Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 17, No 1. Setiembre − Febrero 2017. ISSN 1659 -0643

Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra

Laura S. del Río
laura.delrio@ing.unlp.edu.ar
Universidad Nacional de La Plata.
La Plata. Argentina

Recibido: Febrero 17, 2016 Aceptado: Mayo 12, 2016

Resumen. En este artículo se esbozan los fundamentos teóricos que sustentan la utilización de la vista gráfica 3D de GeoGebra como herramienta para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. También se comparten algunas ideas, a modo de ejemplo, de construcciones que pueden realizarse para ayudar a comprender algunos conceptos que suelen resultar difíciles para los alumnos, debido a la gran dificultad de representarlos gráficamente utilizando sólo lápiz y papel, obligando al estudiante a limitarse a su manipulación algebraica.
Los ejemplos abordados se relacionan con los temas: sólidos de revolución, extremos relativos en funciones de dos variables y cálculo de límites en funciones de dos variables.

Palabras clave: Cálculo diferencial, Cálculo integral, Geometría Dinámica, GeoGebra, Visualización en 3D.

Abstract.
This article develops a theoretical framework to support the use of GeoGebra 3D view as a tool for teaching and learning Calculus. It also shares a few ideas, as examples, of constructions that can be done to help students to understand some concepts that can be hard due to the impossibility of represent them using only pencil and paper. This situation forces students to just manipulate algebraically the mathematic objects.
The presented examples are related to the following topics: Solid of revolution, relative maximum and minimum (for two variables functions) and limits of two variables functions.

KeyWords: Differencial Calculus, Integral Calculus, Dynamics Geometry, GeoGebra, 3D Visualization.

Introducción

Los alumnos universitarios deben atravesar grandes dificultades al pasar del estudio del Cálculo en una variable al estudio del Cálculo en dos o más variables. De hecho, existen múltiples trabajos de investigación que abordan estas dificultades y proponen abordajes alternativos para superar las mismas (Götte y Mántica, 2013[1]; Pulido y Zambrano, 2010[2]; Andrade Molina y Montecino Muñoz, 2011[3]; Alves, 2012[4]; Alves y Borges Neto, 2011[5]). Algunos de los obstáculos que señalan los autores de los trabajos citados están asociados a:

- La visualización y la producción de imágenes mentales de los objetos tridimensionales (Andrade Molina y Montecino Muñoz, 2011[3]).
- La necesidad de representar los objetos tridimensionales en el plano bidimensional (Götte y Mántica, 2013[1]).
- La existencia de ciertas propiedades que son válidas en el plano, pero no en el espacio (por ejemplo, "dos rectas no paralelas, tienen un punto de intersección")

Ya en los cursos de Cálculo en una variable, al estudiar los sólidos de revolución y el cálculo de sus volúmenes mediante integrales, aparecen dificultades asociadas a la representación gráfica en tres dimensiones. En este sentido, Andrade Molina y Montecino Muñoz (2013)[6, pág 477] analizan que: "generar mentalmente los sólidos de revolución no es un proceso inmediato, ya que lo que produce mayores conflictos es el traspaso entre dimensiones" .

Es reconocido que el software GeoGebra aporta valiosos recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Carrillo, 2012[7]; Borsani, Cedrón, Cicala, Di Rico, Duarte y Sessa, 2013[8]; Novembre, Nicodemo y Coll, 2015[9]), pero su vista gráfica 3D es muy reciente, y es por esto que aún no abundan propuestas que permitan explotar las nuevas posibilidades que brinda para la enseñanza y el aprendizaje.

Previo al lanzamiento de la versión 5.0, que incluye la vista gráfica 3D, se puede mencionar como antecedente un trabajo de Alves (2012)[4] en el cual se propone combinar la vista gráfica 2D de GeoGebra con otros programas que permiten crear gráficos tridimensionales para la enseñanza de conceptos de Cálculo en dos variables. Pero estos otros programas son, en general, mucho más difíciles de utilizar que GeoGebra y, además, son privativos (*o non-free software*).

En el presente artículo, se compartirán algunas ideas que podrían ser de utilidad para el aprovechamiento óptimo de esta nueva herramienta que brinda GeoGebra. La totalidad de los ejemplos que se presentan, así como las imágenes que los ilustran, fueron construidos por la autora del presente artículo utilizando dicho programa.

Marco teórico

La teoría de los registros de representación semiótica formulada por Raymond Duval se apoya en que, a diferencia de los objetos de estudio de otras disciplinas científicas, los objetos matemáticos "no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas" (Duval, 2006[10, pág 157]).

Duval (2006)[10] hace hincapié en la importancia del trabajo del alumno con diferentes registros de representación (por ejemplo, el verbal, el gráfico, el algebraico). Esto implica las habilidades de representar y reconocer a un mismo objeto matemático en distintos contextos semióticos, poder realizar transformaciones entre los mismos y seleccionar, para cada situación problemática a abordar, aquel o aquellos que sean más convenientes para la ocasión: "la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados" (Duval, 2006[10, pág 145]).

Esta articulación entre registros resulta compleja al implicar objetos del espacio tridimensional, en particular en cuanto al trabajo gráfico, ya que requiere la representación en perspectiva de objetos tridimensionales (nuevos para el alumno) en el plano, razón por la cual muchos alumnos optan por evitar el trabajo en el mismo y se abocan exclusivamente al trabajo algebraico.

Se genera entonces una tensión entre la *necesidad* de manipular y articular diferentes contextos de representación y la *dificultad* adicional que reviste el uso del registro gráfico tridimensional.

En la actualidad, existen recursos informáticos que permiten graficar con facilidad este tipo de objetos, que pueden ser útiles para promover el uso por parte del alumno del registro gráfico. Además, este tipo de recursos posibilita representaciones de los objetos tridimensionales más ricas que las planas, que pueden hacerse en soporte impreso, ya que puede rotarse el punto de vista con facilidad e incluso observar la figura con gafas anaglifo[1] , generando una percepción más cercana a la tridimensionalidad (ver ejemplo la Figura 1.1). Andrade Molina y Montecino Muñoz (2013)[6] advierten, sin embargo, que:

> "...las herramientas que actualmente están inmersas en los salones de clases permiten hacer dibujos bidimensionales que representen un objeto tridimensional o cuerpo geométrico, mediante el uso de perspectiva. Sin embargo, algunas de estas herramientas, tales como calculadoras graficadoras, softwares matemáticos, entre otras, permiten otorgar una visualización dinámica, pero no asegura el logro en la representación mental del cuerpo. Una de las causas es la ausencia del eje z, en el plano cartesiano, al hacer rotar una región en torno a un eje, dificultando la visualización del sólido que se conforma". (Andrade Molina y Montecino Muñoz, 2013[6, pág 477])

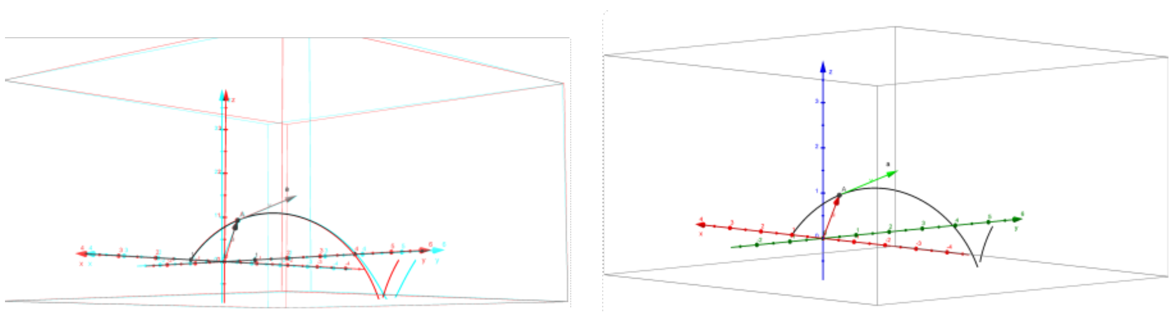

Figura 1.1: Arriba se puede ver la representación de una curva en el espacio en la vista gráfica 3D de GeoGebra. Abajo, la misma curva, pero habiendo configurado la vista en "proyección para lentes 3D".

[1]Se trata de las clásicas gafas que poseen un filtro de color en cada ojo, que sirven para visualizar imágenes estereoscópicas y producir una sensación de profundidad en una imagen plana.

De acuerdo con Moreno Armella y Lupiáñez (2001)[11], el tipo de representaciones matemáticas que se obtienen con programas informáticos, permiten superar el carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales. Ellos las llaman *representaciones ejecutables* y afirman que tienen la virtud de ser *manipulables*, que permiten actuar directamente sobre ellas, es posible intervenirlas matemáticamente. Y así, "las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en reales" (Moreno Armella y Lupiáñez, 2001[11, pág 297]). En este mismo sentido, Hohenwarter (2014)[12] expresa que las representaciones estáticas pueden dar cuenta solamente de situaciones fijas, mientras que las dinámicas permiten una transformación y manipulación de las mismas que ayudan a los estudiantes a desarrollar de mejor manera sus representaciones internas (mentales).

Recorriendo algunos ejemplos de aplicación

En esta sección se compartirán algunos ejemplos de actividades y recursos que pueden aplicarse en el aula a fin de aprovechar la potencialidad de la vista gráfica 3D de GeoGebra. La finalidad de los mismos es que los alumnos se familiaricen con las representaciones gráficas de los objetos matemáticos tridimensionales, animarlos a que reinterpreten en el gráficamente aquello que calculan algebraicamente, puedan explorar y conjeturar propiedades de estos objetos para luego validarlas y que encuentren en esta herramienta un aliado para autoevaluar las producciones que realizan en el entorno lápiz-papel.

El primero de los ejemplos presentados, se relaciona con la problemática de los sólidos de revolución. El segundo, con la obtención de extremos locales para funciones de dos variables utilizando la gráfica de las curvas de nivel y la gráfica tridimensional de la función en un sistema ortogonal xyz. En tercer y último lugar, se presentará una actividad relacionada con el cálculo de límites para funciones de dos variables.

Ejemplo 1. Sólidos de revolución

Retomando el trabajo de Andrade Molina y Montecino Muñoz (2013)[6], se pretende aprovechar la potencialidad del programa GeoGebra para proponer una actividad en la cual el alumno realice efectivamente la rotación de una curva en torno a un eje y visualice la superficie generada.

Los citados autores señalan que los profesores suelen acudir a la realización de representaciones icónicas en el pizarrón de objetos tridimensionales en perspectiva, por ejemplo, al dibujar un cubo como el que se muestra en la Figura 1.2. Y se preguntan acerca de estas representaciones: "¿implica aquello que los estudiantes se apropien del concepto de cubo? ¿Es factible que un estudiante que no haya adquirido una visualización espacial vea dos cuadrados superpuestos con cuatro segmentos uniendo sus vértices?" (Andrade Molina y Montecino Muñoz, 2011[3, pág 2]). Estos autores señalan la existencia de dificultades asociadas al hecho de que

> "Algunos objetos matemáticos están construidos bajo procesos dinámicos en función del tiempo, como es el caso de los sólidos de revolución o la rotación de figuras planas, por lo que el fenómeno a estudiar se torna más complejo, ya que no sólo involucra la aprehensión de saberes matemáticos, sino aspectos visuales" (Andrade Molina y Montecino Muñoz, 2011[3, pág 3]).

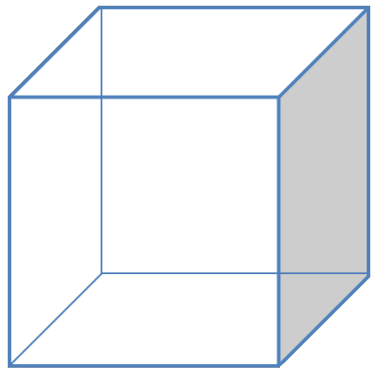

Figura 1.2: Representación usual en perspectiva de un cubo.

Además de la dificultad asociada a la generación de la imagen mental del sólido de revolución, estos autores detectaron

> "que los estudiantes presentan limitaciones al establecer los diferentes significados que toma f(x) en el cálculo integral (imagen, altura, segunda coordenada de un par ordenado, expresión algebraica de una función), coartando de esta manera, el traspaso del registro gráfico al registro algebraico" (Andrade Molina y Montecino Muñoz, 2013[6, pág 473]).

Ante este diagnóstico, se puede postular que la realización de una construcción sencilla, pero que permita rotar efectivamente la gráfica de la función f y generar una superficie como consecuencia de esta rotación, que es casi material, puede ayudar a facilitar el proceso de conceptualización de estos temas. A continuación se proponen los pasos para la construcción:

1. Ingresar una función de una variable en la **barra de entrada** del programa GeoGebra, tomemos por caso $f(x) = x^2$, en el intervalo $[0,1]$. Para ello, una posibilidad es utilizar el **comando Función**, escribiendo $f(x) = \text{Función}(x\wedge 2, 0, 1)$

2. Definir un **deslizador** α seleccionando el tipo "ángulo", con mínimo en 0º y máximo 360º

3. Seleccionar la herramienta **"Rotación axial"**, que se encuentra disponible entre las herramientas de la vista gráfica 3D. Esta herramienta requiere que se seleccione: un objeto a rotar, un eje de rotación y un ángulo (en ese orden). Seleccionar la función, el eje x y luego, en la caja de diálogo para ingresar el ángulo, colocar α, que es el ángulo variable representado por el deslizador que hemos definido.

4. Al **mover el deslizador** se podrá visualizar la rotación de la gráfica de la función alrededor del eje x. Si se activa el rastro de la curva móvil obtenida, se podrá obtener una imagen en la que se puede ver una aproximación de la superficie generada, como la que puede apreciarse en la Figura 1.3

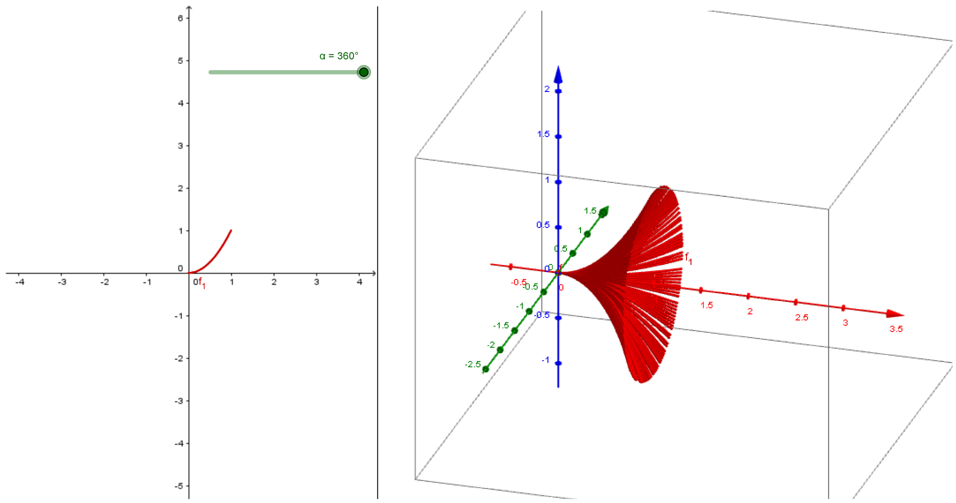

Figura 1.3: Imagen obtenida al rotar la gráfica de $f(x) = x^2$ alrededor del eje x.

Para visualizar la superficie generada y las "tapas" del sólido, es necesario parametrizar las superficies. Por ejemplo, para la superficie generada por la rotación de la curva de ecuación $y = f(x)$, se puede utilizar la Ecuación[2] 1(tabla 1.1).

$$\begin{cases} x & = & u & & & & & \\ y & = & f(u)\sin(v) & a & \leq & u & \leq & b \\ z & = & f(u)\cos(v) & 0 & \leq & v & \leq & \alpha \end{cases}$$

Tabla 1.1: Ecuación1: Una parametrización posible para la superficie generada al rotar la gráfica de la función f alrededor del eje x.

Como el límite superior para la variable v en la Ecuación 1 (Tabla 1.1) depende del ángulo α, al mover el deslizador que define a esta variable, se irá completando la superficie en cuestión. Esta tarea puede ser muy compleja para un alumno que se encuentra estudiando sólidos de revolución. Por lo tanto, llegado este punto puede ofrecerse a los estudiantes la interacción con un *applet* prediseñado, como el que puede encontrarse en: `http://www.geogebra.org/material/simple/id/1509549`[3] , y del cual se ofrecen algunas capturas de pantalla en la Figura 1.4.

Se pretende con esta actividad aprovechar el hecho de que los objetos que ofrecen los entornos de geometría dinámica como GeoGebra *manipulables*, tal como lo expresan Moreno Armella y Lupiáñez (2001)[11] y Hohenwarter (2014)[12] y promover así la intuición geométrica espacial de los estudiantes.

[2]Para ingresar una superficie en forma paramétrica, se puede utilizar el comando Superficie.
[3]Enlace consultado el día 14/02/2016

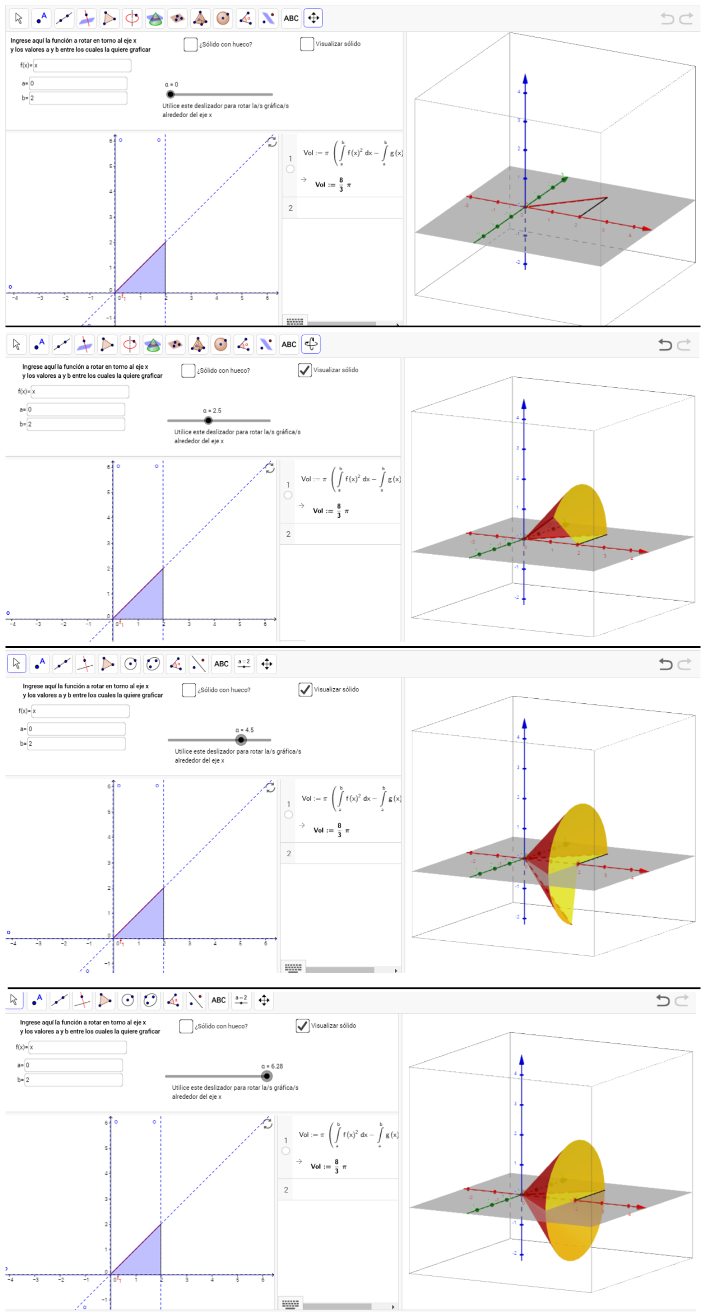

Figura 1.4: Capturas de pantalla de un *applet* diseñado para visualizar la generación de un sólido de revolución a partir de la rotación de la gráfica de una función.

Ejemplo 2. Gráficas de funciones de dos variables, curvas de nivel y obtención de máximos y mínimos locales.

Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Esta función posee dos puntos estacionarios: $A(0,0)$ y $B(1,1)$, que pueden hallarse analíticamente con facilidad. Aplicando el criterio de las derivadas segundas, se puede concluir que A es un punto silla y B un mínimo local. Pero esta cuenta por sí sola puede carecer de significado para los alumnos.

La construcción que se propone a continuación, pretende por un lado que los alumnos visualicen la gráfica de la función, y por otro lado, que analicen conjuntamente el comportamiento de dicha gráfica tridimensional y de la gráfica bidimensional de las curvas de nivel, interactuando de esta forma con distintos registros de representación semiótica:

1. Escribir $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en la línea de entrada a fin de obtener la gráfica de f en la vista gráfica 3D (asegurarse previamente que la vista gráfica 3D esté activa).

2. Escribir $x^3 + y^3 - 3xy = k$ en la línea de entrada y aceptar la opción **"crear deslizador para k"** a fin de obtener una representación de la curva de nivel k de la función f (asegurarse previamente que la vista gráfica 2D esté activa).

3. Escribir $z = k$ para obtener la **gráfica del plano** correspondiente.

4. Mover el deslizador k y observar que las curvas de nivel se corresponden con las intersecciones entre el plano $z = k$ y la superficie $z = f(x,y)$ (ver Figura 1.5)

5. Activar el rastro de la curva $x^3 + y^3 - 3xy = k$ y mover el deslizador k para obtener el mapa de nivel (es posible que convenga modificar las propiedades del deslizador para que el incremento de k sea mayor que el dado por defecto para no obtener un mapa de nivel demasiado denso) (ver Figura 1.6)

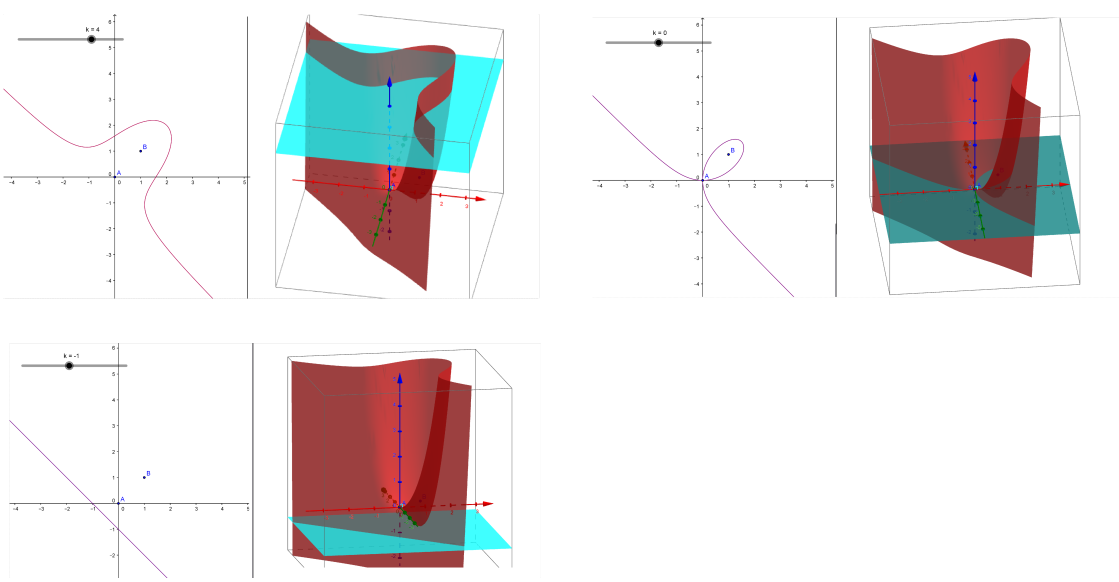

Figura 1.5: Construcción obtenida para 3 valores diferentes de k. Puede observarse la correspondencia entre la curva de nivel graficada en la vista 2D y la intersección entre la gráfica de la función y el plano z=k en la vista gráfica 3D.

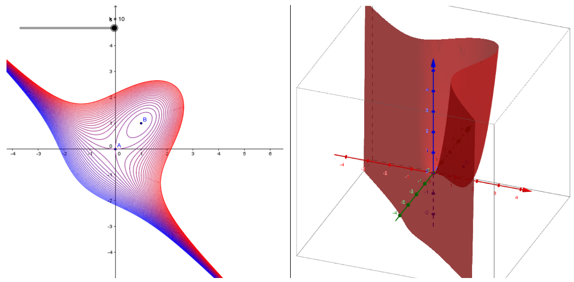

Figura 1.6: Activando el rastro de la curva, se puede obtener el mapa de contorno de la función. Para obtener los distintos colores, se ingresó al diálogo de propiedades de la curva y en la pestaña "avanzado" se definieron los colores dinámicos rojo y azul en función del valor de k.

Una cuestión que puede proponerse a los alumnos para analizar a partir de esta construcción es: "cómo se pueden detectar puntos críticos a partir del mapa de contorno de la función, y cómo puede determinarse, una vez identificados dichos puntos, si se trata de un extremo o de un punto silla". La resolución de este tipo de problemas en clase suele hacerse utilizando únicamente cálculos algebraicos. Esta actividad permite articular ese trabajo habitual con un análisis gráfico de la situación que permite, de acuerdo con Duval (2006)[10] mejorar la comprensión. Por otro lado, el análisis del comportamiento del mapa de contorno en las proximidades de los puntos estacionarios, permite a los alumnos utilizar estos gráficos, que son bidimensionales, como herramientas para encontrar y clasificar extremos locales aún en ausencia del gráfico tridimensional.

Ejemplo 3. Límites en dos variables

En el caso de la noción de límite de una función de dos variables, aparecen cuestiones que pueden resultar contrarias a la intuición y que a menudo terminan siendo aceptadas acríticamente por los alumnos.

Los libros de Cálculo para el nivel universitario tratan esta temática de modo similar. Tomaremos por ejemplo el libro *Cálculo: varias variables*, de Thomas (2006)[13]. Se ofrece un ejemplo en el cual se calcula el límite de la función $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ sustituyendo $y = mx$ y encontrando que el resultado depende de m. Se concluye que entonces el límite no existe y se establece la siguiente afirmación como conclusión general:

> "Para que el límite exista en un punto, el límite debe ser el mismo a lo largo de cualquier trayectoria de acercamiento. Este resultado es análogo al del caso de una variable, donde los límites por izquierda y por derecha debían tener el mismo valor. Por lo tanto, para funciones de dos o más variables, si llegamos a encontrar trayectorias con valores distintos como límites, sabemos que la función no tendrá límite en el punto al que se tiende" (Thomas, 2006[13, pág 980])

Como contracara gráfica del cálculo realizado, se ofrece un diagrama con las curvas de nivel de la función, en el cual se muestra que las mismas convergen en un mismo punto (ver en la figura 1.7 la gráfica de las curvas de nivel para la función del ejemplo).

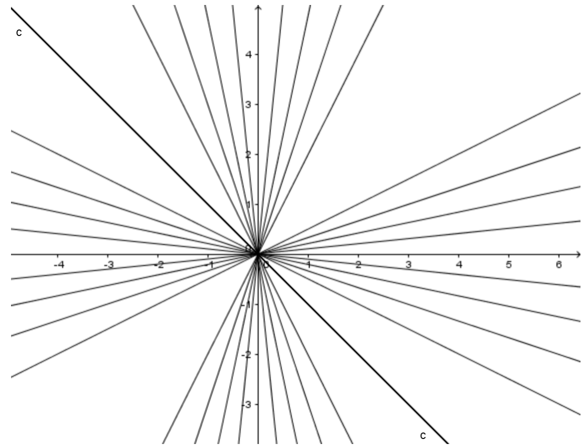

Figura 1.7: Las distintas curvas de nivel de la función $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ se aproximan al punto $(0,0)$.

Es natural que el alumno se pregunte: *¿cómo podría ser la gráfica de una función como tal?* Y, también, es natural que no cuente con recursos para construir dicha gráfica y encontrar una respuesta. Con un programa cualquiera que permita graficar funciones en dos variables podría visualizar la gráfica, pero podría no quedar claro cómo al aproximarse las coordenadas x e y del punto al punto dado, por distintas trayectorias, la coordenada z se acerque a diferentes valores.

A continuación se propone una actividad que podría aportar a mejorar la comprensión de estas cuestiones, aprovechando las virtudes del entorno de trabajo de GeoGebra, posibilitando un trabajo desde lo gráfico, que acompañe lo algebraico, promoviendo la articulación entre registros de representación semiótica que defiende Duval (2006)[10]:

1. Graficar la función $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, ingresando esta expresión en la línea de entrada del programa.

2. En la vista gráfica 2D, trazar una recta que pase por el origen de coordenadas y que tenga una pendiente variable (para ello, se puede utilizar un deslizador)

3. Colocar sobre la recta anterior un punto A (utilizar para ello, la herramienta **"punto en objeto"**).

4. Construir un punto B de la gráfica de f, que sea la imagen del punto A. Tal punto tiene que tener las mismas coordenadas x e y que el punto A y su coordenada z debe ser el valor $f(A)$. Una manera posible de construir este nuevo punto, es ingresando en la barra de entrada la siguiente expresión: $(x(A), y(A), f(A))$.

Al mover ahora el punto A sobre la recta, se puede visualizar el comportamiento del punto B, y en particular de su coordenada z (que es la que da cuenta de los valores que toma la función). Activando el rastro del punto B es posible analizar las distintas trayectorias del punto B sobre la superficie $z = f(x,y)$ y observar que, para una recta dada, la altura (la coordenada z) es constante, pero que dicha altura depende de la pendiente de la recta sobre la que yace A (ver Figura 1.7)

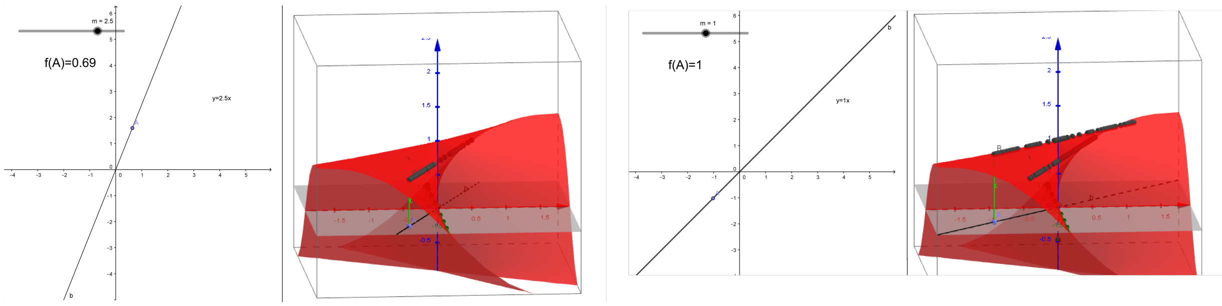

Figura 1.8: En la vista gráfica 3D, a la derecha de la imagen, se pueden observar las distintas trayectorias del punto B conforme A pertenece a diferentes rectas del plano xy (que se muestran a la izquierda en la vista 2D). En la imagen de arriba, se observa que si A se mueve a lo largo de la recta $y = 2{,}5x$, la coordenada z de B toma un valor aproximadamente igual a 0,69. En la de abajo, se agrega la trayectoria de B cuando A se mueve a lo largo de la recta $y = x$. En este caso, el valor de la coordenada z de B es 1.

La herramienta **"Rota la vista gráfica 3D"** permite con una simple manipulación del mouse observar la gráfica desde diferentes ángulos. También es posible cambiar las opciones de la vista gráfica 3D para poder apreciar esta gráfica con lentes 3D anaglifo a fin de tener una mejor sensación de profundidad.

A continuación, se pueden limpiar los rastros y reemplazar la función $f(x,y)$ por $g(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$. En este caso, al mover A en la vista gráfica 2D, el punto B parecerá "caer" hacia el origen de coordenadas de la vista 3D, para cualquier recta que elijamos (ver Figura 1.9)

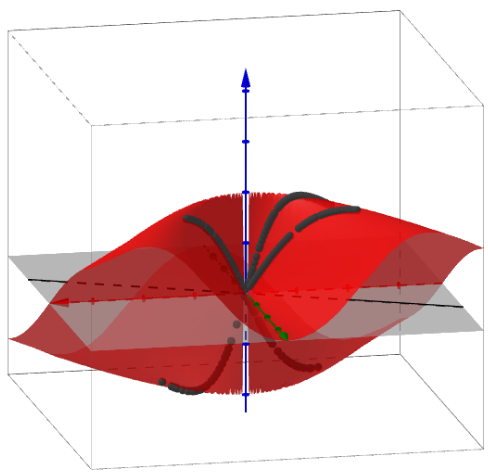

Figura 1.9: Se muestra en la vista gráfica 3D algunas trayectorias del punto B sobre la gráfica de la función conforme A recorre diferentes rectas en el plano. En este caso, para todas las rectas, la coordenada z del punto B se aproxima a 0 a medida que A se acerca al origen.

Esto es compatible con el cálculo que se puede realizar reemplazando y por mx en la expresión de la función y luego tomando límite cuando x tiende a 0. En este caso, se obtiene que independientemente de la pendiente m (es decir, aproximándose por cualquier recta que pase por el origen) el resultado del límite es cero.

1. Graficar a continuación una parábola en la vista 2D, ingresando en la línea de "Entrada" la ecuación $y = x^2$.

2. Utilizar la herramienta **"punto (des)vinculado"** para: desvincular el punto A de la recta y luego, para vincularlo a la parábola. Observar ahora la trayectoria del punto B: la coordenada z permanece constante igual a 1 a lo largo de la misma (ver Figura 1.10), y esto se corresponde con el hecho de que el límite da 1 si se lo calcula a lo largo de dicha trayectoria.

Otra alternativa posible es utilizar escenarios prediseñados para que los alumnos exploren estas cuestiones sin tener que realizar la construcción desde cero y compartir estos escenarios a través de GeoGebraTube [4]. Los dos ejemplos que se presentaron aquí, pueden encontrarse en: `http://www.geogebra.org/material/simple/id/1279013` [5].

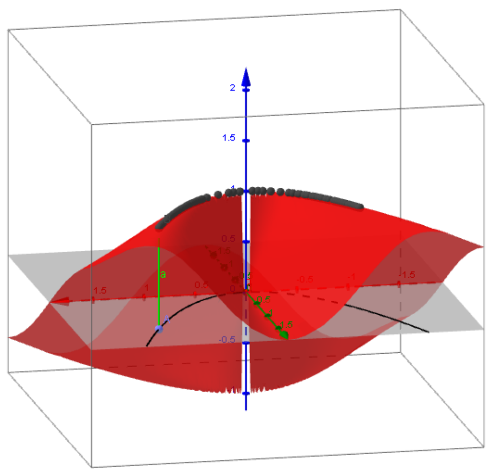

Figura 1.10: muestra en la vista gráfica 3D la trayectoria del punto B cuando A recorre la parábola de ecuación $y = x^2$. En este caso, la coordenada z de B toma el valor 1.

Conclusión

En el presente trabajo se presentaron algunos ejemplos de construcciones que son posibles en el entorno de geometría dinámica GeoGebra, que permiten aprovechar las nuevas posibilidades que brinda su recientemente incorporada vista gráfica 3D para mejorar la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial e integral.

Con la presentación de estos ejemplos no se pretende concluir que los problemas asociados a la enseñanza y el aprendizaje de estos temas será resuelta en forma definitiva, sino que simplemente se pueden incluir en las propuestas didácticas a fin de contar con un recurso más (un valioso recurso más) que puede aportar un nuevo punto de vista y lograr que cada vez más alumnos se apropien de estos conocimientos.

Por supuesto que la implementación de estas actividades abre nuevos interrogantes para la didáctica. Por ejemplo, cómo se articulan y complementan estos nuevos abordajes con los clásicos, qué nuevos obstáculos didácticos se pueden presentar debido a su implementación, qué variables didácticas es necesario atender para que estas actividades y otras similares se puedan realizar con éxito en el aula,

[4] Repositorio abierto de recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y de otras ciencias, realizados con GeoGebra. `http://tube.geogebra.org/`

[5] Enlace consultado el 14/02/2016

entre otras muchas interesantes problemáticas que de seguro surgirán con el correr del tiempo y con la puesta en práctica.

Bibliografía

[1] Götte M, Mántica AM. "Estudio de particularidades del aprendizaje de la geometría tridimensional". Revista de Educación Matemática. (2013); 28.

[2] Pulido W, Zambrano J. *Uso de Recursos Educativos Abiertos para comprender las características de las gráficas de funciones de dos variables*. En: Ramírez Montoya MS, Burgos Aguilar JV, (eds.). Recursos Educativos Abiertos en ambientes enriquecidos con tecnología Innovación en la práctica educativa. México: Tecnológico de Monterrey; 2010. p. 164-82.

[3] Andrade Molina M, Montecino Muñoz A. "La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano". XIII Conferenica Interamericana de Educación Matemática; Recife, Brasil: Comité Interamericano de Educación Matemática; (2011).

[4] Alves F. "Discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculoa Várias Variáveis". Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo. (2012);1(2):5-19.

[5] Alves F, Borges Neto H. "Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros". Educação Matemática Pesquisa. (2011);13(3):597-626.

[6] Andrade Molina M, Montecino Muñoz A. "Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución". Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (2013);26:473-9.

[7] Carrillo A. "El dinamismo de GeoGebra". Revista Unión. (2012);29:9-22.

[8] Borsani V, Cedrón M, Cicala R, Di Rico E, Duarte B Sessa, C. "La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica". Comunicación presentada en el VII CIBEM. Uruguay. (2013)

[9] Novembre A, Nicodemo M, Coll P. "Matemática y TIC : orientaciones para la enseñanza"; CABA: ANSES; 2015.

[10] Duval R. "Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación semiótica". La gaceta de la RSME. (2006);9(1):143-68.

[11] Moreno Armella L, Lupiáñez JL. Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En: Gómez P, Rico L, (eds.). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática Homenaje al profesor Mauricio Castro. 1º ed. Granada: Universidad de granada; 2001. p. 291-300.

[12] Hohenwarter M. "Multiple representations and GeoGebra-based learning environments". Union Revista Iberoamericana de Educación Matemática. (2014);39:11-8.

[13] Thomas GB. *Cálculo: varias variables.* México: Pearson Educación; 2006.