EL TEOREMA DE MÁRQUEZ: UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIO EN TORNO A UNA IDEA MATEMÁTICA ORIGINAL

CONTE, RODRIGO(1,4); ELICALDE, CECILIA(1,5); GRIMALDI, VERÓNICA(1,2,6); MARQUEZ, FRANCISCO(3,7); VILLALBA, MARÍA BELÉN(1,8)

[1] Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, UNLP
[2] Universidad Pedagógica
[3] Colegio Padre Castañeda
[4]conterodrigo@hotmail.com; [5]mcelicalde@hotmail.com; [6]verogrimaldi@gmail.com;
[7]franciscomarquez98@hotmail.com; [8] villalbambelen@gmail.com

RESUMEN

Sabida es la importancia de compartir experiencias en torno a procesos de aprendizaje. En este trabajo se muestra la conformación y funcionamiento de un grupo de estudio llevado a cabo en el marco de la cátedra Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata. Este grupo de estudio se inicia a partir del acercamiento de un joven de tercer año de la escuela secundaria a un grupo de profesores de matemática con la intención de buscar la manera de publicar un teorema que él aseguraba haber inventado. A partir del intercambio de ideas y del diálogo en torno a ellas hemos puesto en discusión diversos aspectos de la actividad matemática y de los objetos matemáticos. Esta experiencia ha resultado enriquecedora para todos los integrantes del grupo, se han ido construyendo nuevos saberes, modos de comunicación y la posibilidad de compartir conocimientos de manera cada vez más fluida.

Palabras clave: experiencia de estudio, división de polinomios, trabajo colaborativo, prácticas matemáticas.

INTRODUCCIÓN

¿Cuántas oportunidades tenemos en la vida de inventar teoremas o de conocer a quienes inventan teoremas? Nuestra respuesta a este interrogante puede parecer inesperada: siendo profesores o estudiantes de Matemática, estas oportunidades se nos presentan todo el tiempo, a cada momento. Tal vez una pregunta que nos resulta más adecuada sea: ¿cuántas oportunidades nos damos en la vida para inventar teoremas o para conocer a alguien que los ha inventado?
Este trabajo es una producción colectiva que exige una redacción en primera persona del plural. Sin embargo, la conformación de nuestro grupo está atravesada por la historia de las ideas matemáticas que nos reúnen, cuya génesis nos encuentra por separado. Esto puede justificar que a veces, a lo largo del relato de la experiencia, el "nosotros" refiera solo a una parte del grupo, y en otras ocasiones, al conjunto completo.

¿Quién es Márquez?

En el año 2013 recibimos un correo electrónico de Francisco, un joven de 15 años cursando su 3° año en la escuela secundaria, en el que solicitaba que analicemos y demos nuestra opinión acerca de un teorema que había inventado. En su mail se presentaba y a continuación nos contaba lo siguiente:
La profesora de matemática (...), que trabaja con mi mamá, me dio estos mail para que yo me contacte con ustedes y que me digan qué les parece este teorema que hice.
***El teorema de Márquez** (este es el nombre que le quise poner yo) sirve para calcular la suma de los coeficientes del cociente de una división de polinomios.*
El "ustedes" de este mail refería a un grupo de profesores de Matemática de la UNLP que trabajamos en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Durante algún tiempo nuestra interacción mantuvo la separación Francisco-profesores. Pero pronto comprendimos que las ideas matemáticas de Francisco no nos resultaban ni evidentemente verdaderas, ni evidentemente falsas; tampoco estaba claro que las estuviéramos comprendiendo acabadamente. Nos resultaba necesario romper esta división inicial, conocerlo, comprender sus modos de pensar y de actuar, construir un nosotros que nos incluya a todos. Esta necesidad nos impulsó a crear el **Grupo de Estudio del Teorema de Márquez**, integrado por Francisco Márquez, autor de la idea, y quienes recibimos la invitación a conocerla y trabajar sobre ella.

LA EXPERIENCIA

¿Qué había que estudiar?

Ante la necesidad de Francisco por validar su teorema, teníamos que comprender qué era lo que nos quería mostrar. Al enfrentarnos con el "Teorema de Márquez" nos surgieron dos tipos de dificultades: por un lado, las asociadas al enunciado y por otro, las relacionadas con las relaciones matemáticas que se ponían en juego en el teorema. Para trabajar sobre estas cuestiones comenzamos a reunirnos con Francisco.

Los problemas de comunicación:

Durante los primeros encuentros trabajamos con el enunciado del Teorema, tratando de establecer un lenguaje en común. Esta tarea no fue fácil: para Francisco, su teorema era completamente claro, pero nosotros tardamos en comprenderlo; el lenguaje que utilizaba nos resultaba bastante coloquial y los símbolos no tenían el mismo sentido para él que para nosotros.

Muchas veces nos sentimos traductores, ya que las ideas que Francisco nos presentaba venían en un formato que al principio no entendíamos. Los procedimientos para dividir polinomios que él utilizaba eran diferentes a los nuestros, por momentos pensábamos que no tenían sentido pero enseguida veíamos una lógica detrás de lo que él hacía. Sin embargo, no lográbamos comprender. Los símbolos utilizados también eran diferentes: para Francisco "x" algunas veces simbolizaba una raíz de un polinomio; para nosotros, las raíces eran siempre "α". Estas diferencias no podían ocultarse, casi constantemente surgían problemas de comunicación que aprendimos a tratar cada vez con mayor naturalidad.

Francisco no entendía nuestras sumatorias, nosotros no entendíamos sus tablas. Pero de a poco nos fuimos familiarizando con los distintos formatos, y el Grupo de Estudio se fue consolidando en torno a los intercambios de ideas y de formas, a los intentos de escritura y de sistematización matemática de las producciones. Actualmente sentimos que tenemos un grupo cada vez más consolidado; reconocemos que somos distintos: las ideas de Francisco se originan desde un paradigma[1] diferente al nuestro, pero él nos ha permitido conocer este paradigma y nosotros le permitimos conocer el nuestro; de a poco fuimos consensuando ideas, pusimos en diálogo distintas maneras de mirar a los objetos matemáticos y a la matemática. Todos adquirimos cierta habilidad para situarnos en un paradigma o en el otro según sea necesario. Así aprendimos a intercambiar opiniones, a darnos tiempo para entendernos, a hacernos preguntas que nos permitan acercarnos y trabajar sobre las ideas, y preguntas que nos permitieron avanzar.

Las cuestiones matemáticas:

Desde el comienzo Francisco estaba seguro de la validez de su teorema, lo había probado con muchos ejemplos y siempre funcionaba. Probablemente, además, el dominio de las relaciones que él estaba poniendo en acto a través de su idea lo llevaba a tener una certeza que a nosotros no se nos hacía evidente. Sin duda su producción nos parecía muy valiosa, pero el valor resultaba algo subjetivo, necesitábamos analizar su validez. Movilizados por la intención de Francisco de publicar su teorema, comenzamos a trabajar entre todos tratando de darle a su trabajo un formato más cercano a las producciones de los matemáticos. Surgió entonces la necesidad de analizar las formas que se utilizan actualmente en esta comunidad para comunicar, lo cual nos llevó a recurrir a la idea de demostración matemática: ¿Por qué no alcanza con muchos ejemplos? ¿Qué significa demostrar? También, a los conceptos de teorema, conjetura, corolario: ¿Qué diferencias hay entre unos y otros? ¿La idea de Márquez será un teorema?

Nuestro trabajo avanzó en torno a dos ejes; uno de ellos fue la formalización del Teorema y el otro, la producción de nuevas ideas matemáticas en las que aún estamos trabajando. En cada encuentro Francisco traía nuevas ideas, iban apareciendo más producciones, algunas relacionadas con el Teorema y otras con diferentes temas que le interesaban.

[1] Al utilizar el término *paradigma* nos referimos a la particular manera de mirar, interpretar y experimentar el mundo de la producción de ideas matemáticas.

Para ordenar nuestra producción relacionada con la división de polinomios hemos confeccionado un cuadro que nos organiza[2]:

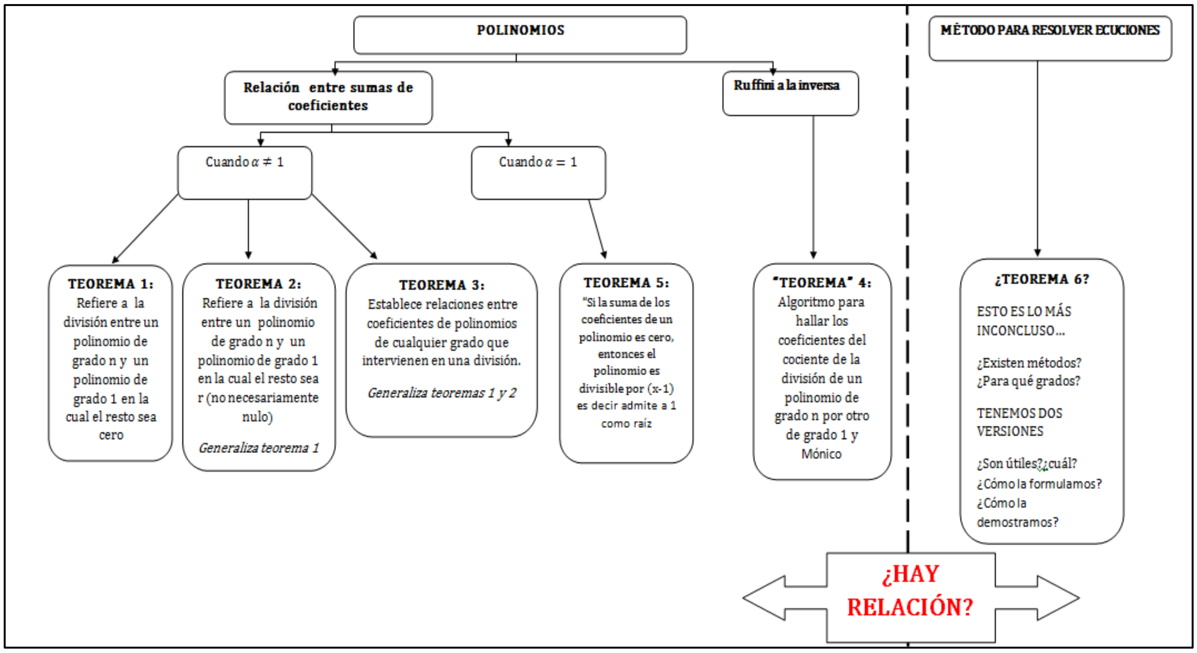

Figura 1: Esquema que muestra y ordena el trabajo matemático realizado en el Grupo hasta el momento

La producción del Grupo no es un único teorema; sin embargo este trabajo se llama "El Teorema de Márquez". Analizar cada parte de este cuadro sería muy interesante pero muy extenso. Con el objetivo de ilustrar los intercambios generados en este grupo de estudio hemos decidido centrarnos en el Teorema 2. Este teorema refiere a la división entre un polinomio de grado n y un polinomio de grado 1 en la cual el resto sea r (no necesariamente nulo). Establece relaciones entre r y las sumas de los coeficientes de los polinomios que intervienen en la división.

Teorema 2:

$Sean: P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad y\; Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ *polinomios de coeficientes reales tales que*

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r, r \in \mathbb{R}, entonces:$$

$$\frac{r - \sum_{i=0}^{n} a_i}{\alpha - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

[2] Los nombres que aparecen en el cuadro son de uso interno, y algunos reflejan el lenguaje consensuado del grupo. Así, cuando alguno menciona "Ruffini a la inversa" todo el grupo sabe a qué se hace referencia.

Figura 2: Enunciado formal del Teorema de Márquez

El teorema afirma que: "Si un polinomio de grado n se divide por un polinomio de la forma (x ± a), se cumple lo siguiente: el resto disminuido en la suma de coeficientes del dividendo, dividido por la raíz del divisor disminuido en 1, es igual a la suma de los coeficientes del cociente".

Demostración:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$$

Si dos polinomios son iguales, entonces son iguales coeficiente a coeficiente, y por lo tanto son iguales las sumas de sus coeficientes, entonces:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \, . (1 - \alpha) + r$$

$$\rightarrow \quad \frac{r - \sum_{i=0}^{n} a_i}{\alpha - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

Figura 3: Demostración del Teorema de Márquez

En las figuras 2 y 3 se muestra la formalización de las ideas de Francisco, que inicialmente estaban contenidas en los ejemplos que él inventaba. Con estos ejemplos empezamos a trabajar pues no nos parecían del todo evidentes, pero con ellos Francisco nos mostraba el teorema en funcionamiento. Al verlo ejemplificar su teorema notábamos una fuerte convicción sobre lo que hacía. Las primeras veces quedábamos sorprendidos al verlo: manejaba con gran facilidad algo que nosotros casi no podíamos entender. Las relaciones de las que hablaba no eran arbitrarias. Tuvimos que esforzarnos todos, él por comunicar sus ideas, y nosotros por comprenderlas.

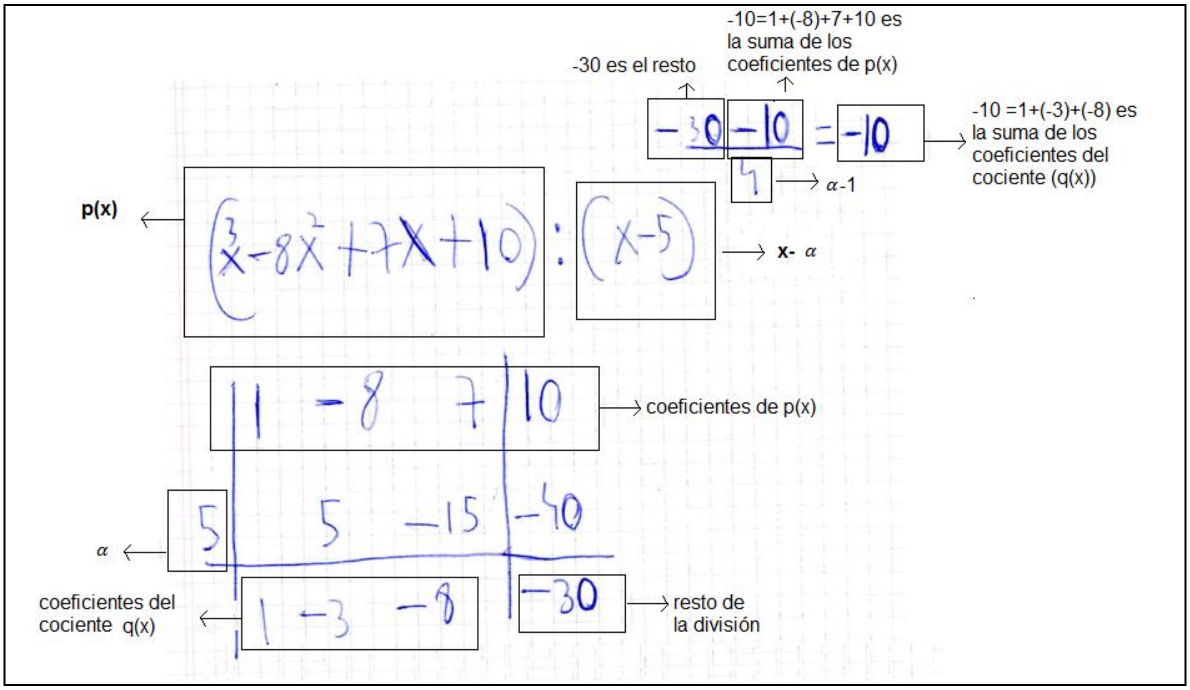

Figura 4: Ejemplo de funcionamiento del Teorema

¿Por qué el Teorema 2?

Antes de conocernos Francisco trabajaba de manera individual. Probando con ejemplos comenzó a encontrar regularidades en relación a las sumas de los coeficientes de polinomios que intervenían en una división. Las primeras relaciones fueron establecidas en casos particulares: se trataba de divisiones por polinomios de grado uno y con resto cero (estas relaciones quedaron establecidas en lo que llamamos Teorema 1). Sus primeras ideas avanzaron al considerar casos con raíces particulares: $\alpha=2$, luego $\alpha=3$, etc., y tras analizar numerosos ejemplos, Francisco fue generalizando las relaciones hasta llegar a enunciar, de un modo coloquial, el contenido del Teorema 2.

El Teorema 2 contiene las ideas con las que Francisco se acercó a nosotros. Estas ideas, que estaban contenidas en los ejemplos que él nos mostraba, tenían para él un sentido general, la relación encontrada siempre funcionaba. La generalización ya existía para Francisco, pero existía de un modo que para él era válido y suficiente y para nosotros no. En conjunto trabajamos para entender sus ejemplos, explorar sus producciones y sus ideas, formalizarlas y enmarcarlas en un conjunto de relaciones. A lo largo de este trabajo surgieron preguntas que generaron nuevas producciones. En cada encuentro se tomaban estas nuevas ideas para analizarlas, ponerlas a prueba, vincularlas con ideas anteriores e intentar formalizarlas.

REFLEXIONES

Hablar de “el Teorema” tiene para nosotros un sentido cercano a lo metafórico: no sabemos con certeza si las relaciones encontradas “deberían” llamarse teoremas, propiedades o corolarios; tampoco sabemos si son valiosas para la comunidad matemática o para alguna parte de ella. Estas cuestiones que al principio fueron motivo de discusión, no nos preocupan tanto como antes.

Comunicar el Teorema es para nosotros mostrar una parte del fruto de nuestros intercambios. Acercarse a las formalidades para que su producción sea considerada matemáticamente válida era una de las intenciones de Francisco. Sin embargo consideramos que la mayor riqueza de nuestro trabajo no radica en haber obtenido un enunciado y una demostración formal, sino en el camino que fuimos construyendo para arribar –eventualmente- a esos resultados. Este proceso de trabajo fue muy enriquecedor y todos aprendimos algo. Francisco logró acercarse a otros modos de trabajo propios de la comunidad de matemáticos, conociendo nuevas reglas, maneras de validar, de comunicar y expresar las ideas. Además, al analizar sus propias producciones pudo diferenciar entre el valor y la validez de las mismas.

Del lado de los docentes, destacamos el trabajo colaborativo que pudimos generar, en especial haber logrado un vínculo que se basa en el intercambio y no en la asimetría profesores-"alumno". Pudimos trabajar en conjunto compartiendo distintos tipos de conocimiento, donde cada uno vivenció un proceso constante de aprendizaje.

Muchos son los interrogantes que seguimos produciendo al interior del Grupo de Estudio, tanto desde el punto de vista de la producción matemática que nos convoca, como desde una perspectiva didáctica. El trabajo de construcción de nuevos conocimientos colectivos continúa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Charlot, B. (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Texto mimeografiado de la conferencia pronunciada en Cannes de 1986.

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Grimaldi, V. (2007). Aspectos humanos de una ciencia exacta. Una mirada a la historia de la Matemática en busca de pistas sobre su naturaleza. En Broitman, C. (coord.): *Enseñar Matemática en la escuela primaria y en el Nivel Inicial* . Buenos Aires: 12(ntes).

Pisano, J.P. (s/f): *Logikamente IV*. Buenos Aires: Ediciones Logikamente.

Rojo, A. (1996). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Sadovsky, P. (2010). Pensar es relacionar ideas y producir nuevas ideas. Entrevista realizada por Inés Dussel. En *Revista El Monitor*, (26) 50-53. Disponible en: http://www.me.gov.ar/monitor/nro0/pdf/monitor26.pdf Consultado el: 30/07/2015

Suteba (s/f). Sobre el trabajo colectivo, colaborativo, cooperativo. Diálogo entre Ana Espinoza, Héctor González, Delia Lerner, Patricia Sadovsky y Silvia A. Vázquez. Disponible en: http://www.suteba.org.ar/download/el-trabajo-docente-un-trabajo-colectivo-36703.pdf Consultado el: 30/07/2015