j+1} \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_d \,, \tag{2.4}$$

por lo tanto $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_{d+1}$. Notar que el Lema sería una consecuencia de esta construcción y de la hipótesis inductiva (donde las funciones α_j juegan el papel de $\gamma_{n-d+1\,,\,j}$ para $j \in \mathbb{I}_{d+1}$).

Observemos que por las desigualdades de entrelace de la Eq. (2.3), tenemos que

$$\text{mín}\{\lambda_{r+1}\,,\, \beta_r\} \geq \text{máx}\{\beta_{r+1}\,,\, \lambda_{n-d+r}\} \quad \text{para} \quad r \in \mathbb{I}_{d-1}, \ j \in \mathbb{I}_{n-1} \quad \text{y} \quad x \in X \quad \text{ctp.} \tag{2.5}$$

Definimos $\alpha_j : X \to \mathbb{R}_{>0}$, para $j \in \mathbb{I}_{d+1}$, de la siguiente forma:

$$\alpha_j := \begin{cases} \text{máx}\{\beta_j\,,\, \lambda_{n-(d+1)+j}\} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq d\,; \\ \text{mín}\{\beta_d\,,\, \lambda_{d+1}\} & \text{si} \quad j = d+1\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Por construcción las funciones α_j son medibles, y es fácil verificar (usando la Eq. (2.5)) que satisfacen la Eq. (2.4). □

El siguiente resultado es el Teorema de las desigualdades de entrelace de Fan-Pall para campos medibles de operadores positivos.

Teorema 2.1.4. (Teorema de entrelace de Fan-Pall para campos medibles) Sea $G : X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ un campo medible de matrices semi-definidas positivas, con autovalores medibles asociados $\lambda_j : X \to \mathbb{R}_{>0}$ para $j \in \mathbb{I}_n$, tales que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Sea $d \in \mathbb{I}_{n-1}$ y sean $\beta_j : X \to \mathbb{R}_{>0}$ para $j \in \mathbb{I}_d$, funciones medibles tales que $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_d$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\lambda_j(x) \geq \beta_j(x) \geq \lambda_{n-d+j}(x)$, para $j \in \mathbb{I}_d$ y $x \in X$ ctp.

2. Existe una función medible a valores proyecciones $P : X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ tales que

$$\operatorname{rk} P(x) = d \quad \text{y} \quad \lambda\big(P(x)\, G(x)\, P(x)\big) = \big(\beta_1(x), \ldots, \beta_d(x), 0_{n-d}\big) \ , \quad \text{para} \quad x \in X \text{ ctp.}$$

Demostración. En primer lugar, asumimos que las funciones $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ satisfacen las desigualdades de entrelace del ítem 1. Sea $\gamma_{i\,,\,j} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $0 \leq i \leq n-d$ y $j \in \mathbb{I}_{n-i}$ funciones medibles como las del Lema 2.1.3. Por la Proposición 2.1.2 existe un campo medible $W_1 : X \to \mathcal{M}_{n\,,\,n-1}(\mathbb{C})$ tal que

$$W_1(x)^* W_1(x) = I_{n-1} \quad \text{y} \quad \lambda\big(W_1(x)^* G\, W_1(x)\big) = \big(\gamma_{1\,,\,1}(x), \ldots, \gamma_{1\,,\,n-1}(x)\big) \ , \quad \text{para} \quad x \in X \text{ ctp.}$$

Argumentando como antes, usando la Proposición 2.1.2 podemos construir, para $2 \leq i \leq n-d$, campos medibles $W_i : X \to \mathcal{M}_{n-i+1\,,\,n-i}(\mathbb{C})$ tales que $W_i(x)^* W_i(x) = I_{n-i}$ para $x \in X$ ctp. y

$$\lambda\big(W_i(x)^* \cdots W_1(x)^* G(x)\, W_1(x) \cdots W_i(x)\big) = \big(\gamma_{i\,,\,1}(x), \ldots, \gamma_{i\,,\,n-i}(x)\big) \ , \quad \text{para } x \in X \text{ ctp } .$$

Sea $W = W_1 \cdots W_{n-d} : X \to \mathcal{M}_{n\,,\,d}(\mathbb{C})$, que por construcción es medible y notar que

$$W^*(x) W(x) = I_d \quad \text{y} \quad \lambda\big(W(x)^* G(x)\, W(x)\big) = \big(\beta_1(x), \ldots, \beta_d(x)\big) \ , \quad \text{para } x \in X \text{ ctp } .$$

Por lo tanto, si consideramos $P = WW^* : X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces P es un campo medible de proyecciones con las propiedades deseadas.

Recíprocamente, asumimos que existe una función medible a valores proyección $P : X \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ que satisface el ítem 2. Entonces el ítem 1 es consecuencia del Teorema 1.4.10 (teorema de entrelace de Cauchy). □

Como lo anticipamos en la Sección 1.3, mostraremos la existencia de representaciones espectrales medibles de operadores SP autoadjuntos cuyos rangos están en un FSIT (ver Lema 2.1.7), que se deriva del Lema 2.1.1. En este sentido, recordamos la definición de generador cuasi-ortogonal y el Teorema de descomposición para FSIT's (para un mayor detalle de estas nociones ver [11]).

Definición 2.1.5. Sea $\mathcal{W} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ un FSIT. Decimos que $f \in \mathcal{W}$ es un generador cuasi-ortogonal de $\mathcal{W}$ si

$$\|g\|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^k} |\langle T_\ell f, g\rangle|^2 \ , \quad \text{para cada} \quad g \in \mathcal{W} \, . \tag{2.7}$$

△

El Teorema que sigue, es consecuencia de un par de resultados de [11]. Muestra la descomposción de cualquier FSIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ en una suma ortogonal finita de SIT principales con generadores cuasi-ortogonales. Además, este Teorema es crucial en la prueba del Lema 2.1.7.

Teorema 2.1.6. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$, con $d = \operatorname{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} d(x)$, donde $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Entonces $\mathcal{W}$ puede descomponerse como suma ortogonal

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{j\in\mathbb{I}_d} S(h_j), \tag{2.8}$$

donde h_j es un generador cuasi-ortogonal de $S(h_j)$ para $j \in \mathbb{I}_d$ y $\operatorname{Spec}(S(h_{j+1})) \subseteq \operatorname{Spec}(S(h_j))$ para $j \in \mathbb{I}_{d-1}$ (ver Definición 1.3.2). Más aún, $\{\Gamma h_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. □

Como lo anticipamos, el siguiente Lema es una reformulación del Lema 2.1.1, y hace referencia a la existencia de funciones medibles de autovalores y de campos medibles de autovectores de operadores SP autoadjuntos.

Lema 2.1.7. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT en $L^2(\mathbb{R}^k)$ con $d = \sup\operatorname{esc}_{x\in\mathbb{T}^k} d(x)$, donde $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Sea $S \in L(L^2(\mathbb{R}^k))$ un operador SP autoadjunto, tal que $R(S) \subseteq \mathcal{W}$. Entonces, existen:

1. Campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ es una BON en $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

2. Funciones medibles, acotadas $\lambda_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\lambda_1(x) \geq \ldots \geq \lambda_{d(x)}(x)$, $\lambda_j(x) = 0$ si $j > d(x)$ y
$$[S]_x = \sum_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}} \lambda_j(x)\ v_j(x) \otimes v_j(x)\ , \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \,\text{ctp.} \tag{2.9}$$

Demostración. Considerando una partición finita conventiente de $\mathbb{T}^k$ en conjuntos medibles, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $d(x) = d$ para $x \in \mathbb{T}^k$. En tal caso, por el Teorema 2.1.6 tenemos que
$$\mathcal{W} = \bigoplus_{j\in\mathbb{I}_d} S(h_j),$$
donde $h_j \in \mathcal{W}$ para $j \in \mathbb{I}_d$, son tales que $\{\Gamma h_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Consideremos el campo medible de matrices semi-definidas positivas $M(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ dado por
$$M(x) = \Big(\big\langle [S]_x\ \ \Gamma h_j(x),\ \ \Gamma h_i(x)\big\rangle\Big)_{i,j\,\in\mathbb{I}_d}\,.$$
Por [54], existen funciones medibles $\lambda_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_d$ y campos medibles de vectores $w_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^d$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\{w_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $\mathbb{C}^d$ y
$$M(x) = \sum_{j\in\mathbb{I}_d} \lambda_j(x)\ \ w_j(x) \otimes w_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \,\text{ctp.} \tag{2.10}$$
Si $w_j(x) = (w_{ij}(x))_{i\in\mathbb{I}_d}$ para $j \in \mathbb{I}_d$, consideramos campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_d$, dados por
$$v_j(x) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} w_{ij}(x)\ \ \Gamma h_i(x)\ \text{ para }\ x \in \mathbb{T}^k \,\text{ctp}\,.$$
Entonces, es fácil ver que $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y además la Eq. (2.10) implica que la Eq. (2.9) se verifica. $\square$

2.2. Teorema de Schur-Horn para campos medibles

La noción de mayorización entre vectores reales juega un papel importante en la teoría de marcos finitos. En particular, es bien conocido que la existencia de sucesiones finitas con normas predeterminadas y operadores de marcos puede caracterizarse en términos de mayorización, aplicando el Teorema de Schur-Horn.

A continuación desarrollamos el teorema de Schur-Horn para campos medibles de matrices autoadjuntas y usamos este resultado en la prueba del Teorema 2.2.3. Nuestra prueba es una adaptación de la prueba dada en [38] para el teorema clásico de Schur-Horn. También, usamos la existencia de autovalores y autovectores medibles de campos medibles de matrices autoadjuntas (ver Lema 2.1.1).

Teorema 2.2.1. (Teorema de Schur-Horn para campos medibles). Sea $A(\cdot) : X \to \mathcal{A}(n)$ un campo medible de matrices autoadjuntas con autovalores medibles $b_j : X \to \mathbb{R}$ para $j \in \mathbb{I}_n$, tales que $b_1 \geq \cdots \geq b_n$. Sean $c_j : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles para $j \in \mathbb{I}_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $c(x) = \big(c_1(x), \cdots, c_n(x)\big) \prec b(x) = \big(b_1(x), \cdots, b_n(x)\big)$, para $x \in X$ ctp.

2. Existe una campo medible de matrices unitarias $U(\cdot) : X \to \mathcal{U}(n)$, tal que

$$d\big(U(x)^* \, A(x) \; U(x)\big) = c(x)\,, \qquad \text{para} \qquad x \in X \text{ ctp.} \tag{2.11}$$

donde $d(B) \in \mathbb{C}^n$ es la diagonal de la matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demostración. En primer lugar, notemos que la implicación 2. $\Longrightarrow$ 1. se deduce del Teorema 1.4.7 (Teorema clásico de Schur-Horn para matrices). Ahora, vamos a probar que 1. $\Longrightarrow$ 2. asumiendo que las entradas de los vectores $c(x)$ y $b(x)$ están ordenadas en forma no-creciente, esto es, $c_1(x) \geq c_2(x) \geq \ldots c_n(x)$ y $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots b_n(x)$. A partir de algunos resultados de [54], que muestran la existencia de campos medibles de matrices unitarias que diagonalizan el campo A, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $A(x) = D_{b(x)}$, donde $D_{b(x)}$ es la matriz diagonal con diagonal principal $(b_1(x), \ldots, b_n(x))$ para $x \in X$ ctp.

La prueba se realiza por inducción sobre n. El caso $n = 1$ es trivial; en efecto, en tal caso, tenemos que $c_1(x) = b_1(x)$, entonces podemos tomar $U(x) = [1]$ y $A(x) = [b_1(x)]$. De esta forma, asumimos que $n \geq 2$. Como $c(x) \prec b(x)$, tenemos $b_1(x) \geq c_1(x) \geq c_n(x) \geq b_n(x)$; si $b_1(x) = b_n(x)$ se sigue que todas las entradas de $c(x)$ y $b(x)$ coinciden, entonces $A(x) = c_1(x)I(x)$, y podemos tomar $U(x) = I$. Considerando una partición conveniente de X podemos asumir, sin pérdido de generalidad, que $b_1(x) > b_n(x)$ en X. Análogamente, si $c_1(x) = c_n(x)$ entonces la matriz unitaria $U(x) = n^{-1/2}\,(w^{j\,k})_{j,k\in\mathbb{I}_n}$, donde $w = e^{-2\pi i n^{-1}}$, satisface que $U(x)^* \, D_{b(x)} \; U(x) = \big(c_1(x), \ldots, c_n(x)\big)$. Por lo tanto, considerando una partición conveniente de X podemos asumir que $c_1(x) > c_n(x)$ en X.

Para $n = 2$, tenemos que $b_1(x) > b_2(x)$ y $b_1(x) \geq c_1(x) \geq c_2(x) = \big(b_1(x) - c_1(x)\big) + b_2(x) \geq b_2(x)$. Consideramos la matriz

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{b_1(x) - b_2(x)}} \begin{pmatrix} \sqrt{b_1(x) - c_2(x)} & -\sqrt{c_2(x) - b_2(x)} \\ \sqrt{b_2(x) - c_2(x)} & \sqrt{b_1(x) - c_2(x)} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \qquad x \in X\,, \text{ctp.}$$

Notemos que $U(x) : X \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^+$ es una función medible y se prueba facilmente que $U(x)^* \, U(x) = I_2$, así $U(x)$ es unitario para $x \in X$ ctp. Cuentas elementales muestran que

$$U(x)^* \, A(x) \; U(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) & * \\ * & c_2(x) \end{pmatrix} \qquad \text{para} \qquad x \in X\,, \text{ctp.}$$

Esto es, $d\big(U^*(x)\, A(x)\, U(x)\big) = \big(c_1(x), \;\; c_2(x)\big)$ y $U(\cdot)$ tiene las propiedades deseadas.

Suponemos que $n \geq 3$ y asumimos que el Teorema se verifica si los vectores $c(x)$ y $b(x)$ tienen tamaño a lo sumo $n - 1$. Para cada $x \in X$, sea $k(x)$ el entero más grande entre los $k \in \mathbb{I}_n$, tal que $b_k(x) \geq c_1(x)$. Como $b_1(x) \geq c_1(x) > c_n(x) \geq b_n(x)$, vemos que $1 \leq k \leq n - 1$. Entonces, considerando una partición conveniente de X en conjuntos medibles podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $k(x) = k$ para $x \in X$, ctp. Así, por como se definió a $k(x)$, tenemos que $b_k(x) \geq c_1(x) > b_{k+1}(x)$ para $x \in X$, ctp. Sea $\eta(x) = b_k(x) + b_{k+1}(x) - c_1(x)$ y observar que $\eta(x) = \big(b_k(x) - c_1(x)\big) + b_{k+1}(x) \geq b_{k+1}(x)$. Entonces, el vector medible $\big(b_k(x), b_{k+1}(x)\big)$ mayoriza al vector medible $\big(c_1(x), \eta(x)\big)$ y $b_k(x) > b_{k+1}(x)$ para $x \in X$, ctp. Sea

$$D_1(x) = \begin{pmatrix} b_k(x) & 0 \\ 0 & b_{k+1}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{para} \qquad x \in X\,,\ \text{ctp.}$$

Por el caso $n = 2$, tenemos un campo medible de matrices unitarias $U_1(\cdot) : X \to \mathcal{U}(2)$ tal que

$$d\big(U_1(x)^* \, D_1(x) \, U_1(x)\big) = \big(c_1(x), \eta(x)\big) \quad \text{para} \quad x \in X\,,\ \text{ctp.}$$

Como $b_k(x) = \eta(x) + \big(c_1(x) - b_{k+1}(x)\big) > \eta(x)$, analizamos los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $k = 1$ entonces $b_1(x) > \eta(x) \geq b_2(x) \geq \cdots \geq b_n(x)$; si consideramos $D_2(x) \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ la matriz diagonal con diagonal principal $(b_3(x), \ldots, b_n(x))$, entonces $D_{b(x)} = D_1(x) \oplus D_2(x)$ y

$$\begin{pmatrix} U_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-2}(x) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & D_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(x) & Z(x)^* \\ Z(x) & V_1(x) \end{pmatrix}$$

donde $Z(x)^* = \big(\overline{z(x)}, 0, \ldots, 0\big) \in \mathcal{M}_{1,(n-1)}(\mathbb{C})$, $z(\cdot) : X \to \mathbb{C}$ es una función medible y $V_1(x) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ es la matriz diagonal con diagonal principal $\big(\eta(x), b_3(x), \ldots, b_n(x)\big)$. Más aún, en este caso resulta que $\big(\eta(x), b_3(x), \cdots, b_n(x)\big)$ mayoriza a $\big(c_2(x), \cdots, c_n(x)\big)$ para $x \in X$, ctp. (ver [38]). Por hipótesis inductiva existe un campo medible $U_2(\cdot) : X \to \mathcal{U}(n-1)$ tal que $d\big(U_2(x)^* V_1(x) U_2(x)\big) = \big(c_2(x), \cdots, c_n(x)\big)$. Así, si $U(x) = (U_1(x) \oplus I_{n-2}) \cdot (1 \oplus U_2(x))$ para $x \in X$, ctp., entonces $U(\cdot) : X \to \mathcal{U}(n)$ tiene las propiedades deseadas.

Caso 2. Si $k > 1$ entonces $b_1(x) \geq \ldots \geq b_{k-1}(x) \geq b_k(x) > \eta(x) \geq b_{k+1}(x) \geq \ldots \geq b_n(x)$. Sea $D_2(x) \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ la matriz diagonal con diagonal principal $\beta(x) = \big(b_1(x), \ldots, b_{k-1}(x), b_{k+2}(x), \ldots, b_n(x)\big) \in \mathbb{R}^{n-2}$, notar que en este caso

$$\begin{pmatrix} U_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-2}(x) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & D_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(x) & W(x)^* \\ W(x) & V_2(x) \end{pmatrix}$$

donde $W(x)^* = \big(\overline{w(x)}, 0, \ldots, 0\big) \in \mathcal{M}_{1,(n-1)}(\mathbb{C})$, $w(\cdot) : X \to \mathbb{C}$ es una función medible y $V_2(x) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ es la matriz diagonal con diagonal principal

$$\gamma(x) := \big(\eta(x), b_1(x), \ldots, b_{k-1}(x), b_{k+2}(x), \ldots, b_n(x)\big) \quad \text{para} \quad x \in X\,, \text{ctp.}$$

En este caso, resulta que $\big(c_2(x), \ldots, c_n(x)\big) \prec \gamma(x)$ para $x \in X$, ctp. Por hipótesis, existe un campo medible $U_2(\cdot) : X \to \mathcal{U}(n-1)$, tal que $d\big(U_2(x)^* \ V_2(x) \ U_2(x)\big) = \big(c_2(x), \ldots, c_n(x)\big)$ para $x \in X$ ctp. Notemos que existe una matriz de permutación $P \in \mathcal{U}(n)$, tal que $P^* \ D_{b(x)} \ P = D_1 \oplus D_2$. Así, si $U(x) = P \cdot \big(U_1(x) \oplus I_{n-2}\big) \cdot \big(1 \oplus U_2(x)\big)$ para $x \in X$ ctp., entonces $U(\cdot) : X \to \mathcal{U}(n)$ tiene las propiedades deseadas. $\square$

Observación 2.2.2. El Teorema 2.2.1 puede escribirse de la siguiente manera: Sean $b_j, c_j : X \to \mathbb{R}$ funciones medibles para $j \in \mathbb{I}_n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $c(x) = \big(c_1(x), \cdots, c_n(x)\big) \prec b(x) = \big(b_1(x), \cdots, b_n(x)\big)$ para $x \in X$ ctp.

2. Existe $B : X \to \mathcal{A}(n)$ un campo medible de matrices autoadjuntas, tal que

$$d\big(B(x)\big) = c(x) \ \text{ y } \ \lambda\big(B(x)\big) = b(x) \quad \text{para} \quad x \in X \ \text{ ctp.},$$

donde $d(B) \in \mathbb{C}^n$ denota la diagonal de la matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\triangle$

Con el fin de mostrar el resultado principal de esta sección, introducimos la noción de mayorización de vectores de distintos tamaños: dados $a = (a_i)_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathbb{R}^n$ y $b = (b_i)_{i\in\mathbb{I}_m} \in \mathbb{R}^m$ decimos a está mayorizado por b, notado $a \prec b$, si

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_k} a_i^\downarrow \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_k} b_i^\downarrow \ , \quad 1 \leq k \leq \text{mín}\{n, m\} \ \text{ y } \ \sum_{i\in\mathbb{I}_n} a_i = \sum_{i\in\mathbb{I}_m} b_i \, . \tag{2.12}$$

El siguiente Teorema está basado en el Teorema de Schur-Horn para campos medibles (Teorema 2.2.1). Nuestro enfoque es una adaptación de resultados bien conocidos en la teoría de marcos finitos (ver [4]). En adelante, consideramos $\mathbb{T}^k$ dotado de la medida de Lebesgue.

Teorema 2.2.3. Sean $b : \mathbb{T}^k \to (\mathbb{R}_{\geq 0})^d$ y $c : \mathbb{T}^k \to (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ campos medibles de vectores. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $c(x) \prec b(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
2. Existen campos medibles de vectores $u_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^d$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tales que $\|u_j(x)\| = 1$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y

$$D_{b(x)} = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} c_j(x) \ \ u_j(x) \otimes u_j(x) \ , \quad \text{ para } \quad x \in \mathbb{T}^k \quad \text{ ctp.}$$

Demostración. En primer lugar, notemos que la implicación 2. $\implies$ 1. se deduce de resultados conocidos de la teoría de marcos en dimesión finita (ver [4]) en cada punto $x \in \mathbb{T}^k$. Por lo tanto, mostramos que 1. $\implies$ 2. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que las entradas de los vectores $b(x)$ y $c(x)$ están ordenados en forma no-creciente. Consideramos los siguientes dos casos:

Caso 1: asumimos que $n < d$. Consideramos $\tilde{c} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^d$ dado por $\tilde{c}(x) = \big(c(x) \, , \, 0_{d-n}\big)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Entonces, $\tilde{c}(x) \prec b(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ y por lo tanto, por el Teorema 2.2.1 existe un campo medible $U(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{U}(d)$ tal que

$$d\big(U(x)^* D_{b(x)} \, U(x)\big) = \big(c_1(x) \, , \, \ldots \, , \, c_n(x) \, , \, 0_{d-n}\big) \quad \text{ para } \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.} \tag{2.13}$$

Con $v_1(x) \, , \, \ldots \, , \, v_d(x) \in \mathbb{C}^d$ denotamos las columnas de $C(x) = D_{b(x)}^{1/2} \, U(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$. Entonces, la Eq. (2.13) implica que:

$$\|v_j(x)\|^2 = c_j(x) \quad \text{ para } \quad j \in \mathbb{I}_n \ , \quad v_j = 0 \quad \text{ para } \quad n+1 \leq j \leq d$$

$$\text{y} \quad D_{b(x)} = C(x) \, C(x)^* = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} v_j(x) \otimes v_j(x) \quad \text{ para } \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.}$$

Así, los vectores $u_j(x)$ se obtienen de $v_j(x)$ por normalización, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y $j \in \mathbb{I}_n$.

Caso 2: asumimos que $n \geq d$ y consideramos $\tilde{b} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^n$ dado por $\tilde{b}(x) = \big(b(x) \, , \, 0_{n-d}\big)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Entonces, $c(x) \prec \tilde{b}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ y por lo tanto, por el Teorema 2.2.1 existe un campo medible $U(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{U}(n)$ tal que

$$d\big(U(x)^* D_{\tilde{b}(x)} \, U(x)\big) = \big(c_1(x) \, , \, \ldots \, , \, c_n(x)\big) \quad \text{ para } \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.} \tag{2.14}$$

Sean $\tilde{v}_1(x) \, , \, \ldots \, , \, \tilde{v}_n(x) \in \mathbb{C}^n$ las columnas de $C(x) = D_{\tilde{b}(x)}^{1/2} U(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$. Como antes, la Eq. (2.14) implica que

$$\|\tilde{v}_j(x)\|^2 = c_j(x) \quad \text{ para } \quad j \in \mathbb{I}_n \quad \text{ y } \quad D_{\tilde{b}(x)} = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \tilde{v}_j(x) \otimes \tilde{v}_j(x) \quad \text{ para } \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.}$$

Si consideramos $\tilde{v}_j(x) = \big(v_{i,j}(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_n}$ entonces, la segunda igualdad de arriba implica que $\tilde{v}_{i,j}(x) = 0$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y para cada $d+1 \le i \le n$. Si consideramos $v_j(x) = \big(v_{i,j}(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_d}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y $j \in \mathbb{I}_n$, tenemos que

$$\|v_j(x)\|^2 = c_j(x) \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n \quad \text{y} \quad D_{b(x)} = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} v_j(x) \otimes v_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ctp.}$$

Así, los vectores $u_j(x)$ se obtienen de $v_j(x)$ por normalización, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y $j \in \mathbb{I}_n$. □

2.3. Existencia de marcos generados por traslaciones con estructura fina predeterminada

En esta sección caraterizamos la *estructura fina* de una sucesión de Bessel $E(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$. Por estructura fina (o relativa) de $E(\mathcal{F})$ nos referimos a la sucesión de normas de los vectores $\Gamma\mathcal{F}(x) = \{\Gamma f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ y a la sucesión de autovalores de $[S_{E(\mathcal{F})}]_x$ para $x \in \mathbb{T}^k$ (ver Definición 2.3.1 para una descripción precisa). En la Sección 2.3.1 resolvemos un problema de diseño de marcos y mostramos que la estructura espectral de $E(\mathcal{F})$ puede describirse en términos de relaciones de mayorización (ver Teorema 2.3.2). Mientras que en la Sección 2.3.2 obtenemos una extensión natural de la noción de eigensteps introducida en [15], que permite describir una construcción paso a paso de sucesiones de Bessel $E(\mathcal{F})$ con estructura fina predeterminada.

2.3.1. Una caraterización en términos de las relaciones de mayorización

Comenzamos con una descripción detallada de la *estructura fina* de una sucesión de Bessel $E(\mathcal{F})$.

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT con $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$, y sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ una sucesión finita en $L^2(\mathbb{R}^k)$ tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel. En adelante consideramos:

1. la *estructura espectral fina* de $E(\mathcal{F})$, que es la función debilmente medible

$$\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big)\Big)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1_+(\mathbb{Z}^k) \ , \tag{2.15}$$

   donde $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = \lambda_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_{d(x)}$ es como en el Lema 2.1.7, y $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = 0$ para $j \ge d(x)+1$ y $x \in \mathbb{T}^k$. Así, la estructura espectral fina de $\mathcal{F}$ describe los autovalores del operador definido positivo de rango finito $[S_{E(\mathcal{F})}]_x = S_{\Gamma\mathcal{F}(x)} \in L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., contando multiplicidades y ordenados de forma no-creciente.

2. La *estructura fina* de $E(\mathcal{F})$ dada por la estructura espectral fina junto a la función medible a valores vectoriales $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\|\Gamma f_i(x)\|^2\Big)_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$. △

Teorema 2.3.2 (Existencia de sucesiones generadas por traslaciones con estructrura fina predeterminada)**.** Sea $\mathcal{W}$ un FSIT en $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Dadas funciones medibles $\alpha_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $\lambda_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ para $j \in \mathbb{N}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel y tal que:

   a. $\|\Gamma f_j(x)\|^2 = \alpha_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp;

   b. $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = \lambda_j(x)$ para $j \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

2. Se verifican las siguientes condiciones de admisibilidad:

   a. $\lambda_j(x) = 0$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. tal que $j \geq \text{mín}\{d(x), n\} + 1$.

   b. $\big(\alpha_j(x)\big)_{j\in\mathbb{I}_n} \prec \big(\lambda_j(x)\big)_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Demostración. Asumimos que existe $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ tal que $\|\Gamma f_j(x)\|^2 = \alpha_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = \lambda_j(x)$ para $j \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Consideramos el campo medible de matrices semi-definidas positivas $G : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ dado por la matriz Gramiana

$$G(x) = \Big(\big\langle \Gamma f_i(x), \Gamma f_j(x)\big\rangle\Big)_{i,j\in\mathbb{I}_n} \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{T}^k.$$

Notemos que $G(x)$ es la matriz representación de $T^*_{\Gamma\mathcal{F}(x)} T_{\Gamma\mathcal{F}(x)} \in L(\mathbb{C}^n)$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^n$ para $x \in \mathbb{T}^k$; usando el hecho de que los operadores de rango finito $T^*_{\Gamma\mathcal{F}(x)} T_{E(\mathcal{F})}$ y $T_{\Gamma\mathcal{F}(x)} T^*_{\Gamma\mathcal{F}(x)} = [S_{E(\mathcal{F})})]_x$ tienen los mismos autovalores positivos (contando multiplicidades) vemos que

$$\lambda_j\Big(G(x)\Big) = \begin{cases} \lambda_j(x) & \text{para} \quad 1 \leq j \leq \text{mín}\{d(x), n\} \\ 0 & \text{for} \quad \text{mín}\{d(x), n\} + 1 \leq j \leq n \end{cases} \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.}$$

Por otra parte, la diagonal principal de $G(x)$ es $\big(\|\Gamma f_j(x)\|^2\big)_{j\in\mathbb{I}_n} = \big(\alpha_j(x)\big)_{j\in\mathbb{I}_n}$; así, por el Teorema clásico de Schur-Horn vemos que

$$\Big(\alpha_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_n} \prec \lambda\Big(G(x)\Big) \in \mathbb{R}^n_+ \implies \Big(\alpha_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_n} \prec \Big(\lambda_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}} \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.}$$

Recíprocamente, asumimos que $\big(\alpha_j(x)\big)_{j\in\mathbb{I}_n} \prec \big(\lambda_j(x)\big)_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Considerando una partición conveniente de $\mathbb{T}^k$ en conjuntos medibles asumimos, sin pérdida de generalidad, que $d(x) = d$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.3, existen campos medibles de vectores $u_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^d$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tal que $\|u_j(x)\| = 1$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y $j \in \mathbb{I}_n$, y tales que

$$D_{\lambda(x)} = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \alpha_j(x) \ u_j(x) \otimes u_j(x) \ , \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.,} \tag{2.16}$$

donde $\lambda(x) = \big(\lambda_j(x)\big)_{j\in\mathbb{I}_d}$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Así, por el Teorema 2.1.6 existen campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_d$ tales que $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Sea $u_j(x) = \big(u_{ij}(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_d}$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$, entonces consideramos la sucesión finita $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ determinada por $\Gamma f_j(x) = \alpha_j^{1/2}(x) \sum_{i\in\mathbb{I}_d} u_{ij}(x) \ v_i(x)$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$. Es claro que

$$\|\Gamma f_j(x)\|^2 = \|\alpha_j^{1/2}(x) \ u_j(x)\|^2 = \alpha_j(x) \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.} \quad j \in \mathbb{I}_n \ .$$

Más aún, usando la Eq. (2.16) es fácil ver que

$$[S_{E(\mathcal{F})}]_x \, v_i(x) = \left(\sum_{j\in\mathbb{I}_n} \Gamma f_j(x) \otimes \Gamma f_j(x)\right) v_i(x) = \lambda_i(x)\, v_i(x) \qquad \text{para} \qquad i \in \mathbb{I}_d \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ ctp.}$$

Por lo tanto, $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = \lambda_j(x)$ para $j \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. $\square$

Observación 2.3.3. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT en $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Sean $\alpha_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $j \in \mathbb{I}_n$, funciones medibles y $S \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ un operador SP positivo tal que $R(S) \subseteq \mathcal{W}$. Sea $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_j([S]_x)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ la estructura espectral fina de S (que está bien definida por el Lema 2.1.7). Asumimos que para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. tenemos que

$$\Big(\alpha_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_n} \prec \Big(\lambda_j([S]_x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}} .$$

Entonces, existe $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel,

$$S_{E(\mathcal{F})} = S \quad \text{y} \quad \|\Gamma f_j(x)\|^2 = \alpha_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.} \quad \text{y} \quad j \in \mathbb{I}_n .$$

En efecto, si en la prueba del Teorema 2.3.2 tomamos campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ tales que $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ y tal que $[S]_x v_j(x) = \lambda_j([S]_x)\ v_j$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. (notemos que esto siempre se puede hacer por el Lema 2.1.7) entonces concluimos, como antes, que

$$[S_{E(\mathcal{F})}]_x\ v_j(x) = \lambda_j\big([S]_x\big)\, v_j(x) \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_d \implies [S_{E(\mathcal{F})}]_x = [S]_x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.} \qquad \triangle$$

2.3.2. Eigensteps medibles

Finalizamos el capítulo con una extensión natural de la noción de *eigensteps* introducida en [15], que permite describir un procedimento inductivo para construir una sucesión finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, tal que la *estructura espectral fina* de $S_{E(\mathcal{F})}$ y de la sucesión finita de funciones medibles $\|\Gamma f_i(\cdot)\|^2 : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ son predeterminadas. Esto es, obtenemos una descripción detallada de una construcción paso a paso de sucesiones de Bessel $E(\mathcal{F})$ con *estructura fina* predeterminada. Cabe aclarar, que nuestras técnicas no son extensiones de las empleadas en [15]; de hecho, nuestro enfoque se basa en un modelo aditivo para operadores desarrollado en [8], que se incluye en esta sección.

Observación 2.3.4. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT y sea $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel y consideramos:

1. $\alpha_i(x) = \|\Gamma f_i(x)\|^2$, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
2. $\lambda_i(x) = \lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big)$, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., donde $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big)\Big)_{i\in\mathbb{N}}$ denota la estructura espectral fina de $E(\mathcal{F})$.

Notemos que en este caso se verifican las siguientes condiciones de admisibilidad:

Ad.1 Si $i \geq \min\{n, d(x)\} + 1$ entonces $\lambda_i(x) = 0$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Ad.2 $\big(\alpha_i(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_n} \prec \big(\lambda_i(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

En efecto, la condición Ad.1 se deduce del hecho que $R\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) \subseteq J_{\mathcal{W}}(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Mientras que, la condición Ad.2 se sigue del Teorema 2.3.2.

Para $j \in \mathbb{I}_n$, consideramos la familia $\mathcal{F}_j = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_j} \in \mathcal{W}^j$. En este caso, $E(\mathcal{F}_j) = \{T_\ell f_i\}_{(\ell,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_j}$ y $S_j = S_{E(\mathcal{F}_j)}$ es el operador SP tal que

$$[S_j]_x = S_{\Gamma\mathcal{F}_j(x)} = \sum_{i\in\mathbb{I}_j} \Gamma f_i(x) \otimes \Gamma f_i(x) \in L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))^+ \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

Para $i \in \mathbb{I}_j$ y $j \in \mathbb{I}_n$, consideramos la función medible $\lambda_{i,j} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dada por

$$\lambda_{i,j}(x) = \lambda_i\big([S_j]_x\big), \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

donde $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_i([S_j]_x)\Big)_{i\in\mathbb{N}}$ denota la estructura espectral fina de $E(\mathcal{F}_j)$ (notemod que por construcción $\lambda_i\big([S_j]_x\big) = 0$ para $i \geq j+1$). Entonces, es bien conocido (ver [15]) que $\big(\lambda_{i,j}(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_j}$ entrelaza a $\big(\lambda_{i,(j+1)}(x)\big)_{i\in\mathbb{I}_{j+1}}$, i.e.

$$\lambda_{i,(j+1)}(x) \geq \lambda_{i,j}(x) \geq \lambda_{(i+1),(j+1)}(x) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_j\,,\ j \in \mathbb{I}_{n-1}\,,\ \text{y } x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

Notemos que para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., se verifica que

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_j} \lambda_{i,j}(x) = \operatorname{tr}\left([S_j]_x\right) = \sum_{i\in\mathbb{I}_j} \|\Gamma f_i(x)\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_j} \alpha_i(x) \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n\,.$$

Finalmente, por construcción, se tiene que $S_n = S_{E(\mathcal{F})}$ y por lo tanto, $\lambda_{i,n}(x) = \lambda_i(x)$ para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$, ctp. El resultado previo motiva la siguiente extensión de la noción de eigensteps indroducida en [15]. $\triangle$

Definición 2.3.5. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT y sean $\lambda_i,\ \alpha_i : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $i \in \mathbb{I}_n$, funciones medibles que satisfacen las condiciones de admisibilidad Ad.1 y Ad.2 de la Observación 2.3.4. Una sucesión de eigensteps para (λ, α) es una sucesión doble indexada de funciones medibles $\lambda_{i,j} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, para $i \in \mathbb{I}_j$ y $j \in \mathbb{I}_n$ tal que:

1. $\lambda_{i,(j+1)}(x) \geq \lambda_{i,j}(x) \geq \lambda_{(i+1),(j+1)}(x)$ para $i \in \mathbb{I}_j$, $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
2. $\sum_{i\in\mathbb{I}_j} \lambda_{i,j}(x) = \sum_{i\in\mathbb{I}_j} \alpha_i(x)$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
3. $\lambda_{i,n}(x) = \lambda_i(x)$ para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. $\triangle$

Observación 2.3.6. Consideremos las notaciones y terminología de la Observación 2.3.4. Entonces para (λ, α) se tiene que $\Big(\big(\lambda_{i,j}(\cdot)\big)_{i\in\mathbb{I}_j}\Big)_{j\in\mathbb{I}_n}$ es una sucesión de eigensteps. Decimos que $\Big(\big(\lambda_{i,j}(\cdot)\big)_{i\in\mathbb{I}_j}\Big)_{j\in\mathbb{I}_n}$ es una sucesión de eigensteps para (λ, α) asociada a $\mathcal{F}$. $\triangle$

En lo que sigue, vamos a mostrar que cualquier sucesión de eigensteps, es la sucesión asociada a la sucesión finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel (ver Teorema 2.3.12). Con el fin de mostrar esto, introducimos el modelo aditivo para operadores SP cuyos rangos viven en FSIT.

Definición 2.3.7. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT y sea $d : \mathbb{T}^k \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ la función medible dada por $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Sea $S_0 \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ un operador SP y tal que $R(S_0) \subset \mathcal{W}$. Dada una función medible $m : \mathbb{T}^k \to \mathbb{Z}$ tal que $m(x) \leq d(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. consideramos el conjunto

$$U_m^{\mathcal{W}}(S_0) = \Big\{S_0 + B : B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+ \text{ es SP, } R(B) \subset \mathcal{W},\ \operatorname{rk}\big([B]_x\big) \leq d(x) - m(x)\ \ x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}\Big\} \qquad (2.17)$$

$\triangle$

Notación 2.3.8. En el Lema 2.3.9 usamos la siguiente notación. Si $\mu : \mathbb{T}^k \to \ell^1(\mathbb{N})^+$ entonces

$$D_r(\mu(x)) = \begin{pmatrix} \mu_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_r(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(r).$$

$\triangle$

Lema 2.3.9. Consideremos la Definición 2.3.7 y la Notación 2.3.8. Sea $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_j\big([S_0]_x\big)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ la estructura espectral fina de S_0. Sea $\mu : \mathbb{T}^k \to \ell^1(\mathbb{N})^+$ una función medible tal que $\mu_j(x) = 0$ para $j \geq d(x)+1$, $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $S \in U_m^{\mathcal{W}}(S_0)$ tal que $\lambda_j([S]_x) = \mu_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_{d(x)}$ y para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
2. Existe $P : \mathbb{T}^k \to \coprod_{x\in\mathbb{T}^k} \mathcal{M}_{2d(x)-m(x)}(\mathbb{C})^+$ un campo medible tal que $P(x) = P^*(x) = P^2(x)$ y $\text{rk}\big(P(x)\big) = d(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y

$$\lambda\Big(P(x)\ \ D_{2d(x)-m(x)}\big(\mu(x)\big)\ \ P(x)\Big) = \Big(\lambda_1\big([S_0]_x\big), \ldots, \lambda_{d(x)}\big([S_0]_x\big), 0_{d(x)-m(x)}\Big). \tag{2.18}$$

Demostración. Consideramos una partición finita conveniente de $\mathbb{T}^k$ en subconjuntos medibles y asumimos, sin pérdida de generalidad, que $m(x) = m$ y que $d(x) = d$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Notemos que, los casos en que $m = d$ y $m \leq 0$ son triviales. Por lo tanto, tiene sentido que consideremos $m = 1, \ldots, d-1$. En este caso, por el Teorema 2.1.6 tenemos que

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{j\in\mathbb{I}_d} S(h_j),$$

donde $h_j \in \mathcal{W}$ para $j \in \mathbb{I}_d$, son tales que $\{\Gamma h_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$.

Con estas observaciones, comenzamos la prueba del lema:

$1 \implies 2$. Si $S \in U_m^{\mathcal{W}}(S_0)$, entonces por la Definición 2.3.7 tenemos que $S = S_0 + B$, donde B es un operador autoadjunto y SP, tal que $R(B) \subset \mathcal{W}$.

Así consideramos los campos medibles M_0, M, $E : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dados por

- $M_0(x) = \Big(\big\langle [S_0]_x\ \ \Gamma h_j(x),\ \ \Gamma h_i(x)\big\rangle\Big)_{i,j\in\mathbb{I}_d}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
- $M(x) = \Big(\big\langle [S]_x\ \ \Gamma h_j(x),\ \ \Gamma h_i(x)\big\rangle\Big)_{i,j\in\mathbb{I}_d}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
- $E(x) = \Big(\big\langle [B]_x\ \ \Gamma h_j(x),\ \ \Gamma h_i(x)\big\rangle\Big)_{i,j\in\mathbb{I}_d}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Notemos que por hipótesis se verifica que $E(x) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ es tal que $\text{rk}\big(E(x)\big) = \text{rk}\big([B]_x\big) \leq d-m$ y $\lambda_j\big(M_0(x)+E(x)\big) = \lambda_j\big(M(x)\big) = \lambda_j\big([S]_x\big) = \mu_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_d$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Por el Lema 2.1.1, existen funciones medibles $\lambda_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_d \geq 0$ y campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^d$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $\mathbb{C}^d$ y

$$E(x) = \sum_{j\in\mathbb{I}_d} \lambda_j(x)\ \ v_j(x) \otimes v_j(x) = \sum_{j\in\mathbb{I}_{d-m}} \lambda_j^{1/2}(x)\ \ v_j(x) \otimes \lambda_j^{1/2}(x)\, v_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

Así, $E(x)$ puede factorizarse como $E(x) = V^*(x)V(x)$, tal que $V^*(x) \in \mathcal{M}_{d,d-m}(\mathbb{C})$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\lambda_j^{1/2}(x)\ \ v_j(x) \in \mathbb{C}_d$, y por lo tanto $V(x) \in \mathcal{M}_{d-m,d}(\mathbb{C})$. Si

$$T(x) = \begin{pmatrix} (M_0(x))^{1/2} \\ V(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2d-m,d}(\mathbb{C}) \implies T^*(x)\ \ T(x) = M_0(x) + E(x) \quad \text{y}$$

$$T(x)T(x)^* = \begin{pmatrix} M_0(x) & (M_0(x))^{1/2}\ \ V^*(x) \\ V(x)\ \ (M_0(x))^{1/2} & V(x)\ \ V^*(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2d-m}(\mathbb{C}). \tag{2.19}$$

Sea $U(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{U}(2d-m)$ un campo medible de matrices unitarias, tal que $U(x)$ diagonaliza a $T(x)\ T(x)^*$ (ver [54]) y verifica que

$$U(x)\ \big(T(x)T(x)^*\big)\ U^*(x) = D\big(\lambda(T(x)T(x)^*)\big) = D_{2d-m}\big(\mu(x)\big),$$

ya que $T^*(x)T(x)$ y $T(x)\,T^*(x)$ tienen los mismos autovalores positivos, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Por otro lado, consideramos $P(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_{2d-m}(\mathbb{C})^+$ un campo medible a valores proyecciones, tal que $P(x)$ está dado por $P(x) = U(x)\,P_1\,U^*(x)$, donde $P_1 = I_d \ \oplus\ 0_{d-m}$. Notemos que por construcción $P(x)$ es una proyección ortogonal con $\operatorname{rk}\big(P(x)\big) = d$ y por los resultados previos

$$P(x)\ D_{2d-m}\big(\mu(x)\big)\ P(x) = U(x)\ P_1\ \big(T(x)T(x)^*\big)\ P_1\ U^*(x) = U(x)\begin{pmatrix} M_0(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*(x),$$

esto muestra que la Eq. (2.18), en este caso, se verifica.

$2 \implies 1$. Consideramos $P(x) \in \mathcal{M}_{2d-m}(\mathbb{C})$ como en el item 2. Por un lado, existe $U(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{U}(2d-m)$ un campo medible de matrices unitarias tal que $U^*(x)\ P(x)\ U(x) = P_1$, donde $P_1 = I_d\ \oplus\ 0_{d-m}$ es como antes. Por lo tanto, tenemos que

$$\lambda\Big(P_1\ \big(U^*(x)\ D_{2d-m}\big(\mu(x)\big)\ U(x)\big)\ P_1\Big) = \Big(\lambda_1\big([S_0]_x\big), \ldots, \lambda_d\big([S_0]_x\big), 0_{d-m}\Big). \tag{2.20}$$

Como $\operatorname{rk}\Big(U^*(x)\ D_{2d-m}\big(\mu(x)\big)\ U(x)\Big) \leq d$ entonces vemos que existe $T(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_{2d-m,d}(\mathbb{C})$ un campo medible tal que

$$U^*(x)\ D_{2d-m}\big(\mu(x)\big)\ U(x) = T(x)\ T^*(x).$$

Sean $T_1 : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y $T_2 : \mathbb{T}^k \to \mathcal{M}_{d-m,d}(\mathbb{C})$ campos medibles unívocamente determinados por la Eq.

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{pmatrix} \implies U^*(x)\ D_{2d-m}\big(\mu(x)\big)\ U(x) = T(x)\ T^*(x) = \begin{pmatrix} T_1(x)T_1^*(x) & T_1(x)T_2^*(x) \\ T_2(x)T_1^*(x) & T_2(x)T_2^*(x) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Entonces, las Eqs. (2.20) y (2.21) junto con la definición de P_1, implican que

$$\lambda\Big(T_1(x)\ T_1^*(x)\Big) = \Big(\lambda_1\big([S_0]_x\big), \ldots, \lambda_d\big([S_0]_x\big)\Big) \quad \text{para } x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp}.$$

Por otro lado, notemos que para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. se tiene que

$$T^*(x)\ T(x) = T_1^*(x)\ T_1(x) + T_2^*(x)\ T_2(x) \overset{def}{=} \tilde{M}_0(x) + E(x)$$

con $\operatorname{rk}\big(E(x)\big) \leq d-m$,

$$\lambda\Big(\tilde{M}_0(x)\Big) = \lambda\Big(T_1^*(x)\ T_1(x)\Big) = \Big(\lambda_1\big([S_0]_x\big), \ldots, \lambda_d\big([S_0]_x\big)\Big) \quad \text{y} \quad \lambda\Big(T^*(x)T(x)\Big) = \Big(\mu_1(x), \ldots, \mu_{2d-m}(x)\Big).$$

Sea $W(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathcal{U}(d)$ un campo medible de matrices unitarias tales que $W^*(x)\,\tilde{M}_0(x)\ W(x) = M_0(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp, donde

$$M_0(x) = \Big(\big\langle [S_0]_x\ \Gamma h_j(x),\ \Gamma h_i(x)\big\rangle\Big)_{i,j \in \mathbb{I}_d} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

Sea $W^*(x)E(x)W(x) = \big(b_{ij}(x)\big)_{i,j\in\mathbb{I}_d}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ y sea $B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ el operador SP determinado por $R(B) \subset \mathcal{W}$ y las Eqs.

$$\Big\langle [B]_x\,\Gamma h_j(x),\, \Gamma h_i(x)\Big\rangle = b_{ij}(x)\ , \quad \text{para} \quad i,\, j \in \mathbb{I}_d \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp}.$$

Entonces, $\text{rk}\big([B]_x\big) \leq d-m$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. de forma que $S := S_0 + B \in U_m^{\mathcal{W}}(S_0)$. Además, tenemos que

$$\Big(\big\langle [S]_x \ \Gamma h_j(x), \ \Gamma h_i(x)\big\rangle\Big)_{i,j\in\mathbb{I}_d} = W^*(x)\Big(\tilde{M}_0(x) + E(x)\Big)W(x)$$

lo cual muestra que $\lambda_j\big([S]_x\big) = \mu_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_d$ y para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. □

Observación 2.3.10. Consideremos las notaciones de la Definición 2.3.7 y las del Lema 2.3.9. Por el Teorema 2.1.4, la existencia de un campo medible $P : \mathbb{T}^k \to \coprod_{x\in\mathbb{T}^k} \mathcal{M}_{2d(x)-m(x)}(\mathbb{C})$, como el del Lema 2.3.9, es equivalente a las siguientes condiciones:

1. si $m(x) \leq 0$ entonces $\mu_i(x) \geq \lambda_i\big([S]_x\big)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$,
2. si $m(x) \geq 1$ entonces $\mu_i(x) \geq \lambda_i\big([S]_x\big)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$ y $\mu_{d(x)-m(x)+i}(x) \leq \lambda_i\big([S]_x\big)$ para $i \in \mathbb{I}_{m(x)}$.

△

El Teorema que sigue describe la estructura espectral fina de los elementos de $U_m^{\mathcal{W}}(S_0)$.

Teorema 2.3.11. Considerando las notaciones de la Definición 2.3.7. Dada una función medible $\mu : X \to \ell^1(\mathbb{N})^+$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $C \in U_m^{\mathcal{W}}(S_0)$ tal que $\lambda([C]_x) = \mu(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
2. Para $x \in \mathbb{T}^n \setminus \text{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. tenemos que $\mu(x) = 0$. Para $x \in \text{Spec}(\mathcal{V})$ ctp. tenemos que $\mu_i(x) = 0$ para $i \geq d(x) + 1$ y

   a. si $m(x) \leq 0$, entonces $\mu_i(x) \geq \lambda_i\big([S]_x\big)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$;

   b. si $m(x) \in \mathbb{I}_{d(x)-1}$, entonces $\mu_i(x) \geq \lambda_i\big([S]_x\big)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$ y

$$\lambda_i\big([S]_x\big) \geq \mu_{(d(x)-m(x))+i}(x) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_{m(x)} \,.$$

Demostración. Es consecuencia del Lema 2.3.9 y de la Observación 2.3.10. □

Teorema 2.3.12. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT y sean $\lambda_i, \alpha_i : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $i \in \mathbb{I}_n$ funciones medibles que satisfacen las hipótesis de admisibilidad Ad.1 y Ad.2 de la Observacion 2.3.4. Consideremos una sucesión de eigensteps $\Big(\big(\lambda_{i,j}(\cdot)\big)_{i\in\mathbb{I}_j}\Big)_{j\in\mathbb{I}_n}$ para (λ, α). Entonces, existe $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, tal que $\Big(\big(\lambda_{i,j}(\cdot)\big)_{i\in\mathbb{I}_j}\Big)_{j\in\mathbb{I}_n}$ es la sucesión de eigensteps asociada a $\mathcal{F}$.

Demostración. En primer lugar notemos que tanto las hipótesis como las propiedades de los objetos que nos gustaría construir se verifican puntualmente. Por lo tanto, considerando una partición conveniente de $\mathbb{T}^k$ en conjuntos medibles podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $d(x) = d \geq 1$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Ahora, argumentamos por inducción sobre j. Notemos que por hipótesis para $i = j = 1$, se verifica que $\lambda_{1,1}(x) = \alpha_1(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Sea $f_1 \in \mathcal{W}$ tal que $\|\Gamma f_1(x)\|^2 = \alpha_1(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. En efecto, podemos tomar $f_1 \in \mathcal{W}$ determinada por la condición $\Gamma f_1(x) = \alpha^{1/2}(x)\, \Gamma h_1(x)$, donde $\{h_i\}_{i\in\mathbb{I}_\ell}$ son los generadores cuasi-ortogonales de la descomposición de $\mathcal{W}$ como suma ortogonal (ver Teorema 2.1.6). Entonces, por construcción $\|\Gamma f_1(x)\|^2 = \alpha_1(x)$ y $\lambda_{1,1}(x) = \|\Gamma f_1(x)\|^2 = \lambda_1\big([S_{E(f_1)}]_x\big)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Asumiendo que para $j \in \mathbb{I}_{n-1}$ hemos construido $\mathcal{F}_j = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_j} \in \mathcal{W}^j$ tal que

$$\lambda_{i,\ell}(x) = \lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F}_\ell)}]_x\big) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_\ell \ , \ \ \ell \in \mathbb{I}_j \ \text{ y } \ x \in \mathbb{T}^k \ \text{ctp.} \tag{2.22}$$

Ahora construimos f_{j+1} de la siguiente manera: consideramos $\mu_i = \lambda_{i,j+1}$ para $i \in \mathbb{I}_{j+1}$ y $\mu_i = 0$ para $i > j+1$; establecemos que $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{T}^k \to \ell^1(\mathbb{N})^+$ que es una función medible. Además, consideramos

$S = S_{E(\mathcal{F}_j)} \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ que es un operador SP con $R(S) \subset \mathcal{W}$ y $m(x) = m = d - 1$. Por otra parte, tomando $\ell = j$ en la Eq. (2.22) vemos que $\lambda_i\big([S]_x\big) = \lambda_{i,j}$ para $i \in \mathbb{I}_j$ y $\lambda_i\big([S]_x\big) = 0$ para $i \geq j+1$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Por hipótesis, vemos que $\lambda_{i,j+1} \leq \lambda_{i,j+2} \leq \ldots \leq \lambda_{i,n} = \lambda_i$, ya que las condiciones de admisibilidad de la Observación 2.3.4 se verifican, concluimos que $\mu_i = \lambda_{i,j+1} = 0$ siempre que $i \geq d+1$. Por otro lado, como $d - m = 1$ vemos que el ítem 2 del Teorema 2.3.11 puede re-escribirse como las relaciones de entrelace

$$\mu_i(x) \geq \lambda_i\big([S]_x\big) \geq \mu_{i+1}(x) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_j \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

que se verifican por hipótesis (ver condición 1. en la Definición 2.3.5). Por lo tanto, por la Definición 2.3.7 y el Teorema 2.3.11, existe $B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ operador SP tal que $R(B) \subset \mathcal{W}$, $\text{rk}([B]_x) \leq 1$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., y tal que $\lambda_i([S+B]_x) = \mu_i = \lambda_{i,j+1}$ para $i \in \mathbb{I}_{j+1}$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Las condiciones previas sobre B, implican que existe $f_{j+1} \in \mathcal{W}$ tal que $B = S_{E(f_{j+1})}$. En efecto, f_{j+1} es tal que satisface: $\Gamma f_{j+1}(x) \otimes \Gamma f_{j+1}(x) = [B]_x$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Finalmente, si consideramos $\mathcal{F}_{j+1} = \{f_i\}_{i \in \mathbb{I}_{j+1}}$ entonces $S_{E(\mathcal{F}_{j+1})} = S_{E(\mathcal{F}_j)} + S_{E(f_{j+1})} = S + B$ y por lo tanto $\lambda_{i,j+1}(x) = \lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F}_{j+1})}]_x\big)$ para $i \in \mathbb{I}_{j+1}$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Esto completa el paso inductivo.

□

Finalizamos el capítulo con la siguiente observación. Con las notaciones y terminologías del Teorema 2.3.12 notemos que la suseción construida $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in \mathbb{I}_n}$ es tal que su estructura fina está predeterminada por (λ, α): en efecto, $\lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = \lambda_{i,n}(x) = \lambda_i(x)$ y $\|\Gamma f_i(x)\|^2 = \alpha_i(x)$ para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathbb{T}^k$ (este último hecho puede verificarse usando inducción y el item 2. de la Definición 2.3.5). Esto es, los eigensteps medibles dan una descripción fina de las sucesiones de Bessel $E(\mathcal{F})$ con estructura fina predeterminada.

Capítulo 3

Potenciales convexos en FSIT's

Benedetto y Fickus introdujeron (en [9]) un funcional definido sobre sucesiones finitas de vectores (de norma uno), llamado *potencial de marco*, dado por

$$\mathrm{PM}\left(\{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}\right) = \sum_{i,\, j\,\in\mathbb{I}_n} |\langle f_i\,,\, f_j\rangle|^{\,2}\ . \tag{3.1}$$

En el caso que $\dim \mathcal{H} < \infty$, uno de sus resultados más importantes muestra que los marcos ajustados de norma uno -que constituyen una clase importante de marcos, pues su fórmula de reconstrucción es simple y presentan propiedades de robustez- pueden caracterizarse como mínimos (locales) de este funcional entre todos los marcos de normas uno. Desde entonces, ha habido interés en los mínimos (locales) del potencial de marco, dentro de ciertas clases de marcos, ya que tales mínimos pueden considerarse como sustitutos naturales de los marcos ajustados (ver por ejemplo [16, 46]). Notemos que, dada $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{H}^n$ entonces $\mathrm{PM}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\,\big(S_{\mathcal{F}}^2\big)$. Recientemente, ha habido interés en la estructura de marcos que minimizan otro potencial, llamado error medio cuadrático (MSE), dado por $\mathrm{MSE}(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\,\big(S_{\mathcal{F}}^{-1}\big)$ (ver [31, 48, 53]). A continuación, consideramos una familia de potenciales introducida en [46], que contiene el potencial de marco y el MSE.

Antes de describir los potenciales convexos para sucesiones finitas de vectores, respecto a un subespacio de dimensión finita recordemos los siguientes conjuntos: $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \{\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ ,\ \varphi \text{ es convexa}\}$ y $\mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \{\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})\ ,\ \varphi \text{ es estrictamente convexa}\}$.

Definición 3.0.13. Dada $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y un subespacio de dimensión finita $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}$, el *potencial convexo* asociado a $(\varphi, \mathcal{W})$, denotado por $P_\varphi^{\mathcal{W}}$, se define de la siguiente manera: para una sucesión finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ con operador de marco $S_{\mathcal{F}} \in L(\mathcal{H})^+$,

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}\,(\varphi(S_{\mathcal{F}})\, P_{\mathcal{W}})\,, \tag{3.2}$$

donde $\varphi(S_{\mathcal{F}}) \in L(\mathcal{H})^+$ se obtiene por cálculo funcional y $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ denota la traza usual (semi-finita) en $L(\mathcal{H})$.

$\triangle$

Observación 3.0.14. Notemos que por construcción, $P_{\mathcal{W}}\, S_{\mathcal{F}} = S_{\mathcal{F}}\, P_{\mathcal{W}} = S_{\mathcal{F}}$: entonces, es claro que

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \varphi\big(\lambda_i(S_{\mathcal{F}})\big)\,, \tag{3.3}$$

donde $d = \dim \mathcal{W}$ y $\big(\lambda_i(S_{\mathcal{F}})\big)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^d$ denota el vector de autovalores del operador positivo $S_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{W}} \in L(\mathcal{W})^+$, contando multiplicidades y ordenado en forma no-creciente (usamos la convención $\mathbb{I}_0 = \emptyset$). En particular, si $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es tal que $\varphi(0) = 0$ obtenemos que

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F}) = \operatorname{tr}\left(\varphi(S_{\mathcal{F}})\right) = \operatorname{tr}\left(\varphi(G_{\mathcal{F}})\right),$$

donde $G_{\mathcal{F}} = \big(\langle f_i,\, f_j\rangle\big)_{i,j\in\mathbb{I}_n}$ es la matriz Gramiana de la sucesión finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$. Esto es, si $\varphi(0) = 0$, $P_\varphi^{\mathcal{W}} = P_\varphi$ no depende de $\mathcal{W}$. Por ejemplo, si $\varphi(x) = x^2$ entonces $P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F}) = P_\varphi(\mathcal{F})$ coincide con el potencial de marco. En efecto, por la Eq. (3.1) tenemos que

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F}) = P_\varphi(\mathcal{F}) = \operatorname{tr}\left(S_{\mathcal{F}}^2\right) = \operatorname{tr}\left((T_{\mathcal{F}}^* T_{\mathcal{F}})^2\right) = \sum_{i,\,j\,\in\mathbb{I}_n} |\langle f_i\,,\, f_j\rangle|^{\,2} = \operatorname{PM}(\mathcal{F})\;. \tag{3.4}$$

$\triangle$

Para $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y para un subespacio de dimensión finita $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}$, $P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F})$ es una medida de la dispersión de los autovalores del operador de marco de $\mathcal{F}$. Es decir, bajo ciertas hipótesis de normalización de la familia $\mathcal{F}$, cuanto menor es el valor de $P_\varphi^{\mathcal{W}}(\mathcal{F})$, más concentrados están los autovalores de $S_{\mathcal{F}}|_{\mathcal{W}} \in L(\mathcal{W})^+$. Esta es la motivación principal para considerar estos potenciales convexos (ver [46, 48, 51, 53]).

3.1. Potenciales convexos para sucesiones de traslaciones en FSIT's

En esta sección extendemos la noción de potencial convexo a sistemas generados por traslaciones enteras de familias finitas $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, donde $\mathcal{W}$ es un FSIT y mostramos como primera aplicación del Teorema 2.3.2, que bajos ciertas condiciones, estos potenciales convexos, detectan marcos ajustados para $\mathcal{W}$ como sus mínimos (ver Teorema 3.1.7).

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT en $L^2(\mathbb{R}^k)$, sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel y consideremos $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. El potencial convexo asociado a $(\varphi, \mathcal{W})$ de $E(\mathcal{F})$, denotado $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))$, está dado por

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F})) = \int_{\mathbb{T}^k} P_\varphi^{J_{\mathcal{W}}(x)}(\Gamma\mathcal{F}(x))\;dx\,, \tag{3.5}$$

donde $P_\varphi^{J_{\mathcal{W}}(x)}(\Gamma\mathcal{F}(x)) = \operatorname{tr}\left(\varphi(S_{\Gamma\mathcal{F}(x)})\,[P_{\mathcal{W}}]_x\right)$ es el potencial convexo asociado a $(\varphi, J_{\mathcal{W}}(x))$ de la sucesión $\Gamma\mathcal{F}(x) = \{\Gamma f_i(x)\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ en $\ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para cada $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. $\triangle$

Observación 3.1.2. Consideremos las notaciones de la Definición 3.1.1. Veamos que el lado derecho en la Eq. (3.5) está bien definido. En efecto, por el Lema 2.1.7 tenemos la representación espectral de $[S_{E(\mathcal{F})}]_{(\cdot)}$, como en la Eq. (2.9), en término de las funciones medibles y acotadas $\lambda_j(\cdot) : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, para $j \in \mathbb{I}_n$. Si consideramos la función medible y acotada $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ entonces, usando la Eq. (3.3) vemos que

$$P_\varphi^{J_{\mathcal{W}}(x)}(\Gamma\mathcal{F}(x)) = \sum_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}} \varphi(\lambda_j(x)) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp}\,.$$

Así, la función no-negativa

$$\mathbb{T}^k \ni x \mapsto P_\varphi^{J_{\mathcal{W}}(x)}(\Gamma\mathcal{F}(x))$$

es medible, acotada y por lo tanto integrable en $\mathbb{T}^k$. Esto muestra que el potencial convexo $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))$ es un número real no-negativo bien definido. $\triangle$

La observación anterior muestra que si $\varphi(0) = 0$, el potencial convexo $P_\varphi^{\mathcal{W}} = P_\varphi$ no depende del FSIT $\mathcal{W}$.

Ejemplo 3.1.3. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$. Si fijamos $\varphi(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces el correspondiente potencial de $E(\mathcal{F})$ que denotamos $\text{PM}\,(E(\mathcal{F}))$, está dado por

$$\text{PM}\,(E(\mathcal{F})) = \int_{\mathbb{T}^k} \text{tr}\left(S^2_{\Gamma\mathcal{F}(x)}\right)\, dx = \int_{\mathbb{T}^k} \sum_{i,\,j\in\mathbb{I}_n} |\langle \Gamma f_i(x), \Gamma f_j(x)\rangle|^2 \, dx \,.$$

Así, (ver Eq. (3.4)), $\text{PM}\,(E(\mathcal{F}))$ es una extensión natural del potencial de marco de Benedetto-Fickus. $\triangle$

Observación 3.1.4. Sea $\mathcal{W}$ un SIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $A \in L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))^+$ un operador positivo: en [27], E. Dutkay introduce la función traza local de A relativa a $\mathcal{W}$, notada $\tau_{\mathcal{W},\,A} : \mathbb{T}^k \to [0,\infty]$, y dada de la siguiente manera: para $x \in \mathbb{T}^k$

$$\tau_{\mathcal{W},\,A}(x) = \text{tr}\,(A\,[P_{\mathcal{W}}]_x)\,,$$

donde $\text{tr}\,(\cdot)$ denota la traza usual (semi-finita) en $L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))$. Podemos extender la noción de función traza local, como describimos arriba, en el siguiente conexto: dado $T \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ un operador positivo y SP, la función traza local de T respecto a $\mathcal{W}$ está dada por

$$\tau_{\mathcal{W},\,T}(x) = \text{tr}\,([T]_x\,[P_{\mathcal{W}}]_x) \qquad x \in \mathbb{T}^k\,. \tag{3.6}$$

Notemos que, si $A \in L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))^+$ y $T \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ es el único operador positivo SP, tal que $[T]_x = A$ para $x \in \mathbb{T}^k$, entonces

$$\tau_{\mathcal{W},\,A}(x) = \tau_{\mathcal{W},\,T}(x).$$

Si además asumimos que $\mathcal{W}$ es un FSIT y consideramos $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, entonces tenemos que

$$P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F})) = \int_{\mathbb{T}^k} \tau_{\mathcal{W},\varphi(S_{E(\mathcal{F})})}(x)\, dx\,,$$

donde $\varphi(S_{E(\mathcal{F})}) \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ se obtiene por cálculo funcional. En efecto, observemos que en este caso $\varphi(S_{E(\mathcal{F})})$ es un operador SP tal que

$$[\varphi(S_{E(\mathcal{F})})]_x = \varphi(\,[S_{E(\mathcal{F})}]_x) = \varphi(S_{\Gamma\mathcal{F}(x)}) \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ctp.}$$ $\triangle$

Sea $\mathcal{W}$ un FSIT. En lo que sigue mostramos que bajos ciertas condiciones, los potenciales convexos $P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}))$ para sucesiones finitas $\mathcal{F} \in \mathcal{W}^n$, detectan marcos ajustados para $\mathcal{W}$ como sus mínimos (ver Teorema 3.1.7). A la vez, este hecho motiva el estudio de la estructura de los mínimos de potenciales convexos para sucesiones finitamente generadas en $L^2(\mathbb{R}^k)$ (bajo ciertas restricciones), ya que estos mínimos pueden considerarse como sustitutos naturales de marcos ajustados. Con el fin de establecer los resultados relacionados a estos hechos, introducimos las siguientes nociones y notaciones.

Observación 3.1.5. Sea $(X, \mathcal{X}, \mu_X), (Y, \mathcal{Y}, \mu_Y)$ dos espacios de medida; consideramos su suma directa, notada $X \bigoplus Y$, dada por el triplete $(X \oplus Y, \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y}, \mu_X \oplus \mu_Y)$, donde

1. $X \oplus Y = X \overset{d}{\cup} Y$, es la unión disjunta de los conjuntos. Además, consideramos las inclusiones canónicas $\eta_X : X \to X \oplus Y$ y $\eta_Y : Y \to X \oplus Y$ de X e Y en la unión disjunta, respectivamente. Por lo tanto η_X y η_Y son funciones inyectivas, tales que $\eta_X(X) \cap \eta_Y(Y) = \emptyset$ y $\eta_X(X) \cup \eta_Y(Y) = X \oplus Y$.
2. $\mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y} = \{A \oplus B = \eta_X(A) \cup \eta_Y(B) : A \in \mathcal{X},\, B \in \mathcal{Y}\}$;
3. $\mu_X \oplus \mu_Y$ es la medida dada por $\mu_X \oplus \mu_Y(A \oplus B) = \mu_X(A) + \mu_Y(B)$;

Usando las funciones η_X y η_Y consideramos a X e Y como subespacios de $X \oplus Y$. $\triangle$

Notación 3.1.6. En lo que sigue consideramos:

1. Un FSIT no nulo de $L^2(\mathbb{R}^k)$ de longitud ℓ, notado $\mathcal{W}$;
2. $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ tal que $E(\mathcal{F})$ es una sucesión de Bessel;
3. $d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x) \leq \ell$, para $x \in \mathbb{T}^k$;
4. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$, notada $|\cdot|$; $X_i = d^{-1}(i) \subseteq \mathbb{T}^k$ y $p_i = |X_i|$, $i \in \mathbb{I}_\ell$.
5. Notamos por $C_{\mathcal{W}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_\ell} i\cdot p_i > 0$.
6. El espectro de $\mathcal{W}$ es el conjunto medible $\mathrm{Spec}(\mathcal{W}) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}_\ell} X_i = \{x \in \mathbb{T}^k : d(x) \neq 0\}$. $\triangle$

Como primera aplicación del Teorema 2.3.2 mostramos en el item 2. del siguiente resultado, la existencia de marcos ajustados uniformes generados por traslaciones enteras para un FSIT arbitrario.

Teorema 3.1.7. (Estructura de los mínimos de $P_\varphi^{\mathcal{W}}$ con restricciones de norma) Con las Notaciones 3.1.6 y considerando $n \geq \operatorname{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} d(x)$. Entonces:

1. Para cualquier familia finita $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, con $\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 = 1$ tal que $E(\mathcal{G})$ es una sucesión de Bessel, y para cada $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ tenemos que:
$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})) \geq C_{\mathcal{W}}\ \varphi(C_{\mathcal{W}}^{-1})\,. \tag{3.7}$$
Además, si asumimos que $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})) = C_{\mathcal{W}}\ \varphi(C_{\mathcal{W}}^{-1})$ si y sólo si $E(\mathcal{G})$ es un marco ajustado (uniforme) para $\mathcal{W}$ con cota de marco $C_{\mathcal{W}}^{-1}$, i.e.
$$S_{E(\mathcal{G})} = C_{\mathcal{W}}^{-1} P_{\mathcal{W}}. \tag{3.8}$$
2. Existe una familia finita $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$, tal que $\|f_i\|^2 = n^{-1}$ para $i \in \mathbb{I}_n$ y tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco ajustado (uniforme) para $\mathcal{W}$. Notemos que la cota inferior en la Eq. (3.7) se alcanza en $\mathcal{F}$.

Demostración. Para probar el ítem 1 consideremos el siguiente triplete $(X_{ij}, \mathcal{X}_{ij}, \rho_{ij})$ donde $X_{ij} = X_i$, $\mathcal{X}_{ij} = \mathcal{X}_i$ es la σ-álgebra de conjuntos de Borel en X_i y $\rho_{ij} = |\cdot|_i$ como antes, es la medida de Lebesgue de X_i, para $j \in \mathbb{I}_i$ y para $i \in \mathbb{I}_\ell$. Con las notaciones de la Observación 3.1.5, consideramos el espacio de medida
$$(X, \mathcal{X}, \mu) = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}_\ell} \bigoplus_{j\in\mathbb{I}_i} (X_{ij}, \mathcal{X}_{ij}, |\cdot|_{ij})\ .$$
Para $j \in \mathbb{I}_i$ y para $i \in \mathbb{I}_\ell$, también consideramos las inclusiones canónicas $\eta_{i,j} : X_{i,j} \to X$. Así, para cada $x \in X$ existen únicos $i \in \mathbb{I}_\ell$, $j \in \mathbb{I}_i$ y $\tilde{x} \in X_{i,j} = X_i$ tales que $\eta_{i,j}(\tilde{x}) = x$. Notemos que, por construcción, $\mu(X) = \sum_{i\in\mathbb{I}_\ell} i\cdot p_i = C_{\mathcal{W}}$.

Sea $\lambda_{E(\mathcal{G})} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función medible de autovalores de $E(\mathcal{G})$ definidos de la siguiene manera: para $x \in X$, sean $(i\,,\,j) \in \mathbb{I}_\ell \times \mathbb{I}_i$ y $\tilde{x} \in X_{i,j} = X_i$ (determinados unívocamente) tales que $\eta_{i,j}(\tilde{x}) = x$; en este caso establecemos
$$\lambda_{E(\mathcal{G})}(x) = \lambda_j(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_{\tilde{x}}) = \lambda_j(S_{\Gamma\mathcal{G}(\tilde{x})})\ ,$$
donde $\lambda_j(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_{\tilde{x}}) \in \left(\ell_+^1(\mathbb{Z}^k)\right)^{\downarrow}$ es la estructura espectral fina de $E(\mathcal{G})$ (ver Definición 2.3.1). Si $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces
$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})) = \int_X \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\ d\mu(x). \tag{3.9}$$

En efecto, por la Eq. (3.5)

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})) = \int_{\mathbb{T}^k} P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x))\ dx = \int_{\mathrm{Spec}(\mathcal{W})} P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x))\ dx,$$

donde $P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x))$ es el potencial convexo asociado a $(\varphi, J_\mathcal{W}(x))$, respecto de la sucesión finita $\Gamma\mathcal{G}(x) = \{\Gamma\, g_i(x)\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \ell^2(\mathbb{Z}^k)$, definido como en la Eq. (3.3) (notemos que $P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x)) = 0$ para $x \in \mathbb{T}^k \setminus \mathrm{Spec}(\mathcal{W})$). Por lo tanto, si $x \in X_i$ para algún $i \in \mathbb{I}_\ell$, entonces se tiene que

$$P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x)) = \sum_{j=1}^{i} \varphi(\lambda_j(S_{\Gamma\mathcal{G}(x)}))\,.$$

Para $i \in \mathbb{I}_\ell$ tenemos que

$$\int_{X_i} P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x))\, dx = \int_{X_i} \sum_{j=1}^{i} \varphi(\lambda_j(S_{\Gamma\mathcal{G}(x)}))\, dx = \int_{\oplus_{j=1}^{i} X_{ij}} \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\, d\mu(x)\ .$$

Por otro lado, ya que $\mathrm{Spec}(\mathcal{W}) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}_\ell} X_i$ y $X = \oplus_{i\in\mathbb{I}_\ell} \oplus_{j\in\mathbb{I}_i} X_{i,j}$,

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})) = \sum_{i\in\mathbb{I}_\ell} \int_{X_i} P_\varphi^{J_\mathcal{W}(x)}(\Gamma\mathcal{G}(x))\, dx = \sum_{i\in\mathbb{I}_\ell} \int_{\oplus_{j=1}^{i} X_{ij}} \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\, d\mu(x) = \int_X \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\, d\mu(x)\,,$$

que prueba la Eq. (3.9). Si $\mathcal{G}$ es como el del ítem 2, entonces $\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 = 1$ y en particular, si tomamos $\varphi(x) = x$ en la Eq. (3.9), tenemos que

$$\int_X \lambda_{E(\mathcal{G})}(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}^k} \mathrm{tr}\left(S_{\Gamma\mathcal{G}(x)}\right)\ dx = \int_{\mathbb{T}^k} \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|\Gamma g_i(x)\|^2\, dx = \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 = 1\ .$$

Considerando la medida de probabilidad $\tilde{\mu} = C_\mathcal{W}^{-1}\, \mu$. Entonces, como en el Ejemplo 1.4.14, obtenemos

$$\int_X \lambda_{E(\mathcal{G})}(x)\, d\tilde{\mu}(x) = C_\mathcal{W}^{-1} \quad\Longrightarrow\quad C_\mathcal{W}^{-1}\cdot 1_X \prec \lambda_{E(\mathcal{G})} \quad (\text{ en } (X, \mathcal{X}, \tilde{\mu})\,)\,. \tag{3.10}$$

Si tomamos $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces, usando el hecho previo y el Teorema 1.4.13, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(C_\mathcal{W}^{-1}) = \int_X \varphi(C_\mathcal{W}^{-1}\cdot 1_X)\ d\tilde{\mu} \quad &\leq \quad \int_X \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\ d\tilde{\mu}(x) \\ &= \quad C_\mathcal{W}^{-1} \int_X \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\ d\mu(x) = C_\mathcal{W}^{-1} P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})),\end{aligned}$$

que prueba la Eq. (3.7). Si $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y además $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{G})) = \varphi(C_\mathcal{W}^{-1})\, C_\mathcal{W}$, usando la Eq. (3.9) y la relación de mayorización en la Eq. (3.10), tenemos que

$$\int_X \varphi(\lambda_{E(\mathcal{G})}(x))\ d\tilde{\mu}(x) = \int_X \varphi(C_\mathcal{W}^{-1})\ d\tilde{\mu}\,.$$

Así, por la Proposición 1.4.15,

$$(\lambda_{E(\mathcal{G})})^* = C_\mathcal{W}^{-1}\ 1_{[0,1]} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_i(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_x) = C_\mathcal{W}^{-1}\ \text{ para } i \in \mathbb{I}_{d(x)} \quad \text{ y } \quad x \in \mathbb{T}^k\ \text{ ctp}\,.$$

Por lo tanto, $S_{E(\mathcal{G})} = C_{\mathcal{W}}^{-1}\, P_{\mathcal{W}}$ i.e. $E(\mathcal{G})$ es un marco ajustado para $\mathcal{W}$. Recíprocamente, notemos que si $S_{E(\mathcal{G})} = C_{\mathcal{W}}^{-1}\, P_{\mathcal{W}}$ la cota inferior en la Eq. (3.7) se alcanza.

Para probar el item 2. notar que, por hipótesis $\operatorname{Spec}(\mathcal{W}) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}_n} Z_i$. Para $x \in \mathbb{T}^k$, fijamos $\alpha(x) = 0$ si $x \in \mathbb{T}^k \setminus \operatorname{Spec}(\mathcal{W})$ y:

$$\alpha(x) := \begin{cases} j\cdot(n\cdot C_{\mathcal{W}})^{-1} & \text{si} \quad x\in Z_j \ \text{ y } \ p_j>0 \\ 0 & \text{si} \quad x\in Z_j \ \text{ y } \ p_j=0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Entonces, es fácil ver que $(\alpha(x))_{j\in\mathbb{I}_n} \prec (C_{\mathcal{W}})_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ para $j\in\mathbb{I}_n$ y $x\in\mathbb{T}^k$ ctp. Por lo tanto, por el Teorema 2.3.2 existe $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ tal que $\|\Gamma f_i(x)\|^2 = \alpha(x)$ para $i\in\mathbb{I}_n$ y tal que $S_{\Gamma\mathcal{F}(x)} = C_{\mathcal{W}}^{-1}\, P_{J_{\mathcal{W}}(x)}$, para $x\in\mathbb{T}^k$ ctp. Así, $S_{E(\mathcal{F})} = C_{\mathcal{W}}^{-1} P_{\mathcal{W}}$ y

$$\|f_i\|^2 = \int_{\mathbb{T}^k} \alpha(x)\, dx = (n\, C_{\mathcal{W}})^{-1} \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \int_{Z_j} j\, dx = (n\, C_{\mathcal{W}})^{-1} \sum_{j\in\mathbb{I}_n} j\cdot p_j = n^{-1}\,.$$

$\square$

3.2. Water-filling en espacios de medidas

Como lo anticipamos, los resultados del Capítulo 2 surgieron como motivación para mostrar que dada una sucesión de números positivos $\alpha_1 \geq \ldots, \geq \alpha_n > 0$, un función $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\mathcal{W} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ un FSIT existen vectores $f_i \in \mathcal{W}$ tales que $\|f_i\|^2 = \alpha_i$ para $i \in \mathbb{I}_n$ y tal que la sucesión de Bessel SG inducida por estos vectores minimizan el potencial convexo asociado al par $(\varphi, \mathcal{W})$ (ver Definición 3.1.1) entre todas las sucesiones finitas (este problema se resuleve en la Sección 3.3). Como herramienta para tratar este problema, consideramos la construcción del *water-filling* (*llenado con agua ó principio de compuertas*) en términos de mayorización en espacios de probabilidad.

El *water-filling* tiene sus orígenes en el trabajo de Shanon [57], como solución al problema de distribución espectral óptima (ver [25]). Sus técnicas también han sido la herramienta principal en el diseño de canales con capacidad óptima (ver [59] y los trabajos más recientes sobre técnicas iterativas de *water-filling* [52, 56]).

Como primer paso hacia una extensión de esta construcción, examinamos su contraparte escalar, en el contexto general de espacios de medidas. En la próxima sección mostraremos que las técnicas de *water-filling* producen soluciones óptimas en el contexto general (no-conmutativo) de campos medibles de matrices semidefinidas positivas.

A lo largo de esta Sección $(X, \mathcal{X}, \mu)$ denotará un espacio de propabilidad y $L^\infty(X,\mu)^+$ denotará el conjunto de todas las funciones positivas en $L^\infty(X,\mu)$.

Definición 3.2.1 (*Water-filling* a nivel c)**.** Sea $f \in L^\infty(X,\mu)^+$. Dado $c \geq \operatorname{inf\,esc} f \geq 0$, consideramos $f_c \in L^\infty(X,\mu)^+$, dada por $f_c = \max\{f,\, c\} = f + (c-f)^+$, donde g^+ denota la parte positiva de la función real g. $\triangle$

Con el fin de estudiar las propiedades de submayorización de la función f_c obtenida por water-filling, consideramos el siguiente resultado, en el cual obtenemos una relación sencilla entre la reordenada decreciente de f y f_c.

Lema 3.2.2. Sea $f \in L^\infty(X,\mu)^+$ y sea $c \geq \operatorname{inf\,esc} f \geq 0$. Consideremos el número

$$s_0 = \mu\{x\in X:\ f(x)>c\}\,. \quad \text{Entonces,} \quad f_c^*(s) = \begin{cases} f^*(s) & si \quad 0\leq s<s_0\,; \\ c & si \quad s_0\leq s\leq 1\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Demostración. Notemos que por la Eq. (1.24), para $0 \leq s < s_0$ tenemos

$$\begin{aligned} f^*(s) &= \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ \mu\{x \in X : \ f(x) > t\} > s\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ \mu\{x \in X : \ f(x) > t\} > s \ \text{ y } \ t \geq c\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ \mu\{x \in X : \ f_c(x) > t\} > s \ \text{ y } \ t \geq c\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ \mu\{x \in X : \ f_c(x) > t\} > s\} = f_c^*(s) \ . \end{aligned}$$

Es fácil ver que si $s_0 \leq s \leq 1$, entonces $f_c^*(s) = c$. □

Para probar el Teorema 3.2.5, que se enuncia más adelante, necesitamos una versión re-parametrizada de algunos resultados básicos de la Sección 1.4.2:

Lema 3.2.3. Sean $a\,,\,b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $k \in L^\infty([\,a\,,\,b\,],\,\nu)^+$ una función continua a derecha no-creciente, donde $\nu = (b-a)^{-1}\,dt$ es la medida normalizada en $[a,b]$. Entonces

1. La reordenada decreciente $k^*(t) = k\big(\,(b-a)\,t + a\,\big)$, para $t \in [0\,,\,1)$.

2. Fijemos la constante $c \in \mathbb{R}$. Si

$$(b-a)\,c \leq \int_a^b k(t)\,dt \implies (s-a)\,c \leq \int_a^s k(t)\,dt \quad \text{para} \quad s \in [a\,,\,b]\ .$$

Demostración. En primer lugar consideramos la función $\tilde{k}$ dada por

$$\tilde{k}(t) = k((b-a)\ t + a) \quad \text{para} \quad t \in [0,1),$$

y luego consideramos los conjuntos

$$\{u \in [0,1) : \tilde{k}(u) > s\} = [0,\beta) \quad \text{y} \quad \{r \in [a,b) : k(r) > s\} = [a,\alpha).$$

Notemos que, por el hecho que $\tilde{k}$ y k son no-crecientes y continuas a derecha y por la definición de $\tilde{k}$, tenemos que $\alpha = \beta(b-a) + a$. Así

$$\begin{aligned} k^*(t) &= \sup\ \{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ \nu\{r \in [a,b) : \ k(r) > s\} > t\} \\ &= \sup\ \{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ |\{r \in [a,b) : \ k(r) > s\}| > t\,(b-a)\} \\ &= \sup\ \{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \ |\{u \in [0,1) : \ \tilde{k}(u) > s\}| > t\} \\ &= (\tilde{k})^*(t). \end{aligned}$$

Pero es sencillo verificar que $(\tilde{k})^* = \tilde{k}$, por lo tanto

$$k^*(t) = \tilde{k}(t) = k\big(\,(b-a)\,t + a\,\big) \quad \text{para} \quad t \in [0,1).$$

Para probar el item 2, consideremos $k \in L^\infty([a,b],\nu)$ y aplicamos el item 1, así

$$k^*(t) = k\big(\,(b-a)\,t + a\,\big) \quad \text{para} \quad t \in [0,1).$$

Notemos que por hipótesis,

$$0 \leq c \leq \int_{[a,b]} k \ d\nu\ .$$

Por el Ejemplo 1.4.14 concluimos que $c \prec_w k$. Como $c^* = c$, entnces para $s \in (a, b]$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
(s-a)\, c &= (b-a) \int_0^{\frac{s-a}{b-a}} c^* \; dt \le (b-a) \int_0^{\frac{s-a}{b-a}} k^*(t) \; dt \\
&= (b-a) \int_0^{\frac{s-a}{b-a}} k((b-a)\, t + a) \; dt = \int_a^s k(t) \; dt \; .
\end{aligned}
$$

□

Con las notaciones del Lema 3.2.3 notemos que el ítem 2 es una reformulación (usando la re-parametrización del ítem 1 de las desigualdades de submayorización) correspondientes a $c \prec_w k$ en $([a, b], \, \nu)$, siempre que $c \le \int_{[a,b]} k \; d\nu$ (ver Ejemplo 1.4.14).

Observación 3.2.4. Sea $f \in L^\infty(X, \mu)^+$. Consideremos la función $\phi : [\operatorname{inf\,esc} f, \infty) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, dada por

$$
\phi(c) = \int_X f_c \; d\mu = \int_X [f(x) + (c - f(x))^+] \; d\mu(x) \, .
$$

Entonces, es fácil ver que ϕ tiene las siguientes propiedades:

1. $\phi(\operatorname{inf\,esc} f) = \int_X f \; d\mu$ y $\lim_{c \to +\infty} \phi(c) = +\infty$;
2. ϕ es continua y estrictamente creciente.

Por lo tanto, para cada $w \ge \int_X f \; d\mu$ existe un único $c(w) = c \ge \operatorname{inf\,esc} f$, tal que

$$
\phi(c(w)) = w \quad \text{ i.e. } \quad \int_X f_{c(w)} \; d\mu = w \; . \tag{3.13}
$$

△

Teorema 3.2.5 ($\prec_w$-optimalidad del *water-filling*)**.** Sea $f \in L^\infty(X, \mu)^+$, consideremos $w \ge \int_X f \; d\mu$ y la constante $c(w) = c$ como en la Observación 3.2.4. Entonces, para cada $h \in L^\infty(X, \mu)^+$,

$$
f \le h \quad \text{ y } \quad \int_X h \; d\mu \ge w \implies f_c \prec_w h \; .
$$

Demostración. Asumamos que $f \le h$ y $\int_X h \; d\mu \ge w$. Si consideramos $s_0 = \mu\{x \in X : \; f(x) > c\}$ entonces, por el Lema 3.2.2, tenemos que Eq. (3.12) se verifica. Así, usando la Observación 1.4.11, vemos que si $0 \le s < s_0$, entonces

$$
\int_0^s f_c^*(t) \; dt = \int_0^s f^*(t) \; dt \le \int_0^s h^*(t) \; dt \; . \tag{3.14}
$$

Fijado $s_0 \le s \le 1$, consideramos

$$
\alpha = \int_0^{s_0} h^*(t) \;\, dt - \int_0^{s_0} f_c^*(t) \;\, dt \ge 0 \quad \text{ y } \quad k = h^* + \frac{1}{1 - s_0}\, \alpha \in L^\infty([0,1], \; dt)^+ .
$$

Notemos que k es una función continua y no-creciente. En este caso, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{s_0}^1 k(t) \; dt &= \int_{s_0}^1 h^*(t) \;\, dt + \alpha \\
&= \int_{s_0}^1 h^*(t) \; dt + \left(\int_0^{s_0} h^*(t) \; dt - \int_0^{s_0} f_c^*(t) \;\, dt \right) \\
&\ge w - (w - (1 - s_0)\, c) = (1 - s_0)\, c \; .
\end{aligned}
$$

Así, el Lema 3.2.3 (aplicado a la función $k|_{[s_0\,,\,1]}$) implica que

$$(s-s_0)\,c \leq \int_{s_0}^{s} k(t)\ dt = \int_{s_0}^{s} h^*(t)\ dt + \frac{s-s_0}{1-s_0}\ \alpha \quad \text{para cada} \quad s \in [s_0\,,\,1]\ .$$

Por lo tanto, usando la desigualdad anterior y el Lemma 3.2.2, concluimos que, para $s_0 \leq s < 1$

$$\begin{aligned} \int_0^s f_c^*(t) &= \int_0^{s_0} h^*(t)\ dt - \alpha + (s-s_0)\,c \\ &\leq \int_0^s h^*(t)\ dt + \left(\frac{s-s_0}{1-s_0} - 1\right)\ \alpha \leq \int_0^s h^*(t)\ dt\ . \end{aligned}$$

Este último hecho junto a la Eq. (3.14), muestran que $f_c \prec_w h$. $\square$

El Teorema 3.2.5, implica una familia de desigualdades integrales en término de funciones convexas involucrando el *water-filling* de la función f a nivel c. Vamos a necesitar estos hechos con el fin de mostrar las propiedades de optimalidad de la versión no-conmutativa del *water-filling*.

Corolario 3.2.6. Con las notaciones del Teorema 3.2.5, si $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es no-decreciente, entonces

$$\int_X \varphi \circ f_c\ d\mu \leq \int_X \varphi \circ h\ d\mu\,. \tag{3.15}$$

Si existe $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente tal que se verifica la igualdad de la Eq. (3.15) entonces $h = f_c$.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia de la relación de submayorización en el Teorema 3.2.5 y del Teorema 1.4.13. Si, además, asumimos que $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es tal que se verifica la igualdad en la Eq. (3.15), entonces por la Proposición 1.4.15, vemos que $f_c^* = h^*$. Sea $B = \{x \in X :\ f(x) > c\}$ tal que $s_0 = \mu(B)$. Así, es fácil probar que

$$(f \cdot 1_B)^*(s) = \begin{cases} f^*(s) & \text{si} \quad s \in [0, s_0)\,; \\ 0 & \text{si} \quad s \in [s_0, 1)\,. \end{cases}$$

En particular, notemos que $(f \cdot 1_B)^* = 1_{[0,s_0)} \cdot f_c^*$. Por un lado, tenemos $(h \cdot 1_B)^* = 1_{[0,\,s_0)} \cdot (h \cdot 1_B)^*$. Por lo tanto, como $h \geq h \cdot 1_B \geq f \cdot 1_B$, por la Observación 1.4.11 tenemos que

$$h^* \geq (h \cdot 1_B)^* = 1_{[0,s_0)} \cdot (h \cdot 1_B)^* \geq (f \cdot 1_B)^* = 1_{[0,s_0)} \cdot f_c^* \quad \Longrightarrow \quad (h \cdot 1_B)^* = (f \cdot 1_B)^*\,.$$

Así, usando una vez más la Observación 1.4.11, obtenemos que $h \cdot 1_B = f \cdot 1_B = f_c \cdot 1_B > c \cdot 1_B$, donde el último hecho se sigue de la Definición 3.2.1. Finalmente, notar que

$$\mu(h^{-1}(\{c\})) = |(h^*)^{-1}(\{c\})| = |(f_c^*)^{-1}(\{c\})| = 1 - \mu(B)\ ,$$

esto muestra que $h \cdot 1_{X \setminus B} = c \cdot 1_{X \setminus B}$, entonces $h = f_c\,$. $\square$

3.3. Marcos óptimos con normas predeterminadas para FSIT's

Antes de describir el problema principal de esta sección, introducimos la siguiente definición:

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{W}$ un FSIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{I}_n} \in (\mathbb{R}_{>0}^n)^{\downarrow}$. Consideramos

$$\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W}) = \{\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in \mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n :\ E(\mathcal{F}) \text{ es sucesión de Bessel}\ ,\ \|f_i\|^2 = \alpha_i\ ,\ i \in \mathbb{I}_n\}\,, \tag{3.16}$$

el conjunto de las familias finitas con normas predeterminadas por α que generan sucesiones de Bessel SG en $\mathcal{W}$. $\triangle$

Notemos que las restricciones sobre las familias $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ (esto es, $\|f_i\|^2 = \alpha_i$ para $i \in \mathbb{I}_n$) son de naturaleza *global*. Nuestro problema es tratar de describir las $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$, tales que sus correspondientes sucesiones de Bessel $E(\mathcal{F})$ sean marcos para $\mathcal{W}$ lo más estables posible. Lo ideal, sería buscar sucesiones $\mathcal{F}$ tales que $E(\mathcal{F})$ sean marcos ajustados para $\mathcal{W}$. Sin embargo, el Teorema 2.3.2 indica que hay algunos obstáculos para la existencia de tales sucesiones (este es el caso del Teorema 3.3.5, que enuciaremos y demostraremos más adelante).

Por un simple argumento de re-escaleo, podemos asumir que $\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \alpha_i = 1$; entonces el Teorema 3.1.7 muestra que si existe $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ tal que $E(\mathcal{F}_0)$ es un marco ajustado para $\mathcal{W}$, entonces $E(\mathcal{F}_0)$ es el mínimo de cualquier potencial convexo $P_\varphi^{\mathcal{W}}$ (ver Definición 3.1.1) para cualquier función convexa $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}_0)) = C_{\mathcal{W}}\ \varphi(C_{\mathcal{W}}^{-1})$. Por otra parte, si $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es una función estrictamente convexa, dicha $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ para la cual $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F})) = P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}_0))$, es tal que $E(\mathcal{F}_0)$ es un marco ajustado. Esto muestra que en el caso general, con el fin de buscar las familias $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ tales que los esquemas de codificación asociados a sus correspondientes sucesiones de Bessel $E(\mathcal{F})$ sean lo más estables posible, podemos estudiar los mínimos del potencial convexo $P_\varphi^{\mathcal{W}}$ asociado a $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

Por lo tanto, dada $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, en lo que sigue mostramos la existencia de sucesiones finitas $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$, tales que

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})) = \operatorname{mín}\{P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F})) :\ \mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})\}\,.$$

Además, si $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ describimos la *estructura espectral fina* del operador de marco de $E(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})$. Si $\varphi(x) = x^2$, nuestros resultados se extienden a resultados de [9, 16, 46], para el potencial de marco en el contexto de sucesiones de Bessel SG que viven en $\mathcal{W}$ FSIT.

En la Sección 3.3.1 consideramos el caso uniforme, en el que la dimensión de las fibras de $\mathcal{W}$ son constantes en $\operatorname{Spec}(\mathcal{W})$. Una vez resuelto el caso uniforme, reducimos la existencia de sucesiones de Bessel SG óptimas a un modelo finito dimensional: nos ocupamos de este modelo en la Sección 3.3.2. El caso general del problema de diseño óptimo con normas predeterminadas en un FSIT es estudiado en la Sección 3.3.3.

3.3.1. El caso de dimensión uniforme

Consideramos las Notaciones 3.1.6. En esta sección obtenemos la *estructura espectral fina* de los mínimos de los potenciales convexos en $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ bajo el supuesto que $d(x) = d$ para $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. Para describir este caso particular, usamos nociones y construcciones de *water-filling* desarrolladas en la Sección 3.2.

Con la idea de simplificar la notación, consideramos la siguiente observación:

Observación 3.3.2. Sea $(Z\,,\,\mathcal{Z}\,,\,|\cdot|)$ un espacio de medida (no nulo) de $(\mathbb{T}^k\,,\,\mathcal{B}\,,\,|\cdot|)$ y consideramos $(\mathbb{I}_r, \mathcal{P}(\mathbb{I}_r), \#(\cdot))$ i.e, $\mathbb{I}_r$ dotado de la medida de conteo. En adelante consideramos el espacio producto $X \stackrel{\text{def}}{=} Z \times \mathbb{I}_r$ dotado de la medida producto $\mu \stackrel{\text{def}}{=} |\cdot| \times \#(\cdot)$. También notemos que el espacio producto se puede escribir como $X = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}_r} Z$. $\triangle$

Lema 3.3.3. Consideremos las notaciones de la Observación 3.3.2 y sea $\alpha : Z \to \mathbb{R}^r$ una función medible. Sea $\breve{\alpha} : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\breve{\alpha}(x, i) = \alpha_i(x) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_r \quad \text{y} \quad x \in Z\ .$$

Entonces, $\breve{\alpha}$ es una función medible y se tiene que:

1. Si $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces $\int_X \varphi \circ \breve{\alpha}\ d\mu = \sum_{i\in\mathbb{I}_r} \int_Z \varphi(\alpha_i(x))\ dx$.

2. Sea $\beta : Z \to \mathbb{R}^r$ una función medible y sea $\breve{\beta} : X \to \mathbb{R}$ una función construida de forma análoga a la función $\breve{\alpha}$. Si

$$\alpha(x) \prec \beta(x) \quad \text{para} \quad x \in Z \ \text{ctp.} \implies \breve{\alpha} \prec \breve{\beta} \quad \text{en} \quad (X, \mathcal{X}, \tilde{\mu}),$$

   donde $\tilde{\mu} = (r \cdot |Z|)^{-1}\, \mu$.

3. Análogamente, $\alpha(x) \prec_w \beta(x)$ para $x \in Z$ ctp. implica que $\breve{\alpha} \prec_w \breve{\beta}$ en $(X, \mathcal{X}, \tilde{\mu})$.

Demostración. Para probar que $\breve{\alpha}$ es medible, basta ver como fue definida. La prueba del ítem 1 pasa por realizar la siguiente cuenta

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_r} \int_Z \varphi(\alpha_i(x))\ dx = \sum_{i\in\mathbb{I}_r} \int_{Z\times\{i\}} (\varphi \circ \breve{\alpha})(x)\ dx = \int_{Z\times\mathbb{I}_r} (\varphi \circ \breve{\alpha})(x)\ dx = \int_X \varphi \circ \breve{\alpha}\ d\mu\,.$$

Para probar el ítem 2 notemos que si $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces $\alpha(x) \prec \beta(x)$ implica que $\sum_{i\in\mathbb{I}_r} \varphi(\alpha_i(x)) \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_r} \varphi(\beta_i(x))$ para $x \in Z$, ctp. Entonces, usando el ítem 1 tenemos que

$$\int_X \varphi \circ \breve{\alpha}\ d\tilde{\mu} = (r \cdot |Z|)^{-1} \int_Z \sum_{i\in\mathbb{I}_r} \varphi(\alpha_i(x))\, dx \leq (r \cdot |Z|)^{-1} \int_Z \sum_{i\in\mathbb{I}_r} \varphi(\beta_i(x))\, dx = \int_X \varphi \circ \breve{\beta}\ d\tilde{\mu}\,.$$

Como $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es arbitraria, a partir del Teorema 1.4.13 tenemos que $\breve{\alpha} \prec \breve{\beta}$.

Finalmente el item 3. se prueba usando argumentos similares, basados en la carateterización de la submayorización en términos de desigualdades entre integrales involucrando funciones convexas no-decrecientes dada en el Teorema 1.4.13 (ver también [20]). ☐

Lema 3.3.4. Sea $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espacio de probabilidad y sean $f,\, g \in L^\infty(X, \mu)^+$ tales que $f \prec_w g$. Sean $c,\, d \geq 0$ tales que $\int_X f_c\ d\mu = \int_X g_d\ d\mu$, donde f_c y g_d denotan los *water-fillings* de f y g a nivel c y d, respectivamente. Entonces, $f_c \prec g_d$ en (X, μ).

Demostración. Consideremos $s_0 = \mu\{x \in X : \ f(x) > c\} \in [0, 1]$. Notemos que, por construcción $g \leq g_d$ en X por lo tanto $g^* \leq (g_d)^*$ en $[0, 1]$. Así, para $s \in [0, s_0]$ tenemos

$$\int_0^s (f_c)^*\ dt = \int_0^s f^*\ dt \leq \int_0^s g^*\ dt \leq \int_0^s (g_d)^*\ dt\,. \tag{3.17}$$

Po otra parte,

$$\int_0^{s_0} (g_d)^*\ dt \geq \int_0^{s_0} g^*\ dt \geq \int_0^{s_0} f^*\ dt \implies \alpha := \int_0^{s_0} (g_d)^*\ dt - \int_0^{s_0} f^*\ dt \geq 0\,.$$

Usando la Observación 3.2.4 y la hipótesis, tenemos que

$$\int_0^{s_0} f^*\ dt + (1 - s_0)\, c = \int_0^{s_0} (g_d)^*\ dt + \int_{s_0}^1 (g_d)^*\ dt \implies (1 - s_0)\, c = \int_{s_0}^1 [(g_d)^* + \frac{\alpha}{1 - s_0}]\ dt\,.$$

Así, por el Lema 3.2.3 se tiene que para $s \in [s_0, 1]$:

$$(s - s_0)\, c \leq \int_{s_0}^s [(g_d)^* + \frac{\alpha}{1 - s_0}]\ dt \implies (s - s_0)\, c \leq \int_{s_0}^s (g_d)^*\ dt + \alpha\,.$$

Esta última identidad muestra que para $s \in [s_0, 1]$, tenemos

$$\int_0^s (f_c)^* \, dt = \int_0^{s_0} (g_d)^* \, dt - \alpha + (s - s_0)\, c \leq \int_0^{s_0} (g_d)^* \, dt + \int_{s_0}^s (g_d)^* \, dt\,. \tag{3.18}$$

El Lema es una consecuencia de las Eqs. (3.17) y (3.18). $\square$

El Teorema que sigue es el primer resultado importante de este capítulo.

Teorema 3.3.5 (Existencia de sucesiones óptimas en $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$)**.** Consideremos las notaciones 3.1.6. Sea $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_n} \in (\mathbb{R}^n_{>0})^\downarrow$, asumamos que $\mathcal{W}$ es tal que $d(x) = d$ para $x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. y consideremos $r = \text{mín}\{n, d\}$. Sea $p = p_d = |\mathrm{Spec}(\mathcal{W})|$. Entonces, existen $c = c(\alpha,\, d,\, p) > 0$ y $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ tales que:

1. Para $x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. tenemos que

$$\lambda_j([S_{E(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})}]_x) = \begin{cases} \text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p}\,,\, c\} & si \quad j \in \mathbb{I}_r\,; \\ 0 & si \quad j \geq r+1\,. \end{cases} \tag{3.19}$$

   En particular, si $d \leq n$ (i.e. $r = d$) se tiene que $E(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})$ es un marco para $\mathcal{W}$.

2. Para cada $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ se verifica

$$p \cdot \sum_{j\in\mathbb{I}_r} \varphi(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p}\,,\, c\}) + p\,(d-r)\,\varphi(0) = P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})) \leq P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))\;, \quad \text{para cada } \mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})\,. \tag{3.20}$$

Demostración. Consideramos $\mathrm{Spec}(\mathcal{W})$ como un subespacio de medida del $\mathbb{T}^k$ dotado de la medida de Lebesgue (no-vacío, de otra manera el resultado es trivial). Así consideramos $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{W})\times\mathbb{I}_r$ dotado con la medida producto $\mu = |\cdot| \times \#(\cdot)$, donde $\#(\cdot)$ denota la medida de conteo en $\mathbb{I}_r$ (como en la Observación 3.3.2). Consideramos también la medida normalizada $\tilde{\mu} = \frac{1}{p\cdot r}\;\mu$ en X. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$, fijamos $\beta_j(x) = \|\Gamma f_j(x)\|^2$ para $j \in \mathbb{I}_n$ y $x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. Notemos que

$$\int_{\mathrm{Spec}(\mathcal{W})} \beta_j(x)\; dx = \|f_j\|^2 = \alpha_j\;, \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n\,. \tag{3.21}$$

Sean $\breve{\gamma}$, $\breve{\beta} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles determinadas por

$$\breve{\gamma}(x,j) = \frac{\alpha_j}{p} \quad \text{y} \quad \breve{\beta}(x,j) = \beta_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{W}) \quad \text{y} \quad j \in \mathbb{I}_r.$$

Consideramos la función $D : L^\infty(X, \tilde{\mu}) \to L^\infty(X, \tilde{\mu})$ dada por

$$D(h)(x,j) = r \cdot \int_{\mathrm{Spec}(\mathcal{W})\times\{j\}} h\; d\tilde{\mu} = \frac{1}{p}\int_{\mathrm{Spec}(\mathcal{W})} h(x,j)\; dx \quad \text{para} \quad x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{W}) \quad \text{y} \quad j \in \mathbb{I}_r\,.$$

Entonces, es fácil ver que D es positivo, unital y preserva traza, i.e. D es una transformación doble estocástica. Por otra parte, por la Eq. (3.21) tenemos que $D(\breve{\beta}) = \breve{\gamma}$ y por el Teorema 1.4.13 concluimos que $\breve{\gamma} \prec \breve{\beta}$.

Ahora consideramos la función medible a valores vectoriales $\beta^\downarrow(x) = (\beta_j^\downarrow(x))_{j\in\mathbb{I}_n}$, que se obtiene reordenando las entradas del vector $\beta(x) = (\beta_j(x))_{j\in\mathbb{I}_n}$ para $x \in Z$ independientemete. Por construcción obtenemos la relación de submayorización $(\beta_j(x))_{j\in\mathbb{I}_r} \prec_w (\beta_j^\downarrow(x))_{j\in\mathbb{I}_r}$ para cada $x \in Z$ (notemos que consideramos las primeras r entradas de estas n-uplas).

Así, si consideramos la función medible $\breve{\beta}^{\downarrow} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, determinada por $\breve{\beta}^{\downarrow}(x,j) = \breve{\beta}^{\downarrow}_j(x)$ si $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W})$ y $j \in \mathbb{I}_r$, entonces el Lema 3.3.3 muestra que $\breve{\beta} \prec_w \breve{\beta}^{\downarrow}$ en $(X, \tilde{\mu})$. Por transitividad, concluimos que $\breve{\gamma} \prec_w \breve{\beta}^{\downarrow}$. Por la Observación 3.2.4 existe un único $b \geq \inf \operatorname{esc}_{x \in X} \breve{\beta}^{\downarrow}(x)$ tal que el *water-filling* de $\breve{\beta}^{\downarrow}$ a nivle b, notado $(\breve{\beta}^{\downarrow})_b$, satisface

$$\int_X (\breve{\beta}^{\downarrow})_b \, d\tilde{\mu} = (r \cdot p)^{-1} \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \alpha_i \geq \int_X \breve{\beta}^{\downarrow} \, d\tilde{\mu} \, .$$

Análogamente, sea $c \geq \inf \operatorname{esc}_{x \in X} \breve{\gamma}(x)$ tal que el *water-filling* de $\breve{\gamma}$ a nivel c, notado $(\breve{\gamma})_c$, satisface

$$\int_X (\breve{\gamma})_c \, d\tilde{\mu} = (r \cdot p)^{-1} \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \alpha_i \geq \int_X \breve{\gamma} \, d\tilde{\mu} \, .$$

Así, usando el Lema 3.3.4 vemos que

$$(\breve{\gamma})_c \prec (\breve{\beta}^{\downarrow})_b \quad \text{en} \quad (X, \tilde{\mu}) \, . \tag{3.22}$$

Por el Lema 2.1.7 existen funciones medibles $\lambda_j : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ para $j \in \mathbb{I}_d$ tales que tienen una representación de $[S_{E(\mathcal{F})}]_x = S_{\Gamma \mathcal{F}(x)}$ como en la Eq. (2.9), en término de ciertos campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\{v_j(x)\}_{j \in \mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. En tal caso $\lambda_j(x) = 0$ para $j \geq r+1$ y $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W})$ ctp.

Si consideramos $e(x) \geq 0$ determinado por la condición

$$\sum_{i \in \mathbb{I}_r} \max\{\beta^{\downarrow}_i(x), e(x)\} = \sum_{i \in \mathbb{I}_r} \lambda_i(x) \ \big(= \sum_{i \in \mathbb{I}_d} \lambda_i(x)\big) \, , \quad \text{para} \quad x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W}) \ \text{ctp.}$$

entonces, por [46] (ver también [48, 49, 50]) tenemos que

$$(\delta_i(x))_{i \in \mathbb{I}_r} \stackrel{\text{def}}{=} (\max\{\beta^{\downarrow}_i(x), \, e(x)\})_{i \in \mathbb{I}_r} \prec (\lambda_i(x))_{i \in \mathbb{I}_r} \, , \quad \text{para} \quad x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W}) \ \text{ctp.} \tag{3.23}$$

Notemos que el vector $(\delta_i(x))_{i \in \mathbb{I}_r}$ puede considerarse como el *water-filling* (discreto) del vector $(\beta^{\downarrow}_j(x))_{j \in \mathbb{I}_r}$ a nivel $e(x)$, para $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. Si $\breve{\delta}, \ \breve{\lambda} : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones medibles determinadas por

$$\breve{\delta}(x,j) = \delta_j(x) \quad \text{y} \quad \breve{\lambda}(x,j) = \lambda_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W}) \quad \text{y} \quad j \in \mathbb{I}_r,$$

entonces, por el Lema 3.3.3 tenemos que $\breve{\delta} \prec \breve{\lambda}$ en $(X, \tilde{\mu})$. Notemos que por construcción, $\breve{\delta} \geq \breve{\beta}^{\downarrow}$ y

$$\int_X \breve{\delta} \, d\tilde{\mu} = (r \cdot p)^{-1} \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \alpha_i \, .$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.2.5, tenemos que $(\breve{\beta}^{\downarrow})_b \prec \breve{\delta}$. Juntando todas las relaciones de mayorización, vemos que

$$(\breve{\gamma})_c \prec (\breve{\beta}^{\downarrow})_b \prec \breve{\delta} \prec \breve{\lambda} \, , \quad \text{en} \quad (X, \tilde{\mu}) \, . \tag{3.24}$$

Recordemos que por construcción, tenemos que

$$(\breve{\gamma})_c(x) = \max\{\frac{\alpha_j}{p}, \, c\} \, , \quad \text{para} \quad x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{W}) \times \{j\} \subset X \quad \text{y} \quad j \in \mathbb{I}_r \, . \tag{3.25}$$

Entonces, es fácil verificar que

$$(r\cdot p)^{-1}\sum_{i\in\mathbb{I}_n}\alpha_i=\int_X(\breve{\gamma})_c\,d\tilde{\mu}=r^{-1}\cdot\sum_{j\in\mathbb{I}_r}\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\,c\}\implies\Big(\frac{\alpha_j}{p}\Big)_{j\in\mathbb{I}_n}\prec\Big(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\,c\}\Big)_{j\in\mathbb{I}_r}\,. \tag{3.26}$$

De esta forma, por el Teorema 2.3.2, existe una sucesión $\mathcal{F}^{\rm op}=\{f_i^{\rm op}\}_{i\in\mathbb{I}_n}\in\mathcal{W}^n$ tal que la estructura espectral fina $\Big(\lambda_j([S_{E(\mathcal{F}^{\rm op})}]_x)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ satisface la Eq. (3.19) y tal que $\|\Gamma f_i^{\rm op}(x)\|^2=\frac{\alpha_i}{p}$, para $i\in\mathbb{I}_n$ y $x\in\text{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. En particular, $\|f_i^{\rm op}\|^2=\alpha_i$ para $i\in\mathbb{I}_n$, es decir $\mathcal{F}^{\rm op}\in\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$. Si $\varphi\in\text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces, por las relaciones de mayorización en $(X,\tilde{\mu})$ de la Eq. (3.24) y por el Lema 3.3.3,

$$\begin{aligned}
P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}^{\rm op})) &= \int_{\text{Spec}(\mathcal{W})}[\sum_{j\in\mathbb{I}_r}\varphi(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\,c\})+(d-r)\,\varphi(0)]\,dx=\int_X\varphi\circ(\breve{\gamma})_c\,d\mu+p\,(d-r)\,\varphi(0)\\
&\leq \int_X\varphi\circ\breve{\lambda}\,d\mu+p\,(d-r)\,\varphi(0)=\int_{\text{Spec}(\mathcal{W})}[\sum_{j\in\mathbb{I}_r}\varphi(\lambda_j(x))+(d-r)\,\varphi(0)]\,dx\\
&= P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))\,.
\end{aligned}$$

De esta forma, $\mathcal{F}^{\rm op}$ satisface los ítems 1 y 2 del Teorema. □

El resultado previo muestra que efectivamente existen marcos estructurados óptimos con normas predeterminadas, en el sentido que estos marcos minimizan cualquier potencial de marco en $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$. Además, hemos mostrado algunas relaciones de mayorización que permiten describir la estructura espectral de cualquier marco óptimo por la Eq. (3.19).

Teorema 3.3.6 (Estructura fina de sucesiones óptimas en $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$)**.** Con las hipótesis y notaciones del Teorema 3.3.5, asumimos que $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ es tal que existe $\varphi\in\text{Conv}_{\rm s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ para la cual $P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))=P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}^{\rm op}))$. Entonces, para $x\in\text{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. tenemos que

$$\lambda_j([S_{E(\mathcal{F})}]_x)=\begin{cases}\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p}\,,\,c\}=\text{máx}\{\beta_j^\downarrow(x)\,,\,c\} & si\quad j\in\mathbb{I}_r\,;\\ 0 & si\quad j\geq r+1\,,\end{cases} \tag{3.27}$$

donde $\beta_1^\downarrow(x)\geq\ldots\beta_n^\downarrow(x)\geq 0$ se obtienen re-ordenando la sucesión

$$\beta(x)=(\beta_1(x),\ldots,\beta_n(x))=(\|\Gamma f_1(x)\|^2,\ldots,\|\Gamma f_n(x)\|^2)\in\mathbb{R}^n$$

en orden no-creciente, independientemente para $x\in\text{Spec}(\mathcal{W})$.

Demostración. Continuamos usando las notaciones y terminologías de la prueba del Teorema 3.3.5. Asumimos, además, que $\mathcal{F}\in\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ es tal que existe $\varphi\in\text{Conv}_{\rm s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ con

$$p\cdot\sum_{j\in\mathbb{I}_r}\varphi\Big(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p}\,,\,c\}\Big)+p\,(d-r)\,\varphi(0)=P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}))\,.$$

Entonces, usando este último hecho y el Lema 3.3.3 vemos que

$$(r\cdot p)\int_X\varphi\circ(\breve{\gamma})_c\,d\tilde{\mu}=(r\cdot p)\int_X\varphi\circ\breve{\lambda}\,d\tilde{\mu}\,.$$

Por lo tanto, por la Eq. (3.24) tenemos que

$$\int_X\varphi\circ(\breve{\gamma})_c\,d\tilde{\mu}=\int_X\varphi\circ(\breve{\beta}^\downarrow)_b\,d\tilde{\mu}=\int_X\varphi\circ\breve{\delta}\,d\tilde{\mu}=\int_X\varphi\circ\breve{\lambda}\,d\tilde{\mu}\,.$$

Así, por [20] las funciones $(\breve{\gamma})_c$, $(\breve{\beta^{\downarrow}})_b$, $\breve{\delta}$, $\breve{\lambda}$ son equi-medibles. Por un lado, la Eq. (3.23) junto a la igualdad anterior, implican que $\text{máx}\{\beta_j^{\downarrow}(x),\, e(x)\} = \lambda_j(x)$, para $x \in \text{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. y $j \in \mathbb{I}_r$. Por lo tanto, por construcción, $\breve{\delta} = \breve{\lambda}$. Por otra parte, por el Corolario 3.2.6 también tenemos que $(\breve{\beta^{\downarrow}})_b = \breve{\delta}$. Así, $(\breve{\beta^{\downarrow}})_b = \breve{\delta} = \breve{\lambda}$; en particular, obtenemos que $\text{máx}\{\beta_j^{\downarrow}(x),\, b\} = \lambda_j(x)$, para $j \in \mathbb{I}_r$ y $x \in \text{Spec}(\mathcal{W})$ ctp.

Notemos que, como $(\breve{\gamma})_c$ y $\breve{\lambda}$ son equi-medibles, entonces $|\breve{\lambda}^{-1}(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\, c\})| = |(\breve{\gamma})_c{}^{-1}(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\, c\})|$ para $j \in \mathbb{I}_r$. Así, $\breve{\lambda}$ toma los valores $\text{máx}\{\alpha_j,\, c\}$ para $j \in \mathbb{I}_r$. Como $\breve{\lambda}$ y $(\breve{\gamma})_c$ son inducidas por las funciones a valores vectoriales

$$\text{Spec}(\mathcal{W}) \ni x \mapsto \Big(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\, c\}\Big)_{j\in\mathbb{I}_r} \in (\mathbb{R}^r_{\geq 0})^{\downarrow} \quad \text{y} \quad \text{Spec}(\mathcal{W}) \ni x \mapsto \Big(\lambda_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_r} \in (\mathbb{R}^r_{\geq 0})^{\downarrow}$$

respectivamente, concluimos que

$$\Big(\text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\, c\}\Big)_{j\in\mathbb{I}_r} = \Big(\lambda_j(x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_r} = \Big(\text{máx}\{\beta_j^{\downarrow}(x),\, b\}\Big)_{j\in\mathbb{I}_r}, \quad \text{para} \quad x \in \text{Spec}(\mathcal{W}) \text{ ctp.}$$

A partir de este último hecho, elegimos $b = c$ y el resultado se verifica. □

Observación 3.3.7. Consideremos las notaciones y terminología del Teorema 3.3.5. Vemos que existe una fórmula sencilla para la constante c. En efecto, notemos que si $\mathcal{F}^{\text{op}} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ es la solución estructural del problema de optimización considerado en el Teorema 3.3.5, entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{I}_r} \lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F}^{\text{op}})}]_x\big) = \text{tr}\,\big([S_{E(\mathcal{F}^{\text{op}})}]_x\big) = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \|\Gamma f_j(x)\|^2 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_r} \text{máx}\{\frac{\alpha_j}{p},\, c\} = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \alpha_j\,, \tag{3.28}$$

y esto muestra que c se obtiene por la condición previa de *water-filling* discreto. En particular, podemos deducir las siguientes condiciones para la existencia de marcos SG ajustados con normas predeterminadas dadas por α: △

Corolario 3.3.8. Consideremos las hipótesis y notaciones del Teorema 3.3.5. En el caso de dimensión uniforme, en particular con $d(x) = d$ para $x \in \text{Spec}(\mathcal{W})$ ctp. Tenemos que

$$\text{existen marcos } \textbf{ajustados} \text{ en} \quad \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W}) \iff d = r \leq n \quad \text{y} \quad d \cdot \alpha_1 \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \alpha_j.$$

Demostración. Es una consecuencia directa de las Eqs. (3.19) y (3.28). □

3.3.2. Una reducción al modelo finito-dimensional

El Teorema 3.3.5 permite reducir el estudio de la *estructura espectral* de los mínimos de potenciales convexos en FSIT's con restricciones de norma a un model finito dimensional. En efecto, consideramos las Notaciones 3.1.6 y, por una cuestión de simplicidad, asumimos que $p_i > 0$ para cada $i \in \mathbb{I}_\ell$. Consideramos $\alpha \in (\mathbb{R}^n_{>0})^{\downarrow}$ y sea $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$. Para cada $i \in \mathbb{I}_\ell$ sea $\mathcal{W}_i \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ el FSIT y cerrado cuyas fibras coinciden con las fibras de $\mathcal{W}$ en $Z_i = d^{-1}(i)$ y coinciden con el subespacio nulo en otra parte, y sea $\mathcal{F}_i = \{f_{i,j}\}_{j\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}_i^n$ determinada por

$$\Gamma f_{i,j}(x) = \chi_{Z_i}(x)\; \Gamma f_j(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.} \quad \text{y} \quad j \in \mathbb{I}_n\,,$$

donde χ_Z denota la función característica del conjunto medible $Z \subset \mathbb{T}^k$. Fijamos una función $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Como cada $\mathcal{W}_i$ es un FSIT uniforme, satisface las hipótesis del Teorema 3.3.5. Entonces concluimos que para cada $i \in \mathbb{I}_\ell$ existe $\mathcal{F}_i^{\text{dis}} = \{f_{i,j}^{\text{dis}}\}_{j\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}_i^n$ tal que

$$\|f_{i,j}^{\text{dis}}\|^2 = \|f_{i,j}\|^2 \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n \quad \text{y} \quad P_\varphi^{\mathcal{W}_i}(E(\mathcal{F}_i^{\text{dis}})) \leq P_\varphi^{\mathcal{W}_i}(E(\mathcal{F}_i)) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_\ell \ .$$

Podemos reconstruir la familia inicial $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ pegando las familias $\mathcal{F}_i$ para $i \in \mathbb{I}_\ell$. Análogamente, si pegamos las familias $\mathcal{F}_i^{\text{dis}}$ obtenemos la familia $\mathcal{F}^{\text{dis}}$ (de manera que $(\mathcal{F}^{\text{dis}})_i = \mathcal{F}_i^{\text{dis}} \in \mathcal{W}_i^n$ como antes para $i \in \mathbb{I}_\ell$). Notemos que $\mathcal{F}^{\text{dis}} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ ya que

$$\|f_i^{\text{dis}}\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{I}_n} \|f_{i,j}^{\text{dis}}\|^2 = \|f_i\|^2 = \alpha_i \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_n \ ,$$

usando el hecho que los subespacios $\{\mathcal{W}_i\}_{i\in\mathbb{I}_\ell}$ son mutuamente ortogonales. Además

$$P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F}^{\text{dis}})) = \sum_{i\in\mathbb{I}_\ell} P_\varphi^{\mathcal{W}_i}(E(\mathcal{F}_i^{\text{dis}})) \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_\ell} P_\varphi^{\mathcal{W}_i}(E(\mathcal{F}_i)) = P_\varphi^{\mathcal{W}}(E(\mathcal{F})) \ .$$

Ahora, la estructura espectral fina de $\mathcal{F}_i^{\text{dis}}$ es de naturaleza dicreta (como se describió en el Teorema 3.3.5). Por otra parte, esta estructura fina está explicitamente determinada en términos de la matriz

$$B = (p_i^{-1}\,\|f_{i,j}\|^2)_{i\in\mathbb{I}_\ell,\,j\in\mathbb{I}_n} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\ell\times n} \quad \text{que verifica la identidad} \quad p^T B = \alpha \ , \tag{3.29}$$

con $p = (p_i)_{i\in\mathbb{I}_\ell}$ y $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_n}$. Notemos que tales matrices constituyen un conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}_{\geq 0}^{m\times n}$. La ventaja de este enfoque es que podemos usar herramientas sencillas como convexidad, compacidad y continuidad en un contexto de dimensión finita, para mostrar la existencia de una estructura espectral óptima en nuestro modelo reducido. Sin embargo, el modelo reducido tiene un caracter bastante combinatorio (ver la definición de $\Lambda_{\alpha,p}^{\text{op}}(\delta)$ dada más adelante), por lo tanto lo construimos en etapas.

Notación 3.3.9. Con el fin de simplificar la exposición del próximo resultado, introducimos las siguientes notaciones que son motivadas por las observaciones anteriores. Sean m, $n \in \mathbb{N}$:

1. Inspirados en la Eq.(3.29), para sucesiones finitas $\alpha \in (\mathbb{R}_{>0}^n)^\downarrow$ y $p = (p_i)_{i\in\mathbb{I}_m} \in \mathbb{R}_{>0}^m$ consideramos el conjunto de particiones ponderadas

$$W_{\alpha,p} \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{B \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m\times n} : p^T B = \alpha\} \,.$$

   Es fácil verificar que $W_{\alpha,p}(m)$ es un conjunto compacto y convexo (con las operaciones vectoriales entrada a entrada y la topología producto).

2. Dado $d \in \mathbb{N}$ definimos la función $L_d : \mathbb{R}_{\geq 0}^n \to (\mathbb{R}_{\geq 0}^d)^\downarrow$ dada por

$$L_d(\gamma) \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \begin{cases} (\text{máx}\{\gamma_i^\downarrow\,,\, c_d(\gamma)\})_{i\in\mathbb{I}_d} & \text{si} \ \ d \leq n \\ (\gamma^\downarrow, 0_{d-n}) & \text{si} \ \ d > n \end{cases} \quad \text{para cada} \quad \gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \ , \tag{3.30}$$

   donde la constante $c_d(\gamma) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ está determinada unívocamanete por $\operatorname{tr}(L_d(\gamma)) = \operatorname{tr}(\gamma)$, en caso que $d \leq n$.

3. Sea $\delta = (d_i)_{i\in\mathbb{I}_m} \in \mathbb{N}^m$ tal que $1 \leq d_1 < \ldots < d_m$. Para cada $B \in W_{\alpha,p}$ consideramos

$$B_\delta = \big[\, L_{d_i}(R_i(B)\,)\,\big]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \prod_{i\in\mathbb{I}_m} (\mathbb{R}_{\geq 0}^{d_i})^\downarrow \ , \tag{3.31}$$

donde $R_i(B) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ denota la i-ésima fila de B. Por otra parte, usando las notaciones previas introducimos el *modelo reducido* (para el espectro óptimo)

$$\Lambda^{\mathrm{op}}_{\alpha,\,p}(\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{B_\delta : \ B \in W_{\alpha,\,p}\} \subset \prod_{i\in\mathbb{I}_m} (\mathbb{R}^{d_i}_{\geq 0})^{\downarrow} \,.$$

En general, $\Lambda^{\mathrm{op}}_{\alpha,\,p}(\delta)$ no es un conjunto convexo y la estructura de este conjunto parece más bien compleja. △

Para la prueba de la siguiente proposición ver [46].

Proposición 3.3.10. Dado $d \in \mathbb{N}$ sea $L_d : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$ la función definida en el item 2. de las Notaciones 3.3.9. Entonces se verifica que:

1. $\gamma \prec L_d(\gamma)$,
2. $L_d(\gamma) \prec \beta$ para cada $\beta \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$ tal que $\gamma \prec \beta$.

□

El siguiente resultado describe la existencia y unicidad de la solución a un problema de optimación convexa para una $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ fija, que corresponde a un modelo reducido de la minimización del potencial convexo $P^{\mathcal{W}}_{\varphi}$ en $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ para un FSIT $\mathcal{W}$ y una sucesión de pesos $\alpha \in (\mathbb{R}^n_{>0})^{\downarrow}$. Este resultado será necesario para probar el Teorema 3.3.14.

Teorema 3.3.11. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (\mathbb{R}^n_{>0})^{\downarrow}$, $p = (p_i)_{i\in\mathbb{I}_m} \in \mathbb{R}^m_{>0}$ y $\delta = (d_i)_{i\in\mathbb{I}_m} \in \mathbb{N}^m$ tales que $1 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_m$. Si $\varphi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces existe $\Psi^{\mathrm{op}} = [\psi_i^{\mathrm{op}}]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \Lambda^{\mathrm{op}}_{\alpha,\,p}(\delta)$ tal que

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_m} p_i \,\mathrm{tr}\,(\varphi(\psi_i^{\mathrm{op}})) \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_m} p_i \,\mathrm{tr}\,(\varphi(\psi_i)) \qquad \text{para cada} \qquad \Psi = [\psi_i]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \Lambda^{\mathrm{op}}_{\alpha,\,p}(\delta)\,.$$

Más aún, si $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, entonces Ψ^{op} es único.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\Lambda_{\alpha,\,p}(\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{B\in W_{\alpha,\,p}} M(B) \subseteq \prod_{i\in\mathbb{I}_m} (\mathbb{R}^{d_i}_{\geq 0})^{\downarrow} \ ,$$

donde

$$M(B) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{[\lambda_i]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \prod_{i\in\mathbb{I}_m} (\mathbb{R}^{d_i}_{\geq 0})^{\downarrow} : \ R_i(B) \prec \lambda_i \ , \ i \in \mathbb{I}_m\} \ .$$

Notemos que por construcción $\Lambda^{\mathrm{op}}_{\alpha,\,p}(\delta) \subset \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$.

Veamos que $\Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$ es un conjunto convexo: en efecto, sean $[\lambda_i]_{i\in\mathbb{I}_m} \in M(B_1)$ y $[\mu_i]_{i\in\mathbb{I}_m} \in M(B_2)$ para B_1, $B_2 \in W_{\alpha,\,p}(m)$ y $t \in [0,1]$. Tomamos la matrix $B = t\,B_1 + (1-t)\,B_2 \in W_{\alpha,\,p}$ (ya que $W_{\alpha,\,p}$ es un conjunto convexo). Entonces

$$[\,\gamma_i\,]_{i\in\mathbb{I}_m} = [\,t\,\lambda_i + (1-t)\,\mu_i\,]_{i\in\mathbb{I}_m} \in M(B) \subseteq \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta) \ :$$

por un lado, $\gamma_i \in (\mathbb{R}^{d_i}_{\geq 0})^{\downarrow}$ para $i \in \mathbb{I}_m$ y por otro lado, por el Teorema 1.4.8 tenemos que, para cada $i \in \mathbb{I}_m$

$$R_i(B) = t\,R_i(B_1) + (1-t)\,R_i(B_2) \prec t\,R_i(B_1)^{\downarrow} + (1-t)\,R_i(B_2)^{\downarrow} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\downarrow} \ .$$

Por las hipótesis (y la definición de mayorización) se deduce que

$$R_i(B_1)^{\downarrow} \prec \lambda_i \quad \text{y} \quad R_i(B_2)^{\downarrow} \prec \mu_i \implies R_i(B) \prec t\,\lambda_i + (1-t)\,\mu_i = \gamma_i$$

para cada $i \in \mathbb{I}_m$. Esto prueba que $\Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$ es un conjunto convexo. Más aún, por la compacidad de $W_{\alpha,p}$ y por las condiciones que definen a $M(B)$ para $B \in W_{\alpha,\,p}$, se sigue que $\Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$ es un conjunto compacto. Sea

$$\varphi_p : \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{dado por} \quad \varphi_p(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in \mathbb{I}_m} p_i \operatorname{tr}(\varphi(\psi_i)) \ ,$$

para $\Psi = [\psi_i]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$. Es fácil ver que φ_p es convexa, y es estrictamente convexa siempre que $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Usando este último hecho se deduce que existe $\Psi_0 \in \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$ tal que

$$\varphi_p(\Psi_0) \leq \varphi_p(\Psi) \quad \text{para cada} \quad \Psi \in \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta) \ ,$$

y tal que Ψ_0 es único siempre que $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Notemos que por construcción existe alguna $B \in W_{\alpha,\,p}$ tal que $\Psi_0 = [\psi_i^0]_{i\in\mathbb{I}_m} \in M(B)$. Entonces, por el item 2 de las Notaciones 3.3.9,

$$R_i(B) \prec \psi_i^0 \implies L_{d_i}(R_i(B)) \prec \psi_i^0 \implies \operatorname{tr}(\varphi(L_{d_i}(R_i(B)))) \leq \operatorname{tr}\left(\varphi(\psi_i^0)\right) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_m \ .$$

Por lo tanto, la sucesión B_δ definida en la Eq. (3.31) usando la matriz B satisface que $\varphi_p(B_\delta) \leq \varphi_p(\Psi_0)$. Así definimos $\Psi^{\text{op}} \stackrel{\text{def}}{=} B_\delta \in \Lambda^{\text{op}}_{\alpha,\,p}(\delta) \subset \Lambda_{\alpha,\,p}(\delta)$, que tiene las propiedades deseadas. Finalmente, las observaciones previas muestran que $\Psi_0 = \Psi^{\text{op}} \in \Lambda^{\text{op}}_{\alpha,\,p}(\delta)$ siempre que $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

Corolario 3.3.12. Considerando las notaciones y terminología del Teorema 3.3.11. Asumimos que $n \geq d_m$ y que $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es diferenciable en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces

$$\Psi^{\text{op}} \in \prod_{i\in\mathbb{I}_m} (\mathbb{R}^{d_i}_{>0})^{\downarrow} \,.$$

Demostración. Sea $\Psi^{\text{op}} = [\psi_i^{\text{op}}]_{i\in\mathbb{I}_m}$ donde cada vector $\psi_i^{\text{op}} \in (\mathbb{R}^{d_i}_{\geq 0})^{\downarrow}$, y asumimos que existe $i_0 \in \mathbb{I}_m$ tal que $\psi_{i_0}^{\text{op}} = (\psi_{i_0,j}^{\text{op}})_{j\in\mathbb{I}_{d_{i_0}}}$ satisface que $\psi_{i_0,k}^{\text{op}} = 0$ para algún $1 \leq k \leq d_{i_0}$. Sea $1 \leq k_0 \leq d_{i_0}$ el más pequeño de dichos índices y $B \in W_{\alpha,\,p}$ tal que $B_\delta = \Psi^{\text{op}}$. Recordemos de la Eq. (3.30) que, si denotamos $c_i = c_{d_i}(R_i(B))$ para cada $i \in \mathbb{I}_m$, entonces

$$\psi_{i_0,j}^{\text{op}} = L_{d_{i_0}}(R_{i_0}(B))_j = \max\{R_{i_0}(B)_j^{\downarrow}\,,\, c_{i_0}\} \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_{d_{i_0}} \ ,$$

ya que $n \geq d_{i_0}$ por hipótesis. Por lo tanto, en este caso $c_{i_0} = 0$ y $R_{i_0}(B)^{\downarrow}_{k_0} = 0$. Sea $j_0 \in \mathbb{I}_n$ tal que $0 = R_{i_0}(B)^{\downarrow}_{k_0} = B_{i_0\,,\,j_0}$. Por construcción $\sum_{i\in\mathbb{I}_m} p_i \ B_{i\,,\,j_0} = \alpha_{j_0} > 0$, por lo tanto existe $i_1 \in \mathbb{I}_m$ tal que $B_{i_1,\,j_0} > 0$. Sea $\{e_j\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para cada $t \in I = [0, \frac{\beta_{i_1,\,j_0}\ p_{i_1}}{p_{i_0}}]$ se considera la matriz $B(t)$ definida por sus filas de la siguiente manera:

- $R_{i_0}(B(t)) = R_{i_0}(B) + t\, e_{j_0}$
- $R_{i_1}(B(t)) = R_{i_1}(B) - \frac{p_{i_0}\, t}{p_{i_1}}\ e_{j_0}$
- $R_i(B(t)) = R_i(B)$ para $i \in \mathbb{I}_m \setminus \{i_0,\, i_1\}$.

Es fácil verificar que $B(t) \in W_{\alpha,p}$ para $t \in I$ y que $B(0) = B$. Consideramos $\Psi(t) = [\psi_i(t)]_{i\in\mathbb{I}_m} = B(t)_\delta \in \Lambda^{\rm op}_{\alpha,p}(\delta)$ para $t \in I$ y notar que $\Psi(0) = \Psi^{\rm op}$. Ahora consideramos dos casos:

Case 1: $B_{i_1,j_0} > c_{i_1}$ (recordar que $\psi^{\rm op}_{i_1,j} = L_{d_{i_1}}(R_{i_1}(B))_j = \max\{R_{i_1}(B)^\downarrow_j\,,\,c_{i_1}\}$). Así $B_{i_1,j_0} = R_{i_1}(B)^\downarrow_k$ para algún $1 \le k \le d_{i_1}$ y consideramos $1 \le k_1 \le d_{i_1}$ el más grande de tales índices k. En este caso existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\psi_{i_0}(t) = \psi^{\rm op}_{i_0} + t\, e_{k_0} \quad \text{ and } \quad \psi_{i_1}(t) = \psi^{\rm op}_{i_1} - \frac{p_{i_0}}{p_{i_1}}\, t\, e_{k_1} \quad \text{ para } \quad t \in [0,\epsilon]\,.$$

Por lo tanto, para $t \in [0,\epsilon]$ tenemos que

$$f(t) = \varphi_p(\Psi(t)) - \varphi_p(\Psi^{\rm op}) = p_{i_0}\ (\varphi(t) - \varphi(0)) + p_{i_1}\ (\varphi(B_{i_1,j_0} - \frac{p_{i_0}}{p_{i_1}} t) - \varphi(B_{i_1,j_0}))\ .$$

Así $f(0) = 0$ y por hipótesis $f(t) \ge 0$ para $t \in [0,\epsilon]$. Por otra parte,

$$f'(0) = p_{i_0}\ (\varphi'(0) - \varphi'(B_{i_1,j_0})) < 0$$

ya que por hipótesis φ' es estrictamente creciente y $B_{i_1,j_0} > 0$. Esta condición contradice el hecho previo sobre f. Por lo tanto los vectores de $\Psi^{\rm op}$ tienen entradas no nulas.

Case 2: $B_{i_1,j_0} \le c_{i_1}$. Por lo tanto, en este caso $0 < c_{i_1}$ y existe $0 \le r \le d_{i_1} - 1$ tal que

$$\psi^{\rm op}_{i_1} = (R_{i_1}(B)^\downarrow_1\,,\,\ldots\,,\,R_{i_1}(B)^\downarrow_r\,,\,c_{i_1}\,,\,\ldots\,,\,c_{i_1})$$

por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que para $t \in [0,\varepsilon]$ tenemos que

$$\psi_{i_1}(t) = (R_{i_1}(B)^\downarrow_1\,,\,\ldots\,,\,R_{i_1}(B)^\downarrow_r\,,\,c_{i_1}\,,\,\ldots\,,\,c_{i_1}) - \frac{p_{i_0}\ t}{(d-r)\ p_{i_1}} \sum_{j=r+1}^{d_1} e_j\,.$$

Así, para $t \in [0,\epsilon]$ tenemos que

$$f(t) = \varphi_p(\Psi(t)) - \varphi_p(\Psi^{\rm op}) = p_{i_0}\ (\varphi(t) - \varphi(0)) + p_{i_1}\ (d-r)\ (\varphi(c_{i_1} - \frac{p_{i_0}\, t}{(d-r)\, p_{i_1}}) - \varphi(c_{i_1}))\,.$$

Como antes, $f(0) = 0$ y $f(t) \ge 0$ para $t \in [0,\epsilon]$; un cálculo sencillo muestra que en este caso también tenemos que $f'(0) < 0$, que contradice el resultado previo. Así, los vectores en $\Psi^{\rm op}$ tienen entradas no nulas. $\square$

3.3.3. El caso general: existencia y estructura de los mínimos de $P^{\mathcal{W}}_\varphi$ en $\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$

Sea $\mathcal{W}$ un FSIT arbitrario de $L^2(\mathbb{R}^k)$ y sea $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_n} \in (\mathbb{R}^n_{>0})^\downarrow$. Recordemos que

$$\mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W}) = \{\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n :\ E(\mathcal{F}) \text{ es una sucesión de Bessel },\ \|f_i\|^2 = \alpha_i\,,\ i \in \mathbb{I}_n\}\,.$$

Dada $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\ge 0})$, en lo que sigue mostraremos la existencia de sucesiones finitas $\mathcal{F}^{\rm op} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ tales que

$$P^{\mathcal{W}}_\varphi(E(\mathcal{F}^{\rm op})) = \min\{P^{\mathcal{W}}_\varphi(E(\mathcal{F})) :\ \mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})\}\,.$$

Más aún, si $\varphi \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\ge 0})$, entonces describimos la *estructura espectral fina* del operador de marco de $E(\mathcal{F}^{\rm op})$.

Con el fin de enunciar y probar el resultado principal de esta sección (Teorema 3.3.14) consideramos las siguientes notaciones:

Notación 3.3.13. Con las Notaciones 3.1.6, sea $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_n} \in (\mathbb{R}^n_{>0})^\downarrow$. Entonces, consideramos:

1. $I_\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{I}_\ell \ : \ p_i > 0\}$ y $m = m_\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \#(I_\mathcal{W})$;
2. $\delta_\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} (\tilde d_1, \ldots, \tilde d_m) \in (\mathbb{N}^m)^\downarrow$ obtenidos re-nombrando a $(d_i)_{i\in I_\mathcal{W}}$, tales que $\tilde d_1 < \ldots < \tilde d_m$;
3. $\tilde Z_1, \ldots, \tilde Z_m \subset \mathbb{T}^k$ tal que $\tilde Z_i = d^{-1}(\tilde d_i)$ para $i \in \mathbb{I}_m$; por lo tanto $\text{Spec}(\mathcal{W}) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}_m} \tilde Z_i$;
4. $p_\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} (\tilde p_1, \ldots, \tilde p_m) \in \mathbb{R}^m_{>0}$ tal que $\tilde p_i = |\tilde Z_i|$, para $i \in \mathbb{I}_m$;
5. Para $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ tenemos $[\psi_i^{\text{op}}]_{i\in\mathbb{I}_m} = \Psi^{\text{op}} \ (= \Psi^{\text{op}}(\alpha,\, \mathcal{W},\, \varphi)) \in \Lambda^{\text{op}}_{\alpha,\, p_\mathcal{W}}(\delta_\mathcal{W})$ como en el Teorema 3.3.11, i.e. tal que
$$\sum_{i\in\mathbb{I}_m} \tilde p_i \,\text{tr}\,(\varphi(\psi_i^{\text{op}})) \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_m} \tilde p_i \,\text{tr}\,(\varphi(\psi_i)) \qquad \text{para cada} \qquad \Psi = [\psi_i]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \Lambda^{\text{op}}_{\alpha,\, p_\mathcal{W}}(\delta_\mathcal{W}) \ .$$
En este caso escribimos $\psi_i^{\text{op}} = (\psi_{i,j}^{\text{op}})_{j\in\mathbb{I}_{\tilde d_i}} \in (\mathbb{R}^{\tilde d_i}_{\geq 0})^\downarrow$, para $i \in \mathbb{I}_m$. △

Teorema 3.3.14. Sea $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{I}_n} \in (\mathbb{R}^n_{>0})^\downarrow$ y consideremos las Notaciones 3.1.6 y 3.3.13, para una $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ fija. Entonces, existe $\mathcal{F}^{\text{op}} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ tal que:

1. $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F}^{\text{op}})}]_x\big) = \psi_{i,j}^{\text{op}}$ para $x \in \tilde Z_i$, $j \in \mathbb{I}_{\tilde d_i}$ y $i \in \mathbb{I}_m$;
2. Para cada $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ tenemos que
$$\sum_{i\in\mathbb{I}_m} \tilde p_i \,\text{tr}\,(\varphi(\psi_i^{\text{op}})) = P_\varphi^\mathcal{W}(E(\mathcal{F}^{\text{op}})) \leq P_\varphi^\mathcal{W}(E(\mathcal{F})) \ .$$

Si asumimos que $\varphi \in \text{Conv}_s(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y si $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$ es tal que $P_\varphi^\mathcal{W}(E(\mathcal{F})) = P_\varphi^\mathcal{W}(E(\mathcal{F}^{\text{op}}))$ entonces $S_{E(\mathcal{F})}$ tiene la misma estructura espectral fina que $S_{E(\mathcal{F}^{\text{op}})}$. Si asumimos además que $\varphi \in \text{Conv}_s(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es diferenciable en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y que $n \geq \tilde d_j$ para $j \in \mathbb{I}_m$ entonces $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathfrak{B}_\alpha(\mathcal{W})$. Para $i \in \mathbb{I}_m$ y $j \in \mathbb{I}_n$ consideramos

$$B_{i,j} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\tilde p_i} \int_{\tilde Z_i} \|\Gamma f_j(x)\|^2 \, dx \implies p_\mathcal{W}^T B = \sum_{i\in\mathbb{I}_m} \tilde p_i \, B_{i,j} = \int_{\text{Spec}(\mathcal{W})} \|\Gamma f_j(x)\|^2 \, dx = \|f_j\|^2 = \alpha_j \ ,$$

para cada $j \in \mathbb{I}_n$. Usando las Notaciones 3.3.9 tenemos que $B \in W_{\alpha,\, p_\mathcal{W}}$.

Ahora, para un $i \in \mathbb{I}_m$ fijo, consideramos los pesos $\beta^i = \tilde p_i \, R_i(B)^\downarrow \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Por razones de simplicidad asumimos, sin pérdida de generalidad, que $\beta^i = \tilde p_i \, R_i(B)$. Para $i \in \mathbb{I}_m$, sea $\mathcal{W}_i$ un FSIT cuyas fibras coinciden con las de $\mathcal{W}$ en $\tilde Z_i$ y son el subespacio nulo en otra parte. Así, $\text{Spec}(\mathcal{W}_i) = \tilde Z_i$ y $\dim J_{\mathcal{W}_i}(x) = \tilde d_i$ para $x \in \text{Spec}(\mathcal{W}_i)$. Para $i \in \mathbb{I}_m$, sea $\mathcal{F}_i = \{f_{i,j}\}_{j\in\mathbb{I}_n}$ donde $\Gamma f_{i,j}(x) = \Gamma f_j(x)$ para $x \in \tilde Z_i$ y $\Gamma f_{i,j}(x) = 0$ en otra parte; entonces $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{B}_{\beta^i}(\mathcal{W}_i)$ y

$$[S_{E(\mathcal{F}_i)}]_x = S_{\Gamma \mathcal{F}_i(x)} = [S_{E(\mathcal{F})}]_x \qquad \text{para} \qquad x \in \tilde Z_i = \text{Spec}(\mathcal{W}_i) \ , \quad i \in \mathbb{I}_m \ .$$

Si consideramos la minimización de $P_\varphi^{\mathcal{W}_i}$ en $\mathfrak{B}_{\beta^i}(\mathcal{W}_i)$ entonces, el Teorema 3.3.5 y la Observación 3.3.7 implican que existe $c_i \geq 0$ tal que

$$\tilde p_i \sum_{j\in\mathbb{I}_{\tilde d_i}} \varphi(\text{máx}\{B_{i,j} \, , \, c_i\}) \leq P_\varphi^{\mathcal{W}_i}(E(\mathcal{F}_i)) \qquad \text{y} \qquad \sum_{j\in I_{\tilde d_i}} \text{máx}\{B_{i,j} \, , \, c_i\} = \sum_{i\in\mathbb{I}_n} B_{i,j} \, . \tag{3.32}$$

Usando las Notaciones 3.3.9 y la Eq. (3.26), tenemos que para $i \in \mathbb{I}_m$

$$L_{\tilde{d}_i}(R_i(B)) = (\text{máx}\{B_{i,j}\,,\,c_i\})_{j\in I_{\tilde{d}_i}} \implies B_{\delta_{\mathcal{W}}} = [(\text{máx}\{B_{i,j}\,,\,c_i\})_{j\in \mathbb{I}_{\tilde{d}_i}}]_{i\in\mathbb{I}_m} \in \Lambda^{\text{op}}_{\alpha,\,p_{\mathcal{W}}}(\delta_{\mathcal{W}})\,.$$

Notemos que $\mathcal{W} = \oplus_{i\in\mathbb{I}_m}\mathcal{W}_i$ (suma ortogonal) y por lo tanto

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_m}\tilde{p}_i \sum_{j\in\mathbb{I}_{\tilde{d}_i}} \varphi(\text{máx}\{B_{i,j}\,,\,c_i\}) \le \sum_{i\in\mathbb{I}_m} P^{\mathcal{W}_i}_{\varphi}(E(\mathcal{F}_i)) = P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}))\,.$$

Sea $[\psi_i^{\text{op}}]_{i\in\mathbb{I}_m} = \Psi^{\text{op}}\,(= \Psi^{\text{op}}(\alpha,\,\mathcal{W})) \in \Lambda^{\text{op}}_{\alpha,\,p_{\mathcal{W}}}(\delta_{\mathcal{W}})$ como en las Notaciones 3.3.13. Entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_m}\tilde{p}_i\,\text{tr}\,(\varphi(\psi_i^{\text{op}})) \le \sum_{i\in\mathbb{I}_m}\tilde{p}_i \sum_{j\in\mathbb{I}_{\tilde{d}_i}} \varphi(\text{máx}\{B_{i,j}\,,\,c_i\}) \le P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}))\,. \tag{3.33}$$

Recordemos que por construcción, existe $B^{\text{op}} = (\gamma_{i,j})_{(i\,,\,j)\in\mathbb{I}_m\times\mathbb{I}_n} \in W_{\alpha,\,p_{\mathcal{W}}}$ tal que $B^{\text{op}}_{\delta_{\mathcal{W}}} = \Psi^{\text{op}}$. En este caso,

$$\psi_i^{\text{op}} = L_{\tilde{d}_i}(\,(\gamma_{i,j})_{j\in\mathbb{I}_n}) \implies (\gamma_{i,j})_{j\in\mathbb{I}_n} \prec \psi_i^{\text{op}} \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_m\,.$$

Sea $\gamma : \text{Spec}(\mathcal{W}) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(x) = R_i(B^{\text{op}}) = (\gamma_{i,j})_{j\in\mathbb{I}_n}$ si $x \in \tilde{Z}_i$, para $i \in \mathbb{I}_m$; análogamente, sea $\lambda : \text{Spec}(\mathcal{W}) \to \coprod_{i\in\mathbb{I}_m}\mathbb{R}^{\tilde{d}_i}$, $\lambda(x) = \psi_i^{\text{op}}$ si $x \in \tilde{Z}_i$, para $i \in \mathbb{I}_m$. Entonces, por las observaciones previas tenemos que $\gamma(x) \prec \lambda(x)$ para $x \in \text{Spec}(\mathcal{W})$. Así, por el Teorema 2.3.2 existe $\mathcal{F}^{\text{op}} = \{f_j^{\text{op}}\}_{j\in\mathbb{I}_n}$ tal que

$$\|\Gamma f_j^{\text{op}}(x)\|^2 = \gamma_{i,j} \quad \text{y} \quad \lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F}^{\text{op}})}]_x\big) = \psi^{\text{op}}_{i\,,\,j} \quad \text{si} \quad x \in \tilde{Z}_i \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_m\,.$$

Ya que $B^{\text{op}} \in W_{\alpha,\,p_{\mathcal{W}}}$ entonces

$$\|f_j^{\text{op}}\|^2 = \int_{\text{Spec}(\mathcal{W})} \|\Gamma f_j^{\text{op}}(x)\|^2\,dx = \sum_{i\in\mathbb{I}_m}\tilde{p}_i\,\gamma_{i,j} = \alpha_j \quad \text{para} \quad j \in \mathbb{I}_n \implies \mathcal{F}^{\text{op}} \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$$

y

$$P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}^{\text{op}})) = \int_{\text{Spec}(\mathcal{W})} \text{tr}\,(\varphi(\lambda(x)))\,dx = \sum_{i\in\mathbb{I}_m}\tilde{p}_i\,\text{tr}\,(\varphi(\psi_i^{\text{op}})) \overset{(3.33)}{\implies} P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}^{\text{op}})) \le P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}))\,. \tag{3.34}$$

Como $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$ era arbitrario, los hechos previos muestran que $\mathcal{F}^{\text{op}}$ satisface los items 1. y 2. del enunciado.

Asumimos además, que $\varphi \in \text{Conv}_{\text{s}}(\mathbb{R}_{\ge 0})$ y $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$ es tal que $P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F})) = P^{\mathcal{W}}_{\varphi}(E(\mathcal{F}^{\text{op}}))$. Entonces, por las Eqs. (3.32), (3.33) y (3.34) vemos que

$$\tilde{p}_i \sum_{j\in\mathbb{I}_{\tilde{d}_i}} \varphi(\text{máx}\{B_{i,j}\,,\,c_i\}) = P^{\mathcal{W}_i}_{\varphi}(E(\mathcal{F}_i)) \quad \text{para} \quad i \in \mathbb{I}_m\,.$$

Por lo tanto, por el caso de igualdad en el Teorema 3.3.6 y la unicidad de Ψ^{op} del Teorema 3.3.11 concluimos que

$$\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})}]_x\big) = \lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F}_i)}]_x\big) = \psi^{\text{op}}_{i,\,j} \quad \text{para} \quad x \in \tilde{Z}_i\,,\ j \in \mathbb{I}_{\tilde{d}_i}\,,\ i \in \mathbb{I}_m\,.$$

Finalmente, en el caso que $\varphi \in \text{Conv}_{\text{s}}(\mathbb{R}_{\ge 0})$ es diferenciable en $\mathbb{R}_{\ge 0}$ y $n \ge \tilde{d}_m$ entonces, por la Proposición 3.3.12, vemos que $S_{E(\mathcal{F})}$ es acotado por arriba en $\mathcal{W}$ (pues, los vectores en Ψ^{op} tienen entradas no nulas) y por lo tanto $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$. □

Finalizamos el capítulo con la siguiente observación. Con las notaciones del Teorema 3.3.14, notemos que la familia óptima $\mathcal{F}^{\text{op}} \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$ depende de una función convexa $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\ge 0})$, que fue fijada con anterioridad. Es decir, a diferencia del caso uniforme, no hemos podido mostrar que existe $\mathcal{F}^{\text{univ}} \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$ tal que $\mathcal{F}^{\text{univ}}$ es un mínimo de $P^{\mathcal{W}}_{\varphi}$ en $\mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$ para cada $\varphi \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\ge 0})$. Es natural preguntarse si existe una solunión universal de este tipo $\mathcal{F}^{\text{univ}} \in \mathfrak{B}_{\alpha}(\mathcal{W})$. Conjeturamos que este es siempre el caso.

Capítulo 4

Estructura espectral de duales oblicuos

En este capítulo obtenemos una parametrización conveniente del conjunto de los duales oblicuos de un marco dado y usamos esto para calcular los posibles autovalores de los operadores de marcos de los duales oblicuos. Esto se puede ver en la Proposición 4.1.4 para el caso de duales oblicuos en dimensión finita y en la Proposición 4.2.3 para el caso de duales oblicuos SG en FSIT's. A partir de estos resultados calculamos la estructura espectral fina de los duales oblicuos en términos de relaciones de entrelace (ver Teorema 4.1.6 y Teorema 4.2.4). Con todos estos resultados, en el Capítulo 5 mostramos que dentro de la clase de duales que satisfacen ciertas restricciones de normas, existe una subfamilia cuyos miembros minimizan cada potencial convexo. Estos duales óptimos están lo más cercanos a ser marcos ajustados entre todos los duales oblicuos con restricciones de normas.

El capítulo consta de dos secciones, en la primera describimos la estructura espectral de los duales oblicuos óptimos en dimensión finita y en la segunda sección la estructura espectral fina de los duales oblicuos SG en FSIT's.

4.1. Estructura espectral de duales oblicuos óptimos en dimensión finita

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$. Bajo estos supuestos tiene sentido hablar de dualidad oblicua (ver Sección 1.3 para los preliminares de dualidad oblicua en dimensión finita). Consideremos $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{W}$ una sucesión que es marco para $\mathcal{W}$ y recordemos que el conjunto de los $\mathcal{V}$-duales oblicuos de $\mathcal{F}$, está dado por

$$\mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}} \text{ es un } \mathcal{V}\text{-dual de } \mathcal{F}\} \ .$$

En lo que sigue vamos a considerar una parametrización de $\mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ en términos de $\mathcal{D}_\mathcal{W}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(\mathcal{F})$, i.e. el conjunto de los marcos duales clásicos para $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$.

Proposición 4.1.1 ([24])**.** Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ un marco para $\mathcal{W}$. La función

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) \ni \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}} \mapsto \{P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, g_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$$

es una biyección (lineal) entre $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ que manda a $\mathcal{F}^\#$ en $\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}$.

Demostración. Consideremos $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ y $\mathcal{G}' = \{P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, entonces $T_{\mathcal{G}'} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, T_{\mathcal{G}}$ y por lo tanto

$$T_{\mathcal{G}'}\, T_{\mathcal{F}}^* = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, T_{\mathcal{G}}\, T_{\mathcal{F}}^* = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, P_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} \ .$$

Así, $\mathcal{G}' \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ y la función está bien definida. Para verificar que la función es inyectiva, sean $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ y $\mathcal{K} = \{k_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ tales que $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} g_i = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} k_i$ para $i \in \mathbb{I}$. Entonces,

$$P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} T_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} T_{\mathcal{K}} \implies P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}(T_{\mathcal{G}} - T_{\mathcal{K}}) = 0 \implies R(T_{\mathcal{G}} - T_{\mathcal{K}}) \subseteq \mathcal{W}^\perp \ .$$

Pero además $R(T_{\mathcal{G}} - T_{\mathcal{K}}) \subseteq \mathcal{W}$, entonces $R(T_{\mathcal{G}} - T_{\mathcal{K}}) = \{0\}$ y $T_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{K}}$.

Finalmente, para probar la suryectividad de la función, recordemos que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$, por lo tanto, la función $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ es un isomorfismo lineal y acotado. Así, dado $\mathcal{K} = \{k_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ existe una única sucesión de Bessel $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ en $\mathcal{W}$ tal que $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} g_i = k_i$ para $i \in \mathbb{I}$. Entonces, $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} T_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{K}}$ y por lo tanto

$$P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} = T_{\mathcal{K}}\, T_{\mathcal{F}}^* = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} T_{\mathcal{G}}\, T_{\mathcal{F}}^* \quad\implies\quad P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}(T_{\mathcal{G}}\, T_{\mathcal{F}}^* - P_{\mathcal{W}}) = 0 \ .$$

Ya que $R(T_{\mathcal{G}}\, T_{\mathcal{F}}^* - P_{\mathcal{W}}) \subseteq \mathcal{W}$ la ecuación previa implica que $T_{\mathcal{G}}\, T_{\mathcal{F}}^* - P_{\mathcal{W}} = 0$. Entonces $\mathcal{G} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ es tal que $\{P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, g_i\}_{i\in\mathbb{I}} = \mathcal{K}$. □

El resultado previo permite obtener otras representaciones de los $\mathcal{V}$-duales de $\mathcal{F}$ a partir de la teoría clásica de los marcos duales para $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$. El siguiente resultado es un ejemplo de este fenómeno.

Corolario 4.1.2. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ un marco para $\mathcal{W}$ con marco $\mathcal{V}$-dual canónico $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{\#} = \{f_{\mathcal{V},i}^{\#}\}_{i\in\mathbb{I}}$ definido en la Eq. (1.10). Dado cualquier $\mathcal{G} \in \mathcal{V}^{\mathbb{I}}$, entonces $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) \iff$ existe una sucesión de Bessel $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{I}}$ tal que

$$T_{\mathcal{Z}}\, T_{\mathcal{F}}^*\, f = \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, f_i\rangle\ z_i = 0 \,\text{para cada}\, f \in \mathcal{H} \ \text{ y } \ \mathcal{G} = \{f_{\mathcal{V},i}^{\#} + z_i\}_{i\in\mathbb{I}} \ .$$

Demostración. Sea $\mathcal{K} = \{k_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ tal que $\mathcal{G} = \{P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, k_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ como en la Proposición 4.1.1. Ya que $\mathcal{K} \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$, es bien conocido que existe una sucesión de Bessel $\mathcal{X} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ en $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{K} = \{f_i^{\#} + x_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ y tal que $T_{\mathcal{X}}\, T_{\mathcal{F}}^* = 0$, donde $T_{\mathcal{X}}$ denota el operador de síntesis de $\mathcal{X}$ (ver por ejemplo [21]). Por lo tanto, $\mathcal{G} = \{P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}(f_i^{\#} + x_i)\}_{i\in\mathbb{I}}$ lo que muestra que $T_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{\#}} + P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} T_{\mathcal{X}}$ con $(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} T_{\mathcal{X}}) T_{\mathcal{F}}^* = 0$ y el resultado se verifica para $\mathcal{Z} = \{P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} x_i\}_{i\in\mathbb{I}} \in \mathcal{V}$. El recíproco es directo. □

A partir de ahora, limitaremos nuestra atención a sucesiones finitas de vectores en $\mathcal{H}$; en consecuencia, vamos a considerar descomposiciones $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$, donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son subespacios de dimensión finita del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

En lo que sigue, nos ocuparemos de las propiedades espectrales de los operadores de marco de los $\mathcal{V}$-duales de $\mathcal{F}$. Así, introducimos algunas notaciones y nociones convenientes:

Definición 4.1.3. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ un marco para $\mathcal{W}$. Consideramos

$$\mathcal{SD}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{S_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{G}}\, T_{\mathcal{G}}^* :\ \mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})\} \subset L(\mathcal{H})^+ \ ,$$

el conjunto de todos los operadores de marco de los marcos $\mathcal{V}$-duales de $\mathcal{F}$. △

Proposición 4.1.4. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$ y sea $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = d$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ un marco para $\mathcal{W}$. Entonces,

$$\mathcal{SD}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) = \Big\{ S_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + B : \quad B \in L(\mathcal{H})^+ \ , \ R(B) \subseteq \mathcal{V} \quad \text{y} \quad \operatorname{rk} B \leq n-d \Big\} .$$

Demostración. Dado $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$, el Corolario 4.1.2 muestra que existe una sucesión de Bessel $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ en $\mathcal{V}$ tal que $T_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + T_{\mathcal{Z}}$ y $T_{\mathcal{Z}}\, T^*_{\mathcal{F}} = 0$. Notar que $T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, T_{\mathcal{F}^\#} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, S^\dagger_{\mathcal{F}}\, T_{\mathcal{F}}$ lo cual implica que $T_{\mathcal{Z}}\, T^*_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} = 0$. Por lo tanto,

$$S_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{G}}\, T^*_{\mathcal{G}} = (T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + T_{\mathcal{Z}})(T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + T_{\mathcal{Z}})^* = S_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + S_{\mathcal{Z}} \ ,$$

donde $S_{\mathcal{Z}} \in L(\mathcal{H})^+$ es el operador de marco de $\mathcal{Z}$, cuyo rango es finito. Como $T_{\mathcal{Z}} T^*_{\mathcal{F}} = 0$ entonces $\dim \ker T_{\mathcal{Z}} \geq d$. Por lo tanto, $R(S_{\mathcal{Z}}) = R(T_{\mathcal{Z}})$ de modo que $R(S_{\mathcal{Z}}) \subset \mathcal{V}$ y $\operatorname{rk} S_{\mathcal{Z}} = \operatorname{rk} T_{\mathcal{Z}} \leq n-d$.

Recíprocamente, sea $B \in L(\mathcal{H})^+$ tal que $R(B) \subseteq \mathcal{V}$ y $\operatorname{rk}(B) \leq n-d$. Entonces, existe $Z \in L(\mathbb{C}^n \, , \, \mathcal{V})$, tal que $Z\, T^*_{\mathcal{F}} = 0$ y $B = ZZ^*$: en efecto, como $\dim(R(T^*_{\mathcal{F}})^\perp) = n-d$ existe una isometría parcial $W \in L(\mathbb{C}^n \, , \, \mathcal{V})$ con espacio inicial $\ker W^\perp \subset R(T^*_{\mathcal{F}})^\perp$ y espacio final $R(B) = R(B^{1/2})$ de modo que $Z = B^{1/2} W$ tiene las propiedades deseadas. Si $\{e_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ denota la base canónica de $\mathbb{C}^n$ y $\mathcal{G} = \{(T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + Z) e_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ entonces $\mathcal{G}$ es una sucesión finita en $\mathcal{V}$ tal que $T_{\mathcal{G}} = T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + Z$ de manera que

$$T_{\mathcal{G}}\, T^*_{\mathcal{F}} = T_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}}\, T^*_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} \ .$$

Por lo tanto $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ y $S_{\mathcal{G}} = S_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + ZZ^* = S_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} + B$, puesto que $Z T^*_{\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}}} = 0$. □

Observación 4.1.5. Sea $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ y consideremos un entero $m < d$. Definimos

$$U(A_0 \, , \, m) \stackrel{\text{def}}{=} \{A_0 + C : \ C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+ \, , \ \operatorname{rk} C \leq d-m \ \} \ . \tag{4.1}$$

La estructura espectral del conjunto $U(A_0 \, , \, m)$ ha sido descripta en [48]. Recordemos que: dado $\mu \in (\mathbb{R}^d)^\downarrow$ existe $A = A_0 + C \in U(A_0 \, , \, m)$ tal que $\lambda(A) = \mu$ (i.e. los autovalores de A, contando multiplicidades y ordenados en forma no-creciente, coinciden con las entradas de μ) si y sólo si

1. $\mu_i \geq \lambda_i(A_0)$ para $i \in \mathbb{I}_d$, si $m \leq 0$;
2. $\mu_i \geq \lambda_i(A_0)$ para $i \in \mathbb{I}_d$ y $\mu_{d-m+i} \leq \lambda_i(A_0)$ para $i \in \mathbb{I}_m$, si $m \geq 1$. △

Recordemos de la Eq. (1.1) que $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ puede ser $\mathbb{M} = \mathbb{I}_p$ o $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ de modo que $\dim \mathcal{H} = |\mathbb{M}|$. En adelante, $\ell^1_+(\mathbb{M})^\downarrow$ denota el espacio de las sucesiones $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{M}}$ con $\lambda_i \geq \lambda_j \geq 0$ para $i, j \in \mathbb{M}$ tal que $i \leq j$ y $\operatorname{tr}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathbb{M}} \lambda_i < \infty$.

Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{H}^n$ una sucesión finita con operador de marco $S_{\mathcal{F}} \in L(\mathcal{H})^+$. Así, $S_{\mathcal{F}}$ es un operador semidefinido positivo y de rango finito, con rango $\mathcal{W} = \operatorname{Span}\{f_i : \ i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathcal{H}$. Sea $d = \dim \mathcal{W}$, y sea $(S_{\mathcal{F}})_{\mathcal{W}} \in L(\mathcal{W})^+$ la compresión de $S_{\mathcal{F}}$ a $\mathcal{W}$. Así, definimos

$$\lambda(S_{\mathcal{F}}) = ((\lambda_i((S_{\mathcal{F}})_{\mathcal{W}}))_{i\in\mathbb{I}_d}, 0_{|\mathbb{M}|-d}) \in \ell^1_+(\mathbb{M})^\downarrow \ ,$$

donde $(\lambda_i((S_{\mathcal{F}})_{\mathcal{W}}))_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d_{>0}$ denota el vector de autovalores de la compresión $(S_{\mathcal{F}})_{\mathcal{W}} \in L(\mathcal{W})^+$, contando multiplicidades y ordenados en forma no-creciente. Es fácil verificar que $\lambda(S_{\mathcal{F}}) \in \ell^1_+(\mathbb{M})^\downarrow$ coincide con el vector de valores singulares (o s-números) del operador compacto $S_{\mathcal{F}} \in L(\mathcal{H})^+$ (ver [58]).

Teorema 4.1.6 (Estructura espectral de los $\mathcal{V}$-duales)**.** Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$ y sea $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = d$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ un marco para $\mathcal{W}$. Denotamos $\lambda(S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}) = \lambda^\#_\mathcal{V} = (\lambda^\#_{\mathcal{V},\,j})_{j\in\mathbb{M}}$ y consideramos $m = 2d - n$. Dado $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{M}} \in \ell^1_+(\mathbb{M})^\downarrow$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ tal que $\lambda(S_\mathcal{G}) = \mu$;
2. $\mu_i = 0$ para $i \geq d+1$ y:
   a. si $m \leq 0$, entonces $\mu_i \geqslant \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}$ para $i \in \mathbb{I}_d$;
   b. si $m \geq 1$, entonces $\mu_i \geqslant \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}$ para $i \in \mathbb{I}_d$ y $\mu_{d-m+i} \leq \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}$ para $i \in \mathbb{I}_m$.

Demostración. Fijamos $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ BON de $\mathcal{V}$. Sea $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ dada por $A_0 = (\langle S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} v_j\,,\, v_i\rangle)_{i,\,j\in\mathbb{I}_d}$ y sea $m = 2d - n$ (de modo que $d - m = n - d$). Entonces $\lambda(S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}) = (\lambda(A_0)\,,\, 0_{|\mathbb{M}|-d}) \in (\ell^1_+(\mathbb{M}))^\downarrow$. Usando la Proposición 4.1.4, a cada $S_\mathcal{G} = S_{\mathbb{F}^\#_\mathcal{V}} + B \in \mathcal{SD}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ podemos asociar el elemento $A_0 + C \in U(A_0\,,\, m)$ donde $C = (\,\langle Bv_j\,,\, v_i\rangle\,)_{i,\,j\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ de forma que

$$\lambda(S_\mathcal{G}) = (\lambda(A_0 + C)\,,\, 0_{|\mathbb{M}|-d}) \in \ell^1_+(\mathbb{M})^\downarrow\ .$$

Recíprocamente, si $A_0 + C \in U(A_0\,,\, m)$, entonces existe $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ tal que la matriz correspondiente a $S_\mathcal{G}$, como antes, es $A_0 + C$. Luego, las observaciones previas muestran que

$$\{\lambda(S_\mathcal{G}) :\ \mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})\} = \{(\lambda(A)\,,\, 0_{|\mathbb{M}|-d}) :\ A \in U(A_0\,,\, m)\}\ . \tag{4.2}$$

La prueba se sigue ahora de la Eq. (4.2) y de la Observación 4.1.5. □

Observación 4.1.7. Usando el Teorema 4.1.6, si $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ (i.e. dualidad clásica) recuperamos la estructura de los duales clásicos del marco $\mathcal{F}$ para el espacio de Hilbert $\mathcal{W}$ como se describe en [48]. △

Corolario 4.1.8. Existe $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ Parseval en $\mathcal{V}$ si y sólo si:

(a) $1 \geq \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}$ para $i \in \mathbb{I}_d$, si $m = 2d - n \leq 0$;

(b) $1 \geq \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}$ para $i \in \mathbb{I}_d$ y $1 = \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}$ para $i \in \mathbb{I}_m$, si $d - 1 \geq m = 2d - n \geq 1$.

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ un marco para $\mathcal{V}$. Notemos que $\mathcal{G}$ es Parseval en $\mathcal{V}$, i.e. $S_\mathcal{G} = P_\mathcal{V}$, si y sólo si $\lambda_i(S_\mathcal{G}) = 1$ para cada $i \in \mathbb{I}_d$. Así, el resultado ahora se sigue del Teorema 4.1.6. □

Observación 4.1.9. Con las notaciones y terminología del Teorema 4.1.6, notemos que el Corolario 4.1.8 puede escribirse como sigue: existe $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ Parseval en $\mathcal{V}$ si y sólo si

$$S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} \leq P_\mathcal{V} \quad \text{y} \quad \dim R(P_\mathcal{V} - S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}) \leq d - m = n - d = \dim\ker T_\mathcal{F}\ .$$

Esta última formulación de la existencia de marcos $\mathcal{V}$-duales Parseval se asemeja formalmente a [33, Proposición 2.4] en el caso de dualidad clásica. △

4.2. Estructura espectral fina de duales oblicuos SG en FSIT's

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ FSIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = L^2(\mathbb{R}^k)$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$ y recordemos que el conjunto de los $\mathcal{V}-$duales SG de $E(\mathcal{F})$ está dado por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(E(\mathcal{F})) = \{E(\mathcal{G}) : E(\mathcal{G}) \text{ es } \mathcal{V}- \text{ dual SG de } E(\mathcal{F})\ \} .$$

Sea $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ y sea $S_{E(\mathcal{G})}$ el operador de marco de $E(\mathcal{G})$. Recordemos que en este caso $S_{E(\mathcal{G})}$ es un operador *shift preserving* (SP) tal que $[S_{E(\mathcal{G})}]_x = S_{\Gamma\mathcal{G}(x)}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp, y la estructura espectral fina de $E(\mathcal{G})$ es la función $\mathbb{T}^k \ni x \mapsto \Big(\lambda_j([S_{E(\mathcal{G})}]_x)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$; donde $\Big(\lambda_j([S_{E(\mathcal{G})}]_x)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ denota la sucesión de autovalores del operador positivo de rango finito $[S_{E(\mathcal{G})}]_x$, contando multiplicidades y ordenados en forma no-creciente, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

En el siguiente resultado consideramos la función medible $d : \mathbb{T}^k \to \{0, \ldots, n\}$ dada por

$$d(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x) = \dim J_{\mathcal{V}}(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{T}^k \text{ ctp.}$$

Lema 4.2.1. Sea $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ tal que $E(\mathcal{G})$ es un marco para $\mathcal{V}$. Sea $B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ un operador SP tal que $R(B) \subseteq \mathcal{V}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ tal que $B = S_{E(\mathcal{Z})}$ y $T_{E(\mathcal{G})}\, T^*_{E(\mathcal{Z})} = 0$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.
2. $\operatorname{rk}([B]_x) \le n - d(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Demostración. En primer lugar considerando una partición finita conveniente de $\mathbb{T}^k$ en conjuntos medibles asumimos, sin pérdida de generlidad, que $d(x) = d \in \mathbb{N}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Por el Lema 2.1.7 existen campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tal que si $(\lambda_j(S_{\Gamma\mathcal{G}(\cdot)}))_{j\in\mathbb{N}} = (\lambda_j(\cdot))_{j\in\mathbb{N}}$ denota la estructura espectral fina de $E(\mathcal{G})$ entonces

$$[S_{E(\mathcal{G})}]_x = \sum_{j\in\mathbb{I}_d} \lambda_j(x)\ v_j(x) \otimes v_j(x)\ , \quad \text{para } x \in \mathbb{T}^k \quad \text{ctp} . \tag{4.3}$$

Luego, en este caso $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{V}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$, ctp. Con las consideraciones anteriores, comenzamos la prueba del lema.

2 $\implies$ 1. Asumimos que $B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ es un operador SP tal que $R(B) \subseteq \mathcal{V}$ y tal que $\operatorname{rk}([B]_x) \le n-d$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Veamos que existe $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ tal que $B = S_{E(\mathcal{Z})}$ y $T_{E(\mathcal{G})}\, T^*_{E(\mathcal{Z})} = 0$. En efecto, como $[B]_x \in L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))^+$ es tal que $R([B]_x) \subseteq J_{\mathcal{V}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., consideramos el campo medible de matrices representación $\big[[B]_x\big] \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ de $[B]_x$ respecto a $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ BON de $\mathbb{C}^d$. Entonces usando los campos medibles de vectores $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ como en la prueba del Lema 2.1.7 obtenemos campos medibles $w_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_d$, tales que $\{w_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ es una BON de $J_{\mathcal{V}}(x)$ y $[B]_x\, w_j(x) = \lambda_j([B]_x)\, w_j(x)$ para $j \in \mathbb{I}_d$ y $x \in \mathbb{T}^k$, ctp. En particular, vemos que

$$([B]_x)^{1/2} = \sum_{j=1}^{\min\{d,n-d\}} \lambda_j([B]_x)^{1/2}\, w_j(x) \otimes w_j(x)\ , \quad \text{para } x \in \mathbb{T}^k \quad \text{ctp.}$$

Sea $V : \mathbb{T}^k \to L(\mathbb{C}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^k))$ el campo medible de isometrías parciales dado por

$$V(x)\, u_j(x) = \begin{cases} w_{j-d} & \text{si} \quad d+1 \le j \le d + \min\{d, n-d\}\,, \\ 0 & \qquad\qquad \text{cc.} \end{cases}$$

Como $V(x)\,V^*(x)$ es la proyección ortogonal sobre $\text{span}\{w_j(x)\ :\ j\in\mathbb{I}_{\text{mín}\{d,n-d\}}\}$ y $R(V^*(x))\subseteq \ker V(x)^\perp\subseteq \text{span}\{u_j(x): d+1\le j\le n\}\implies T_{\Gamma\mathcal{G}(x)}V^*(x)=0$ para $x\in\mathbb{T}^k$, ctp.

Para $i\in\mathbb{I}_n$ consideramos $z_i\in\mathcal{V}$ determinado unívocamente por $\Gamma z_i(x)=([B]_x)^{1/2}\,V(x)e_i$ para $x\in\mathbb{T}^k$, ctp., donde $\{e_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ denota la BON canónica de $\mathbb{C}^n$. Si tomamos $\mathcal{Z}=\{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ entonces $T_{\Gamma\mathcal{Z}(x)}=([B]_x)^{1/2}\,V(x)$ para $x\in\mathbb{T}^k$ ctp. Así, usando la Eq. (1.16), vemos que

$$[T_{E(\mathcal{G})}\,T^*_{E(\mathcal{Z})}]_x=T_{\Gamma\mathcal{G}(x)}T^*_{\Gamma\mathcal{Z}(x)}=T_{\Gamma\mathcal{G}(x)}V^*(x)([B]_x)^{1/2}=0\ ,\qquad\text{para}\qquad x\in\mathbb{T}^k\ \text{ ctp.}$$

Por otra parte, notemos que

$$[S_{E(\mathcal{Z})}]_x=S_{\Gamma\mathcal{Z}(x)}=([B]_x)^{1/2}\,V(x)\,V^*(x)\,([B]_x)^{1/2}=[B]_x\ ,\qquad\text{para}\qquad x\in\mathbb{T}^k\ \text{ ctp.}$$

$1\implies 2$. Asumimos que existe $\mathcal{Z}=\{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}\in\mathcal{V}^n$ tal que $B=S_{E(\mathcal{Z})}$ y $T_{E(\mathcal{G})}\,T^*_{E(\mathcal{Z})}=0$. Entonces, por la Eq. (1.16), tenemos que $0=T_{\Gamma\mathcal{G}(x)}\,T^*_{\Gamma\mathcal{Z}(x)}$ y por lo tanto $\text{rk}(T^*_{\Gamma\mathcal{Z}(x)})\le n-\text{rk}(T_{\Gamma\mathcal{G}(x)})=n-d$ para $x\in\mathbb{T}^k$ ctp. Finalmente,

$$\text{rk}\left([S_{E(\mathcal{Z})}]_x\right)=\text{rk}(S_{\Gamma\mathcal{Z}(x)})=\text{rk}(T_{\Gamma\mathcal{Z}(x)})=\text{rk}(T^*_{\Gamma\mathcal{Z}(x)})\le n-d\qquad\text{para}\qquad x\in\mathbb{T}^k\ \text{ ctp.}\qquad\square$$

Definición 4.2.2. Sea $\mathcal{V}\subseteq L^2(\mathbb{R}^k)$ un FSIT. Sea $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{G})$ es un marco para $\mathcal{V}$ con operador de marco $S_{E(\mathcal{G})}$. Recordemos que $d(x)=\dim J_{\mathcal{V}(x)}$ para $x\in\mathbb{T}^k$. Entonces, consideramos

$$U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F}))=\Big\{S_{E(\mathcal{G})}+B: B\in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+\ \text{es SP},\ R(B)\subset\mathcal{V},\ \text{rk}([B]_x)\le n-d(x),\ \ x\in\mathbb{T}^k\text{ctp.}\Big\}\tag{4.4}$$

$\triangle$

Recordemos el modelo aditivo para operadores SP cuyos rangos viven en FSIT's, introducido en el Capítulo 2 (ver Definición 2.3.7):

$$U_m^{\mathcal{V}}(S_0)=\Big\{S_0+B: B\in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+\ \text{es SP},\ R(B)\subset\mathcal{V},\ \text{rk}([B]_x)\le d(x)-m(x)\ \text{ para }\ x\in\mathbb{T}^k\ \text{ ctp.}\Big\}\,,$$

notemos que $U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F}))=U_m^{\mathcal{V}}(S_0)$ cuando consideramos $m(x)=2d(x)-n$ y $S_0=S_{E(\mathcal{G})}$.

Proposición 4.2.3. Consideremos las notaciones de la Definición 4.2.2. Sea $E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}=\{T_\ell\, f^{\#}_{\mathcal{V},\,i}\}_{(\ell,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n}$ el $\mathcal{V}$-dual canónico SG de $E(\mathcal{F})$. Entonces,

$$\{S_{E(\mathcal{G})}:\ E(\mathcal{G})\in\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})\}=U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})\ .\tag{4.5}$$

Demostración. Sea $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}\in\mathcal{V}^n$ tal que $E(\mathcal{G})\in\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$. Sea $\mathcal{Z}=\{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}\in\mathcal{V}^n$ dado por $z_i=g_i-f^{\#}_{\mathcal{V},\,i}$ para $i\in\mathbb{I}_n$. Entonces $E(\mathcal{Z})=\{T_\ell\,z_i\}_{(\ell,\,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n}$ es una sucesión de Bessel en $\mathcal{V}$ tal que $T_{E(\mathcal{G})}=T_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}+T_{E(\mathcal{Z})}$. En este caso, tenemos que $T_{E(\mathcal{Z})}\,T^*_{E(\mathcal{F})}=0$ y de esta forma $T_{E(\mathcal{Z})}\,T^*_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}=0$, ya que $R(T^*_{E(\mathcal{F})})=R(T^*_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}})$. Así,

$$S_{E(\mathcal{G})}=(T_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}+T_{E(\mathcal{Z})})\,(T_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}+T_{E(\mathcal{Z})})^*=S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}+S_{E(\mathcal{Z})}\ .$$

Luego, concluimos que $B=S_{E(\mathcal{Z})}\in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ es SP, $R(S_{E(\mathcal{Z})})\subset\mathcal{V}$ y, por el Lema 4.2.1, que $\text{rk}\left([S_{E(\mathcal{Z})}]_x\right)\le n-d(x)$ para $x\in\mathbb{T}^k$, ctp.

Recíprocamente, si $S\in U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$ entonces $S=S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}+B$, donde $B\in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ es SP, $R(B)\subset\mathcal{V}$ y $\text{rk}([B]_x)\le n-d(x)$ para $x\in\mathbb{T}^k$, ctp. Por el Lema 4.2.1 vemos que existe $\mathcal{Z}=\{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que

$T_{E(\mathcal{Z})}\,T^*_{E(\mathcal{F})} = 0$ y $B = S_{E(\mathcal{Z})}$. Si fijamos $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ dado por $g_i = f^{\#}_{\mathcal{V},\,i} + z_i$ para $i \in \mathbb{I}_n$, se tiene que $E(\mathcal{G})$ es una sucesión de Bessel en $\mathcal{V}$ tal que $T_{E(\mathcal{G})} = T_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} + T_{E(\mathcal{Z})}$. Usando que $T_{E(\mathcal{Z})}\,T^*_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} = 0$ concluimos, como antes, que

$$S_{E(\mathcal{G})} = S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} + S_{E(\mathcal{Z})} = S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} + B = S \qquad \square$$

La Proposición 4.2.3 muestra que el conjunto de los operadores de marco de los $\mathcal{V}$-duales SG de un marco fijo $E(\mathcal{F})$ puede describirse en términos del modelo aditivo $U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$. Así la estructura espectral fina de los elementos de $U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$ puede describirse usando el Teorema 2.3.11. Como consecuencia de esto, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.4 (Estructura espectral fina de los $\mathcal{V}$-duales)**.** Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ FSIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = L^2(\mathbb{R}^k)$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$ y $E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}$ el marco $\mathcal{V}$-dual canónico SG de $E(\mathcal{F})$. Denotamos por $A = S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}$ y por $\lambda^{\#}_{\mathcal{V},\,i}(x) = \lambda_i([B]_x)$ para $i \in \mathbb{N}$ y para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Sea m la función medible dada por $m(x) = 2d(x) - n$, para $x \in \mathbb{T}^k$. Dada una función medible $\mu : \mathbb{T}^k \to \ell^1(\mathbb{N})$ descripta como $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ tal que

$$\lambda_i\big(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_x\big) = \mu_i(x)\ , \quad i \in \mathbb{N}\ , \quad x \in \mathbb{T}^k \ \text{ctp.}$$

2. $\mu = 0$ si $x \notin \operatorname{Spec}(\mathcal{V})$. Si $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{V})$ entonces $\mu_j(x) = 0$ para $j \geq d(x) + 1$ y
   a. Si $m(x) \leq 0$: $\mu_i(x) \geqslant \lambda^{\#}_{\mathcal{V},\,i}(x)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$.
   b. Si $m(x) \geq 1$: $\mu_i(x) \geqslant \lambda^{\#}_{\mathcal{V},\,i}(x)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$ y $\mu_{d(x)-m(x)+i}(x) \leq \lambda^{\#}_{\mathcal{V},\,i}(x)$ para $i \in \mathbb{I}_{m(x)}$.

Demostración. Se deduce de la Proposición 4.2.3 y del Teorema 2.3.11. $\square$

Como una consecuencia de la descripción de la estructura espectral fina de los $\mathcal{V}$-duales SG de $E(\mathcal{F})$ caracterizamos la existencia de los $\mathcal{V}$-duales SG ajustados o *tight* de $E(\mathcal{F})$, (comparar con [33]).

Corolario 4.2.5. Con las Notaciones del Teorema 4.2.4. Entonces, existe $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ $c-$ ajustado si y sólo si

1. $A = S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} \leq c \cdot P_{\mathcal{V}}$;
2. $\operatorname{rk}([c \cdot P_{\mathcal{V}} - S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x) \leq \min\{d(x),\, n - d(x)\}$ para $x \in$ Spec($\mathcal{V}$) ctp.

Demostración. El Teorema 4.2.4 implica que existe un marco $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ tal que $S_{E(\mathcal{G})} = c \cdot P_{\mathcal{V}}$ si y sólo si $c \geq \lambda_i([A]_x)$ para $i \in \mathbb{I}_{d(x)}$ y $\lambda_i([A]_x) = c$ para $i \in \mathbb{I}_{m(x)}$ siempre que $m(x) = 2d(x) - n \geq 1$, para $x \in \operatorname{Spec}(\mathcal{V})$ ctp. Estas últimas dos condiciones son equivalentes al hecho de que $c \cdot P_{\mathcal{V}} \geq S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}$ y

$$\operatorname{rk}\big([c \cdot P_{\mathcal{V}} - A]_x\big) \leq d(x) - m(x) = n - d(x) \quad \text{siempre que} \quad m(x) \geq 1\ .$$

Notemos también, que en el caso que $m(x) \leq 0$ se tiene $n - d(x) \geq d(x) = \dim J_{\mathcal{V}}(x)$. La prueba se deduce de estas observaciones. $\square$

Observación 4.2.6. Consideremos las notaciones del Teorema 4.2.4. Como consecuencia del Corolario 4.2.5, obtenemos la siguiente dicotomía relacionada con la existencia de los $\mathcal{V}$-duales oblicuos ajustados de $E(\mathcal{F})$:

1. Si $n \geq 2\, d(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., entonces para cada $c \geq \|S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}\|$, existe $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ que es un marco $c-$ ajustado para $\mathcal{V}$.

2. Si existe $N \subset \mathbb{T}^k$ tal que N tiene medida de Lebesgue positiva y $n < 2\, d(x)$ para $x \in N$ ctp. Entonces: en caso de que exista $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ $c-$ ajustado se tiene que $c = \|S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}\|$. $\triangle$

Capítulo 5

Aliasing y diseños óptimos

En el Capítulo 4 hemos estudiado la estructura espectral de los duales oblicuos de un marco dado y hemos obtenido una descripción explícita de los autovalores de los operadores de marco de estos duales oblicuos. En este capítulo, calculamos la estructura de los $\prec_w$ $-$mínimos en el conjunto de los duales oblicuos con restricciones de normas (ver Teorema 5.1.2 para el caso de duales oblicuos en dimensión finita y el Teorema 5.2.1 para los duales oblicuos SG). Estos duales oblicuos óptimos poseen propiedades importantes: por un lado, son los que minimizan simultaneamente los potenciales convexos; y por otro, son lo más cercanos a ser ajustados entre todos los duales oblicuos.

Por otro lado, se sabe que la posición relativa de los subespacios $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ juega un papel importante cuando comparamos dualidad oblicua con dualidad clásica. En la Sección 5.1.3 damos una descripción detallada del roll de la geometría relativa de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ en dimensión finita (ver Sección 1.5 para los preliminares de geometría relativa de subespacios de dimensión finita). Nuestro análisis se basa en el Teorema 1.4.9 (desigualdades de Lidskii multiplicativas).

Además consideramos dos problema intrínseco a la dualidad oblicua en dimensión finita. Primero calculamos la rotación rígida U_0 de $\mathcal{W}$ tal que el dual oblicuo canónico $(U_0 \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}$ es óptimo respecto a la submayorización, entre todas las rotaciones rígidas. Esto implica una familia de desigualdades en términos de potenciales convexos. Y en segundo lugar calculamos de forma exacta la norma aliasing, este resultado no solo mejora los conocidos previamente, sino que nos permite estudiar el aliasing para pares duales y sus mínimos. Finalmente, en la Sección 5.3.2 extendemos la noción del aliasing para el caso de FSIT's.

5.1. Diseños óptimos en dimensión finita

En ciertas situaciones aplicadas, se desea caracterizar la existencia (y encontrar métodos explícitos de construcción) de marcos con algunos parámetros predeterminados. Este tipo de problemas se conoce como *problemas de diseño de marcos*, y ellos son el núcleo de la teoría de marcos finitos (ver por ejemplo [9, 16, 31, 46, 48, 49, 53] y el libro reciente [19]). En la Sección 4.1 hemos resuelto problemas de este tipo, nuestro interés ahora es resolver problemas de diseños para marcos finitos con restricciones de norma.

5.1.1. Duales oblicuos óptimos con restricciones de norma

Sean $\mathcal{W}, \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ subespacios de dimensión finita tales que $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^\perp = \mathcal{H}$, y sea $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} = d$. Fijado un marco $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in \mathbb{I}_n} \in \mathcal{W}^n$ para $\mathcal{W}$, nos preguntamos si existe $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ con ciertos parámetros predeterminados; y si tal dual existe nos gustaría obtener un procedimiento para construirlos. Por ejemplo, dado $\mu \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ nos preguntamos si existe $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ con $\lambda(S_{\mathcal{G}}) = \mu$. Notemos que el Teorema 4.1.6

de la sección anterior resuelve completamente este problema. Más aún, la prueba de la Proposición 4.1.4 contiene un procedimiento para construir efectivamente tal dual.

Como una consecuencia de la descripción de los espectros de los elementos en $\mathcal{S}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}))$, vemos que si $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ entonces $S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}} \leq S_{\mathcal{G}}$. Este último hecho implica que el $\mathcal{V}$-dual canónico es óptimo respecto a diversos criterios (incluyendo potenciales convexos). Sin embargo, desde un punto de vista numérico el $\mathcal{V}$-dual oblicuo canónico podría no ser la mejor opción entre los $\mathcal{V}$-duales para $\mathcal{F}$. Por ejemplo, el número de condición del operador de marco $S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}}$ puede no ser mínimo en $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$; de hecho, el Corolario 4.1.8 muestra que bajo ciertos supuestos podemos considerar un $\mathcal{V}$-dual Parseval de $\mathcal{F}$ (que tiene el mínimo número de condición).

Con el fin de buscar $\mathcal{V}$-duales que sean numéricamente más estables que el dual oblicuo canónico, procedemos de la siguiente manera: para $t \geq \operatorname{tr}\left(S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}}\right)$ consideramos

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) : \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 \geq t \right\} .$$

Notemos que si $t > \operatorname{tr}\left(S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}}\right)$ entonces el $\mathcal{V}$-dual canónico no está en $\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$ y por lo tanto, es natural preguntarse si existe un dual óptimo en $\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$. Usando la identidad

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 = \operatorname{tr}(S_{\mathcal{G}}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \mu_i \ , \tag{5.1}$$

donde $\lambda(S_{\mathcal{G}}) = \mu$, vemos que el Teorema 4.1.6 proporciona una solución completa al problema de diseño de marco, en el sentido de que permite obtener una descripción completa de los autovalores de los operadores de marco de los elementos de $\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$.

Observación 5.1.1. Sea $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$, $t \geq \operatorname{tr}(A_0) \geq 0$ y consideremos un entero $m < d$. Se define

$$U_t(A_0\,,\,m) \stackrel{\text{def}}{=} \{A_0 + C :\ C \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+\,,\ \operatorname{rk}(C) \leq d-m\,,\ \operatorname{tr}(A_0 + C) \geq t\} \ .$$

La estructura espectral y geométrica del conjunto $U_t(A_0\,,\,m)$ se describe en [48]. En particular, se muestra que existe $\prec_w$-mínimo en este conjunto. En efecto, usando las nociones previas, si $\lambda(A_0) = \lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$, consideramos $h_m : [\lambda_d\,,\,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$h_m(t) = \sum_{i=\max\{m\,,\,0\}+1}^{d} (t-\lambda_i)^+ \ ,$$

donde x^+ representa la parte positiva de x. Notemos que h_m es estrictamente creciente; por lo tanto existe un único $c_{\lambda,\,m}(t) = c \geq \lambda_d$ tal que $h_m(c) = t - \operatorname{tr}(\lambda)$. Luego, se definen

1. $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big((c-\lambda_1)^+ + \lambda_1\,,\,\dots\,,\,(c-\lambda_d)^+ + \lambda_d\big) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^{\downarrow}$, si $m \leq 0$;

2. $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1\,,\,\dots\,,\,\lambda_m\,,\,(c-\lambda_{m+1})^+ + \lambda_{m+1}\,,\,\dots\,,\,(c-\lambda_d)^+ + \lambda_d) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, si $m \in \mathbb{I}_{d-1}$.

Notemos que si $t > \operatorname{tr}(A_0)$ entonces $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) \in \mathbb{R}^d_{>0}$. Así, resulta que (ver [48])

1. Existe $A^{\mathrm{op}} \in U_t(A_0\,,\,m)$ tal que $\lambda(A^{\mathrm{op}}) = \nu_{\lambda\,,\,m}(t)^{\downarrow}$;

2. Para cada $A \in U_t(A_0\,,\,m)$ se verifica que $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) \prec_w \lambda(A)$;

3. Si $A = A_0 + B \in U_t(A_0\,,\,m)$ entonces $\lambda(A) = \nu_{\lambda\,,\,m}(t)$ si y sólo si $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) = \lambda(A_0) + \lambda^\uparrow(B)$ y existe una BON $\{z_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathbb{C}^d$ tal que

$$A_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i\ z_i \otimes z_i \qquad \text{y} \qquad B = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_{d-i+1}(B)\ z_i \otimes z_i\ . \qquad \triangle$$

El siguiente resultado muestra que existen mínimos estructurales de potenciales estrictamente convexos en $\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$, i.e. duales $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$ que simultáneamente minimizen cada potencial convexo. Esto es interesante desde el punto de vista de las aplicaciones, ya que las evaluaciones de los potenciales convexos (e.g. el potencial de marco que se describió en la Eq. (3.1)) son generalmente más fáciles de calcular que ciertos parámetros estructurales, como por ejemplo la lista de autovalores o autovectores.

Teorema 5.1.2 (Duales óptimos en $\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$)**.** Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$ y sea $d = \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ un marco para $\mathcal{W}$ y denotamos $\lambda^\#_\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}})$. Para cada $t \geq \operatorname{tr}\left(\lambda^\#_\mathcal{V}\right)$ existe $\nu \in \ell^1_+(\mathbb{M})^\downarrow$ con las siguientes propiedades de minimalidad:

1. Existe $\mathcal{G}^{\rm op} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$ tal que $\lambda(S_{\mathcal{G}^{\rm op}}) = \nu$;
2. Para cada función no-decreciente $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ se tiene que

$$P_h(\mathcal{G}^{\rm op}) \leq P_h(\mathcal{G}) \quad , \quad \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})\ . \tag{5.2}$$

Más aún, si además asumimos que $h \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$ alcanza la igualdad en la Eq. (5.2), entonces $\lambda(S_\mathcal{G}) = \nu$ y existe $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ BON para $\mathcal{V}$, tal que

$$S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda^\#_{\mathcal{V},\,i}\ x_i \otimes x_i \quad \text{y} \quad B = S_\mathcal{G} - S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_{d-i+1}(B)\ x_i \otimes x_i\ .$$

Demostración. Fijamos $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ una BON de $\mathcal{V}$ y consideramos $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})^+$ dada por

$$A_0 = \big(\,\langle S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}\, v_j\,,\,v_i\rangle\,\big)_{i,\,j\in\mathbb{I}_d}.$$

Argumentando como en la prueba del Teorema 4.1.6, y teniendo en cuenta la identidad de la Eq. (5.1) vemos que

$$\{\lambda(S_\mathcal{G}) :\ \mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})\} = \{(\lambda(A)\,,\,0_{|\mathbb{M}|-d}) :\ A \in U_t(A_0\,,\,m)\}\ . \tag{5.3}$$

Consideremos $\lambda = \lambda(A_0) = (\lambda^\#_{\mathcal{V},\,i})_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d_{>0}$, notemos que $t \geq \operatorname{tr}(\lambda)$. Tomamos $m = 2d - n$ y $\nu_{\lambda,\,m}(t) \in \mathbb{R}^d_{>0}$ definido como en la Observación 5.1.1. Finalmente, definimos

$$\nu = (\nu_{\lambda,\,m}(t), 0_{|\mathbb{M}|-d}) \in \ell^1_+(\mathbb{M})\ .$$

Si $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es una función no-decreciente entonces, por la Eq. (3.3), tenemos que

$$P_h(\mathcal{G}) = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} h(\lambda_i(S_\mathcal{G})) = \operatorname{tr}\left((S_\mathcal{G})_\mathcal{V}\right) \quad \text{para} \quad \mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})\ . \tag{5.4}$$

Así, la prueba ahora se deduce de las Eqs. (5.3) y (5.4), la Observación 5.1.1 y de las relaciones entre submayorización y funciones convexas no-drecrecientes desarrolladas en la Sección 1.4.1. $\square$

5.1.2. Una aplicación: minimizando la distancia a los marcos ajustados en $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$

Consideremos las notaciones y terminología del Teorema 5.1.2. Como ya lo mencionamos anteriormente (ver las Observaciones 3.0.14) el marco dual oblicuo óptimo $\mathcal{G}^{\text{op}} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},t}(\mathcal{F})$ es el que *minimiza la dispersión* de los autovalores del operador de marco, entre todos los duales oblicuos $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},t}(\mathcal{F})$. En este sentido, describimos una medida natural de la dispersión de los autovalores, que cuantifica - de manera clara - lo cerca que está un marco de ser ajustado.

Antes recordemos que dado un espacio de Hilbert $\mathcal{V}$, una norma unitariamente invariante (NUI) $|||\cdot|||$ en $L(\mathcal{V})$ es una norma que satisface

$$|||U\,T\,V||| = |||T|||$$

para cada U, V, $T \in L(\mathcal{V})$ tal que U, V son operadores unitarios (ver Sección 1.4.1).

Definición 5.1.3. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con $d = \dim \mathcal{V}$ y sea $|||\cdot|||$ una NUI en $L(\mathcal{V})$. Dado $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ un marco para $\mathcal{V}$ definimos la distancia a los marcos ajustados asociada a $|||\cdot|||$, notada $\Theta(\,|||\cdot|||\,,\mathcal{G})$, por

$$\Theta(\,|||\cdot|||\,,\mathcal{G}) = \inf_{c>0} |||(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}} - c\,I_{\mathcal{V}}|||\,,$$

donde $(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V})$ denota la compresión del operador de marco de $\mathcal{G}$ a su rango $\mathcal{V}$. Si $c_0 = c_0(\,|||\cdot|||\,) > 0$ es tal que $\Theta(\,|||\cdot|||\,,\mathcal{G}) = |||(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}} - c_0\,I_{\mathcal{V}}|||$ entonces decimos que c_0 es la $|||\cdot|||$-constante óptima de ajuste para $\mathcal{G}$. $\triangle$

A partir de la Definición 5.1.3, notemos que $\Theta(\,|||\cdot|||\,,\mathcal{G})$ puede describirse como la $|||\cdot|||$-distancia de la compresión $(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}}$ del operador de marco de $\mathcal{G}$ al subconjunto $\mathbb{R}_{>0}\cdot I_{\mathcal{V}} \subset L(\mathcal{V})$. Es claro que la distancia a los marcos ajustados mide la proximidad del marco $\mathcal{G}$ a los marcos ajustados, en término de la dispersión (mínima) de los autovalores de $S_{\mathcal{G}}$ con respecto a $c \in \mathbb{R}$. Como mostramos en los ejemplos que siguen, la constante óptima de ajuste (así como la distancia a los marcos ajustados) de un marco fijo depende de la NUI considerada.

Ejemplos 5.1.4. Sea $\mathcal{V}$ un subespacio de dimensión finita del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $d = \dim \mathcal{V}$. Sea $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ un marco para $\mathcal{V}$.

1. Si consideramos la 2-norma en $L(\mathcal{V})$ entonces,

$$f(c) = \|(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}} - cI_{\mathcal{V}}\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\lambda_i(S_{\mathcal{G}}) - c)^2 \quad \text{para} \quad c > 0$$

   alcanza su mínimo en $c_{0,2} = 1/d \cdot \sum_{i\in\mathbb{I}_d} \lambda_i(S_{\mathcal{G}})$ y $\Theta(\|\cdot\|_2\,,\mathcal{G}) = (\sum_{i\in\mathbb{I}_d} (\lambda_i - c_{0,2})^2)^{1/2}$.

2. Si consideramos la norma espectral en $L(\mathcal{V})$ entonces,

$$f(c) = \|(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}} - cI_{\mathcal{V}}\| = \max_{i\in\mathbb{I}_d} |\lambda_i(S_{\mathcal{G}}) - c| \quad \text{para} \quad c > 0$$

   alcanza su mínimo en $c_{0,\infty} = 1/2(\lambda_1(S_{\mathcal{G}}) + \lambda_d(S_{\mathcal{G}}))$ y $\Theta(\|\cdot\|\,,\mathcal{G}) = 1/2(\lambda_1(S_{\mathcal{G}}) - \lambda_d(S_{\mathcal{G}}))$.

Notemos que tanto $\Theta(\|\cdot\|_2\,,\mathcal{G})$ como $\Theta(\|\cdot\|\,,\mathcal{G})$ son nociones naturales de la dispersión del espectro de $(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{V}}$. $\triangle$

Sea $\mathcal{V}$ un subespacio de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $|||\cdot|||$ una UNI en $L(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2\in\mathcal{V}^n$ son marcos para $\mathcal{V}$, es claro que la desigualdad $\Theta(|||\cdot|||\,,\mathcal{G}_1)\le\Theta(|||\cdot|||\,,\mathcal{G}_2)$ muestra que la dispersión de los autovalores del operador de marco de $\mathcal{G}_1$ es más pequeña que la dispersión de los autovalores del operador de marco de $\mathcal{G}_2$, medidas con la NUI $|||\cdot|||$. Sin embargo, podría darse el caso de que la desigualdad previa se invierta para una NUI diferente.

El corolario que sigue muestra que los duales óptimos con restricciones de norma del Teorema 5.1.2 minimizan la distancia a los marcos ajustados con respecto a todas las normas unitariamente invariantes, proporcionando así una ilustración simple e intuitiva del hecho de que tales duales óptimos minimizan la dispersión de sus correspondientes operadores de marco de un modo estructural.

Corolario 5.1.5. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{W}^\perp\oplus\mathcal{V}=\mathcal{H}$ y sea $d=\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}$. Sea $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ un marco para $\mathcal{W}$, sea $\mathcal{G}=\{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}\in\mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ y definimos $t:=\sum_{i\in\mathbb{I}_n}\|g_i\|^2$. Si $\mathcal{G}^{\rm op}\in\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$ es como en el Teorema 5.1.2 entonces, para cada NUI $|||\cdot|||$ en $L(\mathcal{V})$ tenemos que

$$|||\,(S_{\mathcal{G}^{\rm op}})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V}\,|||\le|||\,(S_\mathcal{G})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V}\,|||\qquad\text{para cada}\qquad c>0\ . \tag{5.5}$$

En particular, $\Theta(|||\cdot|||\,,\mathcal{G}^{\rm op})\le\Theta(|||\cdot|||\,,\mathcal{G})$ para toda NUI $|||\cdot|||$.

Demostración. Fijemos $\mathcal{G}\in\mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$. De la definición de t se sigue que $\mathcal{G}\in\mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(\mathcal{F})$. Así, por el Teorema 5.1.2 tenemos que

$$P_h(\mathcal{G}^{\rm op})=\sum_{i\in\mathbb{I}_d}h(\lambda_i(S_{\mathcal{G}^{\rm op}}))=\mathrm{tr}\,(h(S_{\mathcal{G}^{\rm op}}))\le P_h(\mathcal{G})=\sum_{i\in\mathbb{I}_d}h(\lambda_i(S_\mathcal{G}))=\mathrm{tr}\,(h(S_\mathcal{G}))$$

para cualquier $h\in\mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\ge0})$ no-decreciente. Luego por el Teorema 1.4.3 (ver Sección 1.4.1) tenemos que

$$(\lambda_j(S_{\mathcal{G}^{\rm op}}))_{j\in\mathbb{I}_d}\prec_w(\lambda_j(S_\mathcal{G}))_{j\in\mathbb{I}_d}.$$

Por otra parte, como $\mathrm{tr}\,(S_{\mathcal{G}^{\rm op}})=t=\sum_{i\in\mathbb{I}_n}\|g_i\|^2=\mathrm{tr}\,(S_\mathcal{G})$, la relación de mayorización $\lambda(S_{\mathcal{G}^{\rm op}})\prec\lambda(S_\mathcal{G})$ se satisfacen en este caso. A partir del Teorema 1.4.2 tenemos que para cualquier función $h\in\mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\ge0})$ (ver Sección 1.4.1)

$$(\,h(\lambda_j(S_{\mathcal{G}^{\rm op}}))\,)_{j\in\mathbb{I}_d}\prec_w(\,h(\lambda_j(S_\mathcal{G}))\,)_{j\in\mathbb{I}_d}\,. \tag{5.6}$$

Si $\sigma(T)=(\sigma_j(T))_{k\in\mathbb{I}_d}$ denota el vector de valores singulares de $T\in L(\mathcal{V})$ entonces, tenemos que

$$\sigma((S_\mathcal{G})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V})=(|\lambda_j(S_\mathcal{G})-c|)^\downarrow_{j\in\mathbb{I}_d}\quad\text{and}\quad\sigma((S_{\mathcal{G}^{\rm op}})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V})=(|\lambda_j(S_{\mathcal{G}^{\rm op}})-c|)^\downarrow_{j\in\mathbb{I}_d}\,.$$

Por lo tanto, si elegimos $h(t)=|t-c|$ para $t\in\mathbb{R}_{\ge0}$ entonces $h\in\mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\ge0})$ y Eq. (5.6) implica que

$$\sigma((S_\mathcal{G})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V})\prec_w\sigma((S_{\mathcal{G}^{\rm op}})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V})\implies|||\,(S_{\mathcal{G}^{\rm op}})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V}\,|||\le|||\,(S_\mathcal{G})_\mathcal{V}-c\,I_\mathcal{V}\,|||\,,$$

donde hemos usado el principio de dominación de Ky-Fan (ver Teorema 1.4.6). De esta manera, se verifica la Eq. (5.5) y el corolario se prueba a partir de este hecho. □

Cabe destacar, que además de su interpretación simple, el Corolario 5.1.5 muestra una importante característica de $\mathcal{G}^{\rm op}$, que es la estabilidad numérica del esquema de codificación - decodificación basado en el par dual oblicuo $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ mejorado por el esquema inducido por $(\mathcal{F},\mathcal{G}^{\rm op})$.

5.1.3. Par $(\mathcal{V},\mathcal{W})-$dual oblicuo óptimo con parámetros predeterminados

Se sabe que la posición relativa de los subespacios $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ juega un papel importante cuando comparamos dualidad oblicua con dualidad clásica. En esta Sección damos una descripción detallada del roll de la geometría relativa de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ en dimensión finita.

Comenzamos fijando las siguientes notaciones:

Notación 5.1.6. En lo que resta de esta sección, vamos a considerar:

1. $\mathcal{V},\mathcal{W}\subset\mathcal{H}$ dos subespacios de dimensión finita tales que $\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}^\perp=\mathcal{H}$.

2. $\angle(\mathcal{V};\mathcal{W})=(\theta_j)_{j\in\mathbb{I}_d}\in([0,\pi/2)^d)^\uparrow$ ángulos principales, donde $d=\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}$ (Ver Eq. (1.28) de la Sección 1.5).

3. $\{v_j\}_{j\in\mathbb{I}_d}\in\mathcal{V}^d$, $\{w_j\}_{j\in\mathbb{I}_d}\in\mathcal{W}^d$ vectores principales en $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, respectivamente, que satisfacen la Eq. (1.32).

4. $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}\in\mathcal{W}^n$ un marco para $\mathcal{W}$ con

$$\lambda(S_\mathcal{F})=\lambda=(\lambda_i)_{i\in\mathbb{M}}\quad\text{y}\quad\lambda(S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}})=\lambda^\#_\mathcal{V}=(\lambda^\#_{\mathcal{V},\,i})_{i\in\mathbb{M}}\ . \qquad\triangle$$

Consideremos las Notaciones 5.1.6. Con el fin de tener una estimación de $\lambda^\#_\mathcal{V}$ notemos que

$$\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}=P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\cdot\mathcal{F}^\#\implies T_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}=P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\,S^\dagger_\mathcal{F}\,T_\mathcal{F}$$

y por lo tanto

$$S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}=P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\,S^\dagger_\mathcal{F}\,(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp})^*=P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\,S^\dagger_\mathcal{F}\,P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\ . \tag{5.7}$$

La observación previa, junto con las desigualdades de Lidskii multiplicativas (ver Teorema 1.4.9), nos permiten obtener las siguientes cotas en término de la estructura espectral de $S_\mathcal{F}$ y los ángulos principales (i.e. la geometría relativa) entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$. Mostramos que las cotas, dadas en el siguiente resultado, son una medida cuantitativa de como la geometría relativa de los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ impacta en la dualidad oblicua.

Teorema 5.1.7. Consideremos las Notaciones 5.1.6. Si $\mu=\big(\lambda^{-1}_{d-j+1}\,\cos^{-2}(\theta_j)\big)^\downarrow_{j\in\mathbb{I}_d}$ entonces

$$\prod_{j\in\mathbb{I}_k}\mu_j\le\prod_{j\in\mathbb{I}_k}\lambda^\#_{\mathcal{V},\,j}\le\left(\prod_{j=d-k+1}^{d}\lambda_j\,\cos^2(\theta_j)\right)^{-1}\ ,\quad k\in\mathbb{I}_d\ . \tag{5.8}$$

Más aún, $\lambda^\#_\mathcal{V}=\mu$ (resp. $\lambda^\#_\mathcal{V}=\big(\lambda^{-1}_{d-j+1}\cos^{-2}(\theta_{d-j+1})\big)_{j\in\mathbb{I}_d}$) si y sólo si existe una BON en $\mathcal{W}$ de vectores principales $\{w_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ tal que

$$S_\mathcal{F}=\sum_{j\in\mathbb{I}_d}\lambda_{d-j+1}(S_\mathcal{F})\ w_i\otimes w_i$$

(resp. $S_\mathcal{F}=\sum_{j\in\mathbb{I}_d}\lambda_j(S_\mathcal{F})\ w_i\otimes w_i$).

Demostración. Consideremos la representación de $S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}}$ dada en la Eq. (5.7). Sea $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}} = V\,M$ la descomposición polar (DP), donde $M = |P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}}|$. Notemos que $R(M) = \mathcal{W}$, por lo tanto, M restringido a $\mathcal{W}$ es inversible (i.e. $\mathcal{W}$ reduce a M). Por otro lado, como $R(S_{\mathcal{F}^{\#}}) = \mathcal{W}$ entonces la restricción de $S_{\mathcal{F}^{\#}} = S_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ a $\mathcal{W}$ es también inversible (i.e. $\mathcal{W}$ reduce a $S_{\mathcal{F}^{\#}}$). De esta forma, la Eq. (5.7) implica que

$$S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}} = V\,(\,M\,S_{\mathcal{F}}^{\dagger}\,M\,)\;V^{*}. \tag{5.9}$$

Como Ves una isometría parcial con espacio inicial $\mathcal{W}$ y espacio final $\mathcal{V}$, de la Eq. (5.9) se sigue que

$$\lambda(S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}}) = \big(\,\lambda\left(M_{\mathcal{W}}\,(\,S_{\mathcal{F}}^{\dagger}\,)_{\mathcal{W}}\;M_{\mathcal{W}}\right)\,,\,0_{|\mathbb{M}|-d}\,\big)\;, \tag{5.10}$$

donde, en general, $S_{\mathcal{W}} \in L(\mathcal{W})$ denota la restricción de S al subespacios $\mathcal{W}$, asumiendo que $\mathcal{W}$ reduce a S. Como $\lambda\big(\,(S_{\mathcal{F}}^{\dagger})_{\mathcal{W}}\,\big) = (\lambda_d^{-1},\ldots,\lambda_1^{-1})$ y $\lambda(M_{\mathcal{W}}) \overset{(1.31)}{=} (\cos(\theta_d)^{-1},\ldots,\cos(\theta_1)^{-1})$, vemos que el resultado es una consecuencia del Teorema 1.4.9 (desigualdades de Lidskii multiplicativas) y de la definición de log-mayorización. □

Considerando las Notaciones 5.1.6. El resultado anterior sugiere que podemos sacar ventaja de la posición relativa entre los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ para construir esquemas de codificación-decodificación de duales óptimos con propiedades predeterminadas. En efecto, sea $U \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$ (i.e. $\mathcal{W}$ es U-invariante). Así, consideramos el marco $U\cdot\mathcal{F} = \{U\,f_j\}_{j\in\mathbb{I}_n}$ para $\mathcal{W}$. Notemos que $U\cdot\mathcal{F}$ preserva esencialmente cada propiedad de $\mathcal{F}$ (e.g., relaciones lineales, lista de autovalores de su operador de marco, normas de los elementos del marco, etc). En particular, $(U\cdot\mathcal{F})^{\#} = U\cdot\mathcal{F}^{\#}$ ya que $S_{U\cdot\mathcal{F}} = UT_{\mathcal{F}}\,T_{\mathcal{F}}^{*}U^{*} = US_{\mathcal{F}}U^{*}$. Esto es, el marco dual canónico (clásico) de $U\cdot\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$ es la rotación por U del marco dual canónico para $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$. En particular, tenemos que $S_{(U\cdot\mathcal{F})^{\#}} = US_{\mathcal{F}^{\#}}U^{*}$. Sin embargo, $\mathcal{F}$ y $U\cdot\mathcal{F}$ pueden tener diferentes propiedades con respecto a la $\mathcal{V}$-dualidad como mostramos a continuación:

Ejemplo 5.1.8. Sea $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ y sea $\{e_1,\,e_2,\,e_3\}$ la base canónica de $\mathcal{H}$. Sean $\mathcal{V} = \overline{\{e_2,\,\frac{e_1+e_3}{\sqrt{2}}\}}$ y $\mathcal{W} = \overline{\{e_1,e_2\}}$. Notemos que en este caso tenemos que $\mathbb{C}^3 = \mathcal{V}\oplus\mathcal{W}^{\perp}$. Consideremos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{e_1;\,(\cos(\pi/3),\sin(\pi/3),0)\} \subseteq \mathcal{W}\;,\\ \mathcal{F}_2 &= \{e_2;\,(\cos(\pi/2+\pi/3),\sin(\pi/2+\pi/3),0)\} \subseteq \mathcal{W}\;.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}_2 = U\cdot\mathcal{F}_1$ donde U es la rotación por (el ángulo) $\pi/2$ en el plano $\mathcal{W}$ y tal que $Ue_3 = e_3$. Cuentas sencillas muestran que $\lambda(S_{(\mathcal{F}_1)^{\#}_{\mathcal{V}}}) = (8/3;1;0)$ y $\lambda(S_{(\mathcal{F}_2)^{\#}_{\mathcal{V}}}) = (3{,}59;0{,}74;0)$. Este último hecho muestra que no existe un operador unitario U' tal que $U'(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ y tal que $(\mathcal{F}_2)^{\#}_{\mathcal{V}} = U'(\mathcal{F}_1)^{\#}_{\mathcal{V}}$. △

El ejemplo previo muestra que las propiedades espectrales del $\mathcal{V}$- dual canónico del marco $U\cdot\mathcal{F}$ dependen de U y motiva la construcción de operadores unitarios $U\in L(\mathcal{H})$ con $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, tales que el par dual $(U\cdot\mathcal{F},(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$ induce un esquema de codificación-decodificación óptimo. Como una medida de optimalidad podemos considerar la minimización del conjunto de potenciales convexos del par entre todos los pares. Pero, como las propiedades espectrales de $U\cdot\mathcal{F}$ son independientes de U, calculamos estos operadores unitarios $U_0 \in L(\mathcal{H})$, con $U_0(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, que minimizan - para una función $h \in \text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente - el potencial convexo $P_h[(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}]$ entre todos los operadores unitarios $U \in L(\mathcal{H})$ tales que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$. Como veremos, existen soluciones estructurales para este problema. En este sentido, el Teorema 5.1.9 describe las rotaciones rígidas U_0 que dejan invariante a $\mathcal{W}$ y tales que la estructura espectral del $\mathcal{V}$-dual oblicuo canónico de $U_0\cdot\mathcal{F}$ es óptimo respecto a la log-mayorización.

Teorema 5.1.9. Considerando las Notaciones 5.1.6. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{W}^d$ una BON de $\mathcal{W}$ tal que $S_{\mathcal{F}}\,x_j = \lambda_j\,x_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$.

1. Sea $U_0 \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario tal que $U_0\, x_j = w_{d-j+1}$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$. Entonces
$$\lambda(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}) = \Big((\cos^{-2}(\theta_j)\, \lambda^{-1}_{d-j+1})^{\downarrow}_{j\in\mathbb{I}_d} \, , \, 0_{|\mathbb{M}|-d} \Big) \ . \tag{5.11}$$

2. Si $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es no-decreciente entonces
$$P_h((U_0 \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}) = \min\{P_h((U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}) : \ U \in L(\mathcal{H}) \text{ es unitario y } , \ U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}\} \ . \tag{5.12}$$

Más aún, si asumimos que $h \in \operatorname{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ y $U \cdot \mathcal{F}$ alcanza el mínimo en la Eq. (5.12) entonces existen vectores principales $\{w'_j\}_{j\in\mathbb{I}_d}$ y una BON $\{x'_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ de $\mathcal{W}$ tal que $S_{\mathcal{F}}\, x'_j = \lambda_j\, x'_j$ y $U x'_j = w'_{d-j+1}$, para $j \in \mathbb{I}_d$.

Demostración. Sea $U \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ y sea $U \cdot \mathcal{F} = \{U f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$. Entonces, notemos que
$$(U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}}\, (U \cdot \mathcal{F})^{\#} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}}\, U \cdot \mathcal{F}^{\#}$$
y por lo tanto, en general tenemos que
$$S_{(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}}\, U\, S_{\mathcal{F}^{\#}}\, U^*\, P^*_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}} \ . \tag{5.13}$$
Argumentando como en la prueba del Teorema 5.1.7 y considerando $M = |P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}}|$ (y la descomposición polar $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^{\perp}} = V\, M$), concluimos que
$$\lambda(S_{(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}) = \big(\lambda\, \Big(M_{\mathcal{W}}\, (U\, S^{\dagger}_{\mathcal{F}}\, U^*)_{\mathcal{W}}\, M_{\mathcal{W}} \Big) \, , \, 0_{|\mathbb{M}|-d} \big) \ , \tag{5.14}$$
donde en general $S_{\mathcal{W}} \in L(\mathcal{W})$ denota la restricción del operador S al subespacio reductivo $\mathcal{W}$. Usando la Eq. (1.31), si U_0 es como en el ítem 1., entonces
$$M_{\mathcal{W}} \ \ (U_0\, S^{\dagger}_{\mathcal{F}}\, U_0^*)_{\mathcal{W}}\ M_{\mathcal{W}}\ \ w_j = \cos^{-2}(\theta_j)\, \lambda^{-1}_{d-j+1}\ w_j \qquad \text{para} \qquad j \in \mathbb{I}_d \ .$$
De esta forma, el resultado previo junto a la Eq. (5.14) muestran el ítem 1.

Si $U \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, el Teorema 5.1.7 implica que
$$\prod_{j\in\mathbb{I}_k} \lambda_j(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}) \leq \prod_{j\in\mathbb{I}_k} \lambda_j(S_{(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}) \quad , \quad k \in \mathbb{I}_d \ . \tag{5.15}$$
Como se explicó en la Sección 1.4.1, la Eq. (5.15) implica la siguiente desigualdad
$$\sum_{j\in\mathbb{I}_k} \lambda_j(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}) \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_k} \lambda_j(S_{(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}) \quad , \quad k \in \mathbb{I}_d \ . \tag{5.16}$$
Si $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es no-decreciente, por la relación de submayorización en la Eq. (5.16), concluimos que
$$P_h((U_0 \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}) = \sum_{j\in\mathbb{I}_d} h(\lambda_j(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}})) \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_d} h(\lambda_j(S_{(U\cdot\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}})) = P_h((U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}) \ ,$$
y esto prueba la Eq. (5.12). Análogamente, la afirmación final del enunciado se deduce de la Eq. (5.14), del Teorema 1.4.9 y de las propiedades de log-mayorización mencionadas en la Sección 1.4.1. $\square$

Considerando las Notaciones 5.1.6, notemos que el Teorema 5.1.9 describe las rotaciones rígidas U_0 que dejan invariante a $\mathcal{W}$ y tales que la estructura espectral $\lambda((U_0 \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$ del $\mathcal{V}$-dual oblicuo canónico de $U_0 \cdot \mathcal{F}$ es óptimo respecto a la log-mayorización.

Observación 5.1.10 (Construcción de pares de subespacios en posición general con geometría relativa predeterminada)**.** Consideremos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\dim\mathcal{H}\geq 2d$. Sea $\mathcal{B}=\{e_i\}_{i\in\mathbb{M}}$ una BON de $\mathcal{H}$, donde $\mathbb{M}$ es como en la Eq. (1.1). Con el fin de describir algunos ejemplos sobre los resultados previos recordamos una construcción sencilla de un par de subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ en posición general (i.e. $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\mathcal{V}\cap\mathcal{W}^\perp=\mathcal{V}^\perp\cap\mathcal{W}=\mathcal{V}^\perp\cap\mathcal{W}^\perp=\{0\}$), $\dim\mathcal{V}=\dim\mathcal{W}=d$, con ángulos principales predeterminados y tales que $\mathcal{W}=\operatorname{Span}\{e_i:\ i\in\mathbb{I}_d\}$ (i.e. un subespacio ordenado respecto a $\mathcal{B}$). Usamos la notación $\mathcal{S}\oplus^\perp\mathcal{T}$ para la suma directa de subespacios mutuamente ortogonales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$. Si $A\in L(\mathcal{S})$ y $B\in L(\mathcal{T})$ escribimos $A\oplus^\perp B$ para notar la suma directa de operadores actuando en los subespacios mutuamente ortogonales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$.

Fijamos $0<\theta_1\leq\ldots\leq\theta_d<\pi/2$. Para cada $i\in\mathbb{I}_d$, sea $w_i=e_i$ y $v_i=\cos(\theta_i)\,e_i+\sin(\theta_i)\,e_{i+d}$. Entonces $w_i,\,v_i\in\mathcal{H}_i=\operatorname{Span}\{e_i,\,e_{i+d}\}$, para $i\in\mathbb{I}_d$; Sea $Q_i\in B(\mathcal{H}_i)$ la proyección oblicua sobre $\mathcal{V}_i=\mathbb{C}\cdot v_i$, correspondiente a la descompossición $\mathcal{V}_i\oplus(\mathcal{W}_i)^\perp=\mathcal{H}_i$, donde $\mathcal{W}_i=\mathbb{C}\cdot w_i$, para $i\in\mathbb{I}_d$. Notemos que en este caso $P_{\mathcal{W}_i}v_i=\cos(\theta_i)\,w_i$ y $P_{\mathcal{V}_i}w_i=\cos(\theta_i)\,v_i$.

Entonces, el ángulo $\angle(\mathcal{V}_i;\mathcal{W}_i)=\theta_i$ y la matriz representación de Q_i y su módulo $|Q_i|$ con respecto a $\mathcal{B}_i=\{e_i,e_{i+d}\}$ (la BON de $\mathcal{H}_i$) están dados por

$$[Q_i]_{\mathcal{B}_i}=\begin{pmatrix}1&0\\ \tan\theta_i&0\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad[\ |Q_i|\ ]_{\mathcal{B}_i}=\begin{pmatrix}1/\cos(\theta_i)&0\\0&0\end{pmatrix},\tag{5.17}$$

respectivamente, para cada $i\in\mathbb{I}_d$.

Por construcción $\mathcal{H}_i\perp\mathcal{H}_j$ para $i,\,j\in\mathbb{I}_d$, $i\neq j$. Por lo tanto, si tenemos $\mathcal{V}=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}\mathcal{V}_i$ y $\mathcal{W}=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}\mathcal{W}_i=\operatorname{Span}\{e_i:\ i\in\mathbb{I}_d\}$ entonces

1. $\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}^\perp=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}(\mathcal{V}_i\oplus\mathcal{W}_i^\perp)\oplus^\perp\mathcal{Z}=\mathcal{H}$, donde $Z=\{e_i:\ i\in\mathbb{I}_{2d}\}^\perp$;
2. $P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}Q_i\oplus^\perp 0$, donde $0\in B(\mathcal{Z})$.
3. Análogamente, $|P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}|Q_i|\oplus^\perp 0$, donde $0\in B(\mathcal{Z})$.
4. $P_\mathcal{W}=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}P_{\mathcal{W}_i}\oplus^\perp 0$ y $P_\mathcal{V}=\oplus^\perp_{i\in\mathbb{I}_d}P_{\mathcal{V}_i}\oplus^\perp 0$, donde $0\in B(\mathcal{Z})$.

Los hechos anteriores nos permiten concluir que $\angle(\mathcal{V};\mathcal{W})=(\theta_i)_{i\in\mathbb{I}_d}$ y que $\{w_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ y $\{v_i\}_{i\in\mathbb{I}_d}$ son direcciones principales en $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, que verifican la Eq. (1.32) (como en las Notaciones 5.1.6). Finalmente, resaltamos que la Eq. (5.17) implica las siguientes representaciones en bloque

$$[P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}]_\mathcal{B}=\begin{pmatrix}I_d&0&0\\D_t&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad[\,|P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|\,]_\mathcal{B}=\begin{pmatrix}D_c&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donde $I_d,\,D_t,\,D_c\in\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ y $D_t\,,D_c$ son matrices diagonales, cuyas diagonales principales son $(\tan(\theta_i))_{i\in\mathbb{I}_d}$ y $(1/\cos(\theta_i))_{i\in\mathbb{I}_d}$, respectivamente. $\triangle$

Ejemplo 5.1.11. La Observación 5.1.10 permite construir ejemplos relacionados a los resultados obtenidos hasta el momento, mostrando que esencialmente todos los casos son posibles. En efecto, fijamos $d\geq 1$ y $0<\theta_1\leq\ldots\leq\theta_d<\pi/2$. Sea $p\geq 2d$ y $\mathcal{H}=\mathbb{C}^p$; sea $\mathcal{B}=\{e_i\}_{i\in\mathbb{I}_p}$ la BON canónica de $\mathbb{C}^p$. Aplicando la construcción descripta en la Observación 5.1.10 obtenemos los subespacios $\mathcal{W}=\operatorname{Span}\{e_i:\ i\in\mathbb{I}_d\}$ y $\mathcal{V}$ en $\mathbb{C}^p$ con geometría relativa predeterminada por $(\theta_i)_{i\in\mathbb{I}_d}$.

Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ un marco para $\mathcal{W}$ y con $(S_\mathcal{F})_\mathcal{W}$ denotamos a la compresión del operador de marco de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{W}$. Argumentando como en la prueba del Teorema 5.1.7 (ver Eq. (5.10)) vemos que

$$\lambda(S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}) = (\lambda(D_c\ [(S_\mathcal{F})_\mathcal{W}]^{-1}_{\mathcal{B}_\mathcal{W}}\ D_c), 0_{p-d})\,,$$

donde $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{e_i :\ i \in \mathbb{I}_d\}$ es la BON de $\mathcal{W}$ formada por las direcciones principales de $\mathcal{W}$, que satisface (1.32), y $D_c \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ es la matriz diagonal con diagonal principal $(1/\cos(\theta_i))_{i\in\mathbb{I}_d}$; hemos usado que, con las notaciones de la prueba del Teorema 5.1.7, $[M]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = D_c$ (ver el comentario final de la Observación 5.1.10).

Podemos considerar $\mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^p$ via $x \mapsto (x, 0_{p-d})$ y por lo tanto $\mathbb{C}^d = \mathcal{W}$ bajo esta convención. Adoptamos esto, con el fin de evitar escribir la cola de 0's en los vectores. En efecto, consideramos $d = 4$, $n = 8$ y fijamos $p \geq 2 \cdot d$; sea $\theta_i = i/10\,\pi$ para $i \in \mathbb{I}_4$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_8}$ un marco para $\mathcal{W} = \mathbb{C}^4$ donde f_i es la i-ésima columna de la matriz T dada por

$$T = \begin{pmatrix} -0{,}8923 & 0{,}7793 & -0{,}2450 & -1{,}2525 & 0{,}8375 & 0{,}6204 & 1{,}8390 & 1{,}0051 \\ -1{,}8153 & -0{,}7316 & -0{,}4738 & -0{,}0409 & 1{,}0187 & -1{,}3496 & -0{,}6385 & -0{,}9796 \\ -1{,}6115 & 1{,}8009 & 1{,}0621 & -0{,}2177 & -0{,}8959 & -1{,}5240 & 0{,}3411 & 0{,}0238 \\ 1{,}2938 & -1{,}8622 & 1{,}1808 & 0{,}5853 & 0{,}7188 & -0{,}0065 & -1{,}1048 & 0{,}7963 \end{pmatrix}.$$

En este caso, los autovalores de $S_\mathcal{F}^{-1}$ y $S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}$ están dados, respectivamente, por

$$\lambda((S_\mathcal{F}^{-1})_\mathcal{W}) = (0{,}2959, 0{,}1717, 0{,}1033, 0{,}0574)\ ,\ \ \lambda((S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}})_\mathcal{V}) = (2{,}1984, 0{,}3424, 0{,}1697, 0{,}1208)\,.$$

La matriz representación de la compresión $(U_0)_\mathcal{W}$ de la rotación óptima como en el Teorema 5.1.9 con respecto a $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{e_1\}_{i\in\mathbb{I}_4}$ está dada por

$$[(U_0)_\mathcal{W}]_{\mathcal{B}_\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 0{,}4804 & 0{,}0480 & 0{,}4424 & 0{,}7558 \\ 0{,}5244 & 0{,}6397 & -0{,}5601 & -0{,}0461 \\ 0{,}5660 & -0{,}7505 & -0{,}3167 & -0{,}1267 \\ -0{,}4169 & -0{,}1590 & -0{,}6247 & 0{,}6408 \end{pmatrix}.$$

Más aún, el espectro del operador de marco de $(U_0 \cdot \mathcal{F})^\#_\mathcal{V}$ es

$$\lambda((S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}})_\mathcal{V}) = (0{,}3111,\ 0{,}2122,\ 0{,}1858,\ 0{,}1758)\,.$$

Notemos que los números de condición de $(S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}})_\mathcal{V}$ y $(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}})_\mathcal{V}$ son (aproximadamente) 18,2 y 1,8, respectivamente. Por otra parte, si consideramos la norma espectral $\|\cdot\|$ (como una NUI) entonces la distancia a los ajustados (ver Definición 5.1.3) de los marcos duales oblicuos canónicos son

$$\Theta(\|\cdot\|\,, \mathcal{F}^\#_\mathcal{V}) \approx 1{,}04 \quad \text{and} \quad \Theta(\|\cdot\|\,, (U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}) \approx 0{,}14\,.$$

Por lo tanto, las propiedades espectrales de $\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}$ son mejoradas por $(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}$, que se obtiene mediante la rotación de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$ conforme a U_0. △

Consideremos las Notaciones 5.1.6. Para una rotación rígida fija U que deja invariante a $\mathcal{W}$ y para un $t \geq \operatorname{tr}\left(S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right)$ fijo, el Teorema 5.1.2 describe la estructura espectral $\lambda^\#_{\mathcal{V},\,t}(U\cdot\mathcal{F})$ de los $\mathcal{V}$-duales oblicuos $\mathcal{G}^{\rm op}_t(U) \in \mathcal{D}_t(U\cdot\mathcal{F})$ que minimizan simultaneamente cada potencial convexo en el conjunto $\mathcal{D}_t(U\cdot\mathcal{F})$. Es natural preguntarse si siempre la estructura espectral $\lambda^\#_{\mathcal{V},\,t}(U_0\cdot\mathcal{F})$ de $\mathcal{G}^{\rm op}_t(U_0)$ (dual óptimo con restricciones de traza basada en una rotación rígida óptima de $\mathcal{F}$) tiene alguna propiedad de optimalidad. Para poder abordar este problema, consideramos los siguientes resultados.

Lema 5.1.12. Sean $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_d}$, $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$, sea $m \leq 0$ un entero y asumamos que $\lambda \prec_w \mu$. Si consideramos a $\nu_{\lambda\,,\,m}(t)$ y a $\nu_{\mu\,,\,m}(t)$ como en la Observación 5.1.1 (basados en λ y en μ, respectivamente) para algún $t \geq \operatorname{tr}(\mu)$ $(\geq \operatorname{tr}(\lambda))$, tenemos que $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) \prec \nu_{\mu\,,\,m}(t)$.

Demostración. Recordemos que por construcción $\operatorname{tr}(\nu_{\lambda\,,\,m}(t)) = \operatorname{tr}(\nu_{\mu\,,\,m}(t)) = t$. Por lo tanto, el caso $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) = \frac{t}{d}\cdot \mathbb{1}$ del resultado se deduce por la conocida relación $\frac{t}{d}\cdot\mathbb{1} \prec \rho$ para cada $\rho \in \mathbb{R}^d$, tal que $\operatorname{tr}(\rho) = t$. En cualquier otro caso (ver la Observación 5.1.1), existe $1 \leq r \leq d-1$ tal que

$$\nu_{\lambda\,,\,m}(t) = (\lambda_1\,,\,\dots\,,\,\lambda_r\,,\,c\cdot\mathbb{1}_{d-r}) \quad \text{con} \quad c \leq \lambda_r\ .$$

Por otro lado, podemos escribir $\nu_{\mu\,,\,m}(t) = (\alpha\,,\,\beta) \in (\mathbb{R}^d_{\geq 0})^\downarrow$ donde

$$\alpha = (\mu_i + (c' - \mu_i)^+)_{i=1}^r \in (\mathbb{R}^r_{\geq 0})^\downarrow \quad \text{y} \quad \beta = (\mu_i + (c'-\mu_i)^+)_{i=r+1}^d \in (\mathbb{R}^{d-r}_{\geq 0})^\downarrow\ .$$

Así, para cada $k \in \mathbb{I}_r$ tenemos que

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_k}\lambda_i \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_k}\mu_i \leq \sum_{i\in\mathbb{I}_k}(\mu_i + (c'-\mu_i)^+) \implies (\lambda_i)_{i\in\mathbb{I}_r} \prec_w \alpha\ ,$$

en la primera desigualdad hemos usado que $\lambda \prec_w \mu$. Por [47, Lemma 5.6] concluimos que $\nu_{\lambda\,,\,m}(t) \prec_w \nu_{\mu\,,\,m}(t)$. Finalmente el resultado se deduce a partir de la igualdad $\operatorname{tr}(\nu_{\lambda\,,\,m}(t)) = \operatorname{tr}(\nu_{\mu\,,\,m}(t))$. □

Teorema 5.1.13. Consideramos las Notaciones 5.1.6 y asumimos que $n \geq 2d$ (i.e. $2d - n \leq 0$). Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{W}^d$ una BON de autovectores para $S_\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$, i.e. tal que $S_\mathcal{F}\, x_j = \lambda_j\, x_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$. Sea $U_0 \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario tal que $U_0\, x_j = w_{d-j+1}$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$. Entonces,

1. Si $U \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, entonces $\operatorname{tr}\left(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right) \leq \operatorname{tr}\left(S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right)$.

2. Si $t \geq \operatorname{tr}\left(S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right)$ y considerando $\mathcal{G}^{\rm op}_t(U) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(U\cdot\mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{G}^{\rm op}_t(U_0) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},\,t}(U_0\cdot\mathcal{F})$) el dual óptimo, como en el Teorema 5.1.2, entonces para cada $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$

$$P_h(\mathcal{G}^{\rm op}_t(U_0)) \leq P_h(\mathcal{G}^{\rm op}_t(U))\ . \tag{5.18}$$

Demostración. Como se explicó en la prueba del Teorema 5.1.9, si U y U_0 son como arriba, entonces se verifica la Eq. (5.16). En este caso

$$\operatorname{tr}\left(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right) = \sum_{j\in\mathbb{I}_d}\lambda_j(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}) \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_d}\lambda_j(S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}) = \operatorname{tr}\left(S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right)\ ,$$

lo cual muestra el ítem 1. Por otro lado, si $t \geq \operatorname{tr}\left(S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right) \geq \operatorname{tr}\left(S_{(U_0\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\right)$ entonces la Eq. (5.16) junto con el Lema 5.1.12 y el Teorema 5.1.2 (notar que en este caso $m = 2d - n \leq 0$) implican que

$$\sum_{j\in\mathbb{I}_k}\lambda_j(S_{\mathcal{G}^{\rm op}_t(U_0)}) \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_k}\lambda_j(S_{\mathcal{G}^{\rm op}_t(U)}) \quad , \quad k \in \mathbb{I}_d\ .$$

Por lo tanto, la Eq. (5.18) se deduce de las propiedades de mayorización, descriptas en la Sección 1.4.1 y de la Definición 3.3. □

5.2. Duales oblicuos SG óptimos con restricciones de norma

Consideremos $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos FSIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = L^2(\mathbb{R}^k)$ y $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$.

En la Sección 4.2 hemos descripto la estructura espectral fina de los elementos de $\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$, y como consecuencia hemos mostrado que el $\mathcal{V}-$dual canónico SG es óptimo respecto a ciertos criterios. Sin embargo, en determinadas situaciones aplicadas, el $\mathcal{V}-$dual canónico SG puede no ser la mejor elección: por ejemplo, nos puede interesar los duales oblicuos SG de $E(\mathcal{F})$ tales que los espectros de sus operadores de marco estén lo más concentrado posible. Idealmente, queremos buscar marcos duales oblicuos SG ajustados para $E(\mathcal{F})$, aunque el Corolario 4.2.5 muestra que hay restricciones para la existencia de tales duales.

Con el fin de buscar $\mathcal{V}$-duales alternativos que son espectralmente más estables, procedemos de la siguiente manera: para $w \ge \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|f^{\#}_{\mathcal{V},i}\|^2$, donde $E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}} = \{T_\ell\, f^{\#}_{\mathcal{V},i}\}_{(\ell,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n}$, consideramos

$$\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(E(\mathcal{F})) \overset{\text{def}}{=} \Big\{E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) :\ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \ \text{ y } \ \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 \ge w\Big\} \ .$$

Notemos que si $w > \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|f^{\#}_{\mathcal{V},i}\|^2$ entonces $E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}} \notin \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ y por lo tanto, es natural preguntarse si existe un dual óptimo que cumpla con los requisitos anteriores. Usando la identidad

$$\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 = \int_{\mathbb{T}^k} \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|\Gamma g_i(x)\|^2 \, dx = \int_{\mathbb{T}^k} \operatorname{tr}\big([S_{E(\mathcal{G})}]_x\big) \, dx = \int_{\mathbb{T}^k} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_i(x)\, dx \tag{5.19}$$

donde $\lambda(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_x) = (\mu_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp., hemos visto que el Teorema 4.1.6 da una solución completa al problema de diseño de marco en el sentido que permite obtener una descripción completa de la lista de autovalores de los operadores de marco de los elementos en $\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$. Entonces, es natural buscar aquellos duales oblicuos SG $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ que minimizan los potenciales convexos $P^{\mathcal{V}}_{\varphi}$, para $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\ge 0})$; para esto usamos la construcción del water-filling en término de submayorización, en el contexto general de espacios de medida desarrollada en la Sección 3.2 (en particular ver Teorema 3.2.5). A continuación aplicamos los resultados de la Sección 3.2 junto a las propiedades de submayorización (ver Sección 1.4.1) para concluir que existen duales oblicuos SG óptimos estructurales con restricciones de norma. Estas soluciones óptimas se obtienen en términos del water-filling no-conmutativo.

Teorema 5.2.1 (Duales óptimos en $\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$)**.** Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ FSIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = L^2(\mathbb{R}^k)$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$ y $w > \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|f^{\#}_{\mathcal{V},i}\|^2$, donde $E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}} = \{T_\ell\, f^{\#}_{\mathcal{V},i}\}_{(\ell,i)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{I}_n}$. Entonces, existe $\mathcal{G}^{\rm op} = \{g^{\rm op}_i\}_{i\in\mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n$ tal que:

1. $E(\mathcal{G}^{\rm op}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ y $\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g^{\rm op}_i\|^2 = w$.

2. Para cada $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ y cada función $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\ge 0})$ no-decreciente, tenemos que
$$P^{\mathcal{V}}_{\varphi}(E(\mathcal{G}^{\rm op})) \le P^{\mathcal{V}}_{\varphi}(E(\mathcal{G})) \ .$$

Demostración. Sea $d(x) = \dim J_{\mathcal{V}}(x) = \dim J_{\mathcal{W}}(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$, ctp. Para cada $i \in \mathbb{I}_n$, sea $X_i = d^{-1}(i) \subseteq \mathbb{T}^k$, $p_i = |X_i|$ (la medida de Lebesgue de X_i) y $r_i = \min\{n - i,\, i\}$. Como $E(\mathcal{F})$ es un marco para $\mathcal{W}$ entonces $\operatorname{Spec}(\mathcal{V}) = \operatorname{Spec}(\mathcal{W}) = \bigcup_{i\in\mathbb{I}_n} X_i$. Además, para $j \in \mathbb{I}_{r_i}$ y para $i \in \mathbb{I}_n$ consideramos el espacio de medida $(X_{ij}, \mathcal{X}_{ij}, |\cdot|_{ij})$, donde $X_{ij} = X_i$, $\mathcal{X}_{ij} = \mathcal{X}_i$ denota la σ-álgebra de conjuntos de Borel en X_i

y $|\cdot|_{ij} = |\cdot|_i$ denota la medida de Lebesgue de X_i. Luego, usando la Observación 3.1.5, construimos el espacio de medida

$$(Y, \mathcal{Y}, \nu) = \bigoplus_{i\in\mathbb{I}_n} \bigoplus_{j\in\mathbb{I}_{r_i}} (X_{ij}, \mathcal{Y}_{ij}, |\cdot|_{ij}).$$

En particular, $\nu(Y) = \sum_{i\in\mathbb{I}_n} r_i \cdot p_i$. También consideramos las funciones de inclusión canónicas $\eta_{i,j} : X_{i,j} \to Y$ para $j \in \mathbb{I}_{r_i}$ y para $i \in \mathbb{I}_n$.

Sea $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$. Por la Proposición 4.2.3, $S_{E(\mathcal{G})} = S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}} + B = A + B$, para algún $B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ SP, tal que $R(B) \subset \mathcal{V}$ y $\operatorname{rk}([B]_x) \leq n - d(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Sea $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$, por el Teorema 1.4.8 (versión aditiva del Teorema de Lidskii) tenemos que

$$\Big(\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big) + \lambda_j([B]_x)\Big)_{j\in\mathbb{I}_i} \prec \Big(\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{G})}]_x\big)\Big)_{j\in\mathbb{I}_i}, \tag{5.20}$$

mientras que $\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{G})})]_x\big) = 0$ para $j \geq i+1$. Notemos que $R([B]_x) \subset J_\mathcal{V}(x)$ y $\operatorname{rk}([B]_x) \leq n - i$. Por lo tanto $\operatorname{rk}([B]_x) \leq \min\{n-i,\, i\} = r_i$. Así, para $x \in X_i$ tenemos que

$$\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}})]_x\big) + \lambda_j([B]_x) = \begin{cases} \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big) + \lambda_j([B]_x) & \text{si} \quad 1 \leq j \leq r_i\,; \\ \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big) & \text{si} \quad r_i + 1 \leq j \leq i\,. \end{cases} \tag{5.21}$$

Ahora, la Eq. (5.20) junto con la Eq. (5.21) implican que, para cualquier $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$: si $x \in X_i$ entonces

$$\sum_{j=1}^{r_i} \varphi\Big(\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big) + \lambda_j([B]_x)\Big) + \sum_{j=r_i+1}^{i} \varphi\Big(\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big)\Big) \leq \sum_{j\in\mathbb{I}_i} \varphi\Big(\lambda_j\big([S_{E(\mathcal{G})}]_x\big)\Big)\,. \tag{5.22}$$

Consideramos las notaciones previas. Para $x \in Y$, sea $(i\,,\,j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_{r_i}$ y $\tilde{x} \in X_{i,j} = X_i$ (determinados unívocamente) tal que $\eta_{i,j}(\tilde{x}) = x$; en este caso definimos la función medible $h : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por:

$$h(x) = \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_{\tilde{x}}\big) + \lambda_j([B]_{\tilde{x}}).$$

Si $w_0 = \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|f^\#_{\mathcal{V},i}\|^2$ y asumimos que $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$, entonces usando la Eq. (5.19) vemos que

$$\int_{\mathbb{T}^k} \operatorname{tr}([B]_x)\ dx = \int_{\mathbb{T}^k} \operatorname{tr}\Big([S_{E(\mathcal{G})}]_x - [S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\Big)\ dx \geq w - w_0 \geq 0\,.$$

Consideramos ahora la función medible $f : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada como antes por $f(x) = \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_{\tilde{x}}\big)$ para $\tilde{x} \in X_{ij} = X_i$, con $(i\,,\,j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_{r_i}$ tal que $\eta_{i,j}(\tilde{x}) = x$. Argumentando como en la prueba del Teorema 3.1.7 obtenemos que

$$\int_Y f\ d\nu = \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \int_{X_i} \sum_{j\in\mathbb{I}_{r_i}} \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big)\ dx\,. \tag{5.23}$$

Por otra parte, por construcción se verifica que $h \geq f$ y

$$\int_Y h(x)\ d\nu(x) = \sum_{i\in\mathbb{I}_n} \sum_{j\in\mathbb{I}_{r_i}} \int_{X_i} (\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\big) + \lambda_j([B]_x))\ dx \geq (w - w_0) + \int_Y f(x)\ d\nu(x) \overset{\text{def}}{=} w'\,.$$

Consideremos el espacio de probabilidad $(Y, \mathcal{Y}, \tilde{\nu})$, donde $\tilde{\nu} = \nu(Y)^{-1}\,\nu$. Sea $c = c(w') \geq \inf \operatorname{esc} f$ tal que $\int_Y f_c \ d\nu = w'$ (como el de la Observación 3.2.4), donde $f_c = f + (c - f)^+$ (ver Definición 3.2.1). Por el Corolario 3.2.6 y las observaciones previas vemos que si $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ es no-decreciente, entonces

$$\int_Y \varphi \circ f_c \ d\nu \leq \int_Y \varphi \circ h \ d\nu\,. \tag{5.24}$$

Para $j \in \mathbb{I}_n$ consideramos las funciones medibles $\xi_j : \operatorname{Spec}(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}_{>0}$ definidas como sigue: para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$,

$$\xi_j(x) = \begin{cases} f_c(\eta_{ij}(x)) = \text{máx}\{c\,,\, \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big)\} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq r_i \\ \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big) & \text{si} \quad r_i + 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si} \quad i+1 \leq j \leq n \end{cases}\,, \tag{5.25}$$

Notemos que por construcción, si $\varphi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ entonces

$$\int_Y \varphi \circ f_c \ d\nu = \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \int_{X_i} \sum_{j \in \mathbb{I}_{r_i}} \varphi(\xi_j(x)) \ dx\,. \tag{5.26}$$

Usando la definición de f y las propiedades de f_c de la Observación 3.2.4, vemos que si $x \in X_i$, entonces existen $\lambda_1^{\text{op}}(x) \geq \ldots \geq \lambda_{r_i}^{\text{op}}(x) \geq 0$ tales que

$$\xi_j(x) = \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big) + \lambda_j^{\text{op}}(x) \quad \text{ para cada } \quad j \leq r_i\ . \tag{5.27}$$

Sea $\mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{T}^k \to \ell^1(\mathbb{N})^+$ tal que: $\mu_j(x) = 0$ para $j \in \mathbb{N}$ siempre que $x \in \mathbb{T}^k \setminus \operatorname{Spec}(\mathcal{V})$, mientras que para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$ se tiene que $\mu_j(x) = 0$ para $j \geq i+1$ y

$$\Big(\mu_j(x)\Big)_{j \in \mathbb{I}_i} = \Big[\big(\xi_j(x)\big)_{j \in \mathbb{I}_i}\Big]^{\downarrow}. \tag{5.28}$$

Con todas las observaciones previas vemos que $\mu = (\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ satisface las condiciones del ítem 2 en el Teorema 4.1.6. Así, existe $\mathcal{G}^{\text{op}} = \{g_i^{\text{op}}\}_{i \in \mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{G}^{\text{op}}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{SG}(\mathcal{F})$ y $\lambda(\,[S_{E(\mathcal{G}^{\text{op}})}]_x) = (\mu_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. En este caso, si consideramos la Eq. (5.19), usando las Eqs. (5.27), (5.28) y tomando $\varphi(x) = x$ en la Eq. (5.26) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \|g_i^{\text{op}}\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^k} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_j(x) \ dx = \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \int_{X_i} \left(\sum_{j \in \mathbb{I}_{r_i}} \xi_j(x) + \sum_{j=r_i+1}^{i} \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big) \right) \ dx \\ &= \int_Y f_c \ d\nu + \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \int_{X_i} \sum_{j=r_i+1}^{i} \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big) \ dx \\ &= (w - w_0) + \int_{\mathbb{T}^k} \operatorname{tr}\Big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x \Big) \ dx = w\ , \end{aligned}$$

donde también hemos utilizado la relación de la Eq. (5.23), dada antes. En particular, $\mathcal{G}^{\text{op}}$ satisface el ítem 1 del Teorema. Ahora, si $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{V},w}^{SG}(\mathcal{F})$, usando las Eqs. (5.22), (5.24), (5.25) y (5.28) tenemos,

$$\begin{aligned} P_\varphi^{\mathcal{V}}(E(\mathcal{G})) &\geq \int_Y \varphi \circ h \ d\nu + \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \int_{X_i} \sum_{j=r_i+1}^{i} \varphi \circ \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big) \ dx \\ &\geq \int_Y \varphi \circ f_c \ d\nu + \sum_{i \in \mathbb{I}_n} \int_{X_i} \sum_{j=r_i+1}^{i} \varphi \circ \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}}]_x\big) \ dx = P_\varphi^{\mathcal{V}}(E(\mathcal{G}^{\text{op}})) \end{aligned}$$

donde usamos también la Eq. (5.26) y el hecho que $\lambda([S_{E(\mathcal{G}^{\text{op}})}]_x) = \mu(x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. $\square$

Corolario 5.2.2 (Unicidad esencial del operador de marco de los $\mathcal{V}$-duales óptimos con restricciones de norma). Considerando las notaciones del Teorema 5.2.1, asumimos que $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ es tal que $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ y que existe una función $\varphi \in \mathrm{Conv_s}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente tal que

$$P^{\mathcal{V}}_{\varphi}(E(\mathcal{G}^{\mathrm{op}})) = P^{\mathcal{V}}_{\varphi}(E(\mathcal{G}))\,. \tag{5.29}$$

A partir de la Propoosición 4.2.3 sabemos que $S_{E(\mathcal{G})} = S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}} + B$, con $B \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ operador SP y $R(B) \subset \mathcal{V}$. Entonces,

1. $\sum_{i\in\mathbb{I}_n} \|g_i\|^2 = w$;
2. Existe $c > 0$ y campos medibles de vectores $v_i : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $i \in \mathbb{I}_n$ tal que $\{v_i(x)\}_{i\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ es una BON de $J_{\mathcal{V}}(x)$ para $x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{V})$ ctp.,

$$[S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x = \sum_{i\in\mathbb{I}_{d(x)}} \lambda_i([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x)\ v_i(x)\otimes v_i(x)\ , \qquad \text{para} \qquad x\in\mathrm{Spec}(\mathcal{V})\ \text{ ctp.}$$

y tal que para $x \in \mathrm{Spec}(\mathcal{V})$ ctp. tenemos que

$$[B]_x = \sum_{i=r(x)+1}^{d(x)} \big(c - \lambda_i([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x)\,\big)^+\ v_i(x)\otimes v_i(x)\ ,$$

donde $r(x) = \max\{2d(x) - n,\, 0\}$, para $x \in \mathbb{T}^k$.

La constante $c > 0$ no depende de $\mathcal{G}$. Por otra parte, en este caso $P^{\mathcal{V}}_{\psi}(E(\mathcal{G})) = P^{\mathcal{V}}_{\psi}(E(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}))$ para cada $\psi \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente.

Demostración. Usando las notaciones y nociones empleadas en la prueba del Teorema 5.2.1 y argumentando como en la parte final de la demostración de dicho Teorema, vemos que la Eq. (5.29) implica que

$$\int_Y \varphi\circ h\ d\tilde{\nu} = \int_Y \varphi\circ f_c\ d\tilde{\nu}\,,$$

donde $\tilde{\nu} = \nu(Y)^{-1}\,\nu$ es el espacio de probabilidad que se obtiene normalizando ν. Por el Corolario 3.2.6 tenemos que $h = f_c$, donde $c = c(w')$ es como el de la prueba del Teorema 5.2.1. Por lo tanto, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$, se tiene

$$\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big) + \lambda_j([B]_x) = \begin{cases} \max\{\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big),\, c\} & \text{si} \quad 1\leq j\leq r_i\,; \\ \lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big) & \text{si} \quad r_i+1\leq j\leq i\,. \end{cases} \tag{5.30}$$

Por otra parte, por la Eq. (5.22) y las propiedades de h tenemos que

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{V}}_{\varphi}(E(\mathcal{G})) &= \sum_{i\in\mathbb{I}_n}\int_{X_i}\sum_{j\in\mathbb{I}_i}\varphi\big(\lambda_j\big(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_x\big)\,\big)\ dx \\ &\geq \int_Y \varphi\circ h\ d\nu + \sum_{i\in\mathbb{I}_n}\int_{X_i}\sum_{j=r_i+1}^{i}\varphi\circ\lambda_{i-j+1}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big)\ dx = P^{\mathcal{V}}_{\varphi}(E(\mathcal{G}))\ . \end{aligned}$$

Así, debemos tener la igualdad en la Eq. (5.22) para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$ ctp. Como φ es estrictamente convexa, entonces la relación de mayorización en la Eq. (5.20) junto con el caso de igualdad en el Teorema de Lidskii aditivo (ver Teorema 1.4.8) implican que para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$ ctp, existe $\{z_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_i}$ BON de $J_{\mathcal{V}}(x)$ (no necesariamente de campos medibles de vectores como funciones de x) tal que

$$[S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x = \sum_{j\in\mathbb{I}_i} \lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big)\ z_j(x)\otimes z_j(x) \ \text{ y } \ [B]_x = \sum_{j\in\mathbb{I}_i} \lambda_{i-j+1}([B]_x)\ z_j(x)\otimes z_j(x)\,. \tag{5.31}$$

Sea $P \in L(L^2(\mathbb{R}^k))^+$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{R} = \overline{R(B)}$, tal que P es SP y $[P]_x = P_{R([B]_x)}$ para cada $x \in \mathbb{T}^k$. Sea $p : \mathbb{T}^k \to \mathbb{N}$ una función medible dada por $p(x) = \operatorname{tr}([P]_x)$ para $x \in \mathbb{T}^k$. Entonces, por inspección de las Eqs. (5.30) y (5.31) vemos que $P\,S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}} = S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}\,P$,

$$[P]_x\,[S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\,[P]_x + [B]_x = c\cdot[P]_x \qquad \text{para } x\in\mathbb{T}^k \text{ ctp.},$$

y, para $i \in \mathbb{I}_n$ y $x \in X_i$

$$[I-P]_x\,[S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\,[I-P]_x = \sum_{j=1}^{i-p(x)} \lambda_j\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big)\ z_j(x)\otimes z_j(x)\,.$$

Como $a+(c-a)^+ = \max\{a,\,c\}$ para $a,\,c\geq 0$, estos últimos hechos implican la existencia de campos medibles de vectores $v_i : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $i \in \mathbb{I}_n$ con las propiedades deseadas. En efecto, las identidadades previas muestran que solo tenemos que considerar campos medibles de autovectores de los operadores $P\,S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}\,P$ y $(I-P)\,S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}\,(I-P)$, cuya existencia se deduce del Lema 2.1.7.

Finalmente, si $\mathcal{G}^{\rm op}$ es como en el Teorema 5.2.1, una inspección cuidadosa de la prueba de dicho Teorema, muestra que

$$\lambda\big(\,[S_{E(\mathcal{G})}]_x\big) = \lambda\big(\,[S_{E(\mathcal{G}^{\rm op})}]_x\big) \qquad \text{para } x\in\operatorname{Spec}(\mathcal{V}) \text{ ctp.},$$

que implica las propiedades de optimalidad de $E(\mathcal{G})$ para $\psi \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente. $\square$

Con las notaciones del Corolario 5.2.2, vemos que para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. tenemos

$$[S_{E(\mathcal{G}^{\rm op})}]_x = \sum_{i=1}^{r(x)} \lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big)\ v_i(x)\otimes v_i(x) + \sum_{i=r(x)+1}^{d(x)} \max\{\lambda_i\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big),\,c\}\ v_i(x)\otimes v_i(x)\,,$$

donde podemos usar que $a+(c-a)^+ = \max\{a,\,c\}$ para $a,\,c \geq 0$. En particular, notar que

$$\lambda_{d(x)}\big([S_{E(\mathcal{G}^{\rm op})}]_x\big) \geq \max\{c\,,\,\lambda_{d(x)}\big([S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x\big)\},$$

implica que el número de condición de $[S_{E(\mathcal{G}^{\rm op})}]_x$ es menor o igual que el número de condición de $[S_{E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}}]_x$ - ambos actuando sobre $J_{\mathcal{V}}(x)$ - para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Esto es, el dual oblicuo SG óptimo $E(\mathcal{G}^{\rm op})$ mejora la estabilidad (espectral) del dual oblicuo SG canónico $E(\mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}} = E(\mathcal{F}^\#_{\mathcal{V}})$.

La representación de $[S_{E(\mathcal{G}^{\rm op})}]_x$, dada anteriormente, motiva la siguiente construcción, que también caracteriza a todos los elementos de $\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ que son mínimos en el sentido del Teorema 5.2.1.

Definición 5.2.3 (*Water-filling* no-conmutativo a nivel c en $U_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{G})\,)$)**.** Sea $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{G})$ es un marco para $\mathcal{V}$ con operador de marco $S_{E(\mathcal{G})}$. Por el Lema 2.1.7 podemos considerar campos medibles de vectores $v_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $j \in \mathbb{I}_n$ tal que

$$[S_{E(\mathcal{G})}]_x = \sum_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}} \lambda_j\big([S_{E(\mathcal{G})}]_x\big)\ v_j(x)\otimes v_j(x), \qquad \text{para} \qquad x\in\mathbb{T}^k\text{ctp.}, \tag{5.32}$$

es una representación espectral de $[S_{E(\mathcal{G})}]_x$ y $\{v_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ es una BON de $J_\mathcal{V}(x)$, $(d(x)=\dim J_\mathcal{V}(x)\leq n)$.

Dado $c\geq 0$ definimos el *water-filling* (no-conmutativo) de $S_{E(\mathcal{G})}$ a nivel c respecto a la representación de la Eq. (5.32), notado $(S_{E(\mathcal{G})})_c\in U_\mathcal{V}(E(\mathcal{G}))$, como el único operador positivo SP tal que $R\big((S_{E(\mathcal{G})})_c\big)\subset\mathcal{V}$ y

$$\Big[\big(S_{E(\mathcal{G})}\big)_c\Big]_x=\sum_{i\in\mathbb{I}_{r(x)}}\lambda_i\big([S_{E(\mathcal{G})}]_x\big)\ v_i(x)\otimes v_i(x)+\sum_{i=r(x)+1}^{d(x)}\text{máx}\{\lambda_i\big([S_{E(\mathcal{G})}]_x\big),\,c\}\ v_i(x)\otimes v_i(x)\qquad(5.33)$$

donde $r(x)=\text{máx}\{2d(x)-n,0\}$ (recordar que $\mathbb{I}_0=\emptyset$) para $x\in\mathbb{T}^k$ ctp. $\triangle$

Observación 5.2.4. Considerando las notaciones de la Definición 5.2.3:

1. Notemos que $\Big[\big(S_{E(\mathcal{G})}\big)_c\Big]_x$ como se describió en la Eq. (5.33) es un campo medible bien definido de operadores semi-definidos positivos que están esencialmente acotados.

2. Observemos que en la representación espectral de $\Big[\big(S_{E(\mathcal{G})}\big)_c\Big]_x$ dada en la Eq. (5.33), los autovalores no están necesariamente dispuestos en orden no-creciente.

3. Finalmente, notemos que $\big(S_{E(\mathcal{G})}\big)_c\in U_\mathcal{V}(E(\mathcal{G}))$, pues $\Big[\big(S_{E(\mathcal{G})}\big)_c\Big]_x-[S_{E(\mathcal{G})}]_x$ es un operador positivo con rango a lo sumo $d(x)-r(x)\leq n-d(x)$, para $x\in\mathbb{T}^k$, ctp. $\triangle$

Finalizamos la Sección con los siguientes comentarios: con las ideas y notaciones del Teorema 5.2.1, sea $S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}$ y consideremos campos medibles de vectores $v_i:\mathbb{T}^k\to\ell^2(\mathbb{Z}^k)$, para $i\in\mathbb{I}_n$, tales que

$$\big[S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\big]_x=\sum_{i\in\mathbb{I}_{d(x)}}\lambda_i\Big([S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}]_x\Big)\ v_i(x)\otimes v_i(x),\qquad(5.34)$$

es una representación espectral de $\big[S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\big]_x$ respecto a $\{v_i(x)\}_{i\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ BON de autovectores, donde $d(x)=\dim(J_\mathcal{V}(x))$, para $x\in\mathbb{T}^k$ ctp. Sea $c>0$ tal que, si $\big(S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\big)_c$ es el *water-filling* de $S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}$ a nivel c respecto a la representación en la Eq. (5.34) entonces,

$$\int_{\mathbb{T}^k}\text{tr}\left(\Big[\big(S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\big)_c\Big]_x\right)\,dx=w\ .$$

Por construcción $\big(S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\big)_c\in U_\mathcal{V}(E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V})$ y por lo tanto, por la Proposición 4.2.3, existe $\mathcal{G}_0\in\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ tal que $S_{\mathcal{G}_0}=\big(S_{E(\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}\big)_c$. Como ya lo hemos notado, $\mathcal{G}^{\text{op}}$ del Teorema 5.2.1 se construye de esta manera; por lo tanto, en este caso tenemos que para cada $\varphi\in\text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente,

$$P^\mathcal{V}_\varphi(E(\mathcal{G}_0))\leq P^\mathcal{V}_\varphi(E(\mathcal{G}))\ ,\qquad\text{para cada}\qquad\mathcal{G}\in\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})\,.$$

Por otra parte, por el Corolario 5.2.2, cualquier marco con estructura óptima $\mathcal{G}\in\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ (i.e. tal que $\mathcal{G}$ es un $P^\mathcal{V}_\varphi$-mínimo en $\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ para cualquier $\varphi\in\text{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$) se obtiene de esta manera. Esto es, los marcos $\mathcal{V}$-duales SG con estructura óptima para $E(\mathcal{F})$ con restricciones de norma, son exactamente aquellos $\mathcal{G}\in\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V},w}(\mathcal{F})$ cuyos operadores de marco se construyen empleando el *water-filling* no-conmutativo, dado en la Definición 5.2.3.

5.3. Aliasing

En esta sección consideramos la llamada norma *aliasing* correspondiente al muestreo asociado a los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$. La norma aliasing mide la incidencia del complemento ortogonal de $\mathcal{W}$ en la reconstrucción consistente $f \mapsto \tilde{f} = Qf$, donde Q denota la proyección oblicua sobre $\mathcal{W}$ a lo largo de $\mathcal{V}^\perp$ (ver [29, 39]). Se sabe que la norma aliasing puede acotarse en términos del ángulo entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ (ver [61]) aunque esta cota no es óptima. Calculamos de forma exacta la norma aliasing del muestreo consistente. También introducimos la noción de aliasing para pares duales oblicuos $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ que mide la incidencia del complemento ortogonal de $\mathcal{W}$ en el esquema (consistente) de codificación-decodificación correspondiente a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. En este contexto calculamos las rotaciones rígidas óptimas U_0 que minimizan el aliasing de los pares duales $(U \cdot \mathcal{F}, (U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}})$ para el marco fijo $\mathcal{F}$.

5.3.1. Aliasing en dualidad oblicua

Sean $\mathcal{W}, \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ subespacios cerrados tales que $\mathcal{V}^\perp \oplus \mathcal{W} = \mathcal{H}$ (o equivalentemente $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{V} = \mathcal{H}$). Recordemos que en este contexto la norma aliasing asociada al muestreo consistente

$$f \mapsto \tilde{f} = P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} f \quad , \quad f \in \mathcal{H} \tag{5.35}$$

(ver [29, 39]) está dada por

$$A(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = \sup_{e \in \mathcal{W}^\perp \setminus \{0\}} \frac{\|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\, e\|}{\|e\|} = \|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\| \ . \tag{5.36}$$

Notemos que la norma aliasing mide la incidencia del complemento ortogonal de $\mathcal{W}$ en el esquema de codificación-decodificación (oblicuo) general en la Eq. (5.35) basados en estos dos subespacios. Podemos interpretar $A(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ como una medida de la cantidad de ruido que nos daría el esquema de codificación-decodificación oblicuo, cuando se muestrea una señal perturbada $f + e$ que tiene una componente $e \in \mathcal{W}^\perp$. Este fenómeno es de interés, sólo cuando $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$ (pues $A(\mathcal{W}, \mathcal{W}) = 0$).

Lema 5.3.1. Consideremos las notaciones 5.1.6. Entonces

1. $|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}}|\ v_i = \sin(\theta_i)\, v_i$ para cada $i \in \mathbb{I}_d$.
2. $|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^2\, w_i = \tan^2(\theta_i)\, w_i$ para cada $i \in \mathbb{I}_d$.

Demostración. Recordemos que con las Notaciones 5.1.6, $\{v_i\}_{i \in \mathbb{I}_d}$ es una BON de $\mathcal{V}$ tal que $|P_{\mathcal{W}}\, P_{\mathcal{V}}|\ v_i = \cos(\theta_i)\, v_i$, para $i \in \mathbb{I}_d$. En este caso,

$$|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}}|^2 = P_{\mathcal{V}} - |P_{\mathcal{W}}\, P_{\mathcal{V}}|^2 \quad \Longrightarrow \quad |P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}}|\ v_i = \sin(\theta_i)\, v_i \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{I}_d \ . \tag{5.37}$$

Para probar el ítem 2, fijemos $i \in \mathbb{I}_d$. Por la Eq. (1.32) sabemos que $P_{\mathcal{W}} P_{\mathcal{V}}\, v_i = P_{\mathcal{W}}\, v_i = \cos(\theta_i)\, w_i$. Por otro lado, recordemos de la Eq. (1.30) que

$$(P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp})^\dagger = P_{\mathcal{W}}\, P_{\mathcal{V}} \implies P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, w_i = \cos(\theta_i)^{-1}\, v_i \ , \tag{5.38}$$

como $v_i \in \mathcal{V} = (\ker P_{\mathcal{W}}\, P_{\mathcal{V}})^\perp$ y $w_i \in \mathcal{W} = R(P_{\mathcal{W}}\, P_{\mathcal{V}})$. Análogamente, obtenemos que

$$P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\, v_i \overset{(5.38)}{=} P^*_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}(\cos(\theta_i) P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} w_i) = \cos(\theta_i)\, |P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^2\, w_i \overset{(1.31)}{=} \cos(\theta_i)^{-1}\, w_i \, . \tag{5.39}$$

Por otra parte,

$$|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^2 = |P_{\mathcal{W}^\perp}\ P_{\mathcal{V}}\ P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^2 = P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\ |P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}}|^2\ P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp} \ .$$

Así, usando las observaciones previas y la Eq. (5.37) tenemos que, para cada $i \in \mathbb{I}_d$,

$$\begin{aligned} |P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^2\, w_i &\overset{(5.38)}{=} P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\ |P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}}|^2 (\cos(\theta_i)^{-1}\, v_i) \\ &\overset{(5.37)}{=} \tfrac{\sin(\theta_i)^2}{\cos(\theta_i)}\ P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\, v_i \overset{(5.39)}{=} \tan^2(\theta_i)\, w_i\ . \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. □

Consideremos las Notaciones 5.1.6, en particular asumamos que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son de dimensión finita. Así, usando que $\|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\| = \cos(\theta_d)^{-1}$ tenemos que $A(\mathcal{W},\mathcal{V}) \leq \cos(\theta_d)^{-1}$ (i.e. con las notaciones de la Observación 1.5.1 tenemos $A(\mathcal{V},\mathcal{W}) \leq \cos(\theta_{\mathcal{W},\mathcal{V}})^{-1}$, ver [61]). Sin embargo, la cota previa para $A(\mathcal{W},\mathcal{V})$ no es buena: en el caso que $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ se tiene que $A(\mathcal{W},\mathcal{W}) = 0$, pero $\cos(\theta_d)^{-1} = 1$. A continuación calculamos de forma exacta el valor de la norma aliasing. Este resultado no sólo mejora los conocidos previamente, sino que será esencial para estudiar el aliasing de pares duales y sus mínimos.

Corolario 5.3.2. Consideremos las Notaciones 5.1.6. Entonces,

$$A(\mathcal{W},\mathcal{V}) = \tan(\theta_d)\ .$$

Demostración. A partir de la definición de aliasing Eq. (5.36) y el Lema 5.3.1 tenemos que

$$A(\mathcal{W},\mathcal{V}) = \|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\| = \|\, |P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|\, \| = \max_{i\in\mathbb{I}_d} \tan(\theta_i) = \tan(\theta_d)\ .$$ □

Consideremos las Notaciones 5.1.6. Sea $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$, i.e. tal que $T_{\mathcal{F}}\, T_{\mathcal{G}}^* = P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}$. Entonces, cuando aplicamos el esquema de codificación-decodificación inducido por el par $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, el complemento ortogonal $\mathcal{W}^\perp$ también puede tener una incidencia en el proceso de muestreo. En el caso que $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$, si muestreamos la perturbación $f + e$ para $f \in \mathcal{W}$ y $e \in \mathcal{W}^\perp$ existe una perturbación correspondiente de los coeficientes $T_{\mathcal{G}}^* f$ dada por $T_{\mathcal{G}}^* e$: en este caso, la norma al cuadrado de la perturbación (energía) es $\|T_{\mathcal{G}}^* e\|^2 = \langle S_{\mathcal{G}}\, e\, ,\, e\rangle$. Así, introducimos la siguiente definición:

Definición 5.3.3. Sean $\mathcal{W}, \mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ subespacios cerrados tales que $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^\perp = \mathcal{H}$. Sean $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ y $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ marcos para $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, tales que $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$. Entonces, definimos el aliasing relativo al par dual oblicuo $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, notado $A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ dado por

$$A(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp\setminus\{0\}} \frac{\|T_{\mathcal{G}}^*\, e\|}{\|e\|} = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle\, S_{\mathcal{G}}\, e\, ,\, e\,\rangle^{1/2}}{\|e\|}\ . \qquad \triangle$$

Con las notaciones de la Definición 5.3.3, notemos que $A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ depende de $\mathcal{F}$ por el hecho de que $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$. Por definición, $A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es una medida normalizada de la incidencia relativa de $\mathcal{W}^\perp$ en el análisis de señales perturbadas en términos de $\mathcal{G}$, en el sentido que

$$\|T_{\mathcal{G}}^*\, e\| \leq A(\mathcal{F},\mathcal{G})\ \|e\|\quad ,\quad e \in \mathcal{W}^\perp\ .$$

Existe una interpretación alternativa del aliasing $A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ que es la siguiente: con las notaciones previas, sea $e \in \mathcal{W}^\perp$: entonces

$$\|T_{\mathcal{G}}^*\, e\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle e\, ,\, g_i\rangle|^2 = \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle e\, ,\, P_{\mathcal{W}^\perp} g_i\rangle|^2 = \|T_{\tilde{\mathcal{G}}}^*\, e\|^2\ ,$$

donde $\widehat{\mathcal{G}} = \{P_{\mathcal{W}^\perp} g_i\}_{i\in\mathbb{I}_n}$ es considerado como una sucesión finita en $\mathcal{W}^\perp$. Por lo tanto,

$$A(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp\setminus\{0\}} \left(\sum_{i\in\mathbb{I}} \frac{|\langle e\,,\, P_{\mathcal{W}^\perp} g_i\rangle|^2}{\|e\|^2} \right)^{1/2} = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp\setminus\{0\}} \frac{\|T^*_{\widehat{\mathcal{G}}}\, e\|}{\|e\|} \ ,$$

puede considerarse como una medida de la energía residual de muestreo (normalizada) de $\widehat{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{W}^\perp}\cdot\mathcal{G}$ en $\mathcal{W}^\perp$.

Asumimos además que $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ es un marco Parseval para $\mathcal{W}$ i.e. $S_\mathcal{F} = P_\mathcal{W}$. Entonces, $\mathcal{F}^\#_\mathcal{V} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$ es tal que $S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} = |P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}|^2$. Así, en este caso

$$A(\mathcal{F},\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}) = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp\setminus\{0\}} \frac{\langle S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}\, e\,,\, e\,\rangle^{1/2}}{\|e\|} = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp\setminus\{0\}} \frac{\|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} e\|}{\|e\|} = A(\mathcal{W},\mathcal{V}) \ .$$

En oposición a $A(\mathcal{W},\mathcal{V})$, el aliasing $A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ depende de la elección del par dual oblicuo $(\mathcal{F},\,\mathcal{G})$ considerado, y no sólo de los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$. Entonces, es natural considerar el problema de diseñar marcos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ para $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente, tales que $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ sea un par dual oblicuo con $A(\mathcal{F},\mathcal{G})$ mínimo.

Observación 5.3.4. Consideremos las Notaciones 5.1.6. Dado $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$, es fácil ver a partir de la Definición 5.3.3 que

$$A(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \|T^*_\mathcal{G}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\| = \|P_{\mathcal{W}^\perp}\, S_\mathcal{G}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\|^{1/2} \tag{5.40}$$

Por otro lado, como consecuencia de la Proposición 4.1.4 vemos que $S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} \le S_\mathcal{G} \implies P_{\mathcal{W}^\perp}\, S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}}\, P_{\mathcal{W}^\perp} \le P_{\mathcal{W}^\perp}\, S_\mathcal{G}\, P_{\mathcal{W}^\perp}$. Por lo tanto

$$A(\mathcal{F},\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}) = \|P_{\mathcal{W}^\perp} S_{\mathcal{F}^\#_\mathcal{V}} P_{\mathcal{W}^\perp}\|^{1/2} \le \|P_{\mathcal{W}^\perp} S_\mathcal{G} P_{\mathcal{W}^\perp}\|^{1/2} = A(\mathcal{F},\mathcal{G}) \ .$$

En este caso el par dual oblicuo canónico $(\mathcal{F},\mathcal{F}^\#_\mathcal{V})$ minimiza el aliasing entre todos los pares duales oblicuos $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ para $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$. △

Consideremos las Notaciones 5.1.6 y sea $U \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$. Como se mostró en las secciones anteriores, la estructura espectral de $S_{(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}}$ depende de la elección de tal unitario. Por lo tanto, es natural considerar operadores unitarios U como antes, que minimizan el aliasing $A(U\cdot\mathcal{F},\mathcal{G})$, donde $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_\mathcal{V}(U\cdot\mathcal{F})$. La Observación 5.3.4 muestra que en este caso podemos restringir la atención a los pares duales oblicuos de la forma $(U\cdot\mathcal{F},(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V})$ para un operador unitario $U \in L(\mathcal{H})$ tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$. El siguiente resultado corresponde al esquema de análisis previo y enlaza soluciones óptimas de este problema a soluciones óptimas del problema considerado en el Teorema 5.1.9.

Teorema 5.3.5. Consideremos las Notaciones 5.1.6. Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{I}_d} \in \mathcal{W}^d$ una BON de autovectores de $S_\mathcal{F}$ en $\mathcal{W}$, i.e. tal que $S_\mathcal{F}\, x_j = \lambda_j\, x_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$.

1. Si $U \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, entonces

$$A\Big(U\cdot\mathcal{F}\,,\,(U\cdot\mathcal{F})^\#_\mathcal{V}\Big) \ge \max_{j\in\mathbb{I}_d} \frac{\tan(\theta_j)}{\lambda^{1/2}_{d-j+1}} \ .$$

2. Si $U_0 \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario tal que $U_0\, x_j = w_{d-j+1}$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$, entonces

$$A\Big(U_0 \cdot \mathcal{F}\, ,\, (U_0 \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}\Big) = \max_{j\in \mathbb{I}_d} \frac{\tan(\theta_j)}{\lambda^{1/2}_{d-j+1}} \ .$$

   En particular, la cota inferior en el ítem 1. es óptima (ó ajustada).

Demostración. Sea $U \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$. Entonces, como en la prueba del Teorema 5.1.9, tenemos que

$$S_{(U\cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, U\, S_{\mathcal{F}^\#}\, U^*\, P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}$$

Por lo tanto, por la Eq. (5.40) deducimos que

$$A\Big((U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}\, ,\, U \cdot \mathcal{F}\Big)^2 = \|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\, U\, S_{\mathcal{F}^\#}\, U^*\, P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} P_{\mathcal{W}^\perp}\| \ . \tag{5.41}$$

Por otra parte, por el Lema 5.3.1, vemos que

$$|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|^2\, w_i = \tan^2(\theta_i)\, w_i \quad \text{ para cada } \quad i \in \mathbb{I}_d \ . \tag{5.42}$$

En particular, $\operatorname{rk}(|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|) = \#(\{i \in \mathbb{I}_d \ : \ \theta_i > 0\}) \stackrel{\text{def}}{=} k$. Sea P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{N} = R(|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|)$. Entonces, por el Teorema 1.4.10 (Teorema de entrelace de Cauchy) tenemos que los autovalores $\lambda\Big(\, P\,(U S_{\mathcal{F}^\#} U^*)\, P\Big) = (\mu_i)_{i\in\mathbb{M}}$ satisfacen que:

$$\mu_i \geq \lambda_{(d-k+i)}(S_{\mathcal{F}^\#}) = \lambda^{-1}_{k-i+1} \ \text{ si } \ 1 \leq i \leq k \quad \text{ y } \quad \mu_i = 0 \ \text{ si } \ i \geq k+1 \ . \tag{5.43}$$

Aplicando el Teorema 1.4.9 (versión multiplicativa del Teorema de Lisdkii) para el operador actuando en $\mathcal{N}$, donde $|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|$ actúa como un operador inversible, obtenemos

$$\begin{aligned}\Big(\ \tan^2(\theta_{d-k+i})\Big)_{i\in\mathbb{I}_k} \circ (\mu_i)_{i\in\mathbb{I}_k} \ &\prec_w \ \Big(\lambda_i\Big(\ |P_{\mathcal{W}^\perp}\, P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|\, (P\, U\, S_{\mathcal{F}^\#}\, U^*\, P)\, |P_{\mathcal{W}^\perp}\, P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}|\ \Big)\Big)_{i\in\mathbb{I}_k} \\ &= \ \Big(\lambda_i\big(P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\ \ U\, S_{\mathcal{F}^\#}\, U^*\ \ P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} P_{\mathcal{W}^\perp}\big)\Big)_{i\in\mathbb{I}_k} \in \mathbb{R}^k \ ,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce tomando la descomposición polar de $P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$. En particular, usando la relación de sub-mayorización, la Eq. (5.41) y las desigualdades en (5.43) vemos que

$$A\Big(U \cdot \mathcal{F}, (U \cdot \mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}\Big)^2 \ \geq \max_{i\in\mathbb{I}_k} \left\{\frac{\tan^2(\theta_{d-(k-i)})}{\lambda_{k-i+1}}\right\} = \max_{i\in\mathbb{I}_d} \left\{\frac{\tan^2(\theta_j)}{\lambda_{d-j+1}}\right\} \ ,$$

que muestra el ítem 1. Fijamos el unitario $U_0 \in L(\mathcal{H})$ del ítem 2. Entonces $(U_0\, S_{\mathcal{F}^{\#}_{\mathcal{V}}}\, U_0^*)\, w_i = \lambda^{-1}_{d-i+1}\, w_i$ para $i \in \mathbb{I}_d$. Recordemos de la Eq. (5.42) que $|P_{\mathcal{W}^\perp} P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}|\, w_i = \tan(\theta_i)\, w_i$ para $i \in \mathbb{I}_d$. Entonces

$$\lambda\Big(\, |P_{\mathcal{W}^\perp}\, P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}\,|\ \ U_0\, S_{\mathcal{F}^\#}\, U_0^*\ \ |P_{\mathcal{W}^\perp}\, P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}|\,\Big) = \left(\ \left(\frac{\tan^2(\theta_j)}{\lambda_{d-j+1}}\right)^{\downarrow}_{j\in\mathbb{I}_d} \ ,\ 0_{|\mathbb{M}|-d}\right) \ .$$

Esto muestra que el par dual canónico correspondiente a $U_0 \cdot \mathcal{F}$ alcanza el aliasing mínimo. $\square$

Observación 5.3.6. Consideremos las Notaciones 5.1.6. Si $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$, entonces la compresión

$$(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{W}^\perp} = P_{\mathcal{W}^\perp} S_{\mathcal{G}} \big|_{\mathcal{W}^\perp} \in L(\mathcal{W}^\perp)^+$$

de $S_{\mathcal{G}}$ a $\mathcal{W}^\perp$ es una medida (a valores operadores) de la incidencia de $\mathcal{W}^\perp$ en el esquema de codificación-decodificación basado en el par dual oblicuo $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Por la Eq. (5.40), se deduce que

$$A(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \|(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{W}^\perp}\|^{1/2},$$

donde $\|T\|$ representa la norma del operador $T \in L(\mathcal{W}^\perp)$. Podemos considerar otra medida (natural) a valores escalares de la forma

$$A_h(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \operatorname{tr}\left(h((S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{W}^\perp})\right) \ ,$$

para $h \in \operatorname{Conv}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ no-decreciente y tal que $h(0) = 0$ (que está bien definida ya que $(S_{\mathcal{G}})_{\mathcal{W}^\perp}$ es un operador positivo de rango finito y $h(0) = 0$). Una inspección cuidadosa de la prueba del Teorema 5.3.5 muestra que, con las notaciones anteriores,

$$A_h\Big(U_0 \cdot \mathcal{F}, (U_0 \cdot \mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}\Big) \leq A_h\Big(U \cdot \mathcal{F}, (U \cdot \mathcal{F})^\#_{\mathcal{V}}\Big)$$

para cada operador unitario $U \in L(\mathcal{H})$ tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, i.e. que la rotación rígida U_0 tiene otras propiedades de optimalidad. $\triangle$

5.3.2. Aliasing en FSIT's

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ SIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$. Sea $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in \mathbb{I}_n}$ tal que $E(\mathcal{F})$ un marco para $\mathcal{W}$. En este contexto tiene sentido hablar tanto de dualidad oblicua (usual) como de dualidad oblicua SG y para esto recordemos que

$$\mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F})) = \{E(\mathcal{G}) \in D_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F})) \ : \ \mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in \mathbb{I}_n} \in \mathcal{V}^n\} \,,$$

es el conjunto de los $\mathcal{V}$-duales SG de $E(\mathcal{F})$ (ver Sección 1.3). Dado $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ obtuvimos las siguientes fórmulas de reconstrucción: para cada $f \in \mathcal{W}$ y $g \in \mathcal{V}$,

$$f = \sum_{(\ell,\, i) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{I}_n} \langle f,\, T_\ell\, g_i\rangle \ T_\ell\, f_i \qquad \text{y} \qquad g = \sum_{(\ell,\, i) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{I}_n} \langle g,\, T_\ell\, f_i\rangle \ T_\ell\, g_i \,.$$

El siguiente Lema se deriva de resultados y técnicas de [2, 42, 43].

Lema 5.3.7. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ SIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$. Sean $J_{\mathcal{V}}$ y $J_{\mathcal{W}}$ las funciones rangos de los SIT $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, respectivamente. Entonces,

1. $\mathcal{W}^\perp$ es un SIT con función rango $J_{\mathcal{W}^\perp}(x) = [J_{\mathcal{W}}(x)]^\perp$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

2. Si $Q = P_{\mathcal{V}//\mathcal{W}^\perp}$ entonces Q es un operador SP.

3. $J_{\mathcal{V}}(x) \oplus J_{\mathcal{W}}(x)^\perp = \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ y $[Q]_x = P_{J_{\mathcal{V}}(x)//J_{\mathcal{W}}(x)^\perp}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

4. $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) \iff \Gamma\mathcal{G}(x)$ is $J_{\mathcal{V}}(x) -$ dual de $\Gamma\mathcal{F}(x)$, para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

Demostración. Por hipótesis $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son SIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$.

1. Sean $v \in \mathcal{W}$, $w \in \mathcal{W}^{\perp}$ y $\ell \in \mathbb{Z}^k$ entonces:

$$\langle T_\ell w, v\rangle = \langle w, T_{-\ell} v\rangle = 0 \ .$$

2. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^k)$ tal que $u = f_u + g_u$ donde $f_u \in \mathcal{V}$ y $g_u \in \mathcal{W}^{\perp}$. Dado $\ell \in \mathbb{Z}^k$ tenemos, por hipótesis, $T_\ell \ f_u \in \mathcal{V}$ y $T_\ell \ g_u \in \mathcal{W}$. Entonces,

$$T_\ell \ u = T_\ell(f_u + g_u) = T_\ell \ f_u + T_\ell \ g_u \implies Q \ (T_\ell \ u) = T_\ell \ f_u = T_\ell \ (Q \ u), \ \forall \ u \in L^2(\mathbb{R}^k).$$

3. Ya que la transformación $T \mapsto [T]$ es un C*-isomorfismo, vemos que $[Q]_x \in L(\ell^2(\mathbb{Z}^k))$ es una proyección para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Por lo tanto,

$$P_{\mathcal{V}} \ Q = Q \implies [P_{\mathcal{V}} \ Q]_x = [P_{\mathcal{V}}]_x \ [Q]_x = [Q]_x$$

y como $[P_{\mathcal{V}}]_x = P_{J_{\mathcal{V}}(x)}$ tenemos que $R(Q(x)) \subseteq J_{\mathcal{V}}(x)$. Por otra parte, se verifica que

$$QP_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}} \implies [QP_{\mathcal{V}}]_x = [Q]_x[P_{\mathcal{V}}]_x = [P_{\mathcal{V}}]_x,$$

entonces $J_{\mathcal{V}}(x) \subseteq R([Q]_x)$, así $J_{\mathcal{V}}(x) = R([Q]_x)$. Análogamente, como $Q^* = P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^{\perp}}$ vemos que $R(([Q]_x)^*) = R([Q^*]_x) = J_{\mathcal{W}}(x)$ y esto implica que $\ker([Q]_x) = J_{\mathcal{W}^{\perp}}(x) = J_{\mathcal{W}}(x)^{\perp}$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

4. Ver [11, Teorema 2.3].

$\square$

Observación 5.3.8. Consideremos el Lema 5.3.7. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^k)$. Con el fin de caracterizar cuando la suma (algebraica) de estos subespacios es un subespacio cerrado, recordemos la Eq. (1.35) donde definimos el ángulo de Dixmier entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, notado por $[\mathcal{S}, \mathcal{T}^{\perp}]_D \in [0, \pi/2]$, y dado por

$$\cos[\mathcal{S}, \mathcal{T}]_D = \sup\{|\langle v, \ w\rangle|, v \in \mathcal{S}_1, w \in \mathcal{T}_1\} \, ,$$

donde $\mathcal{S}_1 = \{f \in \mathcal{S} : \|f\| = 1\}$ (de forma similar para $\mathcal{T}_1$). Es bien sabido (ver [26]) que $[\mathcal{S}, \mathcal{T}]_D > 0$ si y sólo si $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ y $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^k)$.

Asumimos además que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T} = L^2(\mathbb{R}^k)$ y que $Q = P_{\mathcal{S}//\mathcal{T}}$ es su correspondiente proyección oblicua. Entonces (ver [26])

$$\|Q\| = \frac{1}{\sin[\mathcal{S}, \mathcal{T}]_D} \ . \qquad \triangle$$

Proposición 5.3.9. Sean $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq L^2(\mathbb{R}^k)$ SIT de $L^2(\mathbb{R}^k)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T}^{\perp} = L^2(\mathbb{R}^k)$;

2. $J_{\mathcal{S}}(x) \oplus J_{\mathcal{T}}(x)^{\perp} = \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. y $\sup \operatorname{esc}_{x \in \mathbb{T}^k} \|P_{J_{\mathcal{S}}(x)//J_{\mathcal{T}}(x)^{\perp}}\| < \infty$;

3. $J_{\mathcal{S}}(x)^{\perp} \cap J_{\mathcal{T}}(x) = \{0\}$ y $\inf \operatorname{esc}_{x \in \mathbb{T}^k} [J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x)^{\perp}]_D > 0$.

En este caso tenemos que $[\mathcal{S}, \mathcal{T}^{\perp}]_D = \inf \operatorname{esc}_{x \in \mathbb{T}^k} [J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x)^{\perp}]_D \, .$

Demostración. 1 $\implies$ 2. Es inmediata a partir del Lema 5.3.7.

2 $\implies$ 1. Asumimos que $J_{\mathcal{S}}(x) \oplus J_{\mathcal{T}}(x)^\perp = \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ y que $[Q]_x = P_{J_{\mathcal{S}}(x)//J_{\mathcal{T}}(x)^\perp}$ es su correspondiente proyección oblicua. Como la función $[Q]_x : \mathbb{T}^k \to \coprod_{x\in\mathbb{T}^k} L(J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x))$ es debilmente medible y esencialmente acotada entonces, por [11, Teorema 4.5] sabemos que existe una única transformación lineal y acotada $Q = P_{\mathcal{S}//\mathcal{T}^\perp} \in L(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ que es SP y tal que $[Q]_x = P_{J_{\mathcal{S}}(x)//J_{\mathcal{T}}(x)^\perp}$.

1 $\implies$ 3. Si $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$, por el Lema 5.3.7 tenemos que $J_{\mathcal{S}}(x) \oplus J_{\mathcal{T}^\perp}(x) = \ell^2(\mathbb{Z}^k)$, y por lo tanto las dimensiones de $J_{\mathcal{S}}(x)$ y $J_{\mathcal{T}}(x)$ coinciden y son finitas, además ya que $J_{\mathcal{S}}(x) \cap J_{\mathcal{T}}(x)^\perp = \{0\}$ se tiene que $[J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x)^\perp]_D > 0$.

3 $\implies$ 1. Si asumimos que $J_{\mathcal{S}}(x) \cap J_{\mathcal{T}}(x)^\perp = \{0\}$ y que $\inf \mathrm{esc}[J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x)^\perp]_D > 0$, notemos que $[\mathcal{S}, \mathcal{T}^\perp]_D = \inf \mathrm{esc}[J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x)^\perp]_D$. Esta última condición es equivalente a que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ y $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^k)$ (ver [26]). □

Como aplicación de los resultados previos, calculamos el valor exacto de la norma aliasing (ver [29, 39]) en términos de la geometría relativa de los FSIT's $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$. En efecto, recordemos que la norma aliasing correspondiente al muestreo consistente

$$f \mapsto \tilde{f} = P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} f \ , \qquad \text{para } f \in L^2(\mathbb{R}^k)$$

notado $A(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, está dado por

$$A(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \sup_{e\in\mathcal{W}^\perp} \frac{\|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} e\|}{\|e\|} = \|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp} P_{\mathcal{W}^\perp}\| \, .$$

Definición 5.3.10. Sean $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ subespacios cerrados. Definimos la *apertura* entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, notada $[\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a \in [0, \pi/2)$, como el ángulo determinado por

$$\cos([\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a) = \inf_{f\in\mathcal{T},\, \|f\|=1} \|P_{\mathcal{S}} f\| \, . \qquad \triangle$$

Observación 5.3.11. Consideremos las notaciones de la Definición 5.3.10. En tal caso resulta que la apertura $[\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a$ coincide con la noción de ángulo entre los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ como se definió en la Eq. (1.33) (y $\cos([\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a)$ que también se conoce como el coseno del ángulo más chico en [42]). Se cumple la siguiente relación (ver [42, 43]):

$$\cos([\mathcal{S}, \mathcal{T}]_D)^2 = 1 - \cos([\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a)^2 \implies [\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a = \pi/2 - [\mathcal{S}, \mathcal{T}^\perp]_D \, .$$

Por lo tanto, usando las relaciones anteriores y la Proposición 5.3.9 tenemos que si $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ son SIT tales que $\mathcal{S}^\perp \oplus \mathcal{T} = L^2(\mathbb{R}^k)$ entonces

$$[\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a = \sup_{x\in\mathbb{T}^k} \mathrm{esc}[J_{\mathcal{S}}(x), J_{\mathcal{T}}(x)]^a < \pi/2 \, . \qquad \triangle$$

Consideramos otra vez las notaciones de la Definición 5.3.10 y asumimos, además que $L^2(\mathbb{R}^k) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}^\perp$. Entonces, de las Observaciones 5.3.8 y 5.3.11 vemos que

$$\|P_{\mathcal{S}//\mathcal{T}^\perp}\| = \frac{1}{\sin[\mathcal{S}, \mathcal{T}^\perp]_D} = \frac{1}{\cos[\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a} \, .$$

A partir de esto y como se hizo en la Sección anterior, se obtiene la siguiente cota superior de la norma aliasing (ver [61])

$$A(\mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq \|P_{\mathcal{S}//\mathcal{T}^\perp}\| = \frac{1}{\cos[\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a} \, .$$

Notemos que, como antes, esta cota conocida no es buena: si tomamos $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ entonces $A(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$ pero $\cos[\mathcal{S}, \mathcal{T}]^a = 1$.

A continuación calculamos de forma exacta la norma aliasing.

Proposición 5.3.12. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ FSIT's de $L^2(\mathbb{R}^k)$ tales que $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$. La norma aliasing $A(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ correspondiente al par oblicuo $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ está dada por

$$A(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \tan([\mathcal{V}, \mathcal{W}]^a)\,.$$

Demostración. Notemos que $J_\mathcal{V}(x)$ y $J_\mathcal{W}(x)$ son subespacios de dimensión finita de $\ell^2(\mathbb{Z}^k)$ y, por la Proposición 5.3.9, vemos que $J_\mathcal{V}(x)^\perp \oplus J_\mathcal{W}(x) = \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ para $x \in \mathbb{T}^k$ ctp. Por lo tanto, aplicando el Corolario 5.3.2, concluimos que

$$A(J_\mathcal{V}(x),\, J_\mathcal{W}(x)) = \|P_{J_\mathcal{W}(x)//J_\mathcal{V}(x)^\perp}\; P_{J_\mathcal{W}(x)^\perp}\| = \tan([J_\mathcal{V}(x), J_\mathcal{W}(x)]^a)\;, \qquad \text{para } x \in \mathbb{T}^k\,, \text{ctp.}$$

Finalmente, usando la Observación 5.3.11, tenemos que

$$A(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \|P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^\perp}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\| = \operatorname*{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} \tan([J_\mathcal{V}(x), J_\mathcal{W}(x)]^a) = \tan([\mathcal{V}, \mathcal{W}]^a)\,. \qquad \square$$

Conjetura 5.3.13. Conjeturamos que la Proposición 5.3.12 se verifica para un muestreo consistente de una descomposición oblicua $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T}^\perp = \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ arbitrario. Por los resultados obtenidos en la Sección 5.3.1 la conjetura es verdadera para $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ subespacios de dimensión finita. Por la Proposición 5.3.12 esta conjetura se verifica para algunos subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ de dimensión infinita, en buena posición. $\triangle$

Consideramos las Notaciones 5.1.6 y los resultados previos, podemos definir el aliasing relativo al par dual oblicuo $(E(\mathcal{F}), E(\mathcal{G}))$; tal como se hizo en la Sección 5.3.1.

Definición 5.3.14. Sean $\mathcal{W}, \mathcal{V} \subset L^2(\mathbb{R}^k)$ FSIT's tales que $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^\perp = L^2(\mathbb{R}^k)$. Sean $E(\mathcal{F})$ y $E(\mathcal{G})$ marcos para $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente tales que $E(\mathcal{G}) \in \mathcal{D}^{SG}_\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Entonces, definimos el aliasing relativo al par dual oblicuo $(E(\mathcal{F}), E(\mathcal{G}))$, notado por $A(E(\mathcal{F}), E(\mathcal{G}))$ y dado por

$$A(E(\mathcal{F}), E(\mathcal{G})) = \operatorname*{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} A(\Gamma\mathcal{F}(x), \Gamma\mathcal{G}(x)) = \|T^*_{E(\mathcal{G})}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\| = \|P_{\mathcal{W}^\perp}\, S^*_{E(\mathcal{G})}\, P_{\mathcal{W}^\perp}\|^{1/2}.$$

$\triangle$

Teorema 5.3.15. Consideremos las Notaciones 5.1.6. Sean $y_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ campos medibles de vectores, tales que $\{y_j(x)\}_{j\in\mathbb{I}_{d(x)}}$ es una BON de autovectores de $[S_{E(\mathcal{F})}]_x$ en $J_\mathcal{W}(x)$, i.e. tal que $[S_{E(\mathcal{F})}]_x\, y_j(x) = \lambda_j(x)\, y_j(x)$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$ y $x \in \mathbb{T}^k$ ctp.

1. Si $U \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario tal que $U(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$, entonces

$$A(U\cdot E(\mathcal{F})\,,\, (U\cdot E(\mathcal{F}))^\#_\mathcal{V}) \geq \max_{j\in\mathbb{I}_d}\ \operatorname*{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} \frac{\tan(\theta_j(x))}{\lambda^{1/2}_{d-j+1}(x)} \qquad \text{para} \qquad x\in\mathbb{T}^k,\ \text{ctp.}$$

2. Sean $w_j : \mathbb{T}^k \to \ell^2(\mathbb{Z}^k)$ campos medibles de direcciones principales. Si $U_0 \in L(\mathcal{H})$ es un operador unitario tal que $U_0\, y_j(x) = w_{d-j+1}(x)$ para cada $j \in \mathbb{I}_d$, entonces

$$A(U_0\cdot E(\mathcal{F})\,,\, (U_0\cdot E(\mathcal{F}))^\#_\mathcal{V}) = \max_{j\in\mathbb{I}_d}\ \operatorname*{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} \frac{\tan(\theta_j(x))}{\lambda^{1/2}_{d-j+1}(x)} \qquad \text{para} \qquad x\in\mathbb{T}^k,\ \text{ctp.}$$

En particular, la cota inferior del ítem 1 se alcanza.

Demostración. De la Definición 5.3.14 y argumentando como en la prueba del Teorema 5.3.5, se prueba el Teorema. $\square$

Observación 5.3.16. Si asumimos que $E(\mathcal{F})$ es marco Parseval para $\mathcal{W}$ (i.e. $S_{E(\mathcal{F})} = P_{\mathcal{W}}$). Entonces $E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{D}^{SG}_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{F}))$ es tal que $S_{E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}} = |P_{\mathcal{W}//\mathcal{V}^{\perp}}|^2$. Así, se tiene que

$$\begin{aligned} A\big(E(\mathcal{F})\,,\,E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}\big) = \operatorname*{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k}\ \max_{j\in\mathbb{I}_d} \tan(\theta_j(x)) \quad &= \quad \operatorname*{sup\,esc}_{x\in\mathbb{T}^k} \tan(\theta_d(x)) \\ &= \quad \tan([\mathcal{V},\mathcal{W}]^a) = A(\mathcal{V},\mathcal{W}), \ \text{ para } x\in\mathbb{T}^k \text{ ctp.} \end{aligned}$$

Luego podemos concluir que $A(\mathcal{V},\mathcal{W})$ se recupera al considerar el aliasing para el par $\big(E(\mathcal{F}),\, E(\mathcal{F})^{\#}_{\mathcal{V}}\big)$, con $E(\mathcal{F})$ marco Parseval.

$\triangle$

Bibliografía

[1] A. Aldroubi, C. Cabrelli, D. Hardin, U. Molter, Optimal shift invariant spaces and their Parseval frame generators. Appl. Comput. Harmon. Anal. 23 (2007), no. 2, 273-283.

[2] M. Anastasio, C. Cabrelli, Sampling in a union of frame generated subspaces. Sampl. Theory Signal Image Process. 8 (2009), no. 3, 261-286.

[3] E. Andruchow, J. Antezana, G. Corach, Sampling formulae and optimal factorizations of projections. Sampl. Theory Signal Image Process. 7 (2008), no. 3, 313-331.

[4] J. Antezana, P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, The Schur-Horn theorem for operators and frames with prescribed norms and frame operator. Illinois J. Math. 51 (2007), no. 2, 537-560.

[5] J. Antezana, G. Corach. Singular value estimates of oblique projections. Linear Algebra Appl. 430 (2009), no. 1, 386-395.

[6] R. Bhatia, Matrix Analysis, Berlin-Heildelberg-New York, Springer 1997.

[7] M.J. Benac, P. Massey, D. Stojanoff, Aliasing and oblique dual pair designs for consistent sampling, Linear Algebra Appl. 487 (2015) 112-145.

[8] M.J. Benac, P. Massey, D. Stojanoff, Convex potentials and optimal shift generated oblique duals in shift invariant spaces (submitted).

[9] J.J. Benedetto, M. Fickus, Finite normalized tight frames. Frames. Adv. Comput. Math. 18 (2003), no. 2-4, 357-385.

[10] C. de Boor, R. DeVore, A. Ron, The structure of finitely generated shift-invariant spaces in $L_2(\mathbb{R}^d)$. J. Funct. Anal. 119 (1994), no. 1, 37-78.

[11] M. Bownik. The structure of shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$. J. Funct. Anal. 177 (2000), no. 2, 282-309.

[12] M. Bownik, J. Jasper, Characterization of sequences of frame norms. J. Reine Angew. Math. 654 (2011), 219-244.

[13] M. Bownik, J. Jasper, The Schur-Horn theorem for operators with finite spectrum, Trans. Amer. Math. Soc. (in press).

[14] C. Cabrelli, V. Paternostro, Shift-invariant spaces on LCA groups. J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 6, 2034-2059.

[15] J. Cahill, M. Fickus, D. Mixon, M. Poteet, N. Strawn, Constructing finite frames of a given spectrum and set of lengths. Appl. Comput. Harmon. Anal. 35 (2013), no. 1, 52-73.

[16] P.G. Casazza, M. Fickus, J. Kovacevic, M.T. Leon, J.C. Tremain, A physical interpretation of tight frames. Harmonic analysis and applications, 51–76, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, MA, (2006).

[17] P.G. Casazza, M. Leon, Existence and Construction of Finite Frames with a Given Frame Operator, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 63, No. 2 (2010), p. 149-158.

[18] P.G. Casazza, J. Kovacevic, Equal-norm tight frames with erasures, Advances in Computational Mathematics, special issue on Frames, (2002).

[19] Eds. P. G. Casazza and G. Kutyniok, Finite Frames: Theory and Applications, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[20] K.M. Chong, Doubly stochastic operators and rearrangement theorems. J. Math. Anal. Appl. 56 (1976), no. 2, 309-316.

[21] O. Christensen, An introduction to frames and Riesz bases. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[22] G. Corach, A. Maestripieri, Polar decomposition of oblique projections. Linear Algebra Appl. 433 (2010), no. 3, 511-519.

[23] O. Christensen, Y.C. Eldar, Oblique dual frames and shift-invariant spaces. Appl. Comput. Harmon. Anal. 17 (2004), no. 1, 48-68.

[24] O. Christensen, Y.C. Eldar, Characterization of oblique dual frame pairs. EURASIP J. Appl. Signal Process. (2006), 1-11.

[25] T.M. Cover, J.A. Thomas, Joy A. Elements of information theory. Second edition. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006.

[26] F. Deutsch, The angle between subspaces of a Hilbert space. Approximation theory, wavelets and applications (Maratea, 1994), 107-130, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 454, 1995.

[27] D. E. Dutkay, The local trace function of shift invariant subspaces, J. Operator Theory 52 (2004), 267-291.

[28] T.G. Dvorkind, Y.C. Eldar, Robust and Consistent Sampling. IEEE Signal Process. Lett. 16(9) (2009), 739-742.

[29] Y.C. Eldar, Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors. J. Fourier Anal. Appl. 9 (2003), no. 1, 77-96.

[30] Y.C. Eldar, T. Werther, General framework for consistent sampling in Hilbert spaces. Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 3 (2005), no. 4, 497-509.

[31] M. Fickus, D. G. Mixon and M. J. Poteet, Frame completions for optimally robust reconstruction, Proceedings of SPIE, 8138: 81380Q/1-8 (2011).

[32] G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.

[33] D. Han, Frame representations and Parseval duals with applications to Gabor frames. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 6, 3307-3326.

[34] C. Heil, Y.Y. Koo, J.K. Lim, Duals of frame sequences, Acta Appl. Math. 107 (2009), No. 1-3 , 75-90.

[35] A.A. Hemmat, J.P. Gabardo. The uniqueness of shift-generated duals for frames in shift-invariant subspaces. J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), no. 5, 589-606.

[36] A.A. Hemmat, J.P. Gabardo, Properties of oblique dual frames in shift-invariant systems. J. Math. Anal. Appl. 356 (2009), no. 1, 346-354.

[37] R.B. Holmes, V.I. Paulsen, Optimal frames for erasures, Linear Algebra Appl. 377 (2004) 31-51.

[38] R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix analysis. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[39] A.J.E.M. Janssen, The Zak transform and sampling theorems for wavelet subspaces, IEEE Trans. Signal Processing, 41 (1993), 3360-3364.

[40] A.V. Knyazev, M.E. Argentati, Principal angles between subspaces in an A-based scalar product: algorithms and perturbation estimates. SIAM J. Sci. Comput. 23 (2002), no. 6, 2008-2040.

[41] V. Kaftal, G. Weiss, An infinite dimensional Schur-Horn theorem and majorization theory. J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 12, 3115-3162.

[42] H. O. Kim, R. Y. Lim and J. K. Lim, The infimum cosine angle between two finitely generated shift-invariant spaces and its applications. Appl. Comput. Harmon. Anal. 19 (2005), no. 2, 253-281.

[43] H. O. Kim, R. Y. Lim and J. K. Lim, Characterization of the closedness of the sum of two shift-invariant spaces, J. Math. Anal. Appl., 320 (2006), 381-395.

[44] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold, Inequalities: theory of majorization and its applications. Second edition. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2011.

[45] P. Massey, M. Ruiz, Tight frame completions with prescribed norms, Samp. Theory in Sig. and Image Proccesing 7(1) (2008), 1-13.

[46] P. Massey, M. Ruiz, Minimization of convex functionals over frame operators. Adv. Comput. Math. 32 (2010), no. 2, 131-153.

[47] P. Massey, M. Ruiz , D. Stojanoff, Duality in reconstruction systems. Linear Algebra Appl. 436 (2012), no. 3, 447-464.

[48] P. Massey, M. Ruiz , D. Stojanoff, Optimal dual frames and frame completions for majorization. Appl. Comput. Harmon. Anal. 34 (2013), no. 2, 201-223.

[49] P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, Optimal Frame Completions with Prescribed Norms for Majorization. J. Fourier Anal. Appl. 20 (2014), no. 5, 1111-1140.

[50] P. Massey, M. Ruiz, D. Stojanoff, Optimal frame completions. Adv. Comput. Math. 40 (2014), no. 5-6, 1011-1042.

[51] P. Massey, M. Ruiz , D. Stojanoff, Multiplicative Lidskii's inequalities and optimal perturbations of frames, Linear Algebra Appl. 469 (2015), 539-568.

[52] D.P. Palomar,J.R. Fonollosa, Practical algorithms for a family of waterfilling solutions. IEEE Trans. Signal Process. 53 (2005), no. 2, part 1, 686-695.

[53] M. J. Poteet, Parametrizing finite frames and optimal frame completions, Doctoral thesis, Graduate School of Engineering and Management, Air Force Institute of Technology, Air University.

[54] A. Ron, Z. Shen, Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$. Canad. J. Math. 47 (1995), no. 5, 1051-1094.

[55] John V. Ryff, Orbits of L^1-functions under doubly stochastic transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 92-100.

[56] G. Scutari, D.P. Palomar, S. Barbarossa, The MIMO iterative waterfilling algorithm. IEEE Trans. Signal Process. 57 (2009), no. 5, 1917-1935.

[57] C.E. Shannon, Communication in the presence of noise. Proc. I.R.E. 37, (1949). 10-21.

[58] B. Simon, Trace ideals and their applications. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[59] I. E. Telatar, Capacity of multi-antenna Gaussian channels, Eur. Trans. Telecommun., vol. 10, no. 6, pp. 585-595, Nov-Dec. 1999.

[60] M. Unser, A. Aldroubi, A general sampling theory for nonideal acquisition devices, IEEE Trans Signal Processing, vol. 42 (1994) no. 11, 2915-2925.

[61] M. Unser, J. Zerubia, Generalized sampling: Stability and performance analysis, IEEE Trans. Signal Processing, 45 (1997), 2941-2950.